

# SP FAZ ESCOLA

## CADERNO DO PROFESSOR

**MATEMÁTICA**  
Ensino Médio

**1º SEMESTRE**





**GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO**  
Secretaria de Educação

# **SP FAZ ESCOLA**

## **CADERNO DO PROFESSOR**

### **2<sup>a</sup> E 3<sup>a</sup> SÉRIES**

**ENSINO MÉDIO**

**MATEMÁTICA**

**1º SEMESTRE**

**Governo do Estado de São Paulo**

Governador

**João Doria**

Vice-Governador

**Rodrigo Garcia**

Secretário da Educação

**Rossieli Soares da Silva**

Secretário Executivo

**Haroldo Corrêa Rocha**

Chefe de Gabinete

**Renilda Peres de Lima**

Coordenador da Coordenadoria Pedagógica

**Caetano Pansani Siqueira**

Presidente da Fundação para o Desenvolvimento da Educação

**Nourival Pantano Júnior**

# SUMÁRIO

MATEMÁTICA .....	11
------------------	----

## PREZADO PROFESSOR,

As sugestões de trabalho, apresentadas neste material, refletem a constante busca da promoção das competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo.

O tempo todo os jovens têm que interagir, observar, analisar, comparar, criar, refletir e tomar decisões. O objetivo deste material é trazer para o estudante a oportunidade de ampliar conhecimentos, desenvolver conceitos e habilidades que os auxiliarão na elaboração dos seus Projetos de Vida e na resolução de questões que envolvam posicionamento ético e cidadão.

Procuramos contemplar algumas das principais características da sociedade do conhecimento e das pressões que a contemporaneidade exerce sobre os jovens cidadãos, a fim de que as escolas possam preparar seus estudantes adequadamente.

Ao priorizar o trabalho no desenvolvimento de competências e habilidades, propõe-se uma escola como espaço de cultura e de articulação, buscando enfatizar o trabalho entre as áreas e seus respectivos componentes no compromisso de atuar de forma crítica e reflexiva na construção coletiva de um amplo espaço de aprendizagens, tendo como destaque as práticas pedagógicas.

Contamos mais uma vez com o entusiasmo e a dedicação de todos os professores para que consigamos, com sucesso, oferecer educação de qualidade a todos os jovens de nossa rede.

Bom trabalho a todos!

Coordenadoria Pedagógica – COPED  
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo

## **INTEGRANDO O DESENVOLVIMENTO SOCIOEMOCIONAL AO TRABALHO PEDAGÓGICO**

A educação integral exige um olhar amplo para a complexidade do desenvolvimento integrado dos estudantes e, também, para sua atuação na sociedade contemporânea e seus cenários complexos, multifacetados e incertos. Nesse sentido, o desenvolvimento pleno dos estudantes acontece quando os aspectos socioemocionais são trabalhados intencionalmente na escola, de modo integrado às competências cognitivas.

É importante ressaltar que a divisão semântica que se faz com o uso dos termos cognitivo e socioemocional não representa uma classificação dicotômica. É uma simplificação didática já que, na aprendizagem, essas instâncias (cognitiva e socioemocional) são simultaneamente mobilizadas, são indissociáveis e se afetam mutuamente na constituição dos sujeitos.

### **O QUE SÃO COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS?**

As competências socioemocionais são definidas como as capacidades individuais que se manifestam de modo consistente em padrões de pensamentos, sentimentos e comportamentos. Ou seja, elas se expressam no modo de sentir, pensar e agir de cada um para se relacionar consigo mesmo e com os outros, para estabelecer objetivos e persistir em alcançá-los, para tomar decisões, para abraçar novas ideias ou enfrentar situações adversas.

Durante algum tempo, acreditou-se que essas competências eram inatas e fixas, sendo a primeira infância o estágio ideal de desenvolvimento. Hoje, sabe-se que as competências socioemocionais são maleáveis e quando desenvolvidas de forma intencional no trabalho pedagógico impactam positivamente a aprendizagem.

Além do impacto na aprendizagem, diversos estudos multidisciplinares têm demonstrado que as pessoas com competências socioemocionais mais desenvolvidas apresentam experiências mais positivas e satisfatórias em diferentes setores da vida, tais como bem-estar e saúde, relacionamentos, escolaridade e no mercado de trabalho.

### **QUAIS SÃO AS COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS E COMO ELAS SE ORGANIZAM**

Ao longo de 40 anos, foram identificadas e analisadas mais de 160 competências sociais e emocionais. A partir de estudos estatísticos, chegou-se a um modelo organizativo chamado de Cinco Grandes Fatores que agrupa as características pessoais conforme as semelhanças entre si, de forma abrangente e parcimoniosa. A estrutura do modelo é composta por 5 macrocompetências e 17 competências específicas. Estudos em diferentes países e culturas encontraram essa mesma estrutura, indicando robustez e validade ao modelo.

MACRO COMPETÊNCIA	COMPETÊNCIA	DEFINIÇÃO
Abertura ao novo	Curiosidade para aprender	Capacidade de cultivar o forte desejo de aprender e de adquirir conhecimentos, ter paixão pela aprendizagem.
	Imaginação criativa	Capacidade de gerar novas maneiras de pensar e agir por meio da experimentação, aprendendo com seus erros, ou a partir de uma visão de algo que não se sabia.
	Interesse artístico	Capacidade de admirar e valorizar produções artísticas, de diferentes formatos como artes visuais, música ou literatura.
Resiliência Emocional	Autoconfiança	Capacidade de cultivar a força interior, isto é, a habilidade de se satisfazer consigo mesmo e sua vida, ter pensamentos positivos e manter expectativas otimistas.
	Tolerância ao estresse	Capacidade de gerenciar nossos sentimentos relacionados à ansiedade e estresse frente a situações difíceis e desafiadoras, e de resolver problemas com calma.
	Tolerância à frustração	Capacidade de usar estratégias efetivas para regular as próprias emoções, como raiva e irritação, mantendo a tranquilidade e serenidade.
Engajamento com os outros	Entusiasmo	Capacidade de envolver-se ativamente com a vida e com outras pessoas de uma forma positiva, ou seja, ter empolgação e paixão pelas atividades diárias e a vida.
	Assertividade	Capacidade de expressar, e defender, suas opiniões, necessidades e sentimentos, além de mobilizar as pessoas, de forma precisa.
	Iniciativa Social	Capacidade de abordar e se conectar com outras pessoas, sejam amigos ou pessoas desconhecidas, e facilidade na comunicação
Autogestão	Responsabilidade	Capacidade de gerenciar a si mesmo a fim de conseguir realizar suas tarefas, cumprir compromissos e promessas que fez, mesmo quando é difícil.
	Organização	Capacidade de organizar o tempo, as coisas e as atividades, bem como planejar esses elementos para o futuro.
	Determinação	Capacidade de estabelecer objetivos, ter ambição e motivação para trabalhar duro, e fazer mais do que apenas o mínimo esperado.
	Persistência	Capacidade de completar tarefas e terminar o que assumimos e/ou começamos, ao invés de procrastinar ou desistir quando as coisas ficam difíceis ou desconfortáveis.
	Foco	Capacidade de focar — isto é, de selecionar uma tarefa ou atividade e direcionar toda nossa atenção apenas à tarefa/atividade “selecionada”.



MACRO COMPETÊNCIA	COMPETÊNCIA	DEFINIÇÃO
Amabilidade	Empatia	Capacidade de usar nossa compreensão da realidade para entender as necessidades e sentimentos dos outros, agir com bondade e compaixão, além do investir em nossos relacionamentos prestando apoio, assistência e sendo solidário.
	Respeito	Capacidade de tratar as pessoas com consideração, lealdade e tolerância, isto é, demonstrar o devido respeito aos sentimentos, desejos, direitos, crenças ou tradições dos outros.
	Confiança	Capacidade de desenvolver perspectivas positivas sobre as pessoas, isto é, perceber que os outros geralmente têm boas intenções e, de perdoar aqueles que cometem erros.

### Você sabia?

O componente Projeto de Vida desenvolve intencionalmente as 17 competências socioemocionais ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Em 2019, foi realizada uma escuta com os professores da rede para priorizar quais competências seriam foco de desenvolvimento em cada ano/série. A partir dessa priorização, a proposta do componente foi desenhada, tendo como um dos pilares a avaliação formativa com base em um instrumento de rubricas que acompanha um plano de desenvolvimento pessoal de cada estudante.

## COMO INTEGRAR AS COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS AO TRABALHO PEDAGÓGICO

Um dos primeiros passos para integrar as competências socioemocionais ao trabalho com os conteúdos do componente curricular é garantir a intencionalidade do desenvolvimento socioemocional no processo. Evidências indicam que a melhor estratégia para o trabalho intencional das competências socioemocionais se dá por meio de um planejamento de atividades que seja SAFE<sup>1</sup> – sequencial, ativo, focado e explícito:

## SEQUENCIAL

Percurso com Situações de aprendizagem desafiadoras, de complexidade crescente e com tempo de duração adequado.

## ATIVO

As competências socioemocionais são desenvolvidas por meio de vivências concretas e não a partir de teorizações sobre elas. Para isso, o uso de metodologias ativas é importante

## FOCADO

É preciso trabalhar intencionalmente uma competência por vez durante algumas aulas. Não é possível desenvolver todas as competências socioemocionais simultaneamente.

## EXPLÍCITO

Para instaurar um vocabulário comum e um campo de sentido compartilhado com os estudantes, é preciso explicitar qual é a competência foco de desenvolvimento e seu significado.

Desenvolver intencionalmente as competências socioemocionais não se refere a “dar uma aula sobre a competência”. Apesar de ser importante conhecer e apresentar aos estudantes quais são as competências trabalhadas e discutir com eles como elas estão presentes no dia a dia, o desenvolvimento de competências socioemocionais acontece de modo experiencial e reflexivo. Portanto, ao preparar a estratégia das aulas, é importante considerar como oferecer mais oportunidades para que os estudantes mobilizem a competência em foco e aprendam sobre eles mesmos ao longo do processo.

# MATEMÁTICA

## 2ª SÉRIE – ENSINO MÉDIO 1º BIMESTRE

### ORGANIZAÇÃO DAS GRADES CURRICULARES.

Apresentamos a seguir uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais do Currículo Paulista do Ensino Médio, além de algumas orientações pedagógicas, para as três séries que compõe o referido estágio de ensino da escolaridade básica.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

Currículo Oficial – SEE-SP		Currículo Paulista
Tema/ Conteúdo	Habilidades	Competência Geral
Relações • Trigonometria	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reconhecer a periodicidade presente em alguns fenômenos naturais, associando-a às funções trigonométricas básicas.</li> <li>Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o seno e a tangente), sabendo construir seus gráficos e aplicá-las em diversos contextos.</li> <li>Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos e aplicá-las em diversos contextos.</li> <li>Saber usar de modo sistemático as funções para caracterizar relações de interdependência, reconhecendo as funções de 1º e de 2º grau, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica, com suas propriedades características.</li> </ul>	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

## OS FENÔMENOS PERIÓDICOS.

As funções são maneiras que encontramos para representar a interdependência entre grandezas, sem perder a generalidade. No Ensino Médio, o estudo de números e funções é um dos mais importantes e amplia sobremaneira, em relação as etapas anteriores. Com base nessa premissa, apresentamos os tipos de funções estudados no Ensino Médio, identificando os significados que normalmente lhes são associados.

O primeiro grupo de funções com o qual os alunos tomam contato no Ensino Médio são as funções polinomiais de 1º e 2º grau, complementadas ao fim da 3ª série do Ensino Médio, com a apresentação das funções polinomiais de grau qualquer. Há uma variedade de situações possíveis de serem modeladas com funções polinomiais de diferentes graus. É comum, no início do trabalho com funções, a proposição de situações aos alunos que exijam, por exemplo, a análise de como o preço da corrida de taxi depende da quilometragem ou da verificação de que a quantidade de calor que um corpo absorve ocorre em função do aumento de sua temperatura ou, ainda, o fato de que um corpo em queda livre aumenta cada vez mais a distância que percorre a cada segundo sucessivo.

Outro grupo de funções, analisado no Ensino Médio, é aquele que discute o crescimento exponencial de uma grandeza em função da variação de outra. Nesse grupo, incluem-se, além das funções exponenciais propriamente ditas, as funções logarítmicas. Enquanto as funções exponenciais tratam dos processos de crescimento ou decrescimento rápidos, as funções logarítmicas modelam fenômenos que crescem ou decrescem de modo mais lento. Processos de crescimento populacional e também de acumulação financeira constituem contextos fecundos para a significação de funções desse grupo, e normalmente são apresentados em diversos materiais didáticos. Além disso, os logaritmos e as exponenciais estão presentes na determinação da intensidade dos terremotos, no nível de intensidade sonora e no cálculo da capacidade de armazenagem de informação.

As funções trigonométricas, que constituem o terceiro grupo das funções estudadas no Ensino Médio, caracterizam-se por permitir a modelagem de fenômenos periódicos, isto é, fenômenos que se repetem e que mantêm as características de dependência entre as grandezas envolvidas. A existência de uma gama de fenômenos dessa natureza contrasta com a baixa frequência com que as funções trigonométricas são contextualizadas nos materiais didáticos. Na maioria das vezes, o tratamento dado aos senos, cossenos e tangentes fica única e exclusivamente restrito aos cálculos de valores para arcos notáveis e seus cômplementos, e para a relação algébrica entre estas funções, sem que a periodicidade, foco principal do estudo, seja analisada com a importância merecida.

Para concluir, reiteramos que a motivação pelo estudo das funções trigonométricas deve ser o reconhecimento de que elas são necessárias para a modelagem de fenômenos periódicos. Nesse sentido, antes da apresentação dos conceitos, os alunos precisam ser sensibilizados para a observação real, virtual ou imaginativa de uma série de manifestações naturais de caráter periódico.

Os tópicos apresentados podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem:

**Situação de Aprendizagem 1:** O reconhecimento da periodicidade, Vol.1, 2ª série do Ensino Médio, p. 12 a 22;

**Situação de Aprendizagem 2:** A periodicidade e o modelo da circunferência trigonométrica, Vol.1, 2ª série do Ensino Médio, p. 23 a 38.

**Situação de Aprendizagem 3:** Gráficos de funções periódicas envolvendo senos e cossenos, Vol. 1, 2ª série do Ensino Médio, p. 39 a 52.

**Situações de Aprendizagem 4:** Equações trigonométricas, Vol.1, 2ª série do Ensino Médio, p. 53 a 60.

Lembrando que ao final de cada situação de aprendizagem constam algumas considerações sobre a avaliação dos conhecimentos bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências e habilidades enunciadas.

Além das situações de aprendizagem, sugerimos alguns recursos audiovisuais, da plataforma Matemática Multimídia:

- Tempestades solares, disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1353> (acesso em 28/11/2018)
- A dança do sol, disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1080> (acesso em 28/11/2018)
- A roda gigante, disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1364> (acesso em 28/11/2018)



Tempestades solares



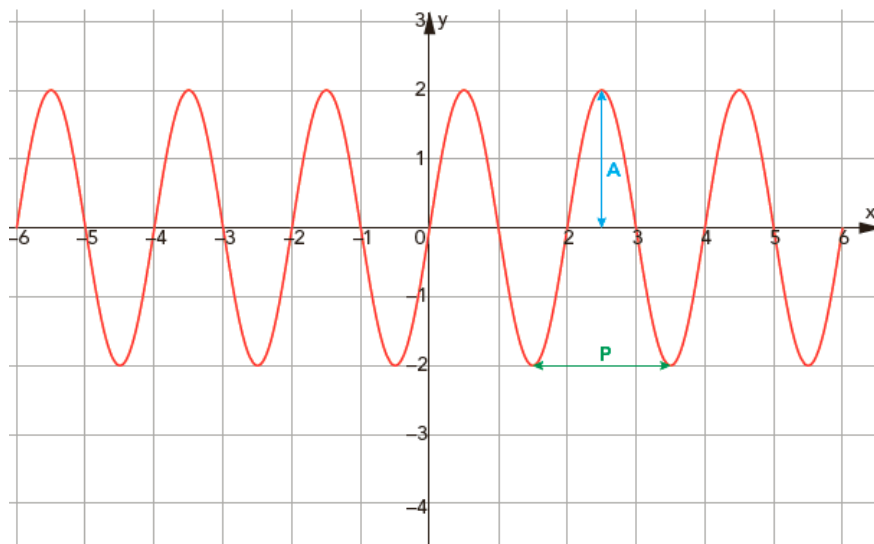
A dança do sol



A roda gigante

## ATIVIDADE 1

Observe o gráfico a seguir, em formato de onda, obtido pela observação de um fenômeno periódico.



Nesse gráfico aparecem em destaque dois conceitos importantes, associados a fenômenos periódicos: a amplitude (A) e o período (P). Período é a distância horizontal entre dois picos sucessivos da "onda", e amplitude é a metade da distância vertical entre dois picos.

Sabendo-se disto, a amplitude e o período do fenômeno periódico ilustrado no gráfico.

Resolução:

*O gráfico destaca dois conceitos importantes, associados a fenômenos periódicos: a amplitude (A) e o período (P).*

*Período é a distância horizontal entre dois picos sucessivos da "onda" e amplitude é a metade da distância vertical entre dois picos. Vamos fazer os cálculos para identificar cada um deles.*

Amplitude:

$$(A) = \frac{2 - (-2)}{2} = 2$$

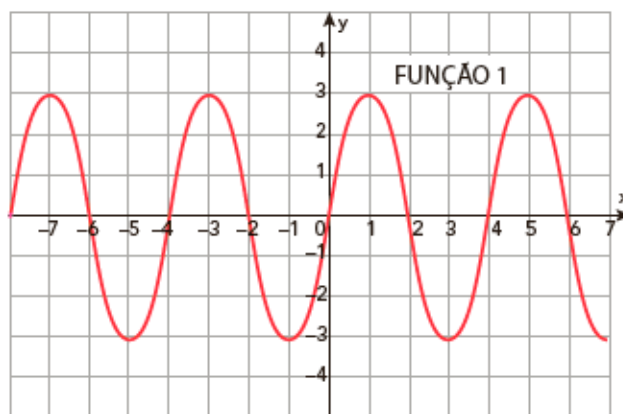
Período:

$$(P) = 3,5 - 1,5 = 2$$

*Professor, para contextualizar esse movimento periódico, alguns exemplos podem ser apresentados aos alunos, tais como os ponteiros do relógio, o movimento de rotação da Terra ao redor do próprio eixo entre outros.*

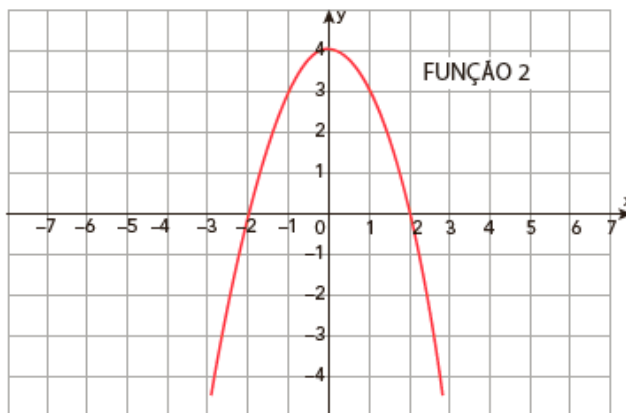
## ATIVIDADE 2

Imagem de uma função é o conjunto dos valores que a função assume, ou, em outras palavras, é o conjunto dos valores de y correspondentes aos valores de x. Observe a imagem de cada uma das seguintes funções representadas em seus gráficos.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Imagem (Função 1) = \_\_\_\_\_



Fonte: Elaborada pelos autores

Imagem (Função 2) = \_\_\_\_\_

Resolução:

*Professor, para resolver esta atividade é importante enfatizar os conceitos de Domínio, Contradomínio e imagem para que os alunos identifiquem cada elemento no gráfico apresentado.*

*O conjunto imagem de uma função é  $f: x \rightarrow y$  e o conjunto de todos os elementos de  $Y$  que são imagem de um elemento de  $X$ . Notação:*

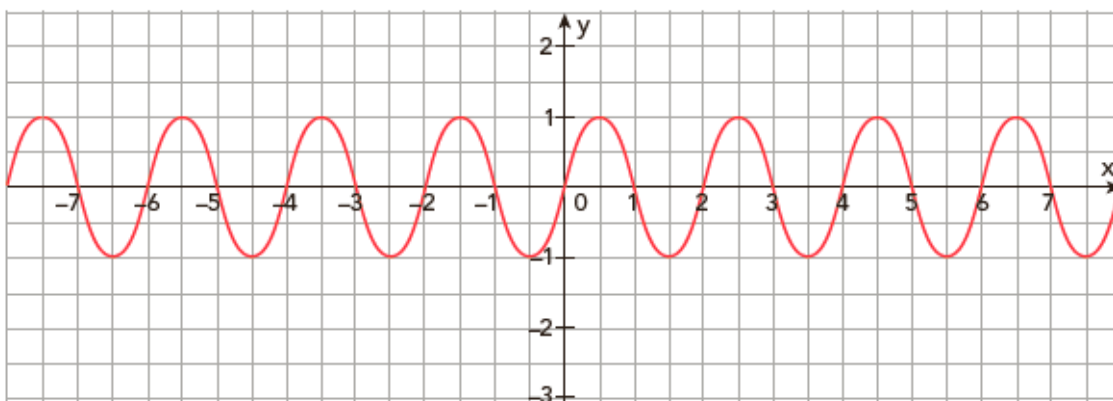
Vamos identificar a imagem das funções apresentadas:

Função 1:  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 3\}$

Função 2:  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$

Escreva o período, a imagem e a amplitude das funções representadas pelos gráficos seguintes:

a.

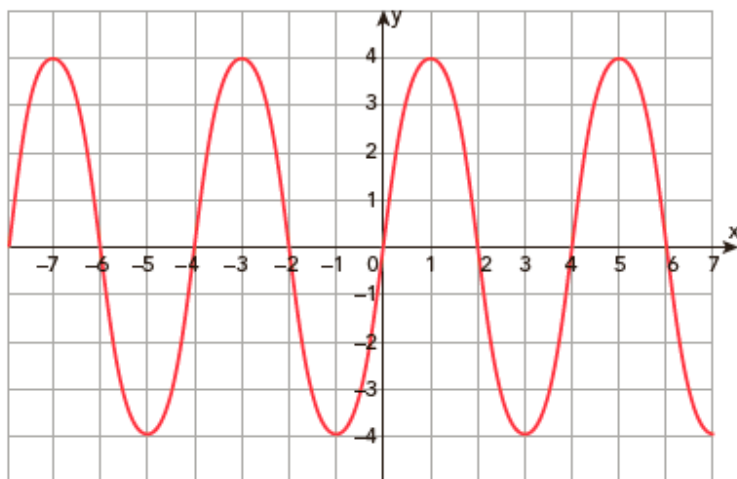


$$(P) = 3,5 - 1,5 = 2$$

$$(A) = \frac{1 - (-1)}{2} = 1$$

$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\} \text{ ou } [-1, 1]$$

b.



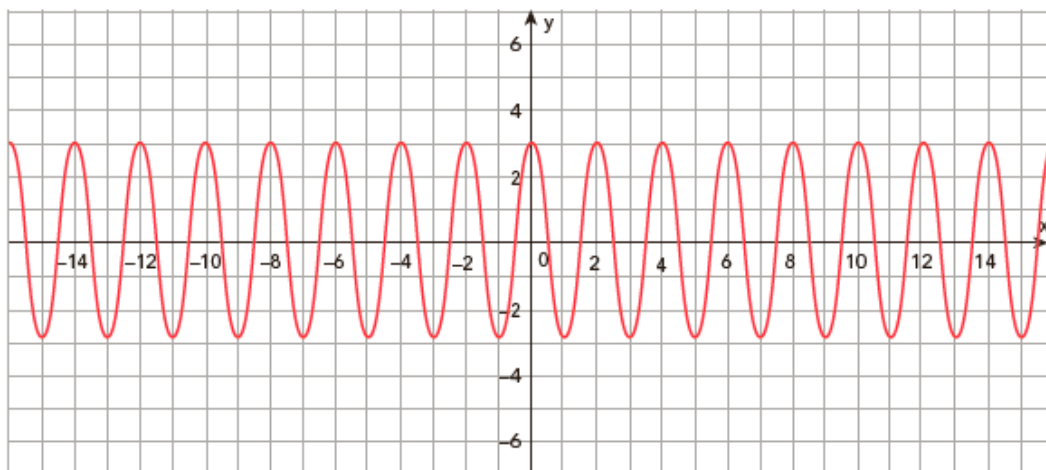
Fonte: Elaborada pelos autores

$$(P) = 7 - 3 = 4$$

$$(A) = \frac{4 - (-4)}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{Im}(f) = y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 4 \text{ ou } [-4, 4]$$

c.



Fonte: Elaborada pelos autores

$$(P) = 3 - 1 = 2$$

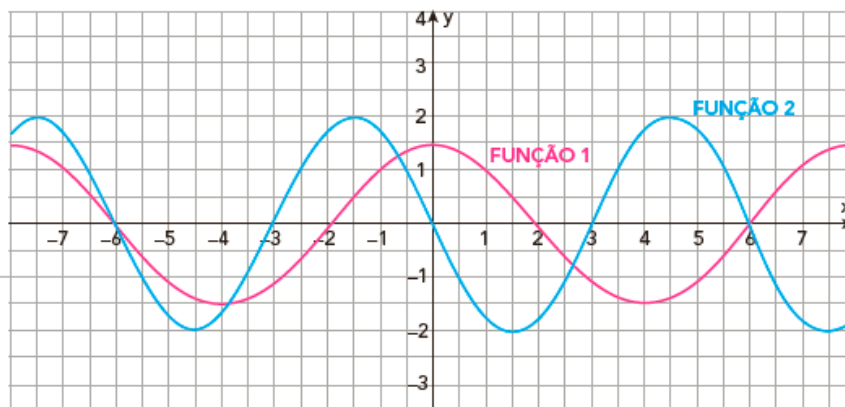
$$(A) = \frac{3 - (-3)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{Im}(f) = y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 3 \text{ ou } [-3, 3]$$



### ATIVIDADE 3

Com base nas duas funções periódicas representadas a seguir, responda:



Fonte: Elaborada pelos autores

Resolução:

Função 1:

$$(A) = \frac{1,5 - (-1,5)}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$(P) = 4 - (-4) = 8$$

Função 2

$$(A) = \frac{2 - (-2)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$(P) = 1,5 - (-4,5) = 6$$

a. qual função tem o maior valor de período?

A função 1 (P=8)

b. qual função tem o maior valor de amplitude?

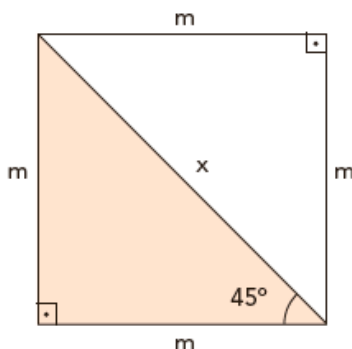
A função 2 (A=2)

## TEMA 2 – A PERIODICIDADE E O MODELO DA CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Antes de iniciarmos o conteúdo desta seção, será importante retomar os valores do seno e do cosseno de alguns ângulos chamados ângulos notáveis. São eles:  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ .

- Para cada item a seguir, calcule o valor de  $x$  em função de  $m$  (sugestão: utilize o Teorema de Pitágoras).
- Em seguida, utilizando os valores encontrados, calcule seno e cosseno dos ângulos notáveis.

a. Ângulo de  $45^\circ$



Fonte: Elaborada pelos autores

Primeiramente vamos encontrar o valor de  $x$  no quadrado de lado  $m$  a seguir utilizando o Teorema de Pitágoras.

$$x^2 = m^2 + m^2$$

$$x^2 = 2m^2$$

$$x = x = \sqrt{2m^2}$$

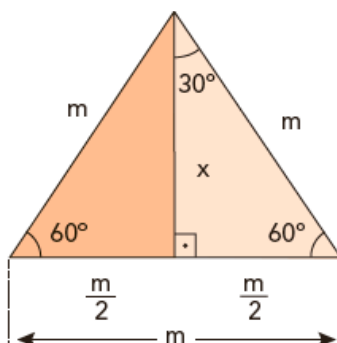
$$x = x = m\sqrt{2}$$

Agora aplicando as razões trigonométricas de seno e cosseno podemos identificar os valores de  $(30^\circ, 45^\circ$  e  $60^\circ)$  e associá-los ao ciclo trigonométrico.

$$\text{sen}45^\circ = \frac{m}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos}45^\circ = \frac{m}{m\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b. Ângulo de  $60^\circ$



Fonte: Elaborada pelos autores

Encontraremos primeiro o valor de  $x$  que representa a altura do triângulo, para isso utilizaremos o teorema de Pitágoras.

$$m^2 = x^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$m^2 = x^2 + \frac{m^2}{4}$$

$$x^2 = m^2 - \frac{m^2}{4}$$

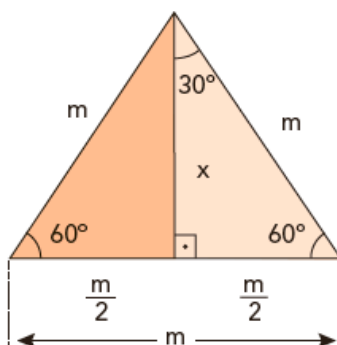
$$x^2 = \frac{3m^2}{4}$$

$$x = \frac{m\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\frac{m\sqrt{3}}{2}}{m} = \frac{m\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{\frac{m}{2}}{m} = \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$$

c. Ângulo de 30°



Fonte: Elaborada pelos autores

Encontraremos primeiro o valor de  $x$  que representa a altura do triângulo, para isso utilizaremos o teorema de Pitágoras.

$$m^2 = x^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$m^2 = x^2 + \frac{m^2}{4}$$

$$x^2 = m^2 - \frac{m^2}{4}$$

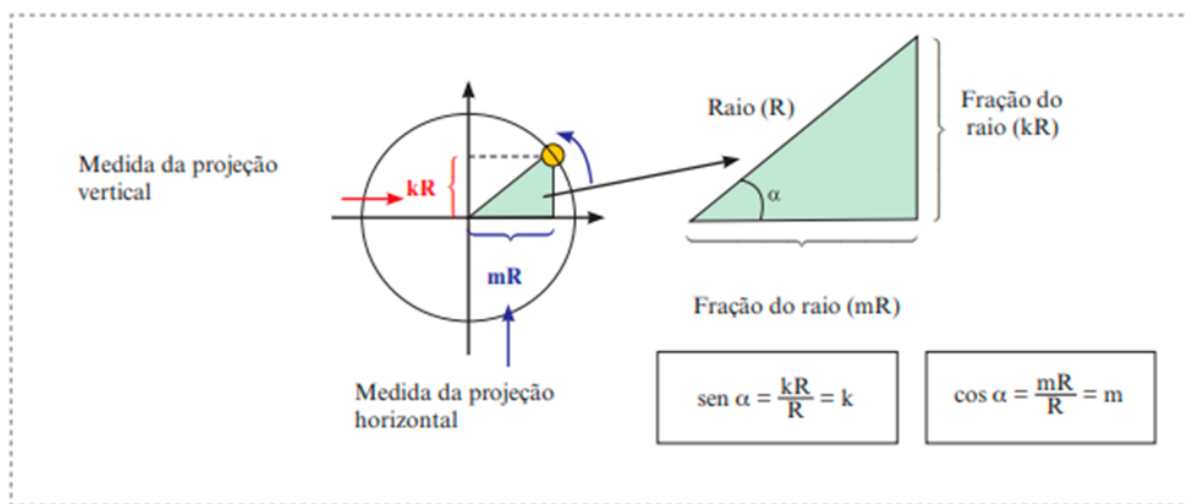
$$x^2 = \frac{3m^2}{4}$$

$$x = \frac{m\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}30^\circ = \frac{\frac{m}{2}}{m} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos}30^\circ = \frac{\frac{x}{m}}{\frac{m\sqrt{3}}{m}} = \frac{\frac{m\sqrt{3}}{2m}}{\frac{m\sqrt{3}}{m}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Professor, este é o momento de fazer a associação dos valores encontrados no ciclo trigonométrico. Observe como as razões trigonométricas seno e cosseno podem ser associadas ao ângulo de giro de um ponto sobre a circunferência.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para validar essas aprendizagens o professor pode pedir que os alunos desenhem uma circunferência trigonométrica, para que os valores de senos e cossenos dos ângulos notáveis e também dos ângulos que dividem os quadrantes sejam associados aos valores aproximados, utilizados anteriormente. Toda essa etapa pode ser proposta na atividade 01 do tema 2.

Para saber mais

Acesse os link :

[http://www.ufrgs.br/espamat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3\\_recursos/geogebra/circulo\\_trigo.html](http://www.ufrgs.br/espamat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_recursos/geogebra/circulo_trigo.html)



Movimente o ponto **P** sobre o Círculo Trigonométrico. Selecione as opções Seno, Cosseno ou Tangente e observe!

<https://www.geogebra.org/classic/fheda5zm>

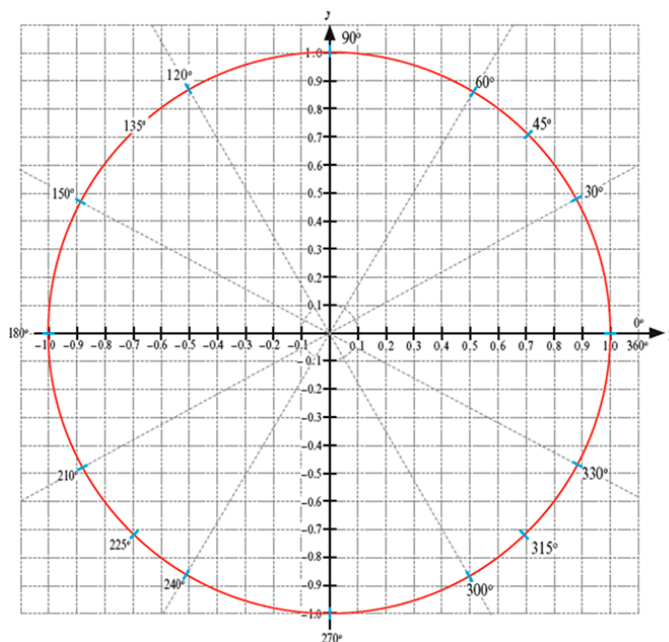
Movimente o ponto do controle deslizante e observe os valores do seno, cosseno e tangente do ângulo  $\alpha$ .

## ATIVIDADE 1

Em uma malha quadriculada, desenhe uma circunferência trigonométrica de raio 10 unidades e, em seguida, faça o que se pede.

- adotando a escala 1:10 unidades, divida os eixos cartesianos em subunidades, como, por exemplo, de 0,1 em 0,1.
- assinale sobre a circunferência a extremidade final dos arcos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ , bem como os simétricos em relação aos eixos nos demais quadrantes. Para essa tarefa, utilize compasso ou transferidor.

*Esta atividade propõe nos itens a) e b) ao aluno para desenhar um círculo de raio 10 e marcar os valores correspondentes de seno e cosseno dos ângulos notáveis bem como seus simétricos utilizando a escala 1:10. O aluno poderá utilizar o compasso para melhor precisão dos arcos.*



Fonte: Elaborada pelos autores

- Complete a tabela a seguir, relacionando todos os arcos assinalados às medidas de seus senos e cossenos, lembrando que  $\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,7$  e que  $\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,87$

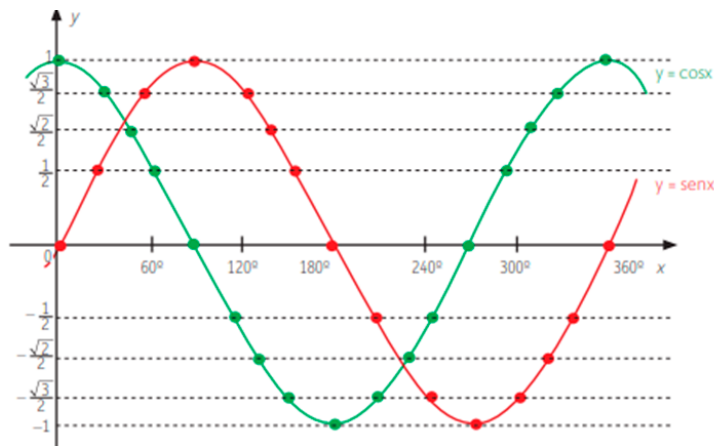
Ângulo (°)	0	30	45	60	90	120	135	150	180
<b>Seno</b>	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0
<b>Cosseno</b>	1	0,9	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1

Fonte: Elaborada pelos autores

Professor, para complementar a atividade você poderá propor que os alunos continuem a tabela com os demais ângulos simétricos até  $360^\circ$ .

- d. A seguir desenhe os gráficos das funções  $y = \text{sen}x$  e de  $y = \text{cos}x$  em um mesmo sistema de eixos cartesianos. (Atenção à escala do eixo horizontal!)

Chamamos a atenção do professor para que a tabela deste exercício seja completada com os valores exatos dos senos e cossenos dos ângulos notáveis, em vez de aproximações, já utilizadas no momento de completar a tabela do item c) anterior. No entanto, será importante que os alunos associem os valores exatos a suas devidas aproximações no momento de assinalarem os senos e cossenos na circunferência trigonométrica que construirão.



Fonte: Elaborada pelos autores

## ATIVIDADE 2

Complete:

- $\text{sen } 135^\circ =$  \_\_\_\_\_
- $\text{cos } 90^\circ =$  \_\_\_\_\_
- $\text{sen } 180^\circ =$  \_\_\_\_\_
- $\text{sen } 120^\circ =$  \_\_\_\_\_
- $\text{sen } 300^\circ =$  \_\_\_\_\_
- $\text{cos } 210^\circ =$  \_\_\_\_\_

Resolução:

- $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 0
- 0
- $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

## ATIVIDADE 3

*Professor utilize o ciclo trigonométrico para justificar as afirmações da atividade 3. A visualização é muito importante para que o aluno identifique os sinais e valores de seno e cosseno nos quadrantes*

É verdade que:

- o seno de  $100^\circ$  é negativo?
- o cosseno de  $350^\circ$  é positivo?
- o seno de  $75^\circ$  é maior do que o seno de  $60^\circ$ ?
- o cosseno de  $125^\circ$  é maior do que o cosseno de  $100^\circ$ ?

Resolução:

- Não, o seno de  $100^\circ$  é positivo pois está no segundo quadrante.
- Sim, o cosseno no quarto quadrante é positivo.
- Sim, o seno de  $75^\circ$  é aproximadamente 0,97 enquanto o seno de  $60^\circ$  é aproximadamente 0,87.
- Não, pois cosseno de  $125^\circ$  é aproximadamente -0,57 e o cosseno de  $100^\circ$  é aproximadamente -0,17.

*Ressaltamos mais uma vez o fato de que não se trata ainda de aprofundar o estudo dos gráficos das funções trigonométricas, aspecto esse que será explorado nas próximas atividades, quando os alunos tiverem contato com a identificação de arcos congruentes, quando já souberem calcular a menor determinação positiva de qualquer ângulo de medida maior do que  $360^\circ$ , quando conseguirem determinar a solução de algumas equações trigonométricas simples e, por fim, trabalharem com facilidade com medidas de ângulos expressas não apenas em graus, mas também em radianos. Destacamos que, nesta primeira etapa, os arcos foram medidos em graus e não em radianos. Isso é aconselhável pelo fato do grau ser a unidade de medida de arco familiar aos alunos nesse momento, uma vez que convivem com a ideia de ângulo de giro desde o 8º ano do Ensino Fundamental. No entanto, completada a primeira etapa, é aconselhável apresentar aos alunos a unidade radiano, bem como a relação de conversão entre as unidades de medida nesse caso. Para tanto, será necessário retomar alguns conceitos e apresentar outros, de maneira similar ao que se segue.*

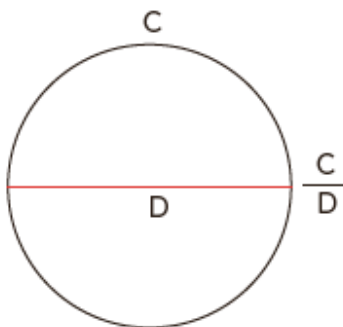
## ATIVIDADE 4

### O RADIANO

*Um arco de circunferência pode ser medido em graus e também em radiano (rad). Para apresentar os radianos a seus alunos, propomos que o professor retome com eles o conteúdo, que, em princípio, deve fazer parte dos prévios conhecimentos deles:*

Com base na figura, responda:

- Em uma circunferência, qual é a razão entre o comprimento e o diâmetro?



Fonte: Elaborada pelos autores

Resolução:

$$\frac{\text{comprimento}}{\text{diâmetro}} = \frac{C}{D} = 3,14159\dots = \pi$$

b. em uma circunferência, qual é a razão entre o comprimento e o raio

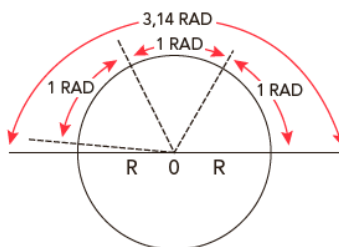
$$\frac{\text{comprimento}}{\text{raio}} = \frac{C}{r} = 2\pi = 6,28318\dots$$

*A retomada dos elementos da circunferência é fundamental neste momento: Diâmetro, raio e comprimento. A razão entre as medidas do comprimento e do diâmetro de qualquer circunferência resulta sempre no mesmo valor: o número irracional  $\pi = 3,14$ .*

## ATIVIDADE 5

**“Um radiano é a medida de um arco de comprimento igual ao do raio da circunferência.”**

Observe a imagem a seguir e responda às questões:



Fonte: Elaborada pelos autores

a. meia circunferência equivale a, aproximadamente, quantos radianos?

Observando o desenho, meia circunferência equivale a, aproximadamente, 3,14 rad.

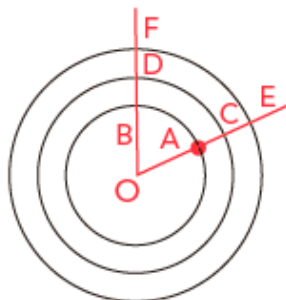
b. quantos radianos mede um arco de semicircunferência?

Uma semicircunferência é equivalente a meia circunferência, como verificamos no item (a). A medida de meia circunferência equivale a, aproximadamente, 3,14 rad.



## ATIVIDADE 6

O arco  $AB$  representado na figura a seguir mede  $1,5$  rad, e as três circunferências têm centro no ponto  $O$ .



Fonte: Elaborada pelos autores

Quanto mede, em radianos, o arco:

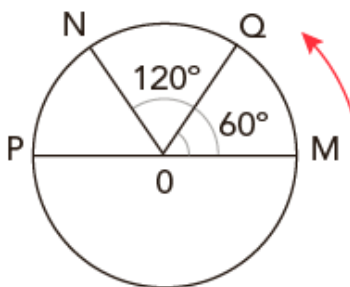
- CD?
- EF?

**Resolução:**

Os arcos assinalados nas circunferências têm, em radianos, medidas iguais, visto que estão delimitadas por um único ângulo central. Assim, os arcos  $CD$  e  $EF$  medem, cada um,  $1,5$  radiano.

## ATIVIDADE 7

Os arcos assinalados nas circunferências têm, em radianos, medidas iguais, visto que estão delimitadas por um único ângulo central. Assim, os arcos  $CD$  e  $EF$  medem, cada um,  $1,5$  radiano.



Fonte: Elaborada pelos autores

Quanto mede, em radianos e no sentido indicado, o arco:

a. MP?

O arco MP mede aproximadamente 3,14 radianos, ou, precisamente,  $\pi$  radianos

b. MQ?

O arco MQ é delimitado pelo ângulo central de  $60^\circ$ , que corresponde à terça parte de  $180^\circ$ . Assim, o arco MQ mede a terça parte de  $\pi$ , ou  $\frac{\pi}{3}$  radianos.

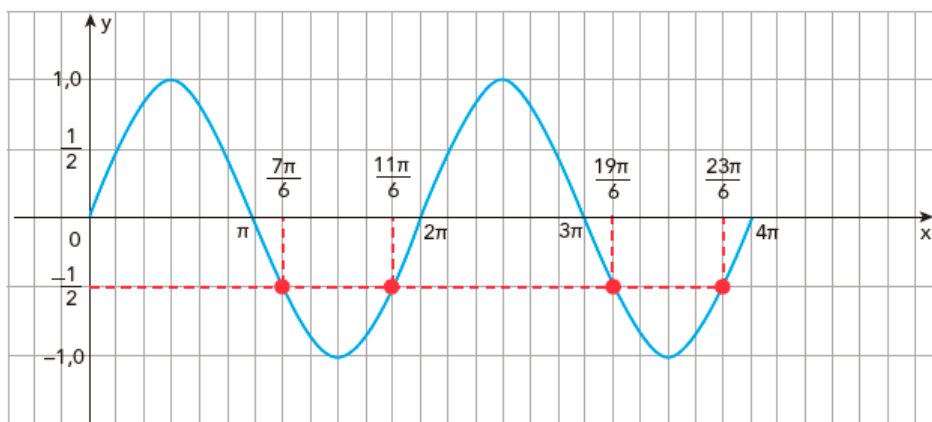
c. MN?

O arco MN é delimitado pelo ângulo central de  $120^\circ$ , que é igual ao dobro de  $60^\circ$ . Portanto, o arco MN mede  $\frac{2\pi}{3}$  radianos

Ao completar as atividades do tema 2 (atividades 1 a 7), após a apresentação dos senos e cossenos dos arcos notáveis e de seus correspondentes nos demais quadrantes, o professor pode pedir que seus alunos resolvam algumas equações trigonométricas do tipo  $\text{sen}x = k$  ou  $\text{cos}x = m$ , definidas em  $\mathbb{R}$  e também em intervalos definidos, como, por exemplo,  $[0, 2\pi]$ ,  $[0, 4\pi]$ ,  $[2\pi, 6\pi]$ , etc. Para não ressaltar apenas o aspecto algébrico envolvido na resolução de equações dessa natureza, o professor pode pedir que os alunos também as resolvam graficamente, como, por exemplo, na atividade 8 a seguir:

## ATIVIDADE 8

Observe o gráfico da função  $y = \text{sen}x$ , desenhado no intervalo  $[0, 4\pi]$ . Neste gráfico estão assinalados quatro valores de  $x$ , que são soluções da equação  $\text{sen}x = -\frac{1}{2}$  no intervalo considerado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quais seriam as outras soluções dessa equação no caso dos intervalos a seguir:

*Primeiramente vamos considerar alguns pontos do enunciado que devem ser considerados ao fazer a leitura.*

- *Mostrar aos alunos que a curva da função seno se inicia no  $x = 0$  e termina em  $x = 4\pi$ , o que justifica o intervalo  $[0, 4\pi]$*
- *Conceitos de amplitude e período podem ser retomados;*

- Associar os valores da função seno com o ciclo trigonométrico;
- Os alunos devem identificar os valores do intervalo  $[0, 4\pi]$  que tem como imagem  $-\frac{1}{2}$  e a partir daí responder os itens **a)** e **b)**.

a.  $[0, 6\pi]$

$$\frac{19\pi}{6} + 2\pi = \frac{31\pi}{6}$$

$$\frac{23\pi}{6} + 2\pi = \frac{35\pi}{6}$$

b.  $[0, 8\pi]$

$$\frac{31\pi}{6} + 2\pi = \frac{43\pi}{6}$$

$$\frac{35\pi}{6} + 2\pi = \frac{47\pi}{6}$$

## ATIVIDADE 8

Consultando o gráfico da atividade anterior, encontre a solução de cada equação no intervalo  $[0, 4\pi]$ :

a.  $\text{sen}x = 1$

$$\frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{5\pi}{2}$$

b.  $\text{sen}x = \frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \text{ e } \frac{17\pi}{6}$$

c.  $\text{sen}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \text{ e } \frac{8\pi}{3}$$

Apesar de não propormos nas atividades do tema 2 que os alunos sejam apresentados a arcos com extremidades finais negativas, produzidos com base de giros no sentido horário na circunferência trigonométrica, julgamos importante que eles saibam da existência desses tipos de arcos e que, ao menos, desenhem uma circunferência e nela assinalem os arcos com extremidade final na primeira volta negativa.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS PARA A AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM DO TEMA 2

O modelo da circunferência trigonométrica precisa ser compreendido para que o estudo de conceitos relacionados a ela possa ser realizado com qualidade. Ao fim desta Sequência de Atividades, é importante que o professor avalie se os alunos são capazes de:

- identificar a posição da extremidade final de um arco medido em graus;
- identificar a posição da extremidade final de um arco medido em graus;
- converter para radianos uma medida de arco expressa em graus;
- obter a menor determinação positiva de um arco qualquer;
- reconhecer as diferenças e as semelhanças entre os gráficos das funções  $y = \text{sen } x$  e  $y = \text{cos } x$ ;
- resolver equações trigonométricas simples.

As diversas propostas de atividades apresentadas neste Caderno podem servir de exemplo para a elaboração de questões a fim de avaliar os alunos. Nesse sentido, destacamos a importância de o professor priorizar questões de caráter conceitual, em detrimento daquelas que exigem passagens algébricas ou formalizações além do necessário. De qualquer maneira, será importante que todos os itens de conteúdo listados anteriormente sejam contemplados de alguma forma nas avaliações do período, sejam elas individuais ou em grupos, com consulta ou não etc. Finalizada essa etapa de apresentação do modelo da circunferência trigonométrica e da construção dos gráficos das funções seno e cosseno, o passo a seguir, que será discutido no Tema 3, envolve a mobilização de todos esses conteúdos na representação da periodicidade de um fenômeno por meio de um gráfico cartesiano.

## TEMA 3 – GRÁFICOS DE FUNÇÕES PERIÓDICAS ENVOLVENDO SENOS E COSSENOS

### ROTEIRO DE APLICAÇÃO

Fenômenos periódicos ocorrem regularmente mantendo suas características básicas, isto é, se repetem sempre da mesma maneira. Há uma enorme gama de fenômenos dessa natureza, e alguns deles serão analisados nas atividades do tema 4, que, assim como esta, tem como objetivo o estudo das funções matemáticas que modelam a periodicidade. Um processo completo de modelagem de determinado fenômeno envolve a observação da ocorrência deste, a tomada de dados, que normalmente exige a representação cartesiana dos dados obtidos, e, finalmente, exige a obtenção de uma sentença matemática que se ajusta aos dados experimentais. Por consequência, a sentença obtida poderá ser aplicada a novas situações, que venham a ocorrer em condições semelhantes às observadas durante o experimento realizado.

Vários fenômenos periódicos podem ser modelados por intermédio de uma função trigonométrica cuja representação algébrica é composta de senos e/ou cossenos. Para que seja possível aos alunos compreender em profundidade o significado da modelação de um fenômeno por meio de uma sentença que envolva senos ou cossenos, é necessário que saibam, de um lado, desenhar gráficos de funções desse tipo com base em suas representações algébricas, e, de outro, que consigam escrever a sentença de um gráfico. Com esse objetivo, propomos, nesta sequência de atividades, que os alunos construam os gráficos e reconheçam as propriedades de

funções do tipo  $y = C + A \sin Bx$  e  $y = C + A \cos Bx$ , comparando-as com as funções elementares  $y = \sin x$  e  $y = \cos x$ , com que já tiveram contato anterior.

Nesse percurso, poderão avaliar as transformações que as constantes  $A$ ,  $B$  e  $C$  impõem aos gráficos das funções elementares. Para compreender a importância do estudo que ora propomos, podemos analisar o processo que normalmente desenvolvemos ao apresentar as funções de 2º grau para nossos alunos.

O gráfico cartesiano que tem formato de uma parábola com o eixo de simetria na vertical, como sabemos, é a representação de uma função do tipo  $y = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ . Ao observarmos uma sentença desse tipo, com coeficientes numéricos, identificamos se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo, e somos capazes de avaliar se a parábola tem ou não raízes reais, e prevemos a posição do vértice da parábola. A partir daí, conseguimos não apenas desenhar o gráfico da função, como também analisar todas suas propriedades (simetrias, imagem, domínio, sinal, etc.). Assim como fazemos com as parábolas, identificando e significando os coeficientes da representação algébrica da função e representando-a cartesianamente, também devemos ser capazes de fazer com os demais grupos de funções que estudamos no Ensino Médio, ou seja, relacionar a variação de seus coeficientes com as mudanças gráficas correspondentes.

Com as funções trigonométricas não poderia ser diferente, dada a enorme quantidade de situações contextualizadas em que se detecta sua presença. Discutiremos, nesta sequência de atividades do tema 3, apenas os gráficos das funções seno ou cosseno, deixando para segundo plano os gráficos das demais funções (tangente, cotangente, secante e cossecante). Acreditamos que o professor, decerto, vai avaliar a pertinência de apresentar a seus alunos também os demais gráficos, dependendo das condições de sua turma e do tempo disponível. A Sequência de Atividades será desenvolvida sobre três percursos, que o professor poderá trilhar total ou parcialmente, a seu critério

- No primeiro percurso, propomos a construção dos gráficos por meio de uma tabela de valores especialmente escolhidos;
- No segundo percurso, sugerimos que o professor utilize um software de construção de gráficos para auxiliar a compreensão dos alunos e imprimir maior velocidade às conclusões.;
- No terceiro percurso, sugerimos que o professor discuta com os alunos sobre gráficos trigonométricos em que o seno e o cosseno variam em função do tempo, isto é, gráficos expressos por sentenças do tipo  $y = C + A \cdot \sin B \cdot t$ , com  $t$  escrito em segundos, ou em minutos, ou em horas etc.
- Construção do gráfico a partir de tabela de valores para motivar os alunos a se envolverem com a construção e análise de gráficos trigonométricos o professor pode discutir o fato de que o modelo ondulatório está presente na explicação de uma série de fenômenos próximos ao dia a dia dos alunos, como, por exemplo, as transmissões radiofônicas ou televisivas.

Para tanto, o professor pode comentar que a frequência de transmissão de rádios em FM é da ordem de megahertz, isto é, ondas que passam por um ponto “carregando” cerca de 1 milhão de períodos (ou comprimentos de onda) por segundo. De outra forma, as estações AM transmitem na faixa dos quilohertz, isto é, uma onda de rádio dessa faixa “carrega” cerca de

mil períodos (ou comprimentos de onda) por segundo. Essas variações de período e de frequência são visíveis no desenho da onda e também na escrita de sua equação, e isso será feito por meio da construção dos gráficos, que ora iniciamos. Comentaremos alguns exemplos de gráficos construídos a partir de tabela de valores, introduzindo valores de uma constante a cada vez. O professor pode utilizar-se desses mesmos exemplos ou recorrer a outros que julgar mais apropriados ao desenvolvimento de suas turmas. Todavia, sugerimos que, em qualquer caso, os alunos possam, inicialmente, utilizar papel quadriculado para desenhar os gráficos das tabelas que elaborarem.

### CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO A PARTIR DA TABELA DE VALORES

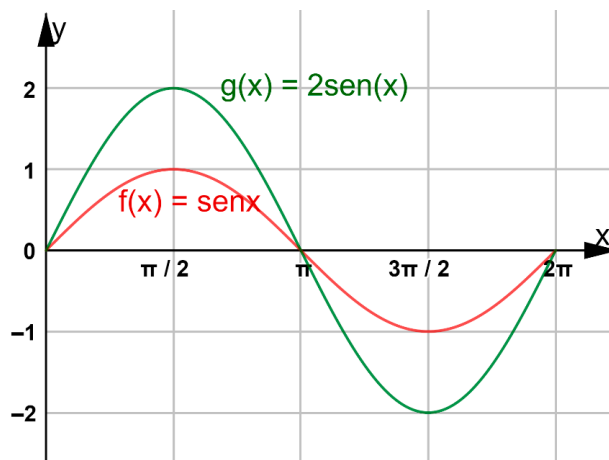
A elaboração da tabela para a construção do gráfico levará em conta os valores que marcam a divisão entre os quadrantes da circunferência trigonométrica, isto é  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ .

Para começar a construir em um mesmo sistema de eixos cartesianos os gráficos de  $y = \text{sen}x$  e de  $y = 2\text{sen}x$ , você pode elaborar a seguinte tabela de valores:

x	y = senx	y = 2senx
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2
$\pi$	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
$2\pi$	0	0

Fonte: Elaborada pelos autores

Os dados tabelados permitem que seja desenhado o seguinte gráfico:



Fonte: Elaborada pelos autores.

## ATIVIDADE 1

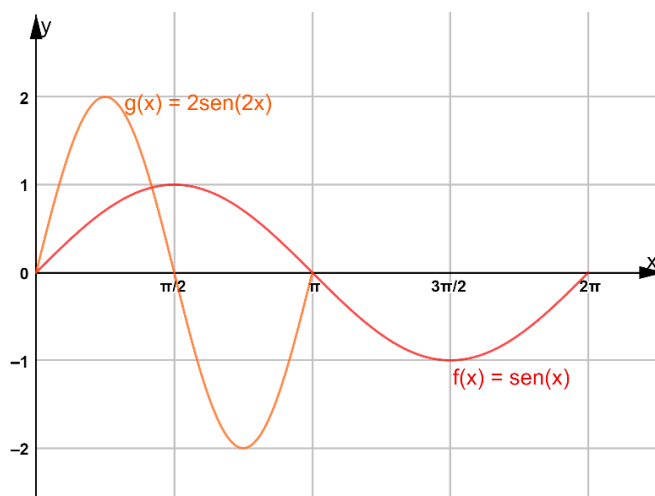
a. complete a tabela a seguir:

$2x$	$x$	$y = \text{sen}2x$	$y = \text{Sen}2x$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1	2
$\pi$		0	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1	-2
$2\pi$	$\pi$	0	0

Fonte: Elaborada pelos autores

Perceba que a primeira coluna da tabela, a cima, contém os valores divisórios dos quadrantes, que são adotados para facilitar a construção. Para demonstrar melhor a importância do fator 2, introduzido na sentença algébrica, desenhamos os gráficos de  $y = \text{sen}x$  e de  $y = 2\text{sen}2x$  em um único sistema de eixos cartesianos, conforme representado no item b:

b. esboce o gráfico, no plano cartesiano a seguir com os dados apresentados na tabela.



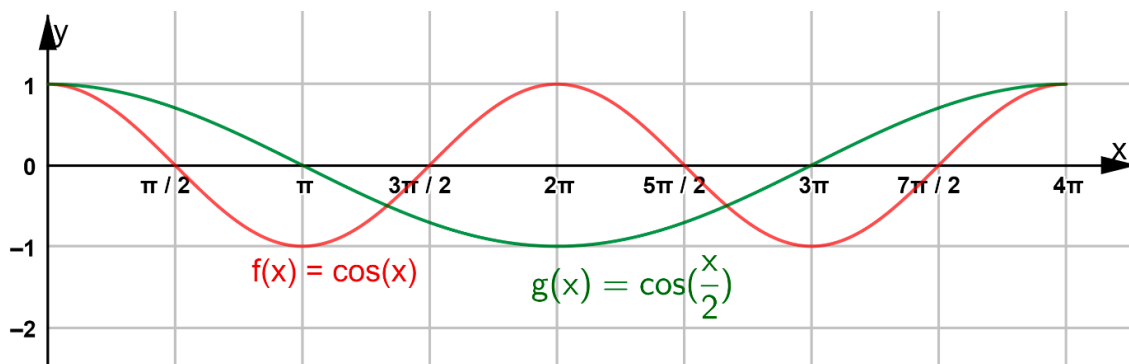
Fonte: Elaborada pelos autores

## ATIVIDADE 2

a. Complete a tabela e desenhe em um mesmo sistema de eixos cartesianos, no papel quadriculado, os gráficos de  $y = \cos x$  e de  $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ , no intervalo  $[0, 4\pi]$

$\left(\frac{x}{2}\right)$	$x$	$y = \cos x$	$y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
0	0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	-1	0
$\pi$	$2\pi$	1	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$3\pi$	-1	0
$2\pi$	$4\pi$	1	-1

Fonte: Elaborada pelos autores.



Fonte: Elaborada pelos autores

- b. Escreva uma diferença entre os gráficos das funções  $y = \cos x$  e  $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ .

Espera-se que os alunos percebam que o gráfico de  $y = \cos x$  completa um período em  $2\pi$ , enquanto o gráfico de  $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$  completa apenas meio período em  $2\pi$ , o que significa que o período desta última função é  $4\pi$ .

### ATIVIDADE 3

Observe a tabela a seguir, que contém valores de pares ordenados das funções  $y = \sin 4x$ ,  $y = 2 \sin 4x$  e  $y = 1 + 2 \sin 4x$ .



a. complete a tabela

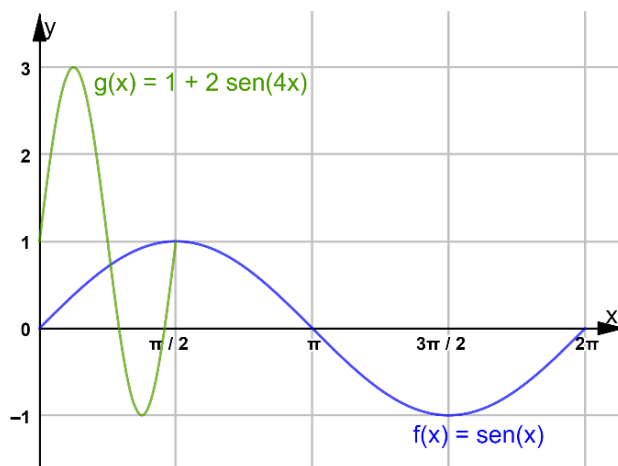
$4x$	$x$	$y = \text{sen } 4x$	$y = 2 \text{ sen } 4x$	$y = 1 + 2 \text{ sen } 4x$
0	0	0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	1	2	3
$\pi$	$\frac{3\pi}{4}$	0	0	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	-1	-2	-1
$2\pi$	$\frac{\pi}{2}$	0	0	1

Fonte: Elaborada pelos autores.

Perceba que foram atribuídos para  $4x$  os valores  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  e  $2\pi$  que são os valores que dividem os quadrantes da circunferência.

b. Esboce os gráficos de  $y = \text{sen } x$  e de  $y = 1 + 2 \text{ sen } 4x$  em um único sistema de eixos coordenados.

O desenho dos gráficos de  $y = \text{sen } x$  e de  $y = 1 + 2 \text{ sen } 4x$  em um único sistema de eixos coordenados permite que sejam discutidas as modificações que as constantes introduzidas na equação causam ao gráfico elementar.



Fonte: Elaborada pelos autores

c. Repare que, em relação ao gráfico de  $y = \text{sen } x$ , o gráfico de  $y = 1 + 2 \text{ sen } 4x$  foi deslocado verticalmente, 1 unidade para cima, e teve seu período diminuído 4 vezes e sua amplitude dobrada, efeitos esses causados, respectivamente, pelas constantes 1, 4 e 2. A partir dessa observação, complete a tabela a seguir:

Comparação entre os dois gráficos		
Função	$y = \text{sen } x$	$y = 1 + 2\text{sen } 4x$
Período	$2\pi$	$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
Imagem	$[-1, 1]$	$[-1, 3]$
Amplitude	1	2

Fonte: Elaborada pelos autores

## CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS COM O AUXÍLIO DE UM APLICATIVO DE GEOMETRIA DINÂMICA

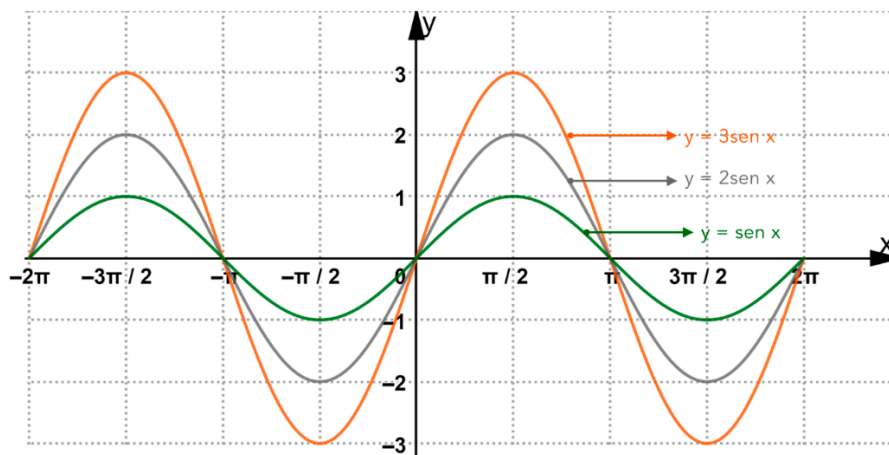
Atualmente existem alguns aplicativos de geometria dinâmica que podem ser utilizados em *smartphones* e computadores pessoais, como por exemplo o GeoGebra.

O download do aplicativo está disponível no site:

<https://www.geogebra.org/?lang=pt>.



Veja, por exemplo, os gráficos seguintes, das funções  $y = \text{sen } x$ ,  $y = 2 \text{sen } x$  e  $y = 3 \text{sen } x$ , desenhados com o auxílio do aplicativo de geometria dinâmica GeoGebra.



Fonte: Elaborada pelos autores

## ATIVIDADE 4

Observando os gráficos construídos, responda: qual é a alteração produzida no gráfico de  $y = \text{sen } x$  quando multiplicamos toda a função por um valor constante  $A \neq 0$ ?

Observando as funções  $y = \text{sen } x$ ,  $y = 2\text{sen } x$  e  $y = 3\text{sen } x$  construídas com o auxílio do software Geogebra, podemos concluir que houve variação na amplitude do gráfico e, portanto, também a imagem da função.

## ATIVIDADE 5

Observando todos os gráficos desenhados e responda:

a. qual é o domínio de uma função do tipo  $y = A \sin x$ ?

Domínio da função: todos os números reais  $\mathbb{R}$

b. qual é a imagem de uma função do tipo  $y = A \sin x$ ?

Considerando  $A \neq 0$ , a imagem da função  $y = A \sin x$  é o intervalo  $[-A, A]$ .

c. qual é o período de uma função do tipo  $y = A \sin x$ ?

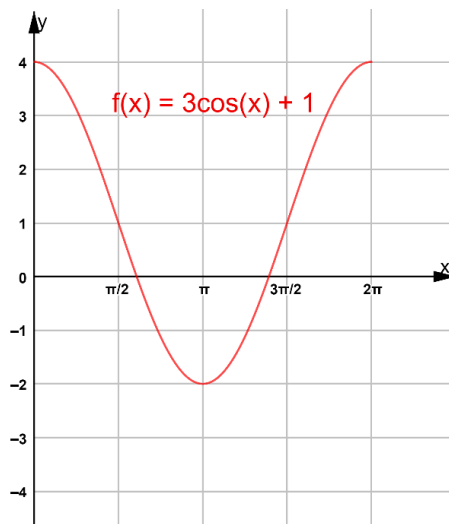
O período da função  $y = A \sin x$  é  $2\pi$

## ATIVIDADE 6

Com o auxílio da tabela a seguir, construa o gráfico de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $y = 3 \cdot \cos x + 1$

x	cos x	y = 3 · cos x + 1
0	1	3 + 1 = 4
$\frac{\pi}{2}$	0	0 + 1 = 1
$\pi$	-1	-3 + 1 = -2
$\frac{3\pi}{2}$	0	0 + 1 = 1
$2\pi$	1	3 + 1 = 4

Fonte: Elaborada pelos autores



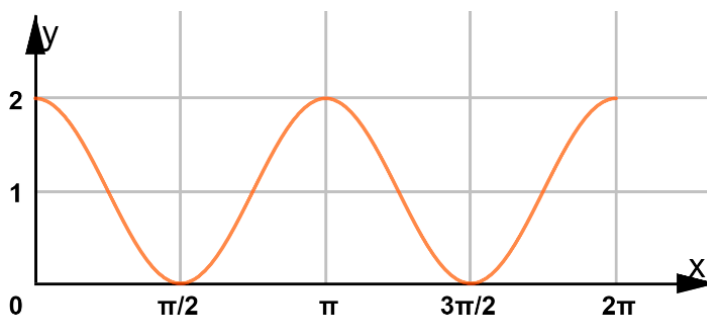
Fonte: Elaborada pelos autores

## ATIVIDADE 7

Com o auxílio da tabela a seguir, construa o gráfico de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $y = 1 + \cos 2x$ :

x	2x	cos 2x	y = 1 + cos 2x
0	0	1	1 + 1 = 2
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	1 + 0 = 1
$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	-1	1 + (-1) = 0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	0	1 + 0 = 1
$\pi$	$2\pi$	1	1 + 1 = 2

Fonte: Elaborada pelos autores



Fonte: Elaborada pelos autores

*Após a realização da atividade o professor poderá retomar alguns conceitos trabalhados anteriormente, tais como domínio, imagem, período e amplitude da função.*

### Para saber mais...

Professor, indicamos a seguir os links, que poderão auxiliar no estudo gráfico das funções trigonométricas, seno e cosseno.

Se houver a possibilidade de utilização, proponha aos alunos que explorem ao máximo os aplicativos disponibilizados.

<https://www.geogebra.org/classic/bd9kunch>

<https://www.geogebra.org/classic/hvhj96kq>

## TEMA 4 – EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

### ROTEIRO DE APLICAÇÃO:

As equações trigonométricas envolvendo seno ou cosseno exigem a determinação de uma medida de arco para qual o seno ou cosseno assume determinado valor, como, por exemplo, determinar  $x$  para que  $\text{sen}x = \frac{1}{2}$ , ou  $\text{cos}x = -1$ . Casos como esses, frequentemente apresentados e resolvidos em cursos de Ensino Médio, se forem compreendidos à luz da modelagem de funções trigonométricas, podem ampliar sobremaneira os significados associados a esse tipo de função. Entre os diversos fenômenos periódicos possíveis de serem modelados por sentenças algébricas envolvendo senos ou cossenos, foram selecionados três, apresentados a seguir, com a proposta de resolução de algumas equações. As atividades a seguir consistem em fornecer aos alunos o texto descritivo de cada fenômeno, solicitar a leitura, eliminar eventuais dúvidas e, finalmente, pedir a eles que resolvam algumas questões.

### CÁLCULO DO PERÍODO DE CLARIDADE DE UMA CIDADE

A inclinação do eixo de rotação da Terra é o fator responsável pela alteração da quantidade de insolação que uma cidade recebe durante o ano. Essa alteração da quantidade de horas de luz solar marca as estações: primavera, verão, outono e inverno.

Em cidades próximas à linha do Equador quase não se percebe a passagem das estações, pois o índice de claridade anual é praticamente o mesmo durante todo o ano, cerca de 12 horas por dia, que também vale para a temperatura média mensal. Já em regiões mais afastadas do Equador, a inclinação do eixo terrestre faz que o verão tenha dias bem longos, com alto índice de insolação, enquanto no inverno a situação se inverte, com dias bem curtos, e com poucas horas de claridade.

Em uma região um pouco afastada do Equador como, por exemplo, no Sul de nosso país, se registrarmos durante um ano o número de horas de claridade diária, perceberemos que os dados obtidos podem ser ajustados por uma função trigonométrica, isto é, que a quantidade de horas de claridade diária varia periodicamente em função do tempo. A equação seguinte traduz essa situação para determinada localidade, que chamaremos cidade B.

$$N = \frac{35}{7} + \frac{7}{3} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{365}\right)$$

A variável  $x$  dessa equação corresponde ao número de dias contados a partir do dia 23 de setembro, quando começa a primavera no Hemisfério Sul, dia esse chamado equinócio de primavera. O arco  $\frac{2\pi x}{365}$  é medido em radianos e  $N$  é a quantidade de horas de claridade diária. Assim, no dia 23 de setembro,  $x = 0$  e o valor de  $N$  pode ser assim obtido:

$$N = \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot 0}{365}\right)$$

$$N = \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot \text{sen}0 = \frac{35}{3} \cong 11,7 \text{ horas}$$

## ATIVIDADE 1

Como era de se esperar, nos dias de equinócio o número de horas de claridade é próximo da metade da duração de um dia.

- a. Qual é o número aproximado de horas diárias de insolação da cidade **B** no dia 21 de dezembro, dia solstício, que marca a entrada do verão no Hemisfério Sul?

Considerando  $x = 90$  o número de dias no período, temos que:

$$N = \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi \cdot 90}{365}\right)$$

Se aproximarmos  $365 \cong 4 \cdot 90$ , podemos escrever a expressão:

$$\begin{aligned} N &= \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi \cdot 90}{4 \cdot 90}\right) = \\ &= \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{então } N = \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot 1$$

$$N = \frac{42}{3}$$

$$N = 14 \text{ horas}$$

- b. qual é o número de horas diárias de insolação da cidade B no dia 21 de junho, solstício de inverno no Hemisfério Sul?

Adotando  $x = 90$ , visto que junho antecede setembro em três meses, e adotando a simplificação realizada no item anterior, temos:

$$N = \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$N = \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot (-1)$$

$$N = \frac{28}{3} \cong 9,3 \text{ horas}$$

- c. de posse de uma tabela trigonométrica, ou de uma calculadora científica, determine os dias do ano em que o número de horas de claridade na cidade B seja igual a 13 horas.

$$13 = \frac{35}{3} + \frac{7}{3} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{365}\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{365}\right) = \frac{13 - \frac{35}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{\frac{39 - 35}{3}}{\frac{7}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{4}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{4}{7} \cong 0,6$$

Precisamos responder: qual é o arco, em radianos, cujo seno é igual a 0,6?

A resposta, de acordo com a calculadora científica, é 0,64.

Assim:

$$\frac{2\pi x}{365} \cong 0,64 \Rightarrow x = 37,2 \text{ dias. Veja:}$$

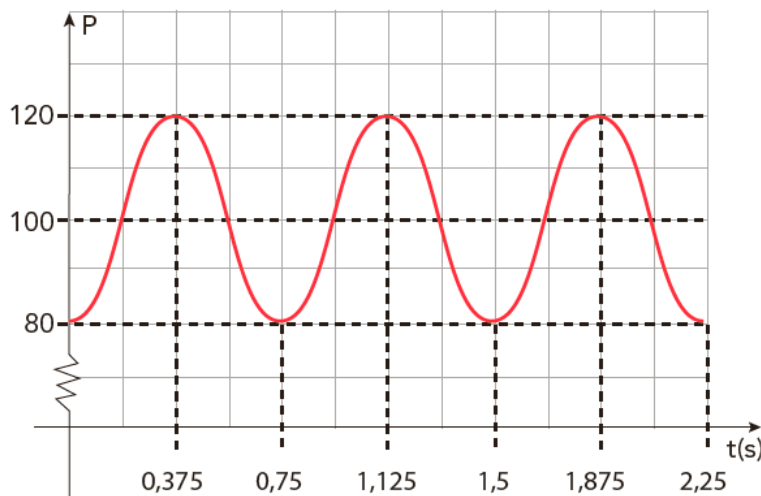
$$\frac{2\pi x}{365} = 0,64 \Rightarrow 2\pi x = 233,6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{233,6}{2\pi} \Rightarrow x \cong 37,2$$

## ATIVIDADE 2

### A PERIODICIDADE DA PRESSÃO SANGUÍNEA.

O gráfico a seguir representa a variação da pressão (P, em milímetros de mercúrio, mmHg) nas paredes dos vasos sanguíneos em função do instante (t, em segundos) em que a medida da pressão foi realizada.



Fonte: Elaborada pelos autores

Observando que a imagem da função é o intervalo  $[80, 120]$ , que a amplitude é 20 e que o período é  $0,75 = \frac{3}{4}$ , podemos escrever a equação da função:

$$P(t) = 100 - 20 \cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right)$$

- a. calcule a medida da pressão no instante 2 segundos.

$$P(2) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)$$

$$P(2) = 100 - 20 \cdot (-0,5)$$

$$P(2) = 100 + 10 = 110$$

Portanto no instante 2 segundos, a pressão será de aproximadamente 110 mmHg.

- b. quais são os instantes de tempo entre 0 e 1 segundo em que a pressão sanguínea é igual a 100 mmHg?

Para que a pressão sanguínea seja igual a 100mmHg, temos que  $P(t) = 100$ , então:

$$\begin{aligned} P(t) &= 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right) \\ \Rightarrow 100 &= 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right) &= 100 - 100 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right) &= \frac{100 - 100}{20} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Podemos concluir então, que:

$$\begin{aligned} \frac{8\pi t}{3} &= \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{16\pi t}{6} &= \frac{3\pi + 6k\pi}{6} \Rightarrow 16\pi t = 3\pi + 6k\pi \end{aligned}$$

Para que o tempo (t), esteja no intervalo de 0 a 1 segundo, os valores de k são: 0, 1 e 2 obtendo assim

$$t(0) = \frac{3(1+2 \cdot 0)}{16} = \frac{3}{16} \text{ s}$$

$$t(1) = \frac{3(1+2 \cdot 1)}{16} = \frac{9}{16} \text{ s}$$

$$t(2) = \frac{3(1+2 \cdot 2)}{16} = \frac{15}{16} \text{ s}$$

### ATIVIDADE 3

(UNESP) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de ciências exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que o mesmo era periódico e podia ser aproximado pela expressão:



$$P(t) = \frac{21}{2} + 2 \cos \left[ \left( \frac{\pi}{6} \right) t + \left( \frac{5\pi}{4} \right) \right]$$

onde  $t$  é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação ( $t=0$ ) e  $P(t)$  é a profundidade da água (em metros) no instante  $t$ .

a. resolva a equação:  $\left[ \left( \frac{\pi}{6} \right) t + \left( \frac{5\pi}{4} \right) \right] = 1, = 1$ , para  $t > 0$

$$\text{Para que } \cos \left[ \left( \frac{\pi}{6} \right) t + \left( \frac{5\pi}{4} \right) \right] = 1,$$

$$\text{temos que } \left( \frac{\pi}{6} \right) t + \frac{5\pi}{4} = 2\pi \cdot n, \text{ com } n \in \mathbb{Z}$$

Vamos encontrar o valor de  $t$  em função de  $n$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{\pi}{6} \right) t + \left( \frac{5\pi}{4} \right) &= 2\pi \cdot n \Rightarrow \left( \frac{\pi}{6} \right) t = \\ &= 2\pi \cdot n - \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \left( \frac{\pi}{6} \right) t = \end{aligned}$$

$$\frac{8\pi n - 5\pi}{4}, \text{ então}$$

$$t = \frac{\frac{\pi(8n-5)}{4}}{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow t = \frac{\pi(8n-5)}{4} \cdot \frac{6}{\pi} =$$

$$\frac{48n-30}{4} \Rightarrow t = \frac{48}{4}n - \frac{30}{4} \Rightarrow$$

$$t = 12n - \frac{15}{2}$$

b. determine quantas horas após o início da observação ocorreu a primeira maré alta.

No item anterior, encontramos uma expressão para  $t$  em função de  $n$ . A primeira maré alta ocorreu quando  $n = 1$ , portanto,:

## CONSIDERAÇÕES IMPORTANTES SOBRE A AVALIAÇÃO

A escala apropriada para o desenvolvimento de cada conteúdo só pode ser devidamente indicada pelo professor na articulação entre o conhecimento que tem sobre sua turma de alunos e as metas de seu plano de ensino. De forma semelhante, entendemos que, nas diferentes etapas de avaliação, deve ser levada em conta a pertinência de instrumentos, o percurso estabelecido e os conteúdos abordados. Vale destacar que, dada a relevância de determinados conceitos, é importante que estes tenham sua compreensão avaliada em vários momentos. No entanto, apesar da variedade de formas e conteúdos/objetos de conhecimento, algumas premissas

precisam ser adotadas. Como ponto de partida, convém buscar resposta a duas questões de suma importância:

- Quais as principais habilidades que devem ser avaliadas?
- Quais instrumentos podem avaliar as habilidades selecionadas?

Com relação à atividade 01 do tema 4, referente às principais habilidades que os alunos precisam mobilizar para serem avaliados, é necessário que eles consigam:

- Identificar a posição da extremidade final dos arcos notáveis na circunferência, associando-os aos correspondentes valores de senos, cossenos, tangentes e cotangentes.
- Obter a menor determinação positiva de arcos medidos em radianos ou em graus.
- Representar os gráficos das funções trigonométricas e reconhecer suas propriedades.
- Determinar o conjunto solução de equações ou de inequações trigonométricas, mesmo daquelas envolvidas por contextos não apenas matemáticos.

No processo de avaliação, sugere-se que o professor utilize diferentes instrumentos de forma que o quadro final da avaliação retrate tanto as características do trabalho realizado como as diversas competências que cada um de seus alunos consegue ou não mobilizar na resolução de situações-problema de Trigonometria. Dessa forma, é possível considerar que:

- Uma atividade avaliativa individual deve ser realizada com o objetivo de permitir que os alunos busquem e discorram sobre situações do cotidiano em que se observa claramente a periodicidade.
- As atividades desenvolvidas em sala de aula, cumpridas em grupos ou individualmente, devem ser avaliadas continuamente, a fim de compor um quadro que considere todos os passos do processo de construção conceitual. Algumas vezes, portanto, avalia-se não só o que foi “feito” pelo aluno, mas principalmente, seu processo de trabalho..
- Todas as atividades aplicadas para os alunos poderão ser resolvidas em duplas ou trios, cabendo ao professor acompanhar as equipes durante a realização, sanando dúvidas e eliminando dificuldades. Ao final, todos os alunos podem entregar sua produção para que o professor as comente e avalie.
- Resolver equações trigonométricas é uma habilidade esperada dos alunos ao fim do estudo. Cabe ao professor definir quais tipos de equações vão exigir resolução, de acordo com aquilo que apresentou e discutiu anteriormente. No entanto, vale salientar a importância de que algumas dessas equações sejam apresentadas e resolvidas com base em situações do cotidiano, como é o caso das equações que compõem o tema 4 desta sequência de atividades, e que, posteriormente, passem a compor instrumentos de avaliação objetiva

# MATEMÁTICA

## 2ª SÉRIE – ENSINO MÉDIO 2º BIMESTRE

### 1 – ORGANIZAÇÃO DAS GRADES CURRICULARES

Apresentamos a seguir uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais do Currículo Paulista do Ensino Médio, além de algumas orientações pedagógicas, para as três séries que compõe o referido estágio de ensino da escolaridade básica.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

#### 1.1 – GRADE CURRICULAR DA 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Currículo Oficial – SEE-SP		Currículo Paulista
Tema/Conteúdo	Habilidades	Competência Geral
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Números/Relações</li> <li>• Matrizes, determinantes e sistemas lineares;</li> <li>• Matrizes significado como tabelas, características e operações;</li> <li>• A noção de determinante de uma matriz quadrada</li> <li>• Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas no plano.</li> <li>• Saber expressar, por meio de matrizes, situações relativas a fenômenos físicos ou geométricos (imagens digitais, <i>pixels</i> etc.)</li> <li>• Saber resolver e discutir sistemas de equações lineares pelo método de escalonamento de matrizes</li> <li>• Reconhecer situações-problema que envolvam sistemas de equações lineares (até 4ª ordem), sabendo equacioná-los e resolvê-los</li> </ul>	<p>2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.</p>

## 1.2 – MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

Quando nos referimos à matrizes, recorremos imediatamente a uma tabela de dupla entrada contendo dados numéricos. Se tal fato não pode ser contestado, visto o contato dos alunos com as tabelas desde praticamente o início de sua escolarização, torna-se importante, no Ensino Médio, interpretar com qualidade os significados associados a cada elemento da matriz. Assim, a correta interpretação de dados numéricos registrados em matrizes.

Em relação às operações com matrizes, sabemos da pouca dificuldade apresentada pelos alunos no que se refere às adições e também ao produto de um número real por uma matriz.

No entanto, o mesmo não ocorre com o cálculo do produto entre duas matrizes, uma vez que o procedimento adequado para a obtenção do produto entre duas matrizes, uma vez que o procedimento adequado para a obtenção correta de resultados contraria, inicialmente, a expectativa dos alunos quanto à sequência de passos a ser obedecida. Consideramos que a apresentação do cálculo de um produto de matrizes com base em exemplos contextualizados é uma abordagem que favorece a aprendizagem e compreensão dos alunos sobre esse tema. Para auxiliar o professor neste caminho metodológico, propomos algumas atividades, desenvolvidas sobre contextos pertinentes para a introdução de tais operações.

Mesmo acreditando que o professor saberá julgar e decidir sobre o melhor momento de apresentar aos alunos as atividades propostas, consideramos que isso possa ser feito antes mesmo de que sejam apresentadas, formalmente, as operações entre matrizes

A transformação da linguagem cotidiana para a linguagem matemática é realizada, na maioria das vezes, por intermédio de uma equação. Uma situação-problema que pode ser resolvida com cálculo mental não exige que equações sejam escritas, e não se trata, de forma alguma, de priorizar o cálculo mental em detrimento do cálculo algébrico. No entanto, são inúmeras as situações-problema em que se evidencia a necessidade de escrever e resolver equações, e não podemos deixar de apresentar aos alunos exemplos dessa natureza, associados, sempre que possível, a contextos significativos. No entanto, chamamos a atenção do professor para que situações semelhantes não sejam propostas apenas no final do curso, em um único bloco, e sim que possam, todo o tempo permear a gradativa construção conceitual.

Devemos avaliar com cuidado a importância do cálculo dos determinantes associados às matrizes quadradas, no contexto da resolução de sistemas lineares. Sabemos que, com frequência, os determinantes são utilizados como ferramenta quase única para a resolução e a discussão de sistemas lineares por intermédio da regra de Cramer. Ressaltamos que a aplicação de regras de cálculo, que exigem dos alunos apenas a mobilização da habilidade de memorização, não podem ser priorizadas em detrimento de outras condutas e outros procedimentos que permitem aos alunos exercitarem toda a diversidade de estratégias de raciocínio.

## TEMA 1 – MATRIZES – SIGNIFICADOS

Quando pensamos em uma contextualização associada às matrizes, a primeira ideia que nos vem é o de uma tabela de dupla entrada contendo dados numéricos. Se tal fato não pode ser contestado, visto o contato dos alunos com as tabelas desde praticamente o início de sua escolarização, torna-se importante, no Ensino Médio, interpretar com qualidade os significados

associados a cada elemento da matriz. Assim, a correta interpretação de dados numéricos registrados em matrizes é um dos objetivos da proposta destas atividades.

Em relação às operações com matrizes, sabemos da pouca dificuldade apresentada pelos alunos no que se refere às adições e também ao produto de um número real por uma matriz. No entanto, o mesmo não ocorre com o cálculo do produto entre duas matrizes, uma vez que o procedimento adequado para a obtenção correta de resultados contraria, inicialmente, a expectativa dos alunos quanto à sequência de passos a serem obedecida. O livro didático será um grande aliado para o desenvolvimento das operações com matrizes facilitando a resolução das atividades propostas neste caderno.

Nestas atividades propomos algumas situações problema de contexto bem definido para introduzir a adição e a multiplicação entre duas matrizes, tais como a utilização de tabelas e translação de polígonos no plano cartesiano. Uma vez que os problemas apresentam similaridades quanto às estratégias de raciocínio que devem ser mobilizadas em suas respectivas resoluções, caberá ao professor avaliar se a melhor maneira é apresentar um de cada vez a seus alunos, em aulas distintas, ou se e o caso de reuni-los em um único momento.

Outro aspecto a salientar diz respeito à dificuldade das operações necessárias a resolução de cada situação-problema. De fato, para que o contexto se aproxime o máximo possível do real, é importante que os valores relativos às quantidades não sejam expressos apenas por números naturais. Para que o foco do conteúdo em questão não se perca, o professor poderá, a seu critério, permitir que os alunos utilizem calculadoras para agilizar os cálculos.

## MATRIZES

As matrizes são tabelas de números reais utilizadas em muitos ramos da ciência e da engenharia. Os computadores realizam muitas operações através de matrizes. Vejamos um exemplo.

Considere a tabela abaixo que apresenta o peso, a idade e a altura de 5 pessoas.

Nome	Peso (Kg)	Idade (anos)	Altura (m)
Paulo	70	23	1,70
José	60	42	1,60
João	55	21	1,65
Pedro	50	18	1,72
Ary	66	30	1,68

Fonte: Elaborada pelos autores.

O conjunto ordenado dos números que formam a tabela é denominado matriz e cada número é chamado elemento da matriz.

$$\begin{bmatrix} 70 & 23 & 1,70 \\ 60 & 42 & 1,60 \\ 55 & 21 & 1,65 \\ 50 & 18 & 1,72 \\ 66 & 30 & 1,68 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 70 & 23 & 1,70 \\ 60 & 42 & 1,60 \\ 55 & 21 & 1,65 \\ 50 & 18 & 1,72 \\ 66 & 30 & 1,68 \end{pmatrix}$$

Neste exemplo, temos uma matriz de ordem  $5 \times 3$  (lê-se: cinco por três), isto é, uma matriz formada por 5 linhas e 3 colunas. Representa-se uma matriz colocando seus elementos entre parênteses ou entre colchetes. De forma abreviada, podemos escrever uma matriz como:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ ou } A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Além dessa representação, existem vários tipos de matrizes. A atividade a seguir propõe a construção de uma matriz através de sua lei de formação.

## 2 – ATIVIDADES E CORREÇÃO COMENTADA

### ATIVIDADE 1

Seja  $a_{ij}$  a representação de um elemento de uma matriz na linha  $i$  e coluna  $j$ , escreva as matrizes a seguir:

- $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ , onde  $a_{ij} = 2i + 3j$
- $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ , onde  $b_{ij} = \frac{i}{j}$
- $C = (c_{ij})_{4 \times 1}$ , onde  $c_{ij} = i^2 + j$
- $D = (d_{ij})_{1 \times 3}$ , onde  $d_{ij} = i - j$
- $E = (e_{ij})_{4 \times 3}$ , onde  $e_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{se } i \geq j \\ -1, & \text{se } i < j \end{cases}$

**Resolução:**

*Esta atividade auxilia o aluno a interpretar com qualidade os significados associados a cada elemento da matriz através de sua lei de formação, lembrando que não é interessante utilizarmos somente números naturais caso o professor queira complementar com outros exercícios do livro didático ou outras fontes*

- $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ , onde  $a_{ij} = 2i + 3j$   

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

b.  $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ , onde  $b_{ij} = \frac{i}{j}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

c.  $C = (c_{ij})_{4 \times 1}$ , onde  $c_{ij} = i^2 + j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix}$$

d.  $D = (d_{ij})_{1 \times 3}$ , onde  $d_{ij} = i - j$

$$(a_{11} \ a_{12} \ a_{13}) = (0 \ -1 \ -2)$$

e.  $E = (e_{ij})_{4 \times 3}$ , onde  $e_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{se } i \geq j \\ -1, & \text{se } i < j \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{43} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

## ATIVIDADE 2

(ENEM 2018) A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz  $A: [a_{ij}]$ , em que  $1 \leq i \leq 5$  e  $1 \leq j \leq 5$ , e o elemento  $a_{ij}$  corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco  $i$  para o banco  $j$  durante o mês. Observe que os elementos  $a_{ij} = 0$ , uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Resolução:

Alternativa A. Maior número de transferências foi do Banco 01.

O que é TED? TRANSFERÊNCIAS ENTRE BANCOS DISTINTOS.

Significado do zero na matriz: não se trata de transferência para um banco distinto ou não houve TED para o outro banco.

Análise a tabela a seguir representada pela matriz para encontrarmos o total de transferências realizadas por TED.

		Destinos das Transferências					Total de TED
		Banco 2	Banco 3	Banco 4	Banco 5		
Origem das Transferências	Banco 1	0	2	0	2	2	6
	Banco 2	0	0	2	1	0	3
	Banco 3	1	2	0	1	1	5
	Banco 4	0	2	2	0	0	4
	Banco 5	3	0	1	1	0	5

Ou seja, na primeira linha temos:

- Banco 1 para Banco 1 = 0 (pois TED é transferência entre bancos diversos por isso sempre dará zero)
- Banco 1 para Banco 2 = 2 (duas transferências)
- Banco 1 para Banco 3 = 0
- Banco 1 para Banco 4 = 2
- Banco 1 para Banco 5 = 2

Total de transferências do Banco 1:  $0 + 2 + 0 + 2 + 2 = 6$

### ATIVIDADE 3

A representação de uma matriz  $E$  é dada pela expressão:  $E = (e_{ij})_{2 \times 2}$ . Os elementos  $e_{ij}$  de  $E$  são expressos algebricamente por  $E = \mathbf{e}_{ij} = \mathbf{i}^2 - 2\mathbf{j}$ . A matriz que corresponde a esta lei de formação é:

a.  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

b.  $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c.  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$



$$d. \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e. \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolução:

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

## ATIVIDADE 4

Uma matriz  $A$  pode ser representada algebricamente por  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  seus elementos  $a_{ij}$  podem ser representados por expressões algébricas quando  $\begin{cases} i = j \\ i \neq j \end{cases}$

$$\text{Dada a matriz } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

A representação algébrica dos elementos da matriz  $A$  é

$$a. \quad a_{ij} = \begin{cases} i-j & \text{se } i=j \\ 2i+j & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$b. \quad a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{se } i=j \\ 3i+j & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$c. \quad a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{se } i=j \\ 3i-j & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$d. \quad a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{se } i=j \\ 2i-j & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$e. \quad a_{ij} = \begin{cases} i-j & \text{se } i=j \\ 2i-j & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Resolução:

Professor, para esta atividade os alunos poderão testar as alternativas do problema e encontrar a lei de formação que satisfaz todos os elementos da matriz. Veja:

A lei de formação para a matriz  $A$  é a representada na alternativa C,  $\begin{cases} i+j & \text{se } i=j \\ 3i-j & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Verifique fazendo os cálculos.

$$A = (a_{ij})_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 + 1 = 2 & 3 - 2 = 1 \\ 6 - 1 = 5 & 6 - 2 = 4 \\ 9 - 1 = 8 & 9 - 2 = 7 \end{pmatrix}$$

As atividades 5, 6, 7 e 8 abordam a adição e subtração de matrizes de uma forma simples e objetiva, sendo base para as próximas atividades contextualizadas. Professor neste momento o livro didático será um grande aliado na complementação das atividades.

## ATIVIDADE 5

Determine os valores correspondentes a x e y na igualdade:

$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 8 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Para satisfazer a igualdade temos:

$$\begin{cases} x + (-1) = 4 \Rightarrow x = 5 \\ y + y = -6 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$$

## ATIVIDADE 6

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

**Determine:  $A + 2 \cdot B^T$**

Resolução:

Seja  $M$  uma matriz de ordem  $m \times n$ , a **sua transposta ( $M^T$ )** será uma matriz de ordem  $n \times m$ , ou seja, a transposta será a matriz que tem por linhas as colunas.

$$\begin{aligned} A + 2 \cdot B^T &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## ATIVIDADE 7

Determine **a**, **b** e **c** para que:

$$\begin{bmatrix} a & 3 & 2a \\ c & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Para encontrarmos os valores a, b e c temos as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} a + b = 2 \text{ (I)} \\ 2a - 1 = 5 \text{ (II)} \\ c + 1 = 3 \text{ (III)} \end{cases}$$

De (II), temos que:  $a = 3$

Em (I), substituindo o valor de a temos que:

$$3 + b = 2 \Rightarrow b = -1$$

De (III), temos que:  $c = 2$

## ATIVIDADE 8

Considere as matrizes **M**, **N** e **P**:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e calcule X, de modo que:

- $X - M = N - P$
- $P + X = M - N$
- $X + (M - P) = N$

Resolução:

Com raciocínio análogo à atividade anterior

$$\text{a. } X - M = N - P \Rightarrow X = M + N - P$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 7 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

b.  $P + X = M - N \Rightarrow X = M - N - P$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 7 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

c.  $X + (M - P) = N \Rightarrow X = N - M + P$

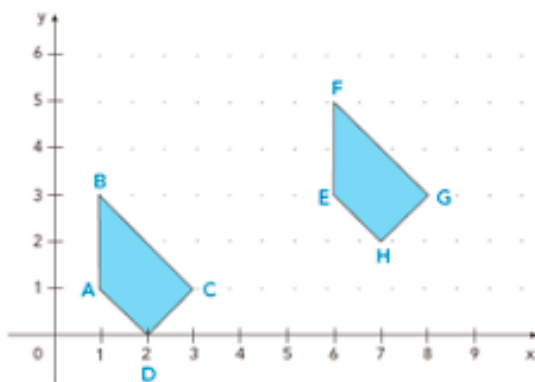
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -7 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

## ATIVIDADE 9

Observe os dois polígonos representados no plano cartesiano:



Fonte: Elaborada pelos autores

Esses dois polígonos são congruentes, e podemos considerar que o polígono EFGH é uma translação do polígono ABCD, isto é, EFGH foi obtido a partir de duas movimentações de ABCD, sendo uma na horizontal e outra na vertical.

- Quantas unidades na horizontal e quantas unidades na vertical do polígono ABCD devem ser deslocadas para que, ao final, coincidam com o polígono EFGH?
- Represente em uma matriz  $A(4 \times 2)$  as coordenadas dos vértices do polígono ABCD, de maneira que cada linha da matriz contenha coordenadas de um ponto, com a abscissa na primeira coluna e a ordenada na segunda coluna.
- Represente em uma matriz  $B(4 \times 2)$  as coordenadas dos vértices do polígono EFGH, de maneira que cada linha da matriz contenha coordenadas de um ponto, com a abscissa na primeira coluna e a ordenada na segunda coluna.
- Escreva uma matriz  $C(4 \times 2)$  de tal forma que:  $A + C = B$

**Resolução:**

- 5 unidades na horizontal e 2 unidades na vertical.

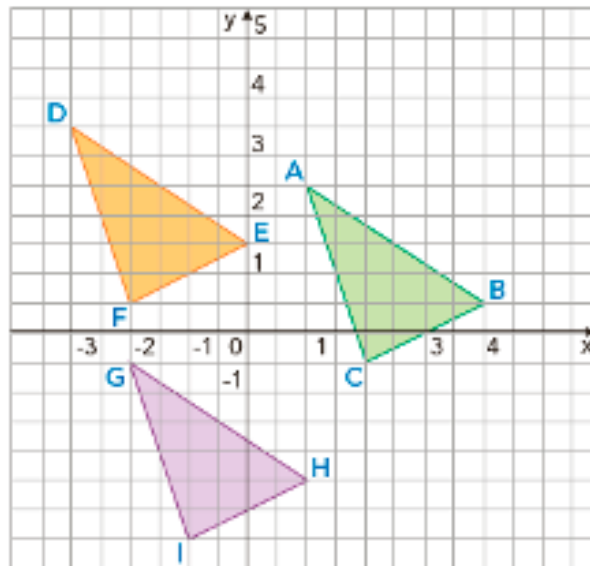
$$\text{b. } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 5 \\ 8 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } C = B - A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

## ATIVIDADE 10

Na representação a seguir de um plano cartesiano, podemos observar três triângulos congruentes. O triângulo ABC pode ser transladado até coincidir com o triângulo DEF, que, por sua vez, se transladado, poderá coincidir com o triângulo GHI.



Fonte: Elaborada pelos autores

- Quantas unidades horizontais e quantas unidades verticais são necessárias para uma translação do triângulo ABC, a fim de que, ao final, ele coincida com o triângulo DEF?
- Quantas unidades horizontais e quantas unidades verticais são necessárias para uma translação do triângulo DEF, a fim de que, ao final, ele coincida com o triângulo GHI?
- Quantas unidades horizontais e quantas unidades verticais são necessárias para uma translação do triângulo ABC, a fim de que, ao final, ele coincida com o triângulo GHI?
- Escreva uma matriz  $3 \times 2$  para cada triângulo, de maneira que cada linha da matriz contenha coordenadas de um vértice do triângulo, com a abscissa na primeira coluna e a ordenada na segunda coluna. Denomine a matriz referente ao triângulo ABC pela letra M, a matriz referente ao triângulo DEF pela letra N, e a matriz referente ao triângulo GHI pela letra P.
- Escreva uma matriz Q, tal que  $M + Q = N$ .
- Escreva uma matriz R, tal que  $N + R = P$ .
- Escreva uma matriz T, tal que  $M + T = P$ .

Resolução:

- Quatro unidades horizontais para a esquerda e uma unidade vertical para cima.
- Uma unidade horizontal para a direita e quatro unidades verticais para baixo.
- Três unidades horizontais para a esquerda e três unidades verticais para baixo.
- 

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2,5 \\ 4 & 0,5 \\ 2 & -0,5 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} -3 & 3,5 \\ 0 & 1,5 \\ -2 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -0,5 \\ 1 & -2,5 \\ -1 & -3,5 \end{bmatrix}$$

e. Podemos escrever a matriz  $Q = N - M$

$$Q = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

f. Podemos escrever a matriz  $R = P - N$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

g. Podemos escrever a matriz  $T = P - M$

$$T = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

*Professor, as atividades propostas 11, 12 e 13 têm como foco a multiplicação de matrizes e poderá ser complementadas com outras do livro didático. Essa etapa deve ser desenvolvida com seus alunos para facilitar o desenvolvimento da habilidade nos próximos exercícios.*

## ATIVIDADE 11

Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se for possível, calcule as operações com matrizes

- $AB - BA$
- $2C - D$
- $D^2 - DE$

Resolução:

a.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 4 + 0 \cdot (-8) \\ 6 \cdot 0 + 7 \cdot 2 & 6 \cdot 4 + 7 \cdot (-8) \end{pmatrix} =$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 14 & -32 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 14 & -32 \end{pmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} -24 & -20 \\ 58 & 24 \end{pmatrix}$$

b. Não é possível realizar adição e subtração de matrizes de ordens diferentes.  $2C$  é uma matriz  $2 \times 3$  e  $D$  é uma matriz  $3 \times 3$ .

c.

$$D^2 = D \cdot D = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & -20 & 16 \\ -29 & 5 & 28 \\ 0 & -24 & 36 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot E = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & -54 & 38 \\ -19 & 9 & -17 \\ -72 & -54 & 48 \end{pmatrix}$$

$$D^2 - D \cdot E = \begin{pmatrix} 80 & 34 & -22 \\ -10 & -4 & 45 \\ 72 & 30 & -12 \end{pmatrix}$$

## ATIVIDADE 12

Encontre a matriz  $X$ , na equação  $A \cdot X = B$ , onde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

*Professor, além das propriedades da multiplicação de matrizes, a álgebra será nossa grande aliada para resolver esta atividade. Veja:*



Resolução:

Sendo a matriz A de ordem  $3 \times 2$  a matriz X deve possuir duas linhas (mesmo número de colunas de A). A matriz B é de ordem  $2 \times 3$ . Logo X possui 2 linhas. Isto é:  $(A_{3 \times 2}) \cdot (X_{2 \times 2}) = B_{3 \times 2}$ . Veja que se X possuísse três colunas a matriz B seria  $3 \times 3$ . Escolhendo a, b, c, d como elementos de X, montamos a equação:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-c & 3b-d \\ a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$$

Se  $A \cdot X = B$ , temos que:

$$\begin{pmatrix} 3a-c & 3b-d \\ a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Então:

$$\begin{cases} 3a-c=5 \\ 3b-d=3 \\ a+2c=4 \\ b+2d=1 \\ 3c=3 \Rightarrow c=1 \\ 3d=0 \Rightarrow d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-1=5 \Rightarrow a=2 \\ 3b-0=3 \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

Concluimos então que:  $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

### ATIVIDADE 13

Se  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  determine o valor de  $x + y$ .

Resolução:

Ao multiplicarmos as matrizes obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

Cuja solução é  $x = 2$  e  $y = 2$ , então  $x + y = 4$ .

### ATIVIDADE 14

Na confecção de três modelos de camisas (A, B e C) são usados botões grandes (G) e pequenos (P). O número de botões por modelos é dado pela tabela:

	Camisa A	Camisa B	Camisa C
Botões P	3	1	3
Botões G	6	5	5

Fonte: Elaborada pelos autores

O número de camisas fabricadas, de cada modelo, nos meses de maio e junho, é dado pela tabela:

	Maio	Junho
Camisa A	100	50
Camisa B	50	100
Camisa C	50	50

Fonte: Elaborada pelos autores

Nestas condições, obtenha a tabela que dá o total de botões usados em maio e junho.

**Resolução:**

Para encontrarmos a solução para o problema, basta realizarmos a multiplicação das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 & 50 \\ 50 & 100 \\ 50 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 & 400 \\ 1100 & 1050 \end{bmatrix}$$

	Maio	Junho
Botões P	500	400
Botões G	1100	1050

Fonte: Elaborada pelos autores

## ATIVIDADE 15

(FATEC SP) João, Sílvia e Pedro são funcionários de uma empresa. Considere as matrizes:

$$A = (10 \ 12 \ 8) \text{ e}$$

$$B = \begin{pmatrix} 25 & 40 & 12 & 32 \\ 15 & 22 & 30 & 30 \\ 30 & 25 & 25 & 18 \end{pmatrix}$$

- a matriz A representa o valor, em reais, recebido por hora trabalhada de João, Sílvia e Pedro, respectivamente;
- a matriz B representa a quantidade de horas trabalhadas por semana dos mesmos funcionários, em cada uma das quatro primeiras semanas no mês de julho de 2018;
- na matriz B, as linhas 1 a 3 são para João, Sílvia e Pedro, respectivamente; e as colunas de 1 a 4 são, nessa ordem, para as quatro primeiras semanas do mês de julho, de modo que, por exemplo, o elemento  $b_{13}$  é a quantidade de horas que João trabalhou na terceira semana desse mês.

O valor pago pela empresa pelas horas trabalhadas por esses três funcionários na segunda semana de julho de 2018 será:

- R\$ 670,00
- R\$ 680,00
- R\$ 864,00
- R\$ 980,00
- R\$ 984,00

**Resolução:**

Para encontrarmos o valor pago pela empresa pelas horas trabalhadas por esses três funcionários em cada semana de julho de 2018 vamos encontrar a matriz:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 40 & 12 & 32 \\ 15 & 22 & 30 & 30 \\ 30 & 25 & 25 & 18 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 670 & 864 & 680 & 824 \end{bmatrix}$$

Na **segunda semana** a empresa pagou aos três funcionários juntos a quantia de R\$ 864,00

## ATIVIDADE 16

Uma cozinheira preparou 3 tipos diferentes de salgados, usando ingredientes conforme a tabela abaixo:

	Ovos	Farinha	Açúcar	Carne
Pastéis	3	6	1	3
Empadas	4	4	2	2
Kibes	1	1	1	6

Fonte: Elaborada pelos autores

Os preços dos ingredientes constam na tabela abaixo:

Ingredientes	Preço Base (R\$)
Ovos	0,20
Farinha	0,30
Açúcar	0,50
Carne	0,80

Fonte: Elaborada pelos autores.:

Qual, então, deve ser o preço base de cada salgado? Organize seu raciocínio utilizando a multiplicação de matrizes.

**Resolução:**

*A multiplicação das duas matrizes nos dará o preço base (custo) de cada salgado. Assim, temos:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,20 \\ 0,30 \\ 0,50 \\ 0,80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,30 \\ 4,60 \\ 5,80 \end{pmatrix}$$

Então, o preço base (sem prejuízo) de cada salgado deverá ser:

Pastel : R\$ 5,30

Empada: R\$ 4,60

Quibe: R\$ 5,80

## ATIVIDADE 17

Uma fábrica de automóveis produz carros A e B nas versões Sedan, Hatch e SUV. Na montagem desses carros são utilizadas as peças X, Y e Z. Para certo plano de montagem são fornecidas as seguintes tabelas:

	Carro A	Carro B
Peça X	4	3
Peça Y	3	5
Peça Z	6	2

Fonte: Elaborada pelos autores.

	Sedan	Hatch	SUV
Carro A	2	4	3
Carro B	3	2	5

Fonte: Elaborada pelos autores

Para o planejamento da composição de peças por tipo de carro que matriz deve ser usada? Você poderá organizar seu raciocínio através do uso de matrizes.

**Resolução:**

Multiplicando a matriz peças (P) com a matriz tipo de carro (T) temos que:

$$P \cdot T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 22 & 34 \\ 18 & 28 & 28 \end{bmatrix}$$

Desta forma, o planejamento da composição de peças por tipo de carros será:

	Sedan	Hatch	SUV
Peça x	17	22	27
Peça y	21	22	34
Peça z	18	28	28

## ATIVIDADE 18

No Campeonato baiano da terceira divisão, após cinco rodadas, foram obtidos os seguintes resultados pelas cinco equipes participantes:

Equipe	Vitória	Empate	Derrota
Barro vermelho	3	2	0
Carranca	2	1	2
Veneza	2	0	3
Colonial	1	1	3
Olaria	1	0	4

Fonte: Elaborada pelos autores

Resultado	Pontos
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

Fonte: Elaborada pelos autores

Calcule quantos pontos cada time conquistou até agora e represente os resultados em uma matriz de ordem  $5 \times 1$ .

Resolução:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Portanto a pontuação de cada equipe no campeonato será:

Equipe	Pontos
Barro vermelho	11
Carranza	7
Veneza	6
Colonial	4
Olaria	3

Fonte: Elaborada pelos autores

## ATIVIDADE 19

Quatro escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de 10 modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, prata ou bronze, dependendo da classificação final, respectivamente, 1º, 2º ou 3º lugares. A quantidade de medalhas de cada escola, ao final da competição, e apresentada na tabela seguinte, assim como o total de pontos conseguidos pelas escolas, considerando-se que a cada tipo de medalha foi atribuída uma pontuação.

Escolas	Medalhas			Pontuação Final
	Ouro	Prata	Bronze	
A	4	2	2	46
B	5	3	1	57
C	4	3	3	53
D	3	3	7	53

Fonte: Elaborada pelos autores

Qual foi a pontuação atribuída a cada tipo de medalha?

Resolução:

Ouro: 8 pontos; prata: 5 pontos; bronze: 2 pontos.

*Caro professor, o sistema possível para a resolução do problema é formado por quatro equações e três incógnitas, isto é, não se trata de um sistema "quadrado". Sugerimos que o professor chame a atenção de seu aluno para o fato de que sistemas dessa natureza exigem maior reflexão sobre os passos a serem adotados para a resolução. Neste caso, podemos desprezar inicialmente uma das equações, resolver o sistema formado por três delas e, ao final, testar se os resultados obtidos validam a equação não utilizada na resolução.*

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 & \text{(I)} \\ 5x + 3y + z = 57 & \text{(II)} \\ 4x + 3y + 3z = 53 & \text{(III)} \\ 3x + 3y + 7z = 53 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Vamos "desprezar" a equação (IV), e adotar o método da substituição para resolver o sistema formado pelas três equações restantes. Para tanto, isolaremos a incógnita  $z$  na equação (II), e substituiremos a expressão encontrada nas equações (I) e (III).

$$\text{(II) } z = 57 - 5x - 3y$$

$$\text{(I) } 4x + 2y + 2 \cdot (57 - 5x - 3y) = 46$$

$$\text{(III) } 4x + 3y + 3 \cdot (57 - 5x - 3y) = 53$$

As equações (I) e (III), depois de reduzidos os termos semelhantes, tornam-se equivalentes a:

$$6x + 4y = 68 \text{ (V)}$$

$$11x + 6y = 118 \text{ (VI)}$$

Para simplificar, dividiremos a equação (V) por 2, obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 34 \text{ (V)} \\ 11x + 6y = 118 \text{ (VI)} \end{cases}$$

Em seguida, pelo método da adição, faremos  $3.(V) - (VI)$ , obtendo:

$$\begin{cases} 9x + 6y = 102 & (V) \\ -11x - 6y = -118 & (VI) \end{cases}$$

$$-2x = -16 \Rightarrow x = 8$$

Portanto, a medalha de ouro vale 8 pontos. Voltando com esse valor em (V), obtemos que  $y = 5$ , ou seja, obtemos que a medalha de prata vale 5 pontos. Voltando com esses valores em (I), obtemos que  $z = 2$ , ou seja, que a medalha de bronze vale 2 pontos. Substituindo os valores obtidos para  $x$ ,  $y$  e  $z$ , na equação (VI), notamos que ela é verificada, pois  $3 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 24 + 15 + 14 = 53$ .

## A VISÃO DOS PIXELS

Uma imagem digitalizada é formada por *pixels*, que possuem informações que determinam sua cor, com a combinação de três cores básicas (vermelho, verde e azul), gerando mais de 16 milhões de possibilidades de cores. Por serem muito pequenos e próximos uns dos outros, o pixel é imperceptível a olho nu. Assim, quanto maior o número de *pixels*, mais nítidas são as imagens produzidas.

Nas imagens digitalizadas, os *pixels* estão dispostos como quadradinhos organizados lado a lado, em uma grande matriz. Então, quanto maior a matriz que forma a imagem, melhor será a sua qualidade. Se considerarmos sete imagens do mesmo objeto, com as mesmas dimensões, mudando apenas a quantidade de *pixels* (ou seja, o tamanho da matriz) de cada uma, obtaremos resoluções completamente diferentes. Veja a imagem a seguir:



Fonte: Elaborada pelos autores.

O tamanho de uma imagem digital é definido pela ordem da matriz, isto é, pela quantidade de linhas e colunas que a forma.

Por exemplo, se uma imagem tem 119 linhas e 116 colunas de tamanho, ela terá um total de  $119 \cdot 116 = 13\,804$  *pixels*.

Ao adquirir uma máquina fotográfica digital, uma das primeiras características avaliadas pelo comprador são os *megapixels*. Uma máquina de 6 *megapixels* (6 MP) divide determinada área em 6 milhões de *pixels* ( $6 \times 10^6$ ), enquanto outra, de 7.1 MP, e capaz de dividir a mesma área em 7 milhões e 100 mil *pixels* ( $7,1 \times 10^6$ ). Assim, apenas por esse quesito, é possível avaliar que a qualidade da segunda câmera é superior a da primeira.

Determinado modelo de máquina digital pode alterar a resolução da foto. À escolha do fotógrafo, as fotos podem ser produzidas com as seguintes especificações:



- 7.1 MP: 3072 x 2304 pixels
- 6.1 MP: 3072 x 2048 pixels
- 4.0 MP: 2304 x 1728 pixels
- 1.9 MP: 1600 x 1220 pixels
- 0.8 MP: 1024 x 768 pixel.

## ATIVIDADE 20

Considere uma foto de 7.1 MP de resolução (3072 x 2304 pixels) em que a linha 1 000 da matriz seja formada apenas por pixels de cor verde, divididos igualmente entre 3 tonalidades em ordem crescente de posição nas colunas:



Assim, dos  $n$  elementos da 1000ª linha da matriz, os  $\frac{n}{3}$  primeiros são verdes na tonalidade 1, os  $\frac{n}{3}$  seguintes são verdes na tonalidade 2 e os  $\frac{n}{3}$  últimos são verdes na tonalidade 3. Nessa condição, qual será a tonalidade do *pixel*  $a_{ij}$ , isto é, do elemento da matriz que ocupa a linha  $i$  e a coluna  $j$  nos seguintes exemplos?

- $a_{1000, 1000}$
- $a_{1000, 500}$
- $a_{1000, 2000}$

Resolução:

- Tonalidade 2.
- Tonalidade 1
- Tonalidade 3

## ATIVIDADE 21

Considere uma foto de 1.9 MP de resolução em que todos os elementos  $b_{ij}$  da matriz sejam *pixels* de cor azul, de modo que cada elemento  $b_{ij}$ , isto é, o elemento que ocupa na matriz a posição dada pela linha  $i$  e pela coluna  $j$ , seja representado pela sentença  $b_{ij} = 2i - j$  e as tonalidades sejam associadas ao *pixel* de acordo com o seguinte código:

- 1- Se  $b_{ij} \leq 200$  → Tonalidade 1  
 2- Se  $200 < b_{ij} \leq 320$  → Tonalidade 2  
 3- Se  $320 < b_{ij} \leq 1000$  → Tonalidade 3  
 4- Se  $b_{ij} > 1000$  → Tonalidade 4



Fonte: Elaborada pelos autores

- a.  $b_{40,100}$   
 b.  $b_{1000,1000}$   
 c. Que estiver na 1200ª linha e 1200ª coluna?  
 d. Quantos pixels da 300ª linha terão tonalidade 3?

Resolução:

a.  $b_{40,100} = 2 \cdot 40 - 100 = -20$

Como  $-20 \leq 200$ , tonalidade 1.

b.  $b_{1000,1000} = 2 \cdot 1000 - 1000 = 1000$

Como  $320 \leq b_{1000,1000} \leq 1000$ , tonalidade 3.

c. Trata se de:

$b_{1200,1200} = 2 \cdot 1200 - 1200 = 1200$

d.  $320 < 2i - j \leq 1000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 320 < 2 \cdot 300 - j \leq 1000 =$

$= 320 < 600 - j \leq 1000 \Rightarrow$

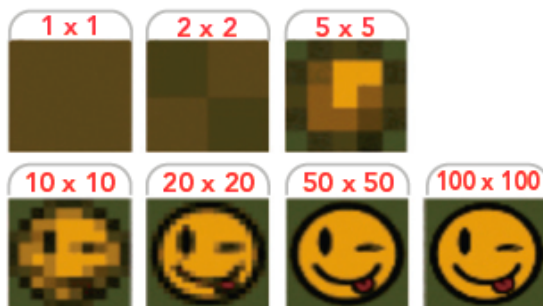
$\Rightarrow 320 - 600 < 600 - j - 600 \leq 1000 - 600 =$

$= -280 < -j \leq 400 \Leftrightarrow -400 \leq j < 280$

Como  $j > 0$ , são 279 pixels na 300ª linha, com a tonalidade 3

## ATIVIDADE 22

Considere a seguinte situação: Seja uma matriz  $100 \times 100$ , em que os elementos da matriz sejam basicamente da cor amarela de modo que cada elemento  $b_{ij}$  da matriz, seja representada pela sentença  $b_{ij} = 2i - 2j$  e as tonalidades sejam associadas aos pixels de acordo com o código abaixo:



Fonte: Elaborada pelos autores

**Códigos das tonalidades**

- |                              |   |              |
|------------------------------|---|--------------|
| 1- Se $b_{ij} \leq 50$       | → | Tonalidade 1 |
| 2- Se $50 < b_{ij} \leq 75$  | → | Tonalidade 2 |
| 3- Se $75 < b_{ij} \leq 100$ | → | Tonalidade 3 |
| 4- Se $b_{ij} > 100$         | → | Tonalidade 4 |



Fonte: Elaborada pelos autores

Nessas condições, a tonalidade do pixel que está na posição  $b_{55,25}$  da matriz será a

- Tonalidade 1.
- Tonalidade 2.
- Tonalidade 3.
- Tonalidade 4.

**Resolução:**

Considerando a lei de formação da matriz  $b_{ij} = 2i - 2j$ , temos que:

$$b_{55,25} = 2 \cdot 55 - 2 \cdot 25 = 110 - 50 = 60$$

Conforme o código de tonalidades para  $b_{ij} = 60$  teremos a tonalidade 02. Alternativa B.

## MATRIZES E O PRINCÍPIO DA TOMOGRAFIA

A tomografia computadorizada é uma moderna técnica da medicina que permite visualizar o interior do corpo de uma pessoa por meio de uma série de imagens que possibilitam aos médicos identificar diversos tipos de problemas, como, por exemplo, a existência de regiões cancerígenas. Na atividade a seguir, aproveitaremos o modo como são produzidas as imagens de uma tomografia para simular situações problema envolvendo matrizes. O funcionamento de um tomógrafo computadorizado consiste, basicamente, na emissão de feixes de raios X que não atravessam todo o organismo da pessoa, mas fazem varreduras em um único plano. Desse modo, um feixe de raios, ao varrer um plano ou uma “fatia”, projeta ao final uma imagem que é unidimensional, isto é, uma tira com trechos claros e escuros, conforme aquilo que tenha encontrado pelo caminho (órgãos, ossos etc.). O desenho seguinte representa o momento em que uma pessoa é exposta aos feixes de raios de um tomógrafo.



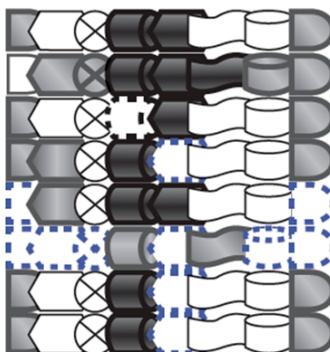
Imagem sem restrição de uso ou compartilhamento: [https://www.google.com/search?as\\_st=y&hl=pt-BR&tbs=sur%3Af&tbm=isch&sa=1&ei=PCORXLL6G87Y5OUP8tWMoAI&q=tomografia&oq=tomografia&gs\\_l=img.12..0i67j0I9.12901.14581..22290...0.0..0.262.1773.0j1j7....1..1....1..gws-wiz-img.8uV4Ut3pklo#imgrc=rLLJEw4vZV4POM](https://www.google.com/search?as_st=y&hl=pt-BR&tbs=sur%3Af&tbm=isch&sa=1&ei=PCORXLL6G87Y5OUP8tWMoAI&q=tomografia&oq=tomografia&gs_l=img.12..0i67j0I9.12901.14581..22290...0.0..0.262.1773.0j1j7....1..1....1..gws-wiz-img.8uV4Ut3pklo#imgrc=rLLJEw4vZV4POM)

Quem já passou por esse tipo de exame sabe que, durante cerca de meia hora, um grande equipamento executa movimentos circulares e ruidosos, como se estivesse, de fato, “fatiando” nosso corpo com os feixes unidimensionais de raios X. O feixe de raios X, emitido em um único plano, projeta uma tira com trechos claros e escuros, como neste desenho:



Fonte: Elaborada pelos autores

À medida que o tomógrafo se movimenta, outros feixes de raios X são emitidos e novas tiras são geradas. A reunião dessas tiras em uma única imagem forma uma “chapa” semelhante a que é mostrada no desenho a seguir:



Fonte: Elaborada pelos autores

Podemos associar os numerais 1 ou 0 aos pontos escuros ou claros, respectivamente. Além disso, simplificando a constituição dessas microrregiões claras ou escuras, vamos supor que todas tenham o formato de pequenos quadrados, de maneira que uma região plana possa ser, de fato, uma região quadriculada, em que linhas e colunas sejam numeradas de 1 a  $n$ , conforme a seguinte representação, em que a malha quadriculada tem 8 linhas e 8 colunas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	
									1
									2
									3
									4
									5
									6
									7
									8

Fonte: Elaborada pelos autores

Nesse caso, podemos associar ao desenho uma matriz 8x8 formada por elementos que são, ao mesmo tempo, numerais 1 ou 0 e regiões escuras ou claras. Quando nosso tomógrafo simplificado efetuar um corte, ou, em outras palavras, gerar uma tira de regiões claras ou escuras, serão lançados valores das quantidades de cada tipo de região, sem que, no entanto, sejam ainda conhecidas quais regiões têm esta ou aquela característica. Se isso for feito como no exemplo a seguir, saberemos que 4 quadrículas dessa linha deverão ser escuras. Mas quais?

4									
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Fonte: Elaborada pelos autores

Registrando simultaneamente a quantidade de quadrículas escuras ou claras de cada coluna, e possível reconstituir a "imagem", como no caso do desenho abaixo:

	1	0	0	1	0	1	0	1
4								

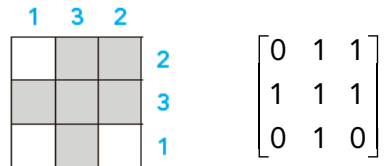
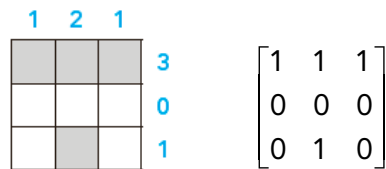
Fonte: Elaborada pelos autores

Observe o exemplo a seguir, da recomposição de uma imagem em um quadriculado de 3x3.

	0	3	1
1			
2			
1			

Respeitando as  
quantidades registradas na  
vertical e horizontal, será  
esta a imagem.


Observe nestes outros exemplos como podemos associar a reconstituição da “imagem” a uma matriz.

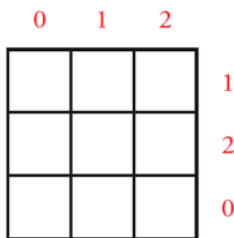


Fonte: Elaborada pelos autores

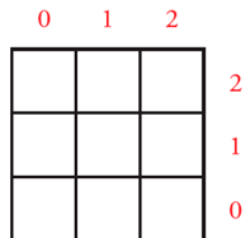
## AGORA É COM VOCÊ!

Determine as regiões “escuras” de cada caso seguinte e escreva também uma matriz associada a composição.

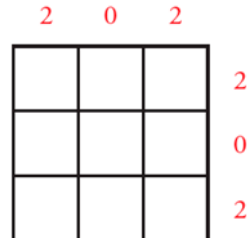
Problema 1



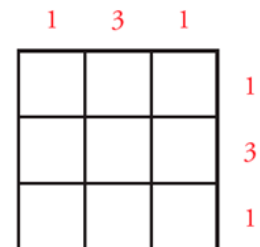
Problema 2



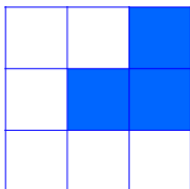
Problema 3



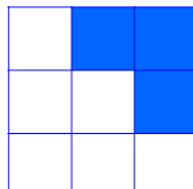
Problema 4



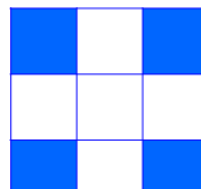
Resolução



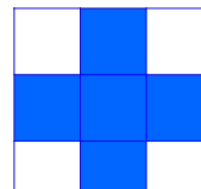
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

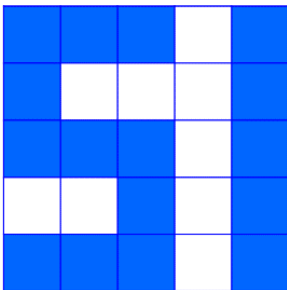


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 5

4 3 4 0 5

					4
					2
					4
					2
					4

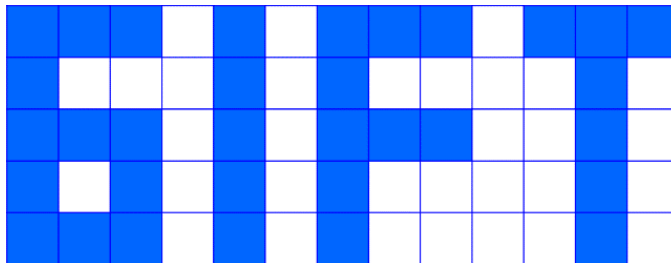


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 6

5 3 4 0 5 0 5 2 2 0 1 5 1

															10
															4
															8
															5
															6

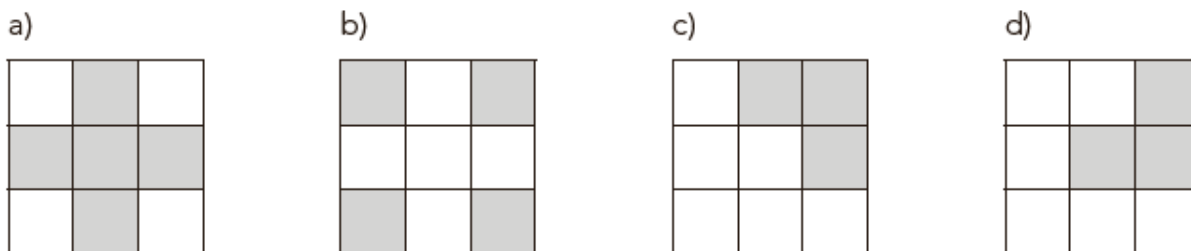


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### ATIVIDADE 24

Seguindo o mesmo princípio acima descrito, analise a figura abaixo e assinale a alternativa que ilustra sua recomposição.

			0
			1
			2
			0



Resolução:

Alternativa D. Raciocínio análogo à atividade anterior.

## TEMA 3 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

As atividades contextualizadas que apresentaremos aos alunos podem envolver, inicialmente, sistemas de apenas duas equações lineares, como feito anteriormente no Ensino Fundamental. Essa estratégia vai permitir que se retome o processo de resolução, bem como a análise da resposta final.

Será importante ainda apresentar aos alunos uma situação que envolva sistemas “não quadrados”, isto é, sistemas em que o número de equações e de incógnitas não seja igual, e também situações que conduzam à elaboração e à resolução de sistemas lineares indeterminados.

Para a resolução dos sistemas obtidos a partir de situações-problema, sugerimos que o professor estimule seus alunos a utilizar, inicialmente, os métodos estudados no Ensino Fundamental, isto é, os métodos de adição, substituição ou comparação. Salientamos a importância de o professor priorizar que a resolução dos sistemas seja feita com base nesses métodos, ou por escalonamento, em detrimento do método de Cramer com o uso de determinantes. Tal opção será contemplada adiante, nas atividades 39 a 44 deste caderno.

Para a aplicação dos sistemas lineares na resolução de problemas, propomos as atividades descritas a seguir:

### ATIVIDADE 25

Duas locadoras de automóveis A e B estipulam a remuneração de seus serviços da seguinte maneira:

- Locadora A: valor fixo de 80 reais mais R\$ 1,20 por quilômetro rodado.
  - Locadora B: valor fixo de 120 reais mais R\$ 1,00 por quilômetro rodado.
- a. O valor a ser pago às locadoras **A** e **B** pelo aluguel de um veículo que rodou 140 km.
  - b. O valor a ser pago às locadoras **A** e **B** pelo aluguel de um veículo que rodou 300 km.
  - c. A partir de quantos quilômetros rodados torna-se mais econômico alugar o automóvel em B do que em **A**.



Resolução:

- 248 reais e 260 reais.
- 440 reais e 420 reais.
- 220 km.

Comentários:

Apenas neste item, c, pode ser necessário que o aluno escreva um sistema de equações para organizar a resolução. Nesse caso, poderá ser escrito o seguinte sistema:

- Locadora A;  $V = 80 + 1,20x$
- Locadora B:  $V = 120 + 1,00x$

Nessas equações,  $V$  é o valor a ser pago pela locação e  $x$  é a quantidade de quilômetros rodados. A resolução desse sistema induz claramente a opção pelo método da comparação, pois interessa descobrir o momento em que o valor  $V$  é o mesmo para as duas locadoras. Assim,  $80 + 1,20x = 120 + 1,00x \Rightarrow x = 200$

Portanto, a partir de 200 km de percurso torna-se mais econômico alugar o automóvel na locadora B.

## ATIVIDADE 26

Uma loja de eletrodomésticos está fazendo uma promoção para a compra conjunta de dois tipos de eletrodomésticos, de maneira que o consumidor interessado paga:

- R\$ 590,00 por um forno de micro-ondas e um aspirador em pó;
- R\$ 1.300,00 por um forno de micro-ondas e uma geladeira;
- R\$ 1.250,00 por um aspirador em pó e uma geladeira.

Quanto a loja está cobrando por cada tipo de aparelho?

Resolução:

Denominando  $x$  o preço do forno de micro-ondas,  $y$  o preço do aspirador de pó, e  $z$  o preço da geladeira, podemos escrever o seguinte sistema de três equações lineares:

$$\begin{cases} x + y = 590 & \text{(I)} \\ x + z = 1300 & \text{(II)} \\ y + z = 1250 & \text{(III)} \end{cases}$$

A fim de reforçar os comentários anteriores, sugerimos que o professor estimule os alunos a resolverem esse sistema por substituição, adição ou comparação. Pelo me todo da comparação, obtemos:

$$\begin{cases} x = 590 - y \\ x = 1300 - z \end{cases}$$

Comparando as duas equações temos:

$$590 - y = 1300 - z \Rightarrow -y + z = 710$$

O sistema original, de três equações lineares, pode então, ser reduzido ao seguinte sistema de duas equações:

$$\begin{cases} y + z = 1250 & \text{(III)} \\ -y + z = 710 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Adicionando (III) e (IV), temos:

$$2z = 1960 \Rightarrow z = 980$$

Sabendo-se o valor de  $z$ , determinaremos os valores de  $x$  e  $y$ .

$$y + z = 1250 \Rightarrow y + 980 = 1250 \Rightarrow y = 270$$

$$x + y = 590 \Rightarrow x + 270 = 590 \Rightarrow x = 320$$

Portanto:

O micro-ondas custará: R\$ 320,00, o aspirador de pó custará R\$ 270,00 e a geladeira custará R\$ 980,00.

## ATIVIDADE 27

Um funcionário recém-contratado por uma empresa recebeu em mãos a seguinte tabela, contendo as quantidades de 3 tipos de produtos, A, B e C, recebidos ou devolvidos em 3 lojas da empresa, acompanhadas dos respectivos valores que cada loja deveria remeter à matriz pela transação.

Tipo	Qualidade			Valor da transação (em mil R\$)
	A	B	C	Total
Loja 1	3	4	-1	8
Loja 2	4	5	2	20
Loja 3	1	-2	3	6

Fonte: Elaborada pelos autores

Ajude o funcionário a calcular o valor unitário de cada tipo de produto.

**Resolução:**

O seguinte sistema de equações traduz as condições do problema:

$$\begin{cases} 3a + 4b - c = 8 & \text{(I)} \\ 4a + 5b + 2c = 20 & \text{(II)} \\ a - 2b + 3c = 6 & \text{(III)} \end{cases}$$

Vamos resolver esse sistema pelo método da adição. Para tanto, precisamos escolher uma incógnita que será eliminada a partir de combinações lineares entre pares de equações. Escolheremos a incógnita  $c$  e faremos:

1º)  $2 \cdot (I) + (II)$ , isto é, multiplicaremos a equação (I) por 2 e, em seguida, adicionaremos a equação resultante a equação (II). A resolução será apresentada passo a passo, e caberá ao professor estimular seus alunos a cumprirem o mesmo percurso, ou a eliminarem alguns passos, estimulando, dessa forma, o cálculo mental.

$$\begin{array}{l} 2 \cdot (I) \\ (II) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 6a + 8b - 2c = 16 \\ 4a + 5b + 2c = 20 \end{array} \right.$$

2º)  $3 \cdot (I) + (III)$ , isto é, multiplicaremos a equação (I) por 3 e adicionaremos a equação resultante a equação (III).

$$\begin{array}{l} 3 \cdot (I) \\ (III) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 9a + 12b - 3c = 24 \\ a - 2b + 3c = 6 \end{array} \right.$$

$$10a + 10b = 30 \text{ (V)}$$

3º) Escreveremos um sistema equivalente ao original, formado, agora, por 2 equações lineares, em duas incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10a + 13b = 36 \\ 10a + 10b = 30 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{(IV)} \\ \text{(V)} \end{array}$$

4º) Por coincidência, obtivemos equações que apresentam coeficientes iguais para a mesma incógnita ( $a$ ). Portanto, basta subtrair as duas equações, ou seja multiplicar a equação (V) por  $(-1)$ , para determinar o valor da incógnita  $b$ .

$$\begin{array}{l} 3 \cdot (IV) \\ -1 \cdot (V) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 10a + 13b = 36 \\ -10a - 10b = -30 \end{array} \right.$$

$$3b = 6 \Rightarrow b = 2$$

Portanto, o valor unitário do produto B é de R\$ 2 mil. O preço dos demais tipos de produto pode ser obtido a partir da substituição do valor de B nas equações dos sistemas escritos.

**Resposta:** R\$ 1 mil; R\$ 2 mil; R\$ 3 mil

*A atividade a seguir permite introduzir a ideia de que podemos escrever sistemas indeterminados para situações nas quais não há uma única resposta possível. Como não se trata de um problema de difícil solução, sugerimos que o professor apresente-o aos alunos sem qualquer comentário inicial, e que, após discutir as diversas situações que surgirem, comente sobre o fato de que os resultados esperados são discretos, isto é, formados apenas por números naturais. Será muito provável que os alunos consigam chegar às respostas corretas sem escrever e resolver sistemas de equações, e, nesse caso, caberá ao professor mostrar-lhes que, em outros casos, de respostas obtidas a partir de conjuntos contínuos, seria impossível a eles escreverem todas as infinitas respostas, o que exigiria a escrita de equações.*

## ATIVIDADE 28

O técnico de uma equipe de futebol estima que, ao final de 12 partidas, sua equipe consiga 24 pontos. Sabendo-se que a quantidade de pontos por vitória é 3, por empate é 1 e por derrota é 0, determine:

- O número de pontos da equipe que vencer 4 jogos, empatar 4 e perder 4.
- O número máximo de pontos que a equipe pode conseguir.
- Uma combinação possível de números de vitórias-empates-derrotas para que a equipe consiga os almejados 24 pontos.
- Todas as possibilidades para que a equipe consiga atingir 24 pontos.

Resolução:

- $4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 16$  pontos.
- Caso vença as 12 partidas, uma equipe conseguira o máximo possível de pontos, igual a  $3 \cdot 12 = 36$ .
- Denominando o número de vitórias por  $x$ , o número de empates por  $y$ , e o de derrotas por  $z$ , podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x + 1y + 0z = 24 \end{cases}$$

Temos, portanto, um sistema de duas equações a três incógnitas, que é indeterminado, isto é, tem mais de uma solução. Uma possível resposta para o problema pode ser obtida, por exemplo, com  $x = 7$ , isto é, supondo que a equipe vença 7 dos 12 jogos. Nesse caso, será preciso que  $y = 3$ , a fim de que a equipe consiga atingir, exatamente, 24 pontos. Portanto, uma resposta possível é: 7 vitórias, 3 empates e 2 derrotas.

- Queremos, neste caso, determinar as soluções naturais do sistema formado pelas duas equações descritas no item anterior, isto é:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x + 1y + 0z = 24 \end{cases}$$

Com  $y = 24 - 3x$  na segunda equação, e substituindo em  $y$  na primeira equação, temos:

$$x + 24 - 3x + z = 12 \Rightarrow z = 2x - 12$$

Assim, podemos escrever a resposta geral do sistema, em função de  $x$ , isto é, em função do número de vitórias:

$$S = \{(x; 24 - 3x; 2x - 12)\}$$

Como nos interessam apenas os casos em que  $0 < x < 12$ ,  $y > 0$  e  $z > 0$ , podemos atribuir a  $x$  apenas os valores 6, 7 e 8. Isso feito, teremos as seguintes possibilidades, expressas na tabela:

Vitória	Empate	Derrota	Total de jogos
8	0	4	12
7	3	2	12
6	6	0	12

## ATIVIDADE 29

Na feira livre da quarta-feira, Helena foi comprar ingredientes para fazer um bolo. O kit de ingredientes continha farinha de trigo, fubá e chocolate em pó, totalizando 2 kg, pelo custo de 4 reais. Intrigada com o valor do *kit*, Helena questionou o feirante sobre o preço de cada produto, ouvindo dele que o quilo da farinha de trigo custava 1 real, o quilo do chocolate em pó custava 20 reais, e o quilo do fubá custava 2 reais. Quanto de cada produto havia no *kit* que Helena comprou?

*Comentário:*

*Temos aqui um problema que não apresenta uma única solução e que pode ser resolvido por meio de um sistema indeterminado de equações lineares. De fato, os alunos poderão obter algumas das respostas antes que o professor apresente a eles a solução geral. Se esta for a opção do professor, propomos que conduza as discussões colocando para seus alunos questões como:*

- *É possível que o kit tenha sido composto por 800 g de farinha e 1 kg de fubá? Por quê?*

*Não, isto não seria possível, porque, nesse caso, os 200 gramas restantes deveriam ser de chocolate, o que faria com que o preço do kit se elevasse além dos 4 reais.*

- *Se no kit havia 100 g de chocolate, quanto havia de farinha e de fubá?*

*100 g de chocolate custam 2 reais. Sobram 2 reais para serem divididos entre farinha e fubá, em um total de 1,5 kg, o que nos permite escrever o seguinte sistema de duas equações, em que  $x$  representa a massa de farinha, em kg, e  $y$  representa a massa de fubá, também em kg:*

$$\begin{cases} x + y = 1,9 \\ x + 2y = 2,0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos  $y = 0,1$  e  $x = 1,8$ , isto é, havia 0,1 kg de fubá e 1,8 kg de farinha, ou 100 gramas de um produto e 1 kg e 800 gramas do outro. Apresentamos a solução geral do problema, considerando:

$x$ : farinha de trigo, em kg

$y$ : massa de fubá, em kg

$z$ : chocolate em pó, em kg

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 20z = 4 \end{cases}$$

Sistemas lineares dessa natureza, indeterminados, apresentam solução em função de uma das incógnitas. Faremos a opção de escrever a solução geral em função do chocolate em pó ( $z$ ). Assim, escrevemos as equações desta maneira:

$$\begin{cases} x + y = 2 - z & \text{(I)} \\ x + 2y = 4 - 20z & \text{(II)} \end{cases}$$

Por meio da subtração (II) – (I), temos:

$y = 2 - 19z$  (Quantidade de fubá em função da quantidade de chocolate) e fazendo 2 . (I) – (II), temos:

$x = 18z$  (Quantidade de farinha em função da quantidade de chocolate) Portanto, a solução geral do sistema é:

$$\{(18z, 2 - 19z, z)\}$$

Vale observar que não podemos ter valores negativos para qualquer das quantidades. Assim, será necessário que sejam obedecidas as seguintes condições:

$18z > 0$  e  $2 - 19z > 0$  e  $z > 0$ , ou, de outra forma, que  $z < 2/19$  ou ainda que a quantidade de chocolate em pó seja inferior a, aproximadamente, 105 gramas, pois  $2/19 \cong 0,105$  kg

## ATIVIDADE 30

Paulo realizou uma prova de Matemática formada por três partes. Paulo acertou 25% das questões da primeira parte, 50% das questões da segunda parte e 75% das questões da terceira parte, totalizando 120 pontos. O total máximo de pontos que qualquer aluno poderia obter na prova era igual a 230.

- Escreva uma equação linear que relacione a quantidade de pontos conseguidos por Paulo nessa prova ao percentual de acertos em cada parte. (**Sugestão: chame de  $x$ ,  $y$  e  $z$  os totais de pontos máximos possíveis em cada uma das três partes.**)
- Se o total máximo de pontos da primeira parte da prova é 60, e o total máximo da segunda é 90, quantos pontos Paulo fez na terceira parte?

Resolução:

- Paulo fez 25% de  $x$  + 50% de  $y$  + 75% de  $z$  e conseguiu fazer ao todo 120 pontos.

Veja:

- $25\% = 25/100 = 1/4$
- $50\% = 50/100 = 1/2$
- $75\% = 75/100 = 3/4$

Então, temos que:

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z = 120$$

b. Se  $x = 60$  e  $y = 90$ , podemos calcular  $z$ , pois  $60 + 90 + z = 230$ , então:

$$z = 230 - 60 - 90 \text{ isto é, } z = 80$$

Como Paulo fez 75% de  $z$ , ele fez 75% de  $z$ , ele fez 75% de 80, então temos que:

$$\frac{75}{100} \cdot 80 = \frac{3}{4} \cdot 80 = 3 \cdot 20 = 60$$

## ATIVIDADE 31

Observe a tabela a seguir, que contém os dados sobre a audiência de 3 redes de televisão em 3 períodos do dia.

Audiência	Manhã	Tarde	Noite	Pontos
Rede 1	2	4	-1	11
Rede 2	4	3	2	27
Rede 3	3	-2	2	10

Fonte: Elaborada pelos autores

Nessa tabela, cada ponto positivo indica que 1 000 pessoas estão com a televisão conectada à rede, e cada ponto negativo indica que 1 000 pessoas deixaram de sintonizar a rede no período avaliado.

Considerando que são atribuídos diferentes pesos à audiência, em função do período do dia, descubra o peso atribuído a cada um dos períodos.

**Resolução:**

Sejam:

$x$ : pontuação no período da manhã;

$y$ : pontuação no período da tarde;

$z$ : pontuação no período da noite.

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 11 & \text{(I)} \\ 4x + 3y + 2z = 27 & \text{(II)} \\ 3x - 2y + 2z = 10 & \text{(III)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por 2 e somando o resultado a equação (II) e multiplicando a equação (I) por 2 e somando o resultado a equação (III), temos:

$$\begin{array}{l} 2 \cdot \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 4x + 8y - 2z = 22 \\ 4x + 3y + 2z = 27 \end{array} \right.$$

$$8x + 11y = 49$$

E

$$2 \cdot \begin{cases} \text{(I)} & \left\{ \begin{array}{l} 4x + 8y - 2z = 22 \\ \text{(III)} & \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + 2z = 27 \\ \hline 7x + 6y = 32 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases}$$

$$7x + 6y = 32$$

$$8x + 11y = 49 \Rightarrow x = \frac{49 - 11y}{8} \quad \text{(IV)}$$

$$7x + 6y = 32 \Rightarrow x = \frac{32 - 6y}{7} \quad \text{(V)}$$

De (IV) e (V) temos que:

$$\begin{aligned} \frac{49 - 11y}{8} &= \frac{32 - 6y}{7} \Rightarrow \\ \Rightarrow 7 \cdot (49 - 11y) &= 8 \cdot (32 - 6y) = \\ = 343 - 77y &= 256 - 48y = -29y = -87 \Rightarrow y = 3 \end{aligned}$$

Desta forma,  $x = 2$  e  $z = 5$ . Portanto, a pontuação no período da manhã é igual a 2, no período da tarde é igual a 3 e no período da noite é igual a 5.

## TEMA 4 – RESOLUÇÃO DE SISTEMAS

### ESCALONAMENTO EM SITUAÇÕES PROBLEMAS.

Um sistema linear pode ser resolvido de mais de uma maneira. Uma delas consiste em utilizar o método da adição, exemplificado na resolução a seguir do sistema de duas equações:

$$\begin{cases} 2x & - & 3y & = & 11 \\ x & + & 2y & = & 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x & - & 3y & = & 11 \\ \xrightarrow{(-2)} & -2x & - & 4y & = & -4 \\ \hline & & & - & 7y & = & 7 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Se } y = -1 \Rightarrow x + 2 \cdot (-1) = 2 \Rightarrow x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4 \therefore S = (4, -1)$$

Esse procedimento de multiplicar as equações por números diferentes de zero para, em seguida, adicioná-las com o objetivo de eliminar uma incógnita, é generalizado para a resolução de sistemas de duas ou mais equações e é denominado método de **escalonamento**. Ao resolvermos sistemas pelo método de escalonamento, utilizamos, normalmente, matrizes formadas pelos coeficientes numéricos presentes nas equações. Para um sistema linear qualquer, podemos associar uma matriz denominada matriz **completa**, que é formada pelos coeficientes das incógnitas e também pelos termos independentes. Dizemos que o sistema linear está



**escalonado** quando realizamos combinações lineares entre as linhas da matriz completa, de modo a zerar todos os elementos  $a_{i,j}$  da matriz em que  $i > j$ . O exemplo seguinte retoma a resolução do sistema de equações anteriormente resolvido, explicitando o **escalonamento**.

Exemplo 1

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta é a matriz **completa** do sistema, formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes das duas equações. Para escaloná-la, devemos tornar nulo o elemento  $a_{21} = 1$ , que é o único elemento  $a_{ij}$  em que  $i > j$ .

$$L_1 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow L_1 - 2 \cdot L_2 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Aqui está a combinação linear entre as linhas 1 e 2 da matriz, gerando uma nova linha.

A matriz do sistema foi escalonada. Na nova equação da linha 2 da matriz temos:  
 $0x - 7y = 7$  ou  $y = -1$   
 Substituindo esse valor em uma das equações iniciais, obtém-se  $x = 4$ .

Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 2:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + 2z = 4 \end{cases}$$

$$M_{\text{completa}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Na matriz escalonada deverão ser nulos os valores destacados.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -2 \cdot L_1 + L_2 \\ -L_1 + L_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_1 + 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

A última linha da matriz nos fornece a equação:  $7z = 7 \rightarrow z = 1$ .

Substituindo o valor encontrado para  $z$  na segunda equação da matriz final, temos:

$$-3y - 4z = -4$$

$$-3y - 4 \cdot 1 = -4 \Rightarrow y = 0$$

A primeira linha da matriz nos ajuda a calcular o valor de  $x$ :

$$x + y + z = 3$$

$$x + 0 + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

## ATIVIDADE 32

Agora, resolva os seguintes sistemas lineares utilizando as técnicas de escalonamento:

$$\text{a. } \begin{cases} x - 2y + 2z = 4 \\ 2x + y + z = -1 \\ -3x - 14y + 19z = 63 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ -3x - 4y + z = 0 \\ 5x + 3y - 10z = 1 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 3y + z = 2 \\ -3x + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} x - 3y + 5z = 2 \\ 3x - y + 3z = 4 \\ -2x + 2y - 4z = -3 \end{cases}$$

Respostas:

$$\text{a. } S = \{(-2, 0, 3)\}$$

$$\text{b. } S = \{(-3, 2, -1)\}$$

$$\text{c. } S = \{(1, 0, 2)\}$$

$$\text{d. } S = \left\{ \left( \frac{5-2z}{4}, \frac{6z-1}{4}, z \right) \right\}, z \in \mathbb{R}$$

## ATIVIDADE 34

Determine o valor de  $m$  para que o sistema de equações seguinte seja indeterminado. Depois disso, com o valor obtido para  $m$ , encontre duas possíveis soluções reais, isto é, determine dois conjuntos de valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  que verifiquem simultaneamente as três equações.

$$\begin{cases} a + b + 2c = 1 \\ a - b - c = 0 \\ ma - b + c = 2 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{cases} a + b + 2c = 1 \\ a - b - c = 0 \\ ma - b + c = 2 \end{cases}$$

Somando a equação (I) a equação (II) e somando a equação (I) a equação (III), temos:

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array} \begin{cases} a + b + 2c = 1 \\ a - b - c = 0 \end{cases} \oplus$$

$$2a + c = 0$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} a + b + 2c = 1 \\ ma - b + c = 2 \end{array} \right. \oplus \\ \text{(III)} \quad & (m + 1)a + 3c = 3 \\ & \left\{ \begin{array}{l} 2a + c = 1 \\ (m + 1)a + 3c = 3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de duas equações por substituição. Temos:

$$\begin{aligned} c &= 1 - 2a \\ (m + 1)a + 3(1 - 2a) &= 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow ma + a + 3 - 6a &= 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow ma + a + 3 - 6a &= 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow ma + a + 3 - 6a &= 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m - 5)a &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a = 0 \text{ ou } m - 5 &= 0 \end{aligned}$$

- Se  $m - 5 = 0$ , ou seja,  $m = 5$ , o sistema é possível e indeterminado.

$$a + b + 2(1 - 2a) = 1 \Rightarrow b = 1 - a - 2 + 4a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 3a - 1$$

Portanto,  $S = \{(a, 3a - 1, 1 - 2a)\}$ . O enunciado pede duas soluções possíveis:

- Para  $a = 0$ , temos  $S = \{(0, -1, 1)\}$
- Para  $a = -1$ , temos  $S = \{(-1, -4, 3)\}$

## ATIVIDADE 35

Ana, Beto e Cadu foram comprar enfeites para a festa junina da escola. Em meio às compras, eles se perderam um do outro e resolveram, cada qual por sua conta, comprar aquilo que haviam combinado: pacotes de bandeirinhas, chapéus de palha e fantasias para a quadrilha. Quando se encontraram no dia seguinte na escola e perceberam que haviam comprado muito mais do que pretendiam, cada um tratou de se defender, argumentando sobre o quanto haviam gastado. Primeiro foi Ana:

- Gastei 62 reais, mas comprei 4 pacotes de bandeirinhas, 4 montões de chapéus e 4 fantasias.

Depois, veio Beto:

- Eu comprei a mesma quantidade de enfeites que você, mas gastei menos, porque consegui 10% de desconto no preço dos chapéus. Quer dizer, gastei 60 reais.

Por último, falou Cadu:

- Pois é, gente, eu comprei apenas a metade de cada enfeite que cada um de vocês comprou, mas, comparativamente, gastei bem menos, porque consegui 20% de desconto no preço das bandeirinhas e 10% no preço dos chapéus. Daí, gastei 29 reais.

Sabendo que o preço pago pela unidade de cada artigo foi o mesmo para os três jovens, responda:

Quanto custou para Ana cada pacote de bandeirinhas, cada montão de chapéus e cada fantasia?

Resolução:

Sejam:

B: preço das bandeirinhas;

C: preço dos chapéus;

F: preço das fantasias.

Transcrevendo os dados da situação-problema, para um sistema de equações lineares, temos:

$$\begin{cases} \text{(I)} & 4B + 4C + 4F = 62 \\ \text{(II)} & 4B + 4C \cdot (0,9) + 4F = 60 \\ \text{(III)} & 2B \cdot (0,8) + 2C \cdot (0,9) + 2F = 29 \end{cases}$$

Subtraindo a equação (II) da equação (I), temos:

$$4C - 3,6C = 2 \Rightarrow 0,4C = 2 \Rightarrow C = 5$$

Substituindo o valor de C nas equações (I) e (III), temos:

$$\text{(I)} \quad 4B + 20 + 4F = 62$$

$$\text{(III)} \quad 1,6B + 9 + 2F = 29$$

Então, temos que:

$$\begin{cases} \text{(II)} & 4B + 4F = 42 \\ \text{(III)} & 1,6B + 2F = 20 \end{cases}$$

Dividindo a equação (IV) por dois, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \text{(IV)} & 2B + 2F = 21 \\ \text{(V)} & 1,6B + 2F = 20 \end{cases}$$

Subtraindo a equação (V) da equação (IV), temos:

$$2B - 1,6B = 1 \Rightarrow 0,4B = 1 \Rightarrow B = 2,5$$

Portanto, para Ana, o preço das bandeirinhas foi R\$ 2,50; dos chapéus, 5 reais, e das fantasias, 8 reais.

Outra resolução possível, diferente da apresentada, baseia-se no fato de que Ana e Beto compraram quantidades iguais, mas Beto gastou 2 reais a menos do que Ana. Assim, é possível concluir que esses 2 reais correspondem a 10% do preço de 4 montões de chapéus. Então, se 10% correspondem a 2 reais, 100% correspondem a 20 reais. Logo, Ana gastou 20 reais na compra de 4 montões de chapéus, o que significa ter pago 5 reais por montão.

**ATIVIDADE 36**

Ernesto e Adamastor participaram de uma competição que avaliou suas pontarias. Tudo era muito rápido. Eles ficavam em uma sala, com várias bolas de borracha na mão, enquanto três alvos eram projetados rapidamente em uma parede. O objetivo era acertar em cada alvo a maior quantidade de bolas que conseguissem.

Primeiro foi Adamastor. Ele acertou três bolas no alvo 1, duas bolas no alvo 2 e apenas uma bola no alvo 3. Ernesto, por sua vez, acertou uma bola no alvo 1, duas bolas no alvo 2 e duas bolas no alvo 3. Cada bola certa valia uma quantidade de pontos que dependia do alvo acertado. Quer dizer, o alvo 1 não tinha a mesma pontuação do alvo 2 nem do alvo 3, assim como os alvos 2 e 3 também tinham pontuações diferentes.

Ao final da prova, Adamastor e Ernesto terminaram empatados, com 40 pontos cada um, mas ficaram sem saber quanto valia cada bola acertada em cada alvo.

- É possível que cada bola certa nos alvos 1, 2 e 3 tenha valido, respectivamente, 4, 16 e 3 pontos?
- Supondo que cada bola certa no alvo 1 tenha valido  $x$  pontos, encontre, em função de  $x$ , o total de pontos de cada bola certa no alvo 2 e também no alvo 3.

Resolução:

- Vamos considerar o seguinte sistema de equações para representar as pontuações de cada jogador:

Sejam:

$x$ : alvo 1;

$y$ : alvo 2;

$z$ : alvo 3.

Logo, temos que:

$$\begin{array}{l} \text{(Adamastor)} \\ \text{(Ernesto)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 40 \\ x + 2y + 2z = 40 \end{array} \right.$$

Se cada bola certa nos alvos 1, 2 e 3 tiver valido, respectivamente, 4, 16 e 3 pontos, então vamos substituir os valores das pontuações nas incógnitas do sistema:

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot 16 + 3 = 12 + 32 + 3 = 47 \neq 40$$

$$4 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 3 = 4 + 32 + 6 = 42 \neq 40$$

Logo, não é possível que os alvos tenham esses valores.

- Considerando o sistema de equações do item anterior, temos que:

$$\begin{array}{l} \text{(Adamastor)} \\ \text{(Ernesto)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 40 \\ x + 2y + 2z = 40 \end{array} \right.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira temos:

$$2x - z = 0 \Rightarrow z = 2x$$

Substituindo na primeira equação do sistema, temos que:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 40 \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= \frac{40 - z - 3x}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= \frac{40 - 2x - 3x}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= \frac{40 - 5x}{2} \end{aligned}$$

Portanto,  $S = \left\{ \left( x, \frac{40 - 5x}{2}, 2x \right), x \in \mathbb{R} \right\}$ , ou seja, o total de pontos de cada bola certa nos alvos 2 e 3, em função de  $x$ , é respectivamente:  $\frac{40 - 5x}{2}$  e  $2x$ .

## ATIVIDADE 37

Encontre o conjunto solução dos sistemas caso seja possível.

a. 
$$\begin{cases} x + 7y - 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ 7x + 3y - z = -1 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -3x + 9y = -15 \end{cases}$$

Resolução:

a. 
$$M_{\text{completa}} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 3L_1 - L_2 \\ 7L_1 - L_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 23 & -10 & -1 \\ 0 & 46 & -20 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 23 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

De acordo com o resultado, temos que  $0 = -3$ , o que torna o sistema impossível.

b. 
$$M_{\text{completa}} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ -3 & 9 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ -3 & 9 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{1}{2}L_1 \\ -\frac{1}{3}L_2 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Trata-se de um sistema com duas variáveis e apenas uma equação, ou seja, um sistema indeterminado, com  $x = 5 + 3y$ .

Portando a solução desse sistema é dada por:  $S = \{(5+3y, y)\}$ , com  $y \in \mathbb{R}$ .

## ATIVIDADE 38

Em uma compra de 3 quilos de batata, 0,5 quilo de cenoura e 1 quilo de abobrinha, Arnaldo gastou R\$ 14,45, porque não pediu desconto ao seu Manuel, dono da barraca na feira livre. Juvenal, por sua vez, comprou 2 quilos de batata, 1 quilo de cenoura e 2 quilos de abobrinha, pediu desconto de 50 centavos no preço do quilo da batata e de 20 centavos no preço do quilo da abobrinha, e gastou R\$ 11,50. Rosa, conhecida antiga de seu Manuel, conseguiu desconto de R\$ 1,00 no preço do quilo da batata, 50 centavos de desconto no preço do quilo da cenoura, e 20 centavos de desconto no preço da abobrinha, gastando, no total, R\$ 18,00 pela compra de 3 quilos de cada produto. Quanto seu Manuel cobra, sem descontos, pelo quilo da batata?

Resolução:

Sejam:

a: preço da abobrinha;

b: preço da batata;

c: preço da cenoura.

Temos:

$$\begin{cases} 3b + 0,5c + a = 14,45 & \text{(Arnaldo)} \\ 2(b-0,5) + c + 2(a-0,2) = 11,50 & \text{(Juvenal)} \\ 3(b-1) + 3(c-0,5) + 3(a-0,2) = 18,00 & \text{(Rosa)} \end{cases}$$

Efetuando e ordenando o sistema, temos:

$$\begin{cases} a + 3b + 0,5c = 14,45 \\ 2a + 2b + c = 12,90 \\ 3a + 3b + 3c = 23,10 \end{cases} \Rightarrow M_{\text{completa}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0,5 & 14,45 \\ 2 & 2 & 1 & 12,90 \\ 3 & 3 & 3 & 23,10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0,5 & 14,45 \\ 2 & 2 & 1 & 12,90 \\ 3 & 3 & 3 & 23,10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 2 \cdot L_1 - L_2 \\ 6 \cdot L_1 - L_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0,5 & 14,45 \\ 0 & 4 & 0 & 16,00 \\ 3 & 15 & 0 & 63,60 \end{pmatrix}$$

Da linha 2 da matriz, temos que:  $4b = 16 \Rightarrow b = 4$

Da linha 3 da matriz, temos que:

$3a + 15b = 63,60$  e como  $b=4$ , obtemos:  $3a + 15 \cdot 4 = 63,60 \Rightarrow 3a = 3,60 \Rightarrow a = 1,20$

Sendo:  $a = 1,20$  e  $b = 4,00$  o valor de  $c$  será encontrado da seguinte forma:

$$a + 3b + 0,5c = 14,45 \Rightarrow 1,20 + 3 \cdot 4 + 0,5c = 14,45 \Rightarrow 0,5c = 14,45 - 13,20 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0,5c = 1,25 \Rightarrow c = 2,5$$

Portanto, seu Manoel cobra R\$ 4,00 pelo quilo de batatas, R\$ 1,20 pelo quilo de abobrinhas e R\$ 2,50 pelo quilo de cenouras.

## TEMA 5 – DETERMINANTE DE UMA MATRIZ E ALGUMAS APLICAÇÕES

### ATIVIDADE 39

Encontre o valor dos determinantes das seguintes matrizes:

a.  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0,3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

b.  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ , onde  $a_{ij} = i + j$

Resolução:

a.  $\text{Det } A = \frac{1}{2} \cdot 8 - 0,3 \cdot 3 = 4 - 0,9 = 3,1$

b. Primeiramente vamos encontrar a matriz gerada pela lei de formação  $a_{ij} = i + j$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Então,  $\text{Det } A = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1$

### ATIVIDADE 40

Considere a matriz A dada por:  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ .

Ao calcular o seu determinante temos:

- $aei + dch + bfg - ceg - bdi - afh$ .
- $aei + dch + bfg + ceg + bdi + afh$ .
- $ceg + bdi + afh - aei - dch - bfg$ .
- $abc + def + ghi - adg - beh - cfi$ .
- $aei - ceg + bfi - bdg + aeh - ceh$ .



Resolução:

Aplicando a Regra de Sarrus, temos que:

$$\text{Det } A = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

## ATIVIDADE 41

Uma pesquisa foi realizada com um grupo de 500 crianças de 3 a 12 anos de idade. Para esse grupo, em função da idade  $x$  da criança, concluiu-se que o peso médio  $p(x)$ , em quilogramas, era dado pelo determinante da matriz  $A$ , em que:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -x \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

Com base na fórmula:  $p(x) = \det A$ , determine:

- o peso médio de uma criança de 7 anos;
- a idade mais provável de uma criança cuja o peso é 30 kg.

Resolução:

- Seja o  $\det A = 2x + 8$ . Como o "peso" (massa) médio, em quilogramas, é dado por  $p(x) = \det A$ , onde  $x$  é a idade da criança:

$$p(5) = 2 \cdot 5 + 8 = 18 \text{ kg.}$$

- $p(x) = 30 \Rightarrow 2x + 8 = 30 \Rightarrow x = 11$  anos

## ATIVIDADE 42

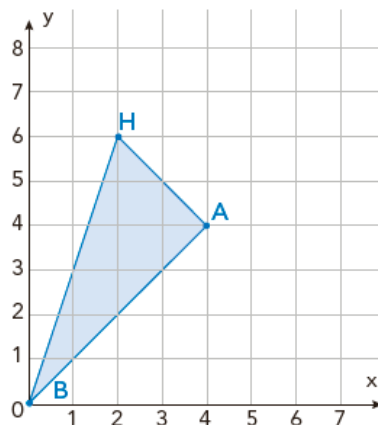
Encontre a solução dos sistemas da atividade número 32 utilizando a regra de Cramer.

Resolução:

Professor é importante destacar que o aluno poderá optar pelo escalonamento ou pela regra de Cramer desde que o número de equações seja o mesmo do número de incógnitas, caso contrário deverá utilizar escalonamentos, método da adição ou método da substituição por exemplo.

## ATIVIDADE 43

Qual é a área do triângulo BAH de vértices  $B(0, 0)$ ,  $A(4,4)$  e  $H(2,6)$ , representado no sistema de eixos cartesianos da figura a seguir:



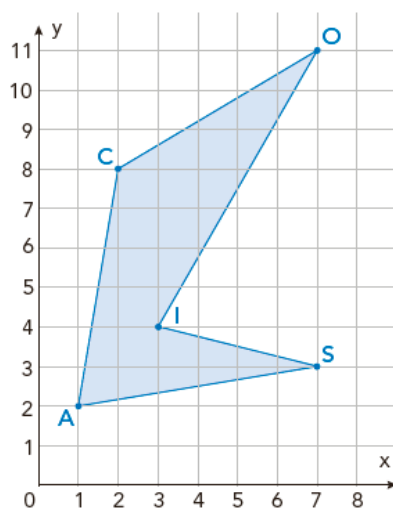
Fonte: Elaborada pelos autores.

Resolução:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \|D\| \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8u.a$$

## ATIVIDADE 44

Calcule a área do pentágono COISA, representado a seguir:



Fonte: Elaborada pelos autores

Resolução:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \|D\| \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 11 \\ 3 & 4 \\ 7 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot |(22 + 24 + 9 + 14 + 8) - (48 + 32 + 28 + 3 + 4)|$$

$$A = \frac{1}{2} |77 - 116| = \frac{39}{2} \text{ u} \cdot \text{a}$$

# MATEMÁTICA

## 3ª SÉRIE – ENSINO MÉDIO

### 1º BIMESTRE

## ORGANIZAÇÃO DAS GRADES CURRICULARES

Apresentamos a seguir uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais da Base Nacional Comum (BNCC) do Ensino Médio, além de algumas orientações pedagógicas, para as três séries que compõe o referido estágio de ensino da escolaridade básica.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

Currículo Oficial – BNCC - SP		Currículo Paulista – E.M.
Tema/Conteúdo	Habilidades	Competência Geral
Geometria/Relações <ul style="list-style-type: none"> <li>• Geometria analítica.</li> <li>• Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos.</li> <li>• Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares.</li> <li>• Ponto e reta: distância.</li> <li>• Circunferência: equação</li> <li>• Reta e circunferência: posições relativas.</li> <li>• Cônicas: noções, equações, aplicações</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações;</li> <li>• saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas;</li> <li>• saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares.</li> <li>• saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas.</li> </ul>	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

## FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Normalmente o desenvolvimento dos conceitos relativos à Geometria Analítica, inicia-se pelo estudo da equação da reta, apresentada de um modo peculiar, na qual se destaca certa classe de problemas cuja solução depende apenas de uma compreensão adequada da ideia de proporcionalidade subjacente. São os chamados problemas lineares entre os quais estão alguns problemas de máximos e mínimos muito interessantes.

Consideramos, que o tema das retas, com suas equações, propriedades e aplicações pode ser especialmente representativa do significado da Geometria Analítica como um método de abordagem dos problemas geométricos que contempla o ideal cartesiano – ou o “plano” de Descartes, que buscava uma aproximação efetiva entre a Geometria e a Álgebra.

Desta forma, é importante, que o Professor, tenha como objetivo, as seguintes características na abordagem deste conteúdo:

- consolidação do uso de sistemas de coordenadas cartesianas XOY, já iniciado em séries anteriores. Tal sistema será utilizado para representar pontos do plano, determinando-se, por exemplo, a distância entre dois pontos, o ponto médio e a inclinação do segmento determinado pelos dois pontos.
- consolidação da ideia de inclinação de um segmento, buscando a caracterização de segmentos paralelos quanto na condição de alinhamento de três pontos, uma vez que para três pontos (A, B e C) estarem alinhados, as inclinações das retas AB, BC e AC devem ser iguais.

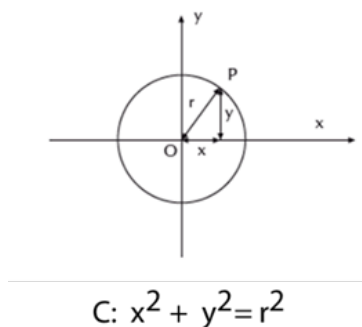
Com base nessas condições iniciais, é possível propor e resolver uma série de problemas geométricos simples, em que a aprendizagem do método analítico situa-se no centro das atenções.

Em continuidade, explora-se a representação de curvas por equações, iniciando-se com a reta. Os casos particulares das retas paralelas aos eixos coordenados, lembrando-se que neste caso, serão tratados diretamente, de modo simples. Para as retas inclinadas em relação aos eixos OX e OY, a qualidade comum a todos a seus pontos é o fato de que qualquer que seja o par de representantes que escolhermos, a inclinação do segmento correspondente é sempre a mesma: tal inclinação constante é o coeficiente angular da reta ( $m$ ). Assim, facilmente se chega à equação  $y = mx + h$ , em que o coeficiente  $m$  representa a inclinação da reta, e  $h$  representa o ponto em que a reta corta o eixo OY. A caracterização de retas concorrentes e paralelas, com base nas inclinações correspondentes, é uma consequência natural.

Com relação à perpendicularidade de duas retas, estuda-se a inclinação de , de tal forma que se , então as retas serão perpendiculares. Um outro tópico importante no estudo analítico das retas é a forma geral da equação da reta, bem como, a representação de regiões do plano por meio de desigualdades.

Finalizando o estudo, tendo em vista a resolução de alguns problemas lineares, ou seja, problemas que envolvem apenas relações de proporcionalidade direta, incluindo-se alguns de problemas de máximos e mínimos. Apesar de problemas como esses não serem apresentados no Ensino Médio, pedimos ao professor que os leia com atenção, pois certamente perceberá que constituem situações simples em contextos interessantes.

Após o estudo das retas, o próximo conteúdo é a equação da circunferência com centro na origem do sistema de coordenadas. O tempo disponível pelo professor deverá determinar o nível de exploração de tal equação, deixando-se à escolha do professor o estudo das translações da equação ou da forma geral da equação da circunferência.



O próximo assunto referente ao estudo da equação da circunferência seria o cálculo da distância de um ponto a uma reta, baseado apenas na inclinação  $m$  da reta. Complementando tal cálculo, poderá ser feito um estudo simplificado das posições relativas entre retas e circunferências.

Encerrando os conteúdos relativos ao 1º bimestre letivo, estudamos as cônicas são apresentadas e caracterizadas por meio de propriedades de diversas maneiras. Além de constituírem intersecções de um plano com uma superfície cônica, o que lhes garante a denominação, a elipse é uma circunferência "achatada"; a hipérbole surge na representação de grandezas inversamente proporcionais; e a parábola, na representação de uma grandeza que é proporcional ao quadrado de outra. Complementarmente, as cônicas também são apresentadas pelas suas importantes propriedades características em relação aos focos.

As equações da elipse, da hipérbole e da parábola, são apresentadas em posições convenientes em relação aos eixos de coordenadas, de modo a simplificar os cálculos. Uma extensão de tal estudo, conduzindo a equações mais gerais, pode ser dispensada ou adiada para o momento, pois serão aprofundadas posteriormente.

Os tópicos apresentados podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem:

- **Situação de Aprendizagem 1:** A Geometria e o método das coordenadas, Vol.1, 3ª série do Ensino Médio, p. 12 a 21;
- **Situação de Aprendizagem 2:** A reta, a inclinação constante e a proporcionalidade, Vol.1, 3ª série do Ensino Médio, p. 22 a 33.
- **Situação de Aprendizagem 3:** Problemas lineares – Máximos e Mínimos, Vol. 1, 3ª série do Ensino Médio, p. 33 a 43.
- **Situações de Aprendizagem 4:** Circunferências e cônicas: significados, equações, aplicações, Vol.1, 3ª série do Ensino Médio, p. 43 a 59

Além das situações de aprendizagem, sugerimos alguns recursos audiovisuais, da plataforma Matemática Multimídia:

- Estradas para estação, disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1015> (acesso em 18/03/2019);



- Montanhas geométricas, disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1021> (acesso em 18/03/2019);



Tesouro cartesiano, disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1183> (acesso em 18/03/2019).

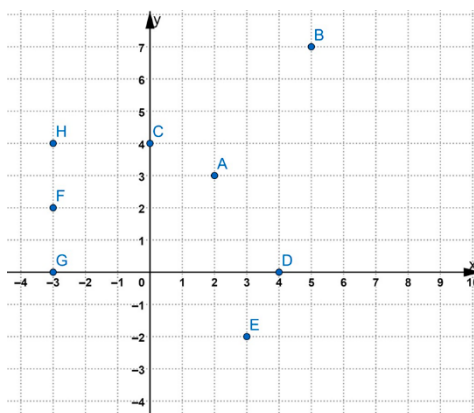


## ATIVIDADES

### TEMA 1 – A GEOMETRIA E O MÉTODO DAS COORDENADAS

#### ATIVIDADE 1

Observe os pontos indicados no plano cartesiano, conforme mostra a figura a seguir:



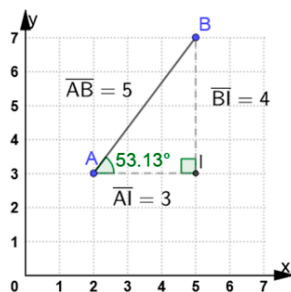
Fonte: Elaborada pelos autores

Preencha a tabela a seguir, conforme os dados informados na figura.

Pontos	Distância	Inclinação	Equação da reta
A e B	$(\overline{AB}) = 5$	$m = \frac{3}{4}$	$-\frac{4x}{3} + y - \frac{1}{3} = 0$
A e D	$(\overline{AD}) = \sqrt{13}$	$m = -\frac{3}{2}$	$\frac{3x}{2} + y - 6 = 0$
A e G	$(\overline{AG}) = \sqrt{34}$	$m = \frac{3}{5}$	$-\frac{3x}{3} + y - \frac{9}{5} = 0$
D e E	$(\overline{DE}) = \sqrt{5}$	$m = 2$	$-2x + y + 8 = 0$
E e G	$(\overline{EG}) = 4\sqrt{10}$	$m = -\frac{1}{3}$	$\frac{1x}{3} + y + 1 = 0$
F e A	$(\overline{FA}) = \sqrt{26}$	$m = \frac{1}{5}$	$-\frac{1x}{5} + y - \frac{13}{5} = 0$
H e C	$(\overline{HC}) = 3$	$m = 0$	$y - 4 = 0$
H e G	$(\overline{HG}) = 5$	Indefinido	$x = -3$

Resolução:

Pontos: A (2, 3) e B (5, 7)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{AB})^2 = (5-2)^2 + (7-3)^2$$

$$(\overline{AB})^2 = 3^2 + 4^2$$

$$(\overline{AB})^2 = 9 + 16$$

$$(\overline{AB})^2 = 25$$

$$\sqrt{(\overline{AB})^2} = \sqrt{25}$$

$$(\overline{AB}) = 5$$



Inclinação:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{CO}{CA}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$m = \frac{3}{4}$$

Equação da reta:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

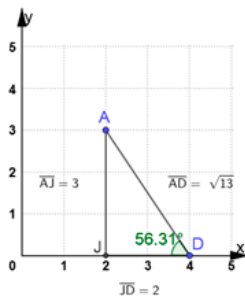
$$(y_1 - 7) = \frac{4}{3} \cdot (x_1 - 5)$$

$$y - 7 = \frac{4x}{3} - \frac{20}{3}$$

$$-\frac{4x}{3} + y - 7 + \frac{20}{3} = 0$$

$$-\frac{4x}{3} + y - \frac{1}{3} = 0$$

Pontos: A (2, 3) e D (4, 0)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{AD})^2 = (4 - 2)^2 + (3 - 0)^2$$

$$(\overline{AD})^2 = 2^2 + 3^2$$

$$(\overline{AD})^2 = 4 + 9$$

$$(\overline{AD})^2 = 13$$

$$\sqrt{(\overline{AD})^2} = \sqrt{13}$$

$$(\overline{AD}) = \sqrt{13}$$

Inclinação:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{CO}{CA}$$

$$\operatorname{tga} = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$m = -\frac{3}{2}$$

Equação da reta:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

$$(y_1 - 3) = -\frac{3}{2} \cdot (x_1 - 2)$$

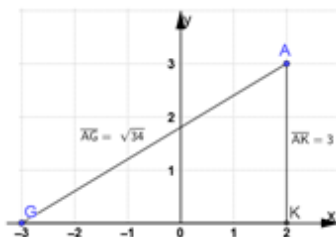
$$y - 3 = -\frac{3x}{2} + \frac{6}{2}$$

$$y - 3 = -\frac{3x}{2} + 3$$

$$\frac{3x}{2} + y - 3 - 3 = 0$$

$$\frac{3x}{2} + y - 6 = 0$$

Pontos: A (2, 3) e G (-3,0)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{AG})^2 = (-3 - 2)^2 + (3 - 0)^2$$

$$(\overline{AG})^2 = (-5)^2 + 3^2$$

$$(\overline{AG})^2 = 25 + 9$$

$$(\overline{AG})^2 = 34$$

$$\sqrt{(\overline{AG})^2} = \sqrt{34}$$

$$(\overline{AG}) = \sqrt{34}$$

Inclinação:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{CO}{CA}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$m = \frac{3}{5}$$

Equação da reta:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

$$(y_1 - 3) = \frac{3}{5} \cdot (x_1 - 2)$$

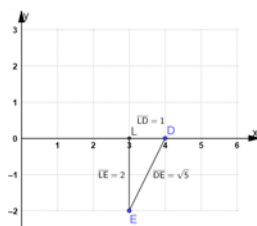
$$y - 3 = \frac{3x}{5} - \frac{6}{5}$$

$$-\frac{3x}{5} + y - 3 + \frac{6}{5} = 0$$

$$-\frac{3x}{5} + y - \frac{15}{5} + \frac{6}{5} = 0$$

$$-\frac{3x}{5} + y - \frac{9}{5} = 0$$

Pontos: D (4, 0) e E (3, -2)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{DE})^2 = (4 - 3)^2 + (0 - (-2))^2$$

$$(\overline{DE})^2 = (1)^2 + 2^2$$

$$(\overline{DE})^2 = 1 + 4$$

$$(\overline{DE})^2 = 5$$

$$\sqrt{(\overline{DE})^2} = \sqrt{5}$$

$$(\overline{DE}) = \sqrt{5}$$

Inclinação:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{CO}{CA}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$m = \frac{2}{1}$$

$$m = 2$$

Equação da reta:

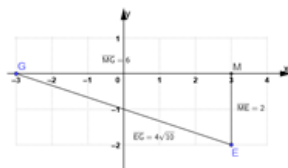
$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

$$(y_1 - 0) = 2 \cdot (x_1 - 4)$$

$$y = 2x - 8$$

$$-2x + y + 8 = 0$$

Pontos: E (3, -2) e G (-3, 0)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{EG})^2 = (-3 - 3)^2 + (-2 - 0)^2$$

$$(\overline{EG})^2 = (-6)^2 + (-2)^2$$

$$(\overline{EG})^2 = 36 + 4$$

$$(\overline{EG})^2 = 40$$

$$\sqrt{(\overline{EG})^2} = \sqrt{40}$$

$$(\overline{EG}) = 4\sqrt{10}$$

Inclinação:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{CO}{CA}$$

$$\operatorname{tga} = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$m = -\frac{2}{6}$$

$$m = -\frac{1}{3}$$

Equação da reta:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

$$(y_1 - (-2)) = -\frac{1}{3} \cdot (x_1 - 3)$$

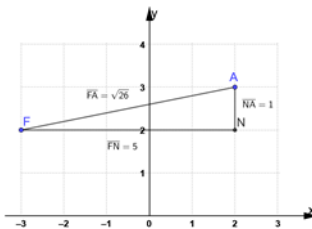
$$y + 2 = -\frac{1x}{3} + \frac{3}{3}$$

$$y + 2 = -\frac{1x}{3} + 1$$

$$\frac{1x}{3} + y + 2 - 1 = 0$$

$$\frac{1x}{3} + y + 1 = 0$$

Pontos: F (-3, 2) e A (2, 3)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{FA})^2 = (-3 - (2))^2 + (2 - 3)^2$$

$$(\overline{FA})^2 = (-5)^2 + (-1)^2$$

$$(\overline{FA})^2 = 25 + 1$$

$$(\overline{FA})^2 = 26$$

$$\sqrt{(\overline{FA})^2} = \sqrt{26}$$

$$(\overline{FA}) = \sqrt{26}$$

Inclinação:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{CO}{CA}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$m = \frac{1}{5}$$

Equação da reta:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

$$(y_1 - 3) = \frac{1}{5} \cdot (x_1 - 2)$$

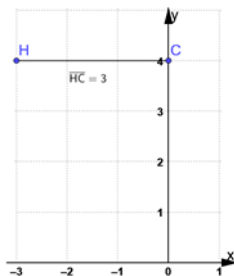
$$y - 3 = \frac{1x}{5} - \frac{2}{5}$$

$$-\frac{1x}{5} + y - 3 + \frac{2}{5} = 0$$

$$-\frac{1x}{5} + y - \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = 0$$

$$-\frac{1x}{5} + y - \frac{13}{5} = 0$$

Pontos: H (-3, 4) e C (0, -4)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{HC})^2 = (-3 - 0)^2 + (0)^2$$

$$(\overline{HC})^2 = (-3)^2$$

$$(\overline{HC})^2 = 9$$

$$\sqrt{(\overline{HC})^2} = \sqrt{9}$$

$$(\overline{HC}) = 3$$

Inclinação:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\alpha = \frac{CO}{CA}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

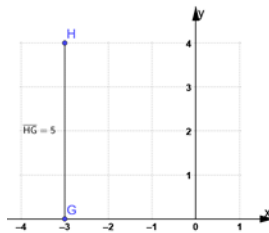
$$m = \frac{0}{3}$$

$$m = 0$$

Equação da reta:

$$\begin{aligned}(y_1 - y_0) &= m(x_1 - x_0) \\ (y_1 - 4) &= 0 \cdot (x_1 - (-3)) \\ y - 4 &= 0\end{aligned}$$

Pontos: H  $(-3,4)$  e G  $(-3,0)$



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$\begin{aligned}(\overline{HG})^2 &= (0)^2 + (0 - 5)^2 \\ (\overline{HG})^2 &= (-5)^2 \\ (\overline{HG})^2 &= 25 \\ \sqrt{(\overline{HG})^2} &= \sqrt{25} \\ (\overline{HG}) &= 5\end{aligned}$$

Inclinação:

$$\begin{aligned}m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{CO}{CA} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} \\ m &= \frac{4}{0} \\ m &= \text{indefinido}\end{aligned}$$

Equação da reta:

$$X = -3$$

## ATIVIDADE 2

Na tabela a seguir, são informadas na primeira linha e, coluna algumas equações de reta. Indique nas células de interseção da linha com a coluna se as retas são concorrentes ou paralelas.

	$y = 2x - 2$	$y = 3x$	$y = \frac{1}{4}x$
$y = 2x - 1$	Paralelas	Concorrentes	Concorrentes
$y = \frac{1}{4}x + 2$	Concorrentes	Concorrentes	Paralelas
$y = 2x$	Paralelas	Concorrentes	Concorrentes

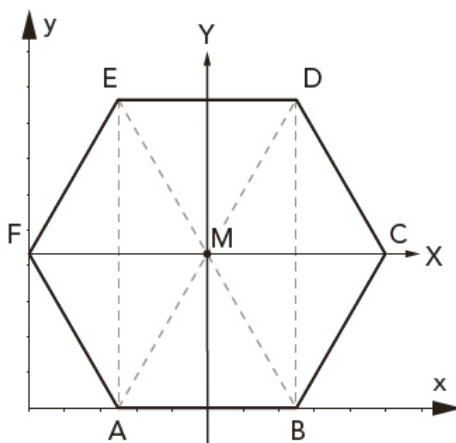
Fonte: Elaborada pelos autores

*Quando os coeficientes angulares são iguais as retas serão paralelas ( $m_1 = m_2$ )*

*Quando os coeficientes angulares são diferentes as retas serão concorrentes ( $m_1 \neq m_2$ )*

## ATIVIDADE 3

O hexágono regular ABCDEF tem centro M, como mostra a figura a seguir, e cada lado tem 10 unidades de comprimento. Utilizando os sistemas de coordenadas xOy e XMY.



Fonte: Elaborada pelos autores

Determine:

- as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E e F;
- as coordenadas do ponto M, centro do hexágono;
- a inclinação dos segmentos AD e BE;
- as coordenadas do ponto médio dos segmentos: AE e BD;



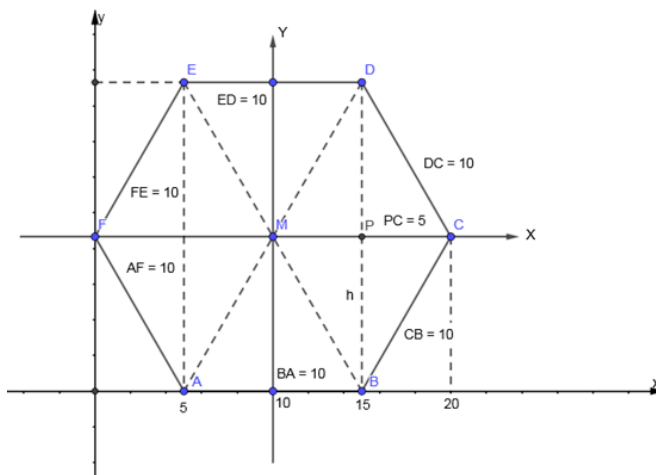
Resolução:

a. Como o hexágono é regular ele é formado por seis triângulos equiláteros, logo a distância entre  $\curvearrowright$   $\curvearrowright$   $m^2$ , sendo assim as coordenadas dos pontos são:

Ponto A = (5, 0);

Ponto B = (15, 0);

Para o ponto C, é preciso considerar que a coordenada y do ponto é igual a altura do triângulo MBC, considerando essa altura igual a h temos:



Fonte: Elaborada pelos autores

$$h^2 + 5^2 = 10^2$$

$$h^2 = 100 - 25 \Rightarrow h^2 = 75$$

$$h = \sqrt{75} \Rightarrow h = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

A partir desse resultado, para o sistema xOy, temos:

Para ponto C, temos que o segmento FC mede 20 unidades, e dista verticalmente da origem na altura h, então as coordenadas deste ponto será representada da seguinte maneira: C (20,  $5\sqrt{3}$ )

Temos que, se h é a altura do triângulo MCB, então, existe um ponto médio (P) ao segmento MC, de tal forma que  $\overline{MP} = \overline{PC} = 5$ . Portanto, a abscissa do ponto D, será a composição da medida do segmento FM = 10 unidades e do segmento MP, de medida 5, resultando no segmento FP com medida de 15 unidades.

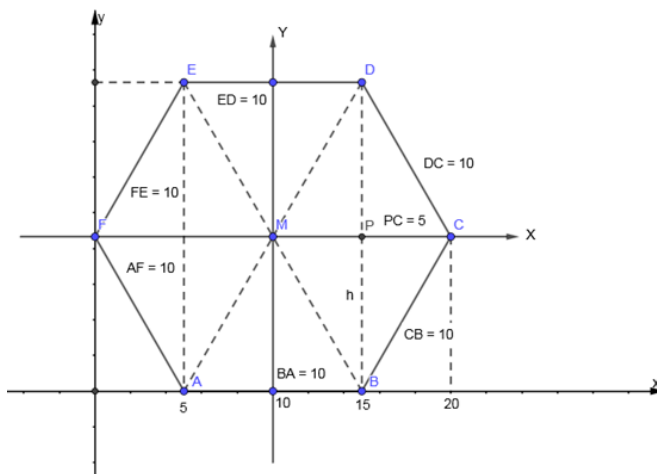
Se o polígono ABCDE é um hexágono, então, temos que ele possui 6 triângulos equiláteros, então temos que:  $\triangle MCB \cong \triangle MCD \therefore \overline{PB} = \overline{PD} = 5\sqrt{3}$ , sabendo-se disto, temos que o segmento BD mede  $10\sqrt{3}$  unidades.

Portanto, as coordenadas do ponto D será: D (15,  $10\sqrt{3}$ )

Utilizando o mesmo raciocínio, obtemos as coordenadas dos pontos E e F, conforme segue: E (5,  $10\sqrt{3}$ ) e F (0,  $5\sqrt{3}$ ).

b. O ponto M Tem como coordenada o par (10,  $5\sqrt{3}$ )

O gráfico a seguir, mostra as coordenadas dos pontos, solicitados:



Fonte: Elaborada pelos autores

c. a inclinação dos segmentos AD e BE;

Segmento AD

A (5, 0) e D (15,  $10\sqrt{3}$ )

$$m_{\overline{AD}} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{10\sqrt{3} - 0}{15 - 5} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$$

A inclinação calculada, corresponde à tangente do ângulo de  $60^\circ$ .

Segmento BE

B (15, 0) e E (5,  $10\sqrt{3}$ )

$$m_{\overline{BE}} = \frac{y_E - y_B}{x_E - x_B} = \frac{10\sqrt{3} - 0}{5 - 15} = \frac{10\sqrt{3}}{-10} = -\sqrt{3}$$

d. as coordenadas do ponto médio dos segmentos: AE e BD

A (5, 0); E (5,  $10\sqrt{3}$ ); B (15, 0) e D (15,  $10\sqrt{3}$ )

Segmento AE

$$x_M = \frac{x_A + x_E}{2} = \frac{5 + 5}{2} = 5$$

$$y_M = \frac{y_A + y_E}{2} = \frac{0 + 10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$M_{\overline{AE}} = (5, 5\sqrt{3})$$

Segmento BD

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{15 + 15}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$y_M = \frac{0 + 10\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$M_{\overline{BD}} = (15, 5\sqrt{3})$$

Observem que os dois pontos médios estão na mesma altura, alterando a coordenada do eixo x.

## ATIVIDADE 4

Dados os pontos A (1, 3), B (3, 7) e C (4, k):

- determine o valor de k para que esses pontos estejam alinhados.
- determine o valor de k para que a área do triângulo ABC seja igual a zero.
- sendo  $k = 3$ , desenhe o triângulo ABC e calcule sua área

Resolução:

- Para que três pontos, no caso, A, B e C, estejam alinhados, necessariamente temos que considerar:  $m_{\overline{AB}} = m_{\overline{BC}}$

Então:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - 3}{3 - 1} = 2$$

$$m_{\overline{BC}} = \frac{y_C - y_b}{x_c - x_b} = \frac{k - 7}{4 - 3} = k - 7$$

$$\text{Como } m_{\overline{AB}} = m_{\overline{BC}} \Rightarrow 2 = k - 7 \Rightarrow k = 9$$

Como

Podemos também utilizar a seguinte definição:

Três pontos são colineares (alinhados) quando o determinante da matriz formada pelas coordenadas desses pontos for igual a zero, ou seja:

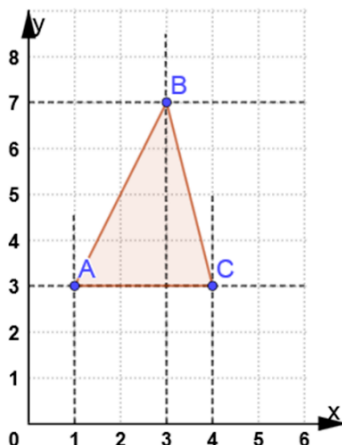
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & k & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & k & 1 & 4 & k \end{vmatrix}$$

$-28$     $-k$     $-9$     $+7$     $+12$     $+3k$

$$-37 - k + 19 + 3k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -18 + 2k = 0 \Rightarrow 2k = 18 \Rightarrow k = 9$$

- b. A área do triângulo ABC será nula quando os três pontos estiverem alinhados, ou seja, quando  $k = 9$ . É interessante aproximar essas duas informações, sempre que três pontos estão alinhados, a área do triângulo formado por eles é nula e vice-versa.
- c. O triângulo ABC, será representado graficamente no plano cartesiano da seguinte maneira:



Fonte: Elaborada pelos autores

Observando a figura, verificamos que o segmento AC mede 3 unidades e a altura relativa a este segmento mede 4 unidades, logo a área do triângulo ABC será igual a 6 unidades quadradas, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Área}_{\triangle ABC} &= \frac{3 \cdot 4}{2} = \\ &= \frac{12}{2} = 6 \text{ unidades quadradas} \end{aligned}$$

Outra maneira de se resolver a mesma atividade, consiste na utilização do cálculo de determinante no cálculo de áreas de triângulos, conforme segue:

Sendo  $k \neq 9$  os três pontos, não são colineares, ou seja, não estão alinhados, assim sendo, a disposição dos três pontos nos permite delimitar uma área triangular e sua área é igual a metade do módulo do determinante da matriz formada pelas coordenadas dos três pontos.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &\frac{1}{2} |-40 + 28| = \frac{1}{2} |-12| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ unidades quadradas} \end{aligned}$$

## TEMA 2 – A RETA, A INCLINAÇÃO CONSTANTE E A PROPORCIONALIDADE

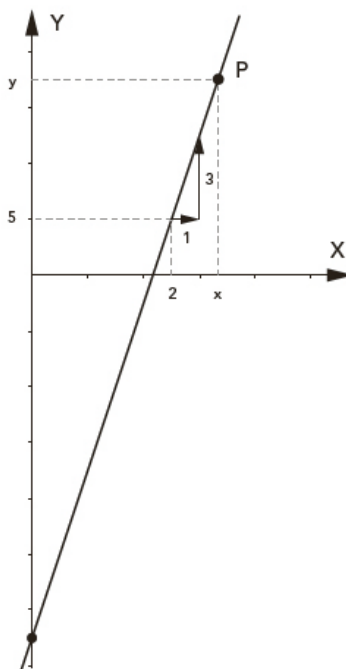
### ATIVIDADE 1

Na equação  $y = 473,5x + 12,879$ , se  $x$  variar uma unidade, passando, por exemplo, de 2008 para 2009, de quanto será o aumento de  $y$ ? Tente responder a essa questão sem efetuar cálculos.

Nesta atividade o aluno deve ser capaz de compreender que o coeficiente de  $x$  é 473,5 e que isso significa que para cada unidade  $x$  o resultado final é acrescido de 473,5 unidades.

### ATIVIDADE 2

Determine a equação da reta que passa pelo ponto A (2; 5) e tem inclinação  $m = 3$ .



Fonte: Elaborada pelos autores

Resolução:

A equação da reta é do tipo  $y = mx + h$ , ou seja,  $y = 3x + h$

Como o ponto (2; 5) pertence a reta, então:  $5 = 3 \cdot 2 + h$

Logo,  $h = -1$ , e a equação é  $y = 3x - 1$

2ª solução

Sendo  $(x, y)$  um ponto genérico da reta, devemos ter:

$$m = \frac{y-5}{x-2} = 3$$

Logo,  $y - 5 = 3(x - 2)$ , ou seja,  $y = 3x - 1$

3ª solução

Dado um ponto e a inclinação da reta é possível determinar a equação geral da reta pela equação fundamental da reta.

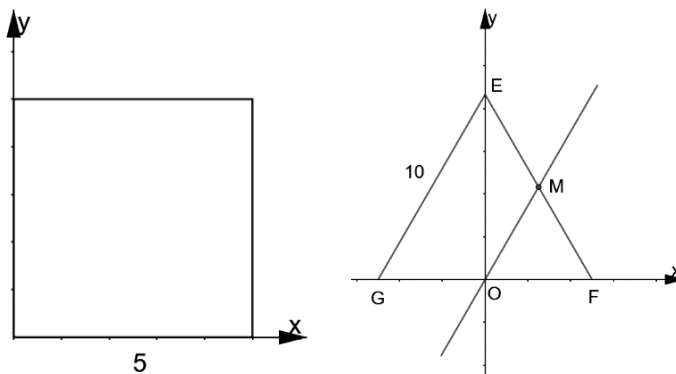
$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

Dados os pontos: A (2,5) e P (x, y) e  $m = 3$ , temos que:

$$\begin{aligned} (y - 5) &= 3(x - 2) \Rightarrow y - 5 = 3x - 6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = 3x - 1 \end{aligned}$$

### ATIVIDADE 3

Considere o quadrado ABCD, cujo lado mede 5 unidades, e o triângulo equilátero EFG, cujo lado mede 10 unidades, representados no sistema cartesiano.



Fonte: Elaborada pelos autores

- escolha um sistema de coordenadas que considere mais adequado e escreva as equações das retas AB, BC, CD, DA, AC e BD.
- escolha um sistema de coordenadas que considere mais adequado e escreva as equações das retas EF, FG, GE e OM, onde M é o ponto médio do lado EF e O é o ponto médio do lado GF.

Resolução:

- As retas AB e DC são paralelas ao eixo x (constantes) portanto suas equações, respectivamente, são:

$$y = 5 \text{ e } y = 0$$

permanece 5. O mesmo raciocínio é válido para a reta DC, para qualquer valor de  $x$  o valor de  $y = 0$ .

As retas DA e BC são paralelas ao eixo  $y$  portanto suas equações, respectivamente, são:

$$X=0 \text{ e } x=5$$

Nesses casos em que a reta é vertical, ou seja, não é possível determinar o coeficiente angular sua equação é definida pelo ponto onde a reta cruza o eixo da abscissa.

A reta AC, coincide com a diagonal do quadrado ABCD, logo, estão a  $45^\circ$  graus em relação ao eixo  $x$ .

Sabendo que  $m = \text{tg } \alpha$  é possível determinar o coeficiente angular da reta ( $m = \text{tg}45^\circ = 1$ ) considerando qualquer ponto pertencente a reta e o seu coeficiente angular é possível por meio da equação fundamental da reta determinar sua equação:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

$$(y_1 - 5) = 1(x_1 - 5)$$

$$y - 5 = x - 5$$

$$y - 5 + 5 = x$$

$$y = x$$

A reta AC encontra-se em situação semelhante a reta BD, porém é decrescente portanto seu coeficiente angular é negativo. O ângulo formado entre a reta e o eixo  $x$  é de  $135^\circ$  ( $m = \text{tg}135^\circ = -1$ )

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

$$(y_1 - 0) = -1(x_1 - 5)$$

$$y = -x + 5$$

- b. Dado o triângulo equilátero, seus ângulos internos são todos de  $60^\circ$  graus. Sendo assim o ângulo formado pela reta GE é igual a  $60^\circ$ , ( $m = \text{tg}60^\circ = \sqrt{3}$ ). Tomando um ponto pertencente a reta GE (ponto G) é possível usar a equação fundamental e determinar a equação da reta.

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

$$(y_1 - 0) = \sqrt{3}(x_1 - (-5))$$

$$y = x\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$

A reta EF forma com o eixo  $x$  um ângulo de  $120^\circ$  graus, possibilitando o cálculo de seu coeficiente angular;  $m = \text{tg}120^\circ = -\sqrt{3}$ . Tomando um ponto pertencente a reta EF (ponto F) é possível determinar a equação da reta.

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

$$(y_1 - 0) = -\sqrt{3}(x_1 - 5)$$

$$y = -x\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$

A reta EF forma com o eixo  $x$  um ângulo de  $120^\circ$  graus, possibilitando o cálculo de seu coeficiente angular;  $m = \text{tg}120^\circ = -\sqrt{3}$ . Tomando um ponto pertencente a reta EF (ponto F) é possível determinar a equação da reta.

$$\begin{aligned}(y_1 - y_0) &= m(x_1 - x_0) \\ (y_1 - 0) &= 0(x_1 - 5) \\ y &= 0\end{aligned}$$

Obs. Foi evitado usar o ponto E no item anterior por comodidade evitando calcular a sua ordenada.

A reta FG é constante (paralela ao eixo x) e coincidente com a abscissa. Seu coeficiente angular é igual a zero ( $m=0$ ), tomando o ponto F pertencente a reta FG temos:

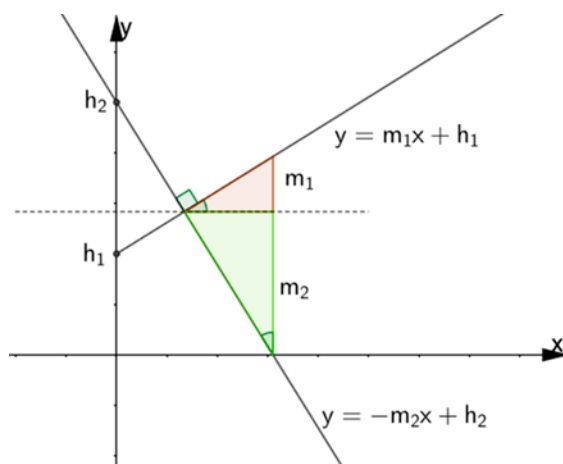
$$\begin{aligned}(y_1 - y_0) &= m(x_1 - x_0) \\ (y_1 - 0) &= 0(x_1 - 5) \\ y &= 0\end{aligned}$$

O ponto médio M divide o segmento EF ao meio e o ponto O divide o segmento GF também ao meio, formando um novo triângulo equilátero OMF, assim a reta OM forma com a abscissa o ângulo de  $60^\circ$ , possibilitando calcular seu coeficiente angular  $m = \text{tg}60^\circ = \sqrt{3}$ . Tomando o ponto O como ponto de referencia pertencente a reta OM, temos:

$$\begin{aligned}(y_1 - y_0) &= m(x_1 - x_0) \\ (y_1 - 0) &= \sqrt{3}(x_1 - 0) \\ y &= x\sqrt{3}\end{aligned}$$

## PERPENDICULARISMO ENTRE DUAS RETAS

Se duas retas inclinadas em relação aos eixos coordenados  $r_1$  e  $r_2$  são perpendiculares, então suas inclinações  $m_1$  e  $m_2$  tem sinais opostos e são inversas, isto é,  $m_1 \cdot m_2 = -1$ , como é possível perceber pela análise da figura seguinte:



Os ângulos assinalados nos dois triângulos retângulos são congruentes. Isto nos permite afirmar que (note que, como  $m_2 < 0$ , o segmento que corresponde ao lado do triângulo tem comprimento igual a  $-m_2$ ). Sendo assim, concluímos que  $m_1 \cdot m_2 = -1$



## ATIVIDADE 4

Considerando os apontamentos teóricos anteriormente citados, determine a equação da reta  $t$  que passa pelo ponto  $A$  e é perpendicular à reta  $r$ , nos seguintes casos

A	r	t
(0; 0)	$y = 4 - 3x$	$y = \frac{1}{3}x$
(0; 4)	$y = 2x - 5$	$y = -\frac{1}{2}x + 2$
(0; -3)	$y = 0,2x + 7$	$y = -5x - 15$
(0; 7)	$y = -\sqrt{3}x + 2$	$y = \sqrt{3}x - \frac{7\sqrt{3}}{3}$
(1; 2)	$y = 3x + 7$	$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Resolução:

Como visto anteriormente, se duas retas são perpendiculares entre si, então  $m_1 \cdot m_2 = -1$ . Identificado o coeficiente angular da reta  $r$  é possível calcular o coeficiente angular da reta  $t$  de modo que ele seja o oposto inverso do coeficiente angular de  $r$ , garantindo o perpendicularismo.

Para a coordenada (0;0) temos a reta  $r$  dada pela equação

$$y = 4 - 3x$$

O coeficiente angular da reta  $r$ ,  $m_r = -3$ , sabendo o coeficiente angular de  $r$  calcula-se o coeficiente angular de  $t$ ,

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_t = -\frac{1}{m_r}$$

$$m_t = -\frac{1}{-3}$$

$$m_t = \frac{1}{3}$$

Sabendo o coeficiente angular da reta  $t$ , é possível saber a equação da reta  $t$ .

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

$$(y_1 - 0) = \frac{1}{3}(x_1 - 0)$$

$$y = \frac{1}{3}x$$

Usa-se do mesmo raciocínio para as demais coordenadas.

### Problemas lineares: Máximos e Mínimos

## ATIVIDADE 1

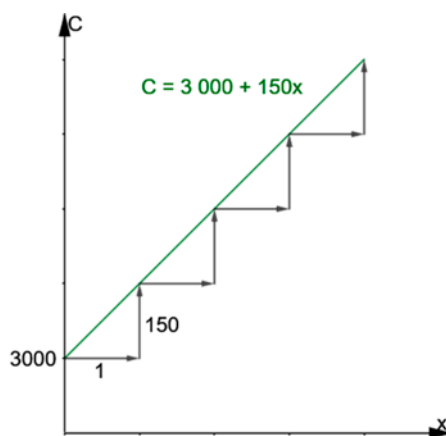
Em uma fábrica que produz um só tipo de produto, o custo **C** da produção de **x** unidades é a soma de um custo fixo **C<sub>0</sub>** com custo variável **C<sub>1</sub>**, que é proporcional a **x**, então  $C_1 = Kx$ , onde **k** representa o custo de cada unidade do produto.

Em uma fábrica como a descrita acima, tem-se: **C = 3000 + 150x** (x é o número de artigos; C é o custo da produção em reais).

- esboce o gráfico de C em função de x.
- Para qual valor de x o custo fixo se iguala ao custo variável?
- a partir de qual valor de x o custo fixo passa a representar menos de 10% do custo total da produção?

Resolução:

a.



Fonte: Elaborada pelo autor

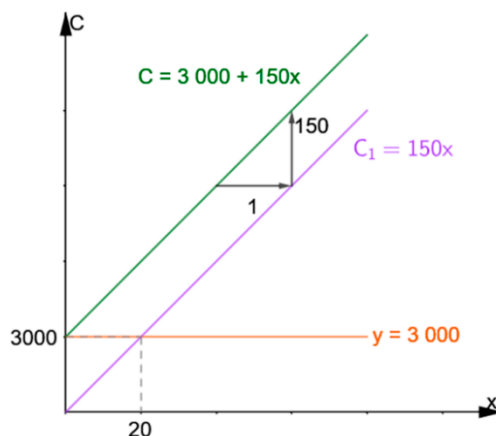
- b. O custo fixo é de 3000, o custo variável é representado por 150x, então:

$$3000 = 150x$$

$$x = \frac{3000}{150}$$

$$x = 20$$

Graficamente, temos a seguinte situação:



Fonte: Elaborada pelos autores

c. O custo fixo passará a corresponder a 10% do custo total na seguinte situação:

$$3000 = 10\% \text{ de } (3000 + 150x)$$

ou seja, na seguinte situação:

$$3000 = 0,1 \cdot (3000 + 150x)$$

$$3000 = 300 + 15x$$

$$2700 = 15x$$

$$x = \frac{2700}{15} = 180$$

## ATIVIDADE 2

Um pequeno fazendeiro dispõe de 8 alqueires para plantar milho e cana. Ele deve decidir quanto plantar de milho e quanto de cana, em alqueires, de modo que seu rendimento total seja o maior possível. Cada alqueire de milho plantado deve resultar em um rendimento líquido de R\$ 20 mil, e cada alqueire de cana deverá render R\$ 15 mil. No entanto, cada alqueire de milho requer 20 000 L de água para irrigação e cada alqueire de cana requer 10 000 L de água, sendo que, no período correspondente, a quantidade de água disponível para tal fim é 120 000 L.

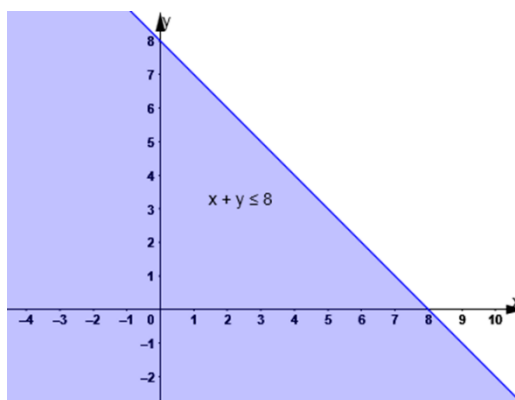
Considere  $x$  e  $y$  as quantidades de alqueires plantados de milho e cana, respectivamente.

- como se pode representar, em termos de  $x$  e  $y$ , o rendimento total  $R$  a ser recebido pelo fazendeiro, supondo que venda a totalidade de sua produção?
- qual a relação entre  $x$  e  $y$  que traduz a exigência de que o total de alqueires plantados não pode ser maior que 8? Represente no plano cartesiano os pontos  $(x; y)$  que satisfazem essa relação.
- qual é a relação entre  $x$  e  $y$  que traduz a exigência de que o total de água a ser utilizado não pode superar os 120 000L? Represente no plano cartesiano os pontos  $(x; y)$  que satisfazem essa relação

- d. represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos que satisfazem, simultaneamente, as duas exigências expressas nos itens (B) e (C) (lembrando que devemos ter  $x \geq 0, y \geq 0$ ).
- e. determine o conjunto dos pontos  $(x; y)$  do plano que correspondem ao rendimento  $R_1 = 75$  mil, e os que correspondem ao rendimento  $R_2 = 120$  mil.
- f. mostre que, quanto maior o rendimento **R**, maior a ordenada do ponto em que a reta que o representa o eixo OY.
- g. determine o ponto da região do item d que corresponde ao rendimento total máximo.

#### Resolução:

- a. Cada alqueire de milho renderá 20.000, logo, se plantar  $x$  alqueires, o rendimento será  $20.000x$ . Cada alqueire de cana renderá 15.000, logo, se plantar  $y$  alqueires de cana, o rendimento será  $15.000y$ . O rendimento total será  $R = 20.000x + 15.000y$ .
- b. Sendo  $x$  a quantidade de alqueires a ser plantados de milho e  $y$  a quantidade de alqueires plantados de cana, a soma  $x + y$  não pode ultrapassar os 8 alqueires disponíveis, ou seja  $x + y \leq 8$

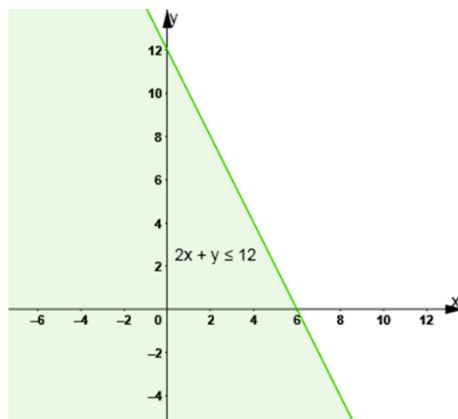


Fonte: Elaborada pelos autores.

- c. Como cada alqueire de milho requer 20.000L de água,  $x$  alqueires requererão  $20.000x$  L, da mesma forma,  $y$  alqueires cana utilizarão  $10.000y$  L de água. Assim o total de litros de água utilizados será  $20.000x + 10.000y$ , e não poderá ultrapassar o limite de 120.000, ou seja,  $20.000x + 10.000y \leq 120.000$ , isso corresponde aos pontos situados abaixo da reta ou na reta  $20.000x + 10.000y = 120.000$ .

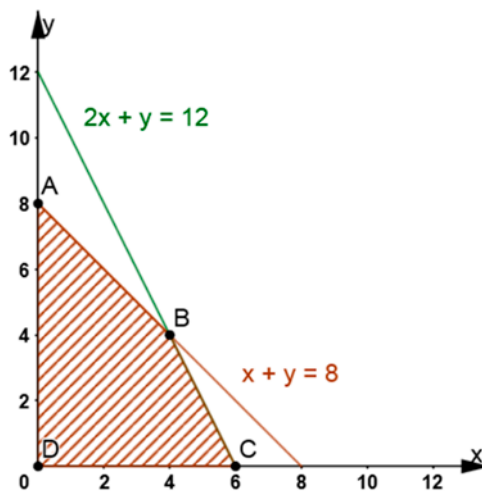
Para representar a reta podemos simplificar os coeficientes, obtendo  $2x + y = 12$

- para  $x = 0$ , temos  $y = 12$ ;
- para  $y = 0$ , temos  $x = 6$



Fonte: Elaborada pelos autores

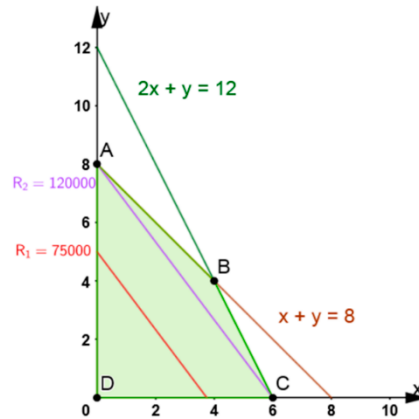
- d. Os pontos do plano que satisfazem simultaneamente as duas restrições são os pontos situados abaixo ou na reta  $x + y = 8$  e abaixo ou na reta  $2x + y = 12$ . Formam o quadrilátero ABCD indicado na representação a seguir.



Fonte: Elaborada pelos autores

- e. Os pontos  $(x, y)$  que correspondem ao rendimento  $R_1 = 75\,000$  reais são os pontos da reta  $r_1$  de equação  $75\,000 = 20\,000x + 15\,000y$ , ou seja, simplificando os coeficientes,  $4x + 3y = 15$

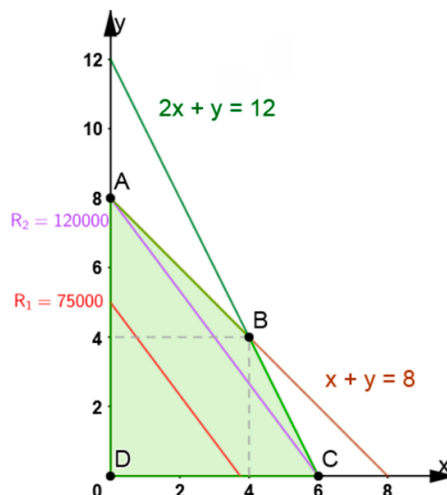
Os pontos que correspondem ao rendimento  $R_2 = 120\,000$  são os pontos da reta  $r_2$  de equação  $120\,000 = 20\,000x + 15\,000y$ , ou seja, simplificando os coeficientes,  $24 = 4x + 3y$ . As duas retas são paralelas e estão representadas a seguir:



Fonte: Elaborada pelos autores

$$\begin{array}{ll}
 r_1 = 4x + 3y = 15 & r_1 = 4x + 3y = 24 \\
 x = 0 \Rightarrow y = 5 & x = 0 \Rightarrow y = 8 \\
 y = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{4} & y = 0 \Rightarrow x = 6
 \end{array}$$

- f. Para cada valor fixado do rendimento  $R$ , a reta  $R = 20\,000x + 15\,000y$  corta o eixo OU no ponto em que  $x = 0$ , ou seja, em que  $y = \frac{R}{15\,000}$ . Isso significa que quanto maior o rendimento, maior é a ordenada do ponto em que a reta que o representa intercepta o eixo  $y$ .
- g. Aqui, vamos identificar o ponto da região de viabilidade do problema, ou seja, que foi determinado no item d, no qual o rendimento total  $R$  é o maior possível. O maior valor possível para a reta  $R = 20\,000x + 15\,000y$  cortar o eixo  $y$  sem sair da região de viabilidade corresponde à reta que passa pelo ponto de interseção das retas  $x + y = 8$  e  $2x + y = 12$ . Calculando tal ponto, obtemos  $x = 4$  e  $y = 4$ . No ponto  $(4, 4)$ , portanto, o valor de  $R$  é o maior possível, respeitadas as condições de  $x + y \leq 8$  e  $2x + y \leq 12$ . Calculando o valor de  $R$  nesse ponto, obtemos  $R = 20\,000 \cdot 4 + 15\,000 \cdot 4$ , ou seja,  $R = 140\,000$  reais.

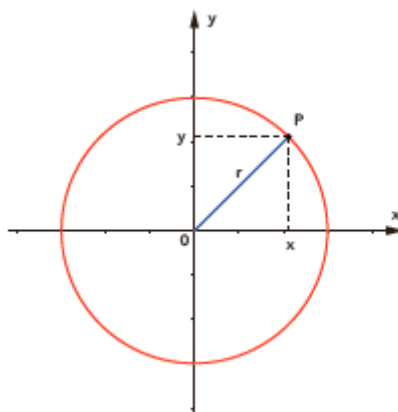


Fonte: Elaborada pelos autores

## TEMA 3 – CIRCUNFERÊNCIAS E CÔNICAS SIGNIFICADOS E EQUAÇÕES.

### CIRCUNFERÊNCIA:

A propriedade característica da circunferência é a de que seus pontos são todos equidistantes de um ponto interior chamado centro; a distância comum de cada um de seus pontos ao centro é o raio da circunferência. Assim, se o centro for a origem do sistema de coordenadas e  $P(x; y)$  um ponto de uma circunferência de raio  $r$ , a equação que relaciona as coordenadas de um ponto qualquer da circunferência é:

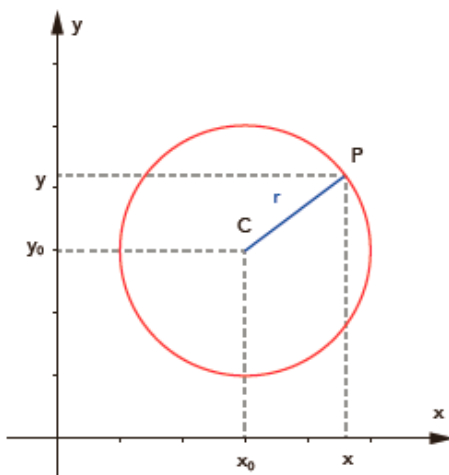


Fonte: Elaborada pelos autores

$$d(P; O) = r$$

$$\text{ou seja, } \sqrt{x^2 + y^2} = r;$$

$$\text{ou ainda, } x^2 + y^2 = r^2$$



Fonte: Elaborada pelos autores

Se o centro **C** for o ponto  $(x_0; y_0)$ , então da igualdade característica  $d(P; C) = r$  resultará:

ou seja:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

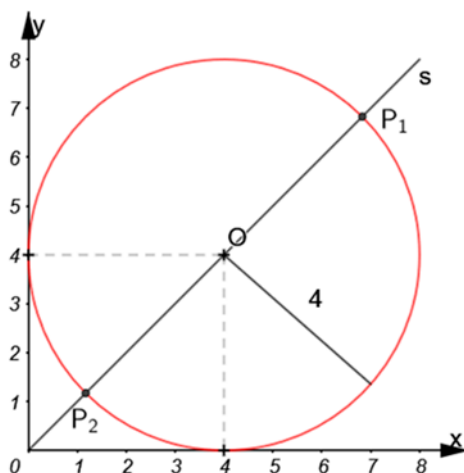
## ATIVIDADE 1

Sabendo que uma circunferência de centro **C**  $(y_0; -y_0)$  e raio **r** tem equação  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ , considere a circunferência de centro  $(4; 4)$  e de raio 4.

- Represente-a no plano cartesiano a seguir e determine sua equação.
- Determine a equação da reta **s** que passa pela origem e pelo centro da circunferência.
- Calcule as coordenadas dos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , de interseção da reta **s** com a circunferência dada.
- Calcule a distância entre  $P_1$  e  $P_2$ .

**Resolução:**

- A equação da circunferência é  $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$ , com a seguinte representação gráfica:



Fonte: Elaborada pelos autores

- Dados dois pontos pertencentes a reta **s**  $(0,0)$  e  $(4,4)$  é possível determinar a equação da reta usando a condição de alinhamento de três pontos, em que o determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos é igual a zero. Usando os pontos por onde é sabido que a reta **s** passa  $(4,4)$  centro da circunferência;  $(0,0)$  origem e  $(x,y)$  um ponto genérico pertencente a essa reta temos:



$$\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 1 & 4 & 4 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ x & y & 1 & x & y & \\ \hline 0 & -4y & 0 & 0 & 4x & 0 \end{array}$$

$$4x - 4y = 0$$

$$x - y = 0$$

$$x = y$$

- c.  $P_1$  e  $P_2$  são pontos comuns tanto a circunferência quanto a reta  $s$ , ou seja, são pontos que satisfazem as duas equações simultaneamente formando um sistema:

$$\begin{cases} x = y \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(y-4)^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(y^2 - 8y + 16) = 16 \Rightarrow$$

$$2y^2 - 16y + 32 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - 8y + 8 = 0$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 32}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{16 \cdot 2}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$$y_1 = 4 + 2\sqrt{2} \quad y_2 = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = 4 + 2\sqrt{2} \quad x_2 = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$P_1 = (4 + 2\sqrt{2}; 4 + 2\sqrt{2})$$

$$P_2 = (4 - 2\sqrt{2}; 4 - 2\sqrt{2})$$

- d. A distância entre os pontos de intersecção é igual ao diâmetro ( $d$ ) da circunferência.

$$d = 2 \cdot r \text{ (} r \text{ igual ao raio da circunferência)}$$

$$d = 2 \cdot 4$$

$$d = 8$$

Professor:

Outros exercícios poderiam ser propostos, articulando o reconhecimento da equação da circunferência e os resultados já conhecidos sobre retas. Em virtude da limitação do espaço do Caderno do Aluno, deixamos tal tarefa para o discernimento e a disponibilidade do professor.

## CÔNICAS

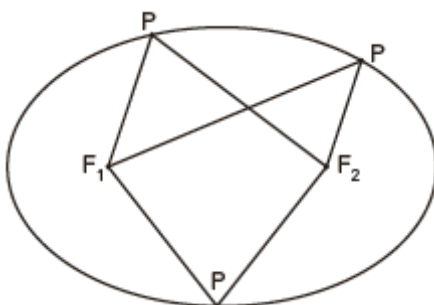
As cônicas (elipses, hipérbolas e parábolas) são curvas que podem ser representadas no plano cartesiano e cuja propriedade obedecida pelos seus pontos pode ser descrita por meio de uma equação de duas variáveis.



Fonte: Elaborada pelos autores

## ELIPSE

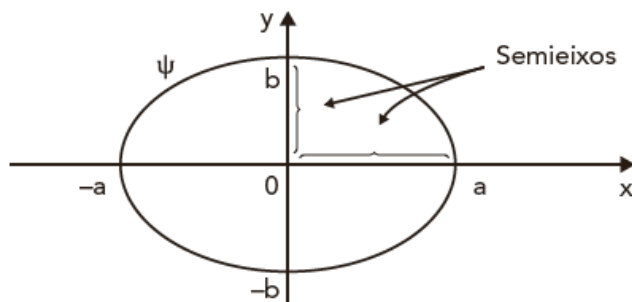
Uma propriedade fundamental pode ser utilizada para caracterizar uma elipse: qualquer ponto da elipse é tal que a soma das distâncias até esses dois pontos fixados, que são os focos, é constante, como mostra a figura a seguir:



Fonte: Elaborada pelos autores

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{constante}$$

A elipse apresenta dois eixos de simetria: o semieixo maior costuma ser representado por **a**, e o menor por **b**. Assim, os dois eixos são  $2a$  e  $2b$ .

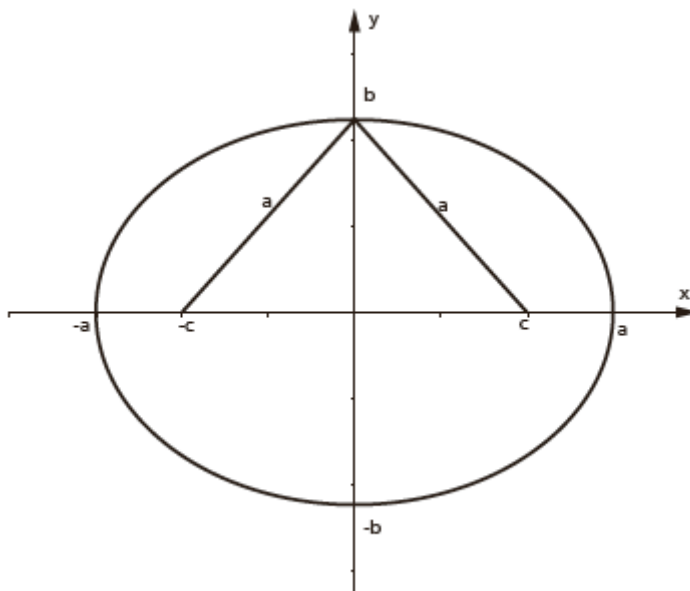


Fonte: Elaborada pelos autores

Desta forma, podemos dizer que uma elipse é a curva obtida quando reduzimos (ou ampliamos) na mesma proporção todas as cordas perpendiculares a um diâmetro dado, cuja equação será representada da seguinte maneira:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Em uma elipse com centro na origem e semieixo maior **a** no eixo OX, os pontos (0; b) e (0; -b) distam do centro menos do que **a**. Os pontos do eixo OX que estão a uma distância **a** de (0; b) e (0; -b) têm coordenadas (c; 0) e (-c; 0), são particularmente importantes, sendo chamados **focos** da elipse. O valor **c** é chamado de distância focal da elipse. Por construção, a soma das distâncias dos pontos (0; b) e (0; -b) até os focos é igual a **2a**. É possível mostrar que, para todo ponto **P** (x; y) do plano, se  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , então a soma das distâncias de **P** até os focos (c; 0) e (-c; 0) é igual a **2a**. A razão  $\frac{c}{a}$  é chamada excentricidade da elipse, sendo representada pela letra **e**.



Fonte: Elaborada pelos autores

## ATIVIDADE 2

De acordo com os fundamentos teóricos apresentados:

- Mostre que, entre **a**, **b** e **c**, vale a relação  $a^2 = b^2 + c^2$ ;
- Mostre que, fixado o valor de **a**, quanto menor for o valor de **b**, mais a excentricidade se aproxima de 1 e a elipse se aproxima de um segmento de reta; e quanto mais próximo de **a** for o valor de **b**, mais a excentricidade se aproxima de zero e a elipse se aproxima de uma circunferência.

Resolução:

- Observando o triângulo retângulo formado na figura, de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ , concluímos que  $a^2 = b^2 + c^2$
- Como  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  notamos que, sendo fixado o valor de  $a$ , quanto maior for o valor de  $b$ , menor será  $c$ , e portanto, menor a excentricidade, e mais a elipse se aproxima de uma circunferência; quanto menor o valor de  $b$ , mais próximo de  $a$  é o valor de  $c$ , e portanto, maior é a excentricidade, que se aproxima do valor 1.

Professor:

É possível verificar a mudança de excentricidade acessando o link a seguir:

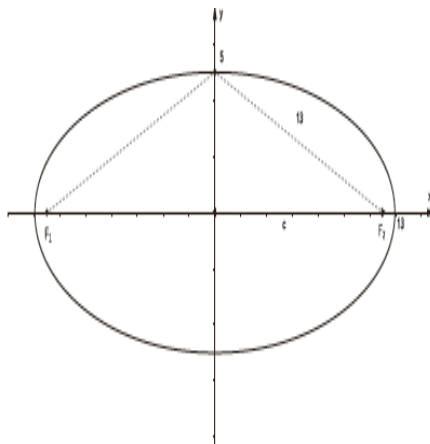
Faça a leitura do "QR code" a seguir com seu smartphone ou acesse o link :

<https://www.geogebra.org/m/uvu8rfwc>



### ATIVIDADE 3

Considere a elipse representada a seguir de centro na origem e semieixos  $a = 13$  e  $b = 5$ .



Fonte: Elaborada pelos autores

Determine.

- a equação da elipse;
- a excentricidade da elipse;
- os focos da elipse;
- o valor de  $k$  para que o ponto  $P(5; k)$ , do primeiro quadrante, pertença a elipse;
- a soma das distâncias de  $P$  aos focos da elipse.

Resolução:

- De acordo com os dados da atividade, temos que:  $a = 13$  e  $b = 5$ , temos que: Então, a equação da elipse será dada por:

$$\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

b. A excentricidade da elipse é dada por:

Sabemos que

$a^2 = b^2 + c^2$  então,

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Então:

$$c = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

Desta forma, a excentricidade da elipse será:

$$e = \frac{12}{13} \cong 0,92$$

c. Os focos da elipse são os pontos de coordenadas  $(c; 0)$  e  $(-c; 0)$ , ou seja, são os pontos  $(12; 0)$  e  $(-12; 0)$ .

d. Para que o ponto  $(5, k)$  pertença à elipse, devemos ter:

$$\frac{5^2}{13^2} + \frac{k^2}{5^2} = 1$$

$$\frac{625 + 169k^2}{4225} = \frac{4225}{4225} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 625 + 169k^2 = 4225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 169k^2 = 4225 - 625 \Rightarrow$$

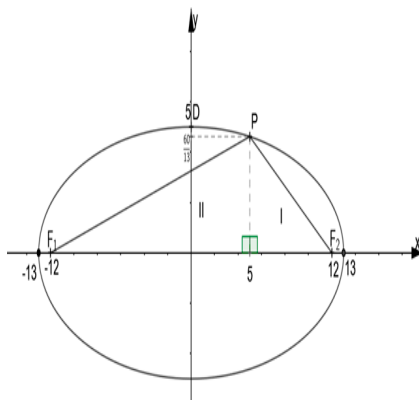
$$\Rightarrow 169k^2 = 3600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{3600}{169} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{3600}{169}} \Rightarrow k = \pm \frac{60}{13}$$

Sendo P do primeiro quadrante, segue que

$$k = \frac{60}{13}$$

e. Seja a figura que representa a elipse a seguir:



Da figura temos que os triângulos I e II são retângulos, e portanto:

$$\begin{aligned}d_{\overline{PF_1}} &= \sqrt{7^2 + \left(\frac{60}{13}\right)^2} = \\&= \sqrt{49 + 21,30} = \sqrt{70,30} \cong 8,38 \\d_{\overline{PF_2}} &= \sqrt{17^2 + \left(\frac{60}{13}\right)^2} = \\&= \sqrt{289 + 21,30} = \sqrt{310,30} \cong 17,62\end{aligned}$$

Então, a soma das distâncias de P aos focos da elipse, será:

$$D = d_{\overline{PF_1}} + d_{\overline{PF_2}} = 8,38 + 17,62 \cong 26$$

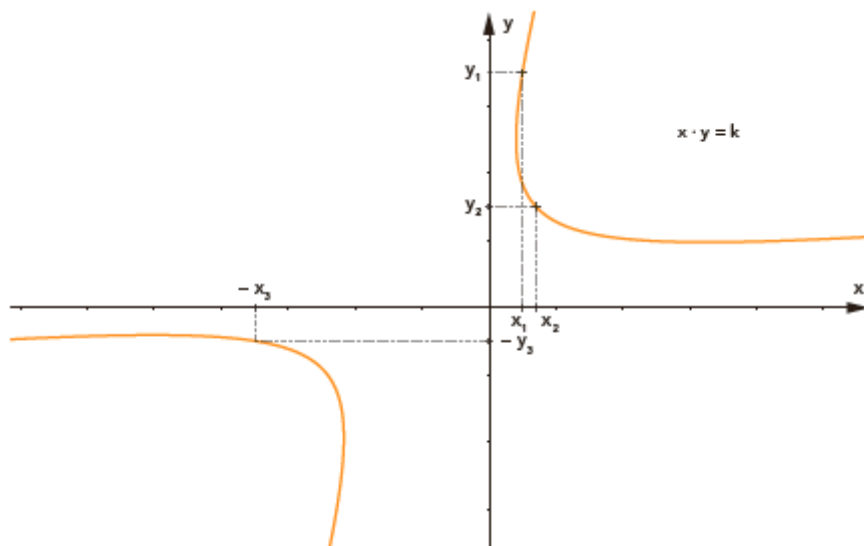
Nota-se que tal resultado é numericamente equivalente a  $2 \cdot a = 26$ .

*Professor:*

Aqui seria interessante apresentar muitos exercícios de identificação dos dois semieixos de elipses dadas por equações na forma  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , com a correspondente representação no plano cartesiano, bem como exercícios de escrita das equações das elipses já representadas no plano, com o centro na origem do sistema e com os valores dos semieixos indicados sobre os eixos coordenados.

## HIPÉRBOLE

Quando representamos graficamente pares  $(x; y)$  de grandezas que são inversamente proporcionais, isto é, cujo produto  $x \cdot y$  é constante e não nulo, a curva obtida é uma hipérbole.



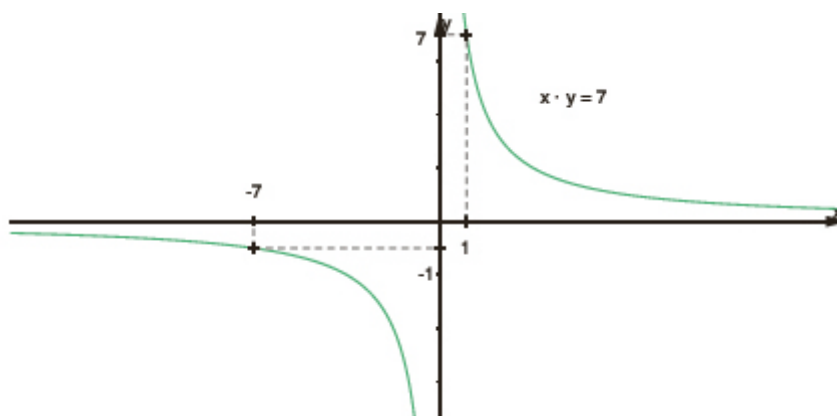
Eixos perpendiculares/sistema ortogonal

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = k \neq 0$$

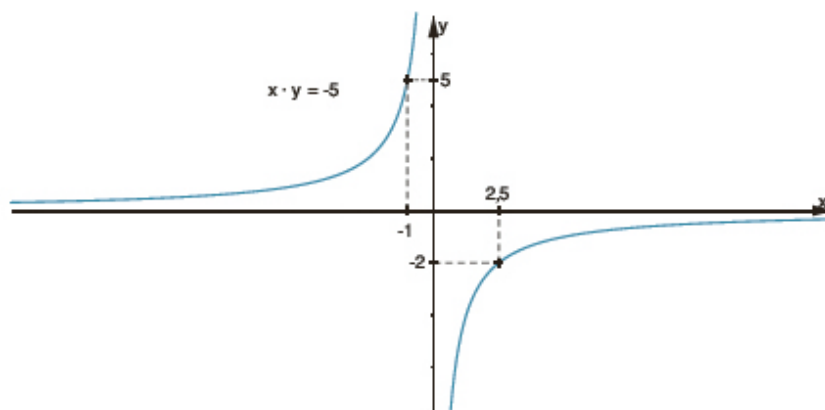
A hipérbole é obtida quando selecionamos um cone circular reto junto ao plano que forma com o plano da base, um ângulo maior do que aquele formado por uma geratriz do cone com a base.

Para escrever a equação da hipérbole, podemos partir da representação de grandezas inversamente proporcionais. No caso de um sistema  $XOY$ , em que os eixos cartesianos são ortogonais, a hipérbole é chamada equilátera e os dois ramos da curva se aproximam indefinidamente dos eixos coordenados são chamados, nesse caso, de assíntotas da hipérbole.

Por exemplo, as curvas formadas pelos pontos cujas coordenadas satisfazem as relações a seguir são hipérbolas, tendo como assíntotas os eixos coordenados:



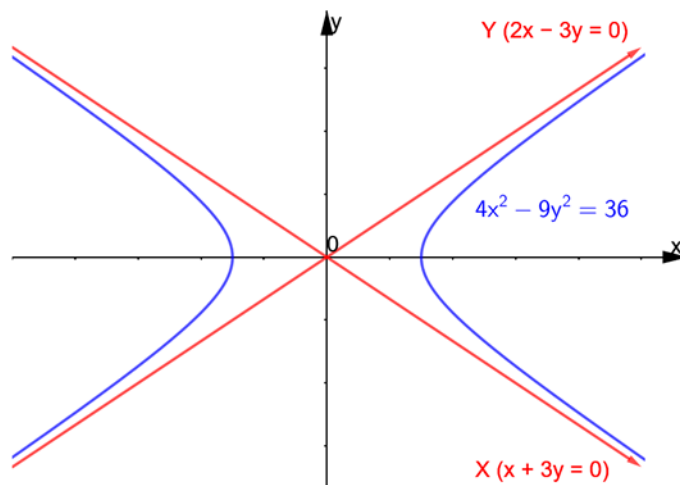
Fonte: Elaborada pelos autores.



Fonte: Elaborada pelos autores

## ATIVIDADE 1

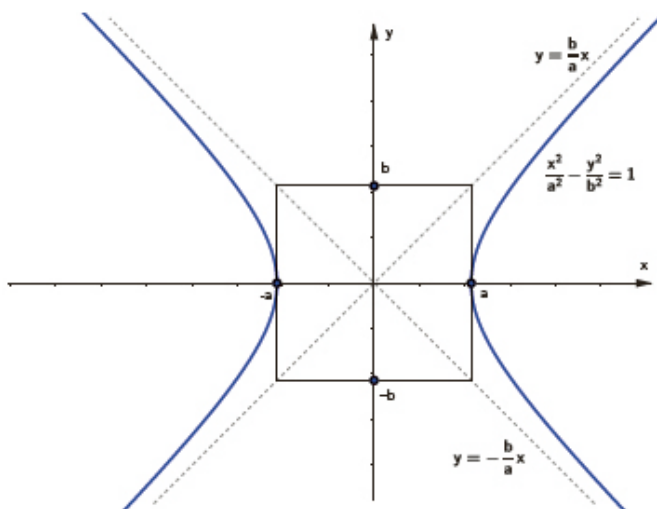
A equação  $4x^2 - 9y^2 = 36$  pode ser considerada uma hipérbole. Fatore o primeiro membro e obtenha  $X$  e  $Y$  tal que  $X \cdot Y = 36$ . Em seguida, determine as assíntotas e faça uma representação gráfica da hipérbole, obtendo  $(2x - 3y) \cdot (2x + 3y) = 36$ , ou seja,  $X \cdot Y = 36$ .



Fonte: Elaborada pelos autores

## ATIVIDADE 2

A equação de uma hipérbole representada no plano cartesiano, com centro na origem, é do tipo  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , em que  $a$  é a soma do vértice da hipérbole, nas condições representadas na figura seguinte:



Fonte: Elaborada pelos autores

- a. Sabendo isso, determine a equação da hipérbole que passa pelo ponto  $(3; 0)$  e tem como assíntotas as retas  $y = \frac{4}{3}x$  e  $y = -\frac{4}{3}x$ .

**Resolução:**

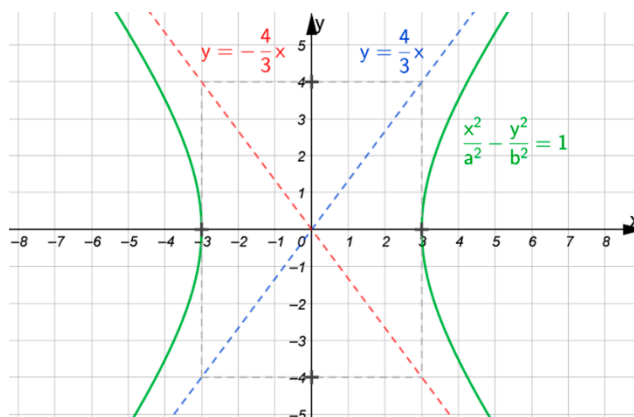
Dadas as assíntotas da hipérbole, constatamos que: 
$$\begin{cases} a = 3e - 3 \\ b = 4e - 4 \end{cases}$$



Então, a equação da hipérbole será dada por:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

b. Faça a representação gráfica da hipérbole e de suas assíntotas.



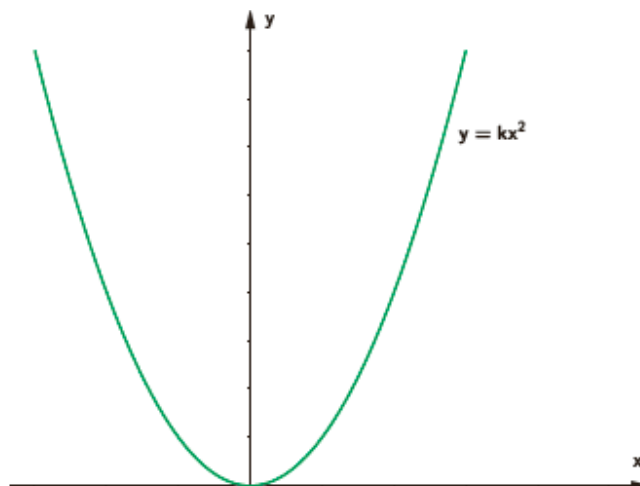
Fonte: Elaborada pelos autores

*Professor:*

*Neste momento, seria interessante apresentar diversos exercícios de representação no plano cartesiano de hipérboles dadas por equações na forma apresentada anteriormente, sempre destacando as assíntotas, que podem ser obtidas pela simples fatoração da diferença de quadrados, característica da equação da hipérbole nessa forma*

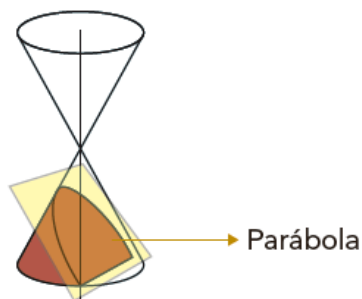
## PARÁBOLA

Em geral, quando representamos graficamente pares  $(x; y)$  de grandezas tais que  $y$  é diretamente proporcional ao quadrado de  $x$  ( $y = kx^2$ ,  $k$  constante e  $k \neq 0$ ), a curva correspondente no plano cartesiano é uma parábola.



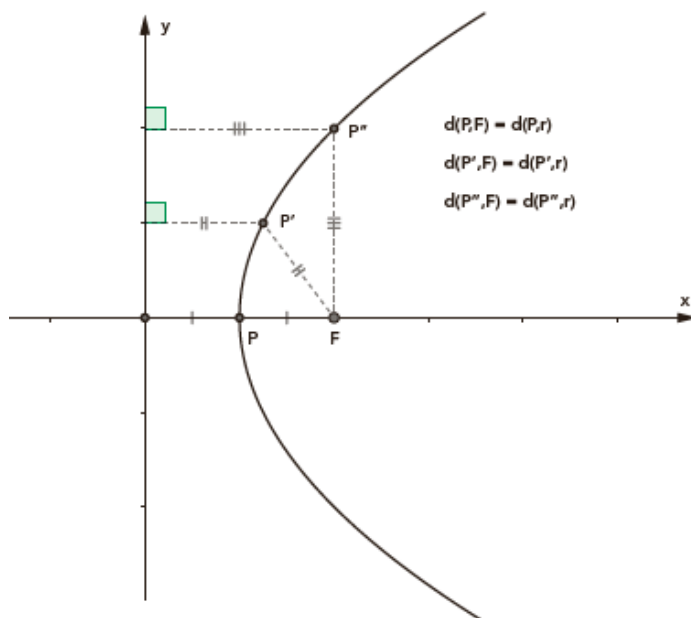
Fonte: Elaborada pelos autores

Quando seccionamos um cone circular reto por um plano que forma com a base um ângulo exatamente igual ao que uma geratriz do cone forma com a base, obtemos também uma parábola



Fonte: Elaborada pelos autores

A parábola tem certas propriedades características que podem ser utilizadas para defini-la. Uma delas é a existência de um ponto  $F$ , fixado, e de uma reta  $r$ , fixada, tais que a distância de cada ponto  $P$  da parábola até  $F$  é igual à distância de  $P$  até  $r$ .  $F$  é o foco da parábola e  $r$  é sua diretriz.



Fonte: Elaborada pelos autores

## ATIVIDADE 1

Determine o foco e a diretriz das parábolas que podem ser representadas no plano cartesiano por equações do tipo:

- a)  $y = kx^2$   
 a)  $y = ky^2$   
 b)  $y = kx^2 = h$

Resolução:

Consideremos a parábola .

Se o foco for o ponto  $F(0, c)$ , então a diretriz  $r$  será a reta  $y = -c$ , pois o ponto  $(0, 0)$  pertence à parábola e a distância dele ao foco deve ser a mesma que a distância dele à diretriz.

Seja  $P(x, y)$  um ponto qualquer da parábola, a distância de  $P$  ao foco deve ser igual à distância de  $P$  ao foco deve ser igual à distância até a diretriz, ou seja:

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + (y - c)^2} = y + c = d(P, r)$$

Logo,  $x^2 + (y - c)^2 = (y + c)^2$

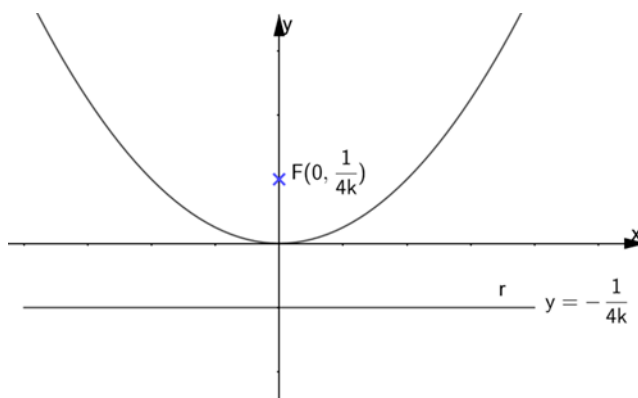
Substituindo  $y$  por  $kx^2$  e efetuando os cálculos, obtemos;

$$\begin{aligned} x^2 + (kx^2 - c)^2 &= (kx^2 + c)^2 \\ x^2 + k^2x^4 + c^2 - 2kx^2c &= k^2x^4 + c^2 + 2kcx^2 \\ x^2(1 - 4kc) &= 0 \end{aligned}$$

Seja assim, concluímos que, para a igualdade valer para todo  $x$ , devemos ter:

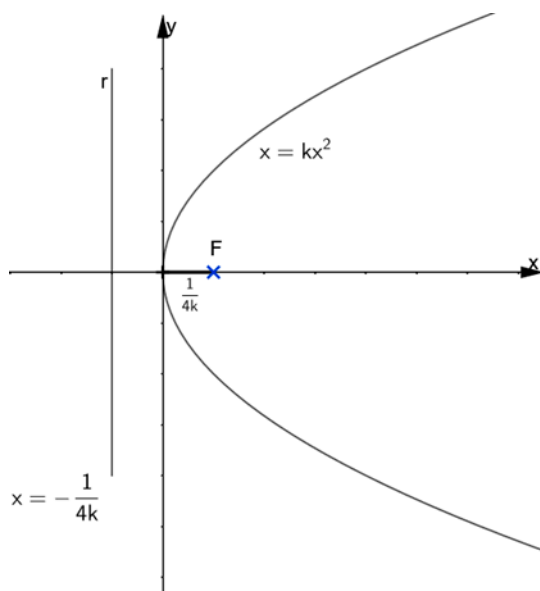
$$c = \frac{1}{4k}$$

Logo, o foco é o ponto  $\left(0, \frac{1}{4k}\right)$ , e a diretriz é a reta  $y = -\frac{1}{4k}$ .



Fonte: Elaborada pelos autores

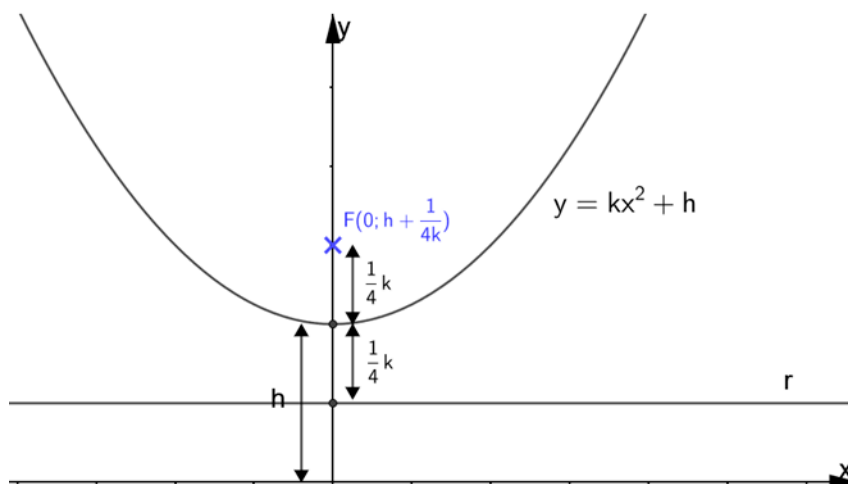
Da mesma maneira, se a parábola fosse  $x = ky^2$ , teríamos: foco  $\left(\frac{1}{4k}; 0\right)$  e diretriz  $x = -\frac{1}{4k}$



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para uma parábola de equação  $y = kx^2 + h$ , o foco e a diretriz seriam transladados na direção do eixo  $Oy$  de um valor  $h$ , ou seja teríamos:

$$F\left(0; h + \frac{1}{4k}\right) \text{ e } r: y = h - \frac{1}{4k}$$



Fonte: Elaborada pelos autores.

# MATEMÁTICA

## 3ª SÉRIE – ENSINO MÉDIO 2º BIMESTRE

### 1. ORGANIZAÇÃO DAS GRADES CURRICULARES

Apresentamos a seguir uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática, vigente e sua respectiva relação com algumas das Competências Gerais da Educação Básica, da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), além de algumas orientações pedagógicas, para cada série que compõe o Ensino Médio.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

Desta forma, os quadros apresentados destacam as habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes em cada unidade. Tais habilidades traduzem, de modo operacional, as ações que os alunos devem ser capazes de realizar, ao final de um determinado estágio de aprendizagem, após serem apresentados aos conteúdos curriculares listados.

## 1.1. GRADE CURRICULAR DA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO.

Currículo Oficial – BNCC - SP		Currículo Paulista – E.M.
Tema/Conteúdo	Habilidades	Competência Geral
Números <ul style="list-style-type: none"> <li>• Equações algébricas e números complexos.</li> <li>• Equações polinomiais;</li> <li>• Números complexos: operações e representação geométrica;</li> <li>• Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial;</li> <li>• Relações de Girard.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreender a história das equações, com o deslocamento das atenções das fórmulas para as análises qualitativas</li> <li>• Conhecer as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica;</li> <li>• Saber reduzir a ordem de uma equação a partir do conhecimento de uma raiz;</li> <li>• Saber expressar o significado dos números complexos por meio do plano de Argand-Gauss;</li> <li>• Saber expressar o significado dos números complexos por meio do plano de Argand-Gauss;</li> </ul>	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

### 1.1.1 ESTUDO FUNCIONAL DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS E O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS.

De forma geral, as equações polinomiais são instrumentos fundamentais para a representação das relações de interdependência entre grandezas, conforme foram desenvolvidos durante a aprendizagem dos alunos no aprendizado da Matemática em sua trajetória de estudos.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, já foram apresentados aos alunos diversos problemas, em diferentes contextos, cuja solução conduz a equações do primeiro e do segundo grau. O aluno já está acostumado a resolver equações de 1º grau ( $ax + b = 0$ , com  $a \neq 0$ ) e de 2º grau ( $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a \neq 0$ ). Trata-se agora de enfrentar equações correspondentes a situações um pouco mais enredadas, que conduzem a equações de 3º, 4º e 5º graus.

A história da busca de soluções para tais equações, chamadas equações algébricas, é muito instrutiva, pois, com base nela, compreendemos mais facilmente as sucessivas ampliações nos conjuntos numéricos, dos números naturais até os números complexos, que viabilizam a atribuição de significado à raiz quadrada de um número negativo. Aprendemos também com a história que, com as equações de 3º grau, a busca por uma fórmula envolvendo radicais que nos forneça as raízes, do mesmo tipo da que nos dá as soluções de uma equação de 2º grau  $\left(x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$ , não costuma ser o melhor caminho para resolver as equações de graus 3 e 4, e é um caminho impossível de ser trilhado para equações de grau maior ou igual a 5.

O caminho mais conveniente, nesses casos, é uma análise qualitativa da pergunta que cada equação representa, extraindo da própria pergunta informações relevantes sobre as raízes.

Portanto, é muito importante sempre, e é decisivo em muitos casos, pensar efetivamente em uma equação como se pensa em uma pergunta, aprendendo a examiná-la criticamente para se chegar à sua resposta. Mais do que mera intenção de ensinar técnicas de solução, nosso objetivo aqui é a plena compreensão desse fato.

Em relação aos números complexos, a ênfase não será posta nos cálculos algébricos, mas sim no significado de tais números responsável por uma notável expansão dos conjuntos numéricos já conhecidos. As possibilidades de representação geométrica de um número complexo  $z$  no plano de Argand-Gauss, que tem como imagem um ponto no plano, como um par  $(x; y)$  de números reais, ou pode ser escrito na forma  $z = x + yi$ .

Assim, como a reta foi necessária e suficiente para se incluir todos os números reais, racionais e irracionais, desta forma, com a inclusão de números que possam ser raízes quadradas de números negativos, será necessário (e suficiente) todo o plano cartesiano, que servirá de inspiração para a construção do plano complexo, suporte para a representação de todos os números complexos. A unidade imaginária  $i$ , que representa o novo número cujo quadrado é igual a  $-1$ , serve de padrão para a representação no eixo vertical de números como  $2i$ ,  $6i$ ,  $-4i$  etc.

## TEMA 1 – INTRODUÇÃO AO CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os estudos sobre complexos avançou graças à grande contribuição do matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576), antes deles os matemáticos julgavam não ser possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. Posteriormente Friedrich Gauss (1777-1855) foi o responsável pela sua formalização. Com maior cardinalidade por conter todos os demais conjuntos e possuir uma representação geométrica, sendo necessário compreender os processos das operações (aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo os elementos dos números complexos. A expressão  $i^2 = -1$  aparece na definição de números complexos, assunto que gera muita dúvida, por isso é importante compreender o motivo de tal igualdade.

A seguir, partindo da definições estabelecidas abaixo temos:

1. Admitimos como número complexo o ordenado  $(x, y)$  no plano de Argand Gauss.
2. Os números complexos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  são iguais se, e somente se  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$
3. A adição e a multiplicação de números complexos são definidas por:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Os números complexos  $(x, y)$  se comportam como números reais para adição e produto, assim podemos estabelecer a seguinte relação:  $(x, 0) = x$

Usaremos o símbolo  $i$  para representar o número complexo  $(0, 1)$ , podendo escrever qualquer número complexo  $(x, y)$  da maneira a seguir:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy$$

Assim como  $(x, 0)$  é igual a  $x$ ,  $(-1, 0)$  é igual  $-1$ .

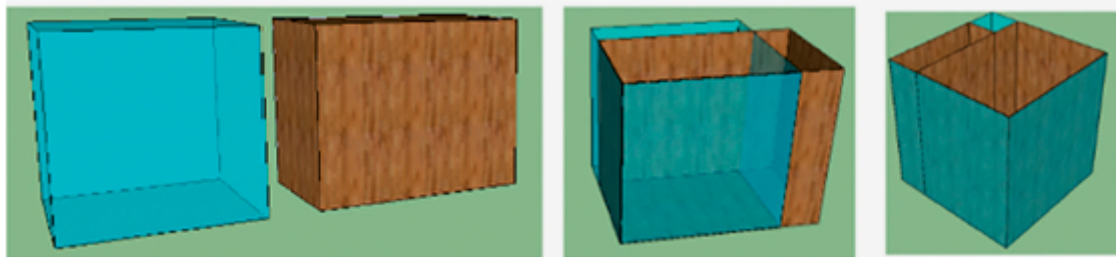
$$(-1, 0) = -1$$

$$i^2 = (-1, 0)$$

$$i^2 = -1$$

### UM PROBLEMA INTERESSANTE...

Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta  $x$ , outra com a forma de um paralelepípedo com a base retangular, de lados 3 dm e 5 dm, e de altura igual à altura do cubo. O valor de  $x$  deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja  $4 \text{ dm}^3$  maior que o do paralelepípedo.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Escrevendo uma equação que traduz a exigência a ser satisfeita pelo valor de  $x$  no problema acima, podemos pensar:

- O volume do cubo de aresta  $x$  é igual a  $x^3$  ;
- O volume do paralelepípedo de base  $15 \text{ dm}^2$  e aresta  $x$  é igual a  $15x$ ;
- O volume do cubo ser  $4 \text{ dm}^3$  maior do que o do paralelepípedo;
- A equação  $x^3 = 15x + 4$ , ou seja,  $x^3 - 15x - 4 = 0$ .

Agora que temos a equação que representa a situação descrita no problema, precisamos achar um jeito de resolvê-la e uma das maneiras muito curiosa, mas não muito usual seria recorrer à história da matemática e a origem dos Números Complexos.

*Para saber mais sobre os conceitos sobre os números complexos, consulte o site:*

<https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/iniciodoprojeto/origem-dos-numeros-complexos.>,  
Acesso em 22/04/2019

Em uma das passagens da História da Matemática ocorre um fato muito curioso, entre Niccolò Fontana, conhecido como Tartaglia e Girolano Cardano.

" ...chega aos ouvidos de Girolamo Cardano que Tartaglia sabia resolver tal tipo de equação. Cardano implorou a "fórmula" para resolver estas equações. Tartaglia recusou e acabou sendo acusado de mesquinho e egoísta. Com a insistência de Cardano e jurando que não divulgaria o resultado, Tartaglia revelou a solução. Porém, Cardano não cumpriu com sua palavra, e em 1545 fez a publicação no livro *Ars Magna* com o seguinte problema: "Determinar dois números cuja soma seja 10 e o produto seja 40", e o resolve através dos radicais de maneira similar as equações de 2º grau. Ele somente fez uma menção de Tartaglia na sua obra e até hoje a fórmula é conhecida como "Fórmula de Cardano". Esta descoberta foi tão inusitada que ficou conhecida como o início da matemática moderna<sup>1</sup>"

A Fórmula de "Cardano -Tartaglia" para determinar as raízes da equação do 3º grau do tipo , ficou da seguinte forma:



$$y = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}}$$

Caso tenha interesse em saber como é possível chegar na fórmula, a mesma se encontra no caderno do Professor, volume 1, da 3ª série do Ensino Médio.

$$X = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

E agora, com fica a solução? Pela fórmula, parece não existir raiz da equação, uma vez que deparamos, nos cálculos, com a raiz quadrada de um número negativo, porém quando verificamos o valor 4 para x, temos:

- O volume do cubo de aresta 4 dm, é igual a  $4^3 = 64 \text{ dm}^3$ ;
- O volume do paralelepípedo de base  $15 \text{ dm}^2$  e aresta 4 dm é igual a 60 ;
- O volume do cubo ser 4 maior do que o do paralelepípedo;
- A equação  $x^3 = 15x + 4$ , ou seja  $x^3 - 15x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4^3 - 15 \cdot (4) - 4 = 0$  (verdadeiro).

Observe que podemos escrever  $121 = 121 \cdot (-1)$  e raiz quadrada de 121 é 11, só falta saber a raiz quadrada de -1. Como -1 não tem raiz real, vamos considerar que sua raiz é um número imaginário e o representaremos por i, Assim, i é um número tal que  $i^2 = -1$

Podemos agora escrever:  $\sqrt{-121} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1} = 11 \cdot i$

Substituindo  $\sqrt{-121}$  por  $11i$  na expressão

$$X = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}, \text{ obtemos}$$

$$X = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$

Usando o fato de que a raiz cúbica de um número é outro número que, elevado ao cubo, reproduz o primeiro, mostre que  $2 + i$  é uma raiz cúbica de  $2 + 11i$ . Ou seja, mostre que  $(2 + i)^3 = 2 + 11i$

De fato, temos:

$$(2 + i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3$$

$$(2 + i)^3 = 8 + 12 \cdot i + 6 \cdot i^2 + i^3$$

Como  $i^2 = -1$ , então:

$$(2 + i)^3 = 8 + 12i + 6 \cdot (-1) + (-1) \cdot i$$

$$\text{Ou seja, } (2 + i)^3 = 2 + 11i$$

Substituindo os valores das raízes cúbicas encontradas, temos:

$$X = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}, \text{ ou seja,}$$

$$x = 2 + i + 2 - i = 4$$

Assim, reconciliamos a fórmula com o **fato** de que a equação tinha  $x = 4$  como uma de suas raízes

## PENSANDO NAS EQUAÇÕES DO 2º GRAU.

Normalmente quando resolvemos uma equação do 2º grau completa, usamos a “Fórmula de Bháskara”, onde inevitavelmente nos deparamos com a extração de raiz quadrada, o que não é muito complicado para chegar ao resultado. O problema surge quando essa raiz é de um número negativo e então, temos que recorrer a outros “métodos” para resolver a questão.

Veja o exemplo abaixo:

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Note que:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4}$$

Sabendo-se que:

$$-1 = i^2$$

Então,

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{i^2} \cdot \sqrt{4} = i \cdot 2$$

A solução foi representar a raiz quadrada de  $-1$  como um número imaginário “ $i$ ”, e finalmente a resposta para a equação é:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} \Rightarrow x' = 3 + i \text{ e } x'' = 3 - i$$

## ATIVIDADE 1

Considerando os números complexos como recurso para dar sentido ao cálculo de equações algébricas, composto por parte real  $x$  e parte imaginária  $yi$ , sendo  $i = \sqrt{-1}$ , encontre os valores das raízes a seguir:

- $\sqrt{-25}$
- $\sqrt{-16}$
- $\sqrt{-49}$
- $\sqrt{x^2 + y^2} = r;$

Resolução

- $(\overline{AB}) = 5$

b.  $(\overline{AD}) = \sqrt{13}$

c.  $(\overline{AG}) = \sqrt{34}$

d.  $(\overline{DE}) = \sqrt{5}$

## ATIVIDADE 2

Vamos supor que possamos continuar a operar com os números complexos como se opera com os números reais, respeitando-se apenas a novidade que decorre do fato de termos  $i^2 = -1$ . Determine as soluções para as situações a seguir:

- $i^7$
- $i^5 + i^8$
- $i^4 + i^9 - i^6$
- $(-1 + i)^3$

Resolução:

- $$i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i$$

$$= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot i =$$

$$= (+1) \cdot (-1) \cdot i =$$

$$= (+1) \cdot (-1) \cdot i =$$
- $$i^5 = i^2 \cdot i^2 \cdot i = (-1) \cdot (-1) \cdot i = +1i = i$$

$$i^8 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 + i^8 = i + 1$$
- $$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = +1$$

$$i^9 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i =$$

$$= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot i$$

$$= (+1) \cdot i = i$$

$$i^6 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$$

$$i^4 + i^9 - i^6 = +1 + i - (-1) = 2 + i$$
- $$(-1 + i)^3 =$$

$$(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 \cdot i + 3 \cdot (-1) \cdot i^2 + i^3 =$$

$$= -1 + 3i - 3i^2 + i^3 = -1 + 3i - 3i^2 + (i^2 \cdot i) =$$

$$= -1 + 3i - 3 \cdot (-1) + ((-1) \cdot i) =$$

$$= -1 + 3 + 3i - i = 2 + 2i$$

### ATIVIDADE 3

Efetue as operações a seguir, supondo que são válidas as propriedades das operações com números reais para os números formados por uma parte real e uma parte imaginária:

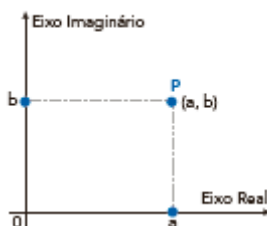
- $(5 - 3i) + (-3 + 4i)$
- $(7i - 5) - (-2 + 8i)$
- $(2i - 4) \cdot (3 + 6i)$
- $(8 + i) \cdot (8 - i)$

Resolução:

- $(5 - 3i) + (-3 + 4i)$   
 $5 - 3i - 3 + 4i = 5 - 3 - 3i + 4i = \mathbf{2 + i}$
- $(7i - 5) - (-2 + 8i)$   
 $7i - 5 + 2 + 8i = -5 + 2 + 8i + 7i = \mathbf{-3 + 15i}$
- $(2i - 4) \cdot (3 + 6i)$   
 $6i + 12i^2 - 12 - 24i = 12i^2 - 18i - 12 =$   
 $12 \cdot (-1) - 18i - 12 = \mathbf{-24 - 18i}$
- $(8 + i) \cdot (8 - i)$   
 $(64 - i^2) = 64 - (-1) = 65$

### PLANO DE ARGAND – GAUSS

A representação geométrica de um número complexo foi associada aos estudos dos matemáticos Wessel, Argand e Gauss, os números  $a$  e  $b$  do número complexo  $a + bi$  (sendo “ $a$ ” parte real e “ $b$ ” parte imaginária) são associados a coordenadas de um ponto no plano, criando assim uma representação geométrica para o complexo.

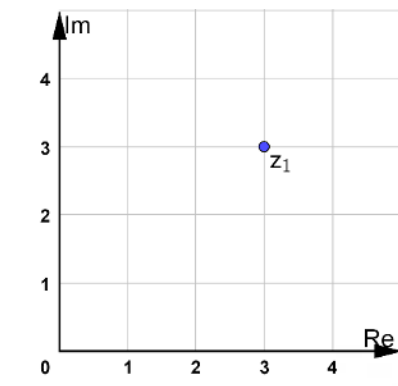


Fonte: Elaborada pelos autores

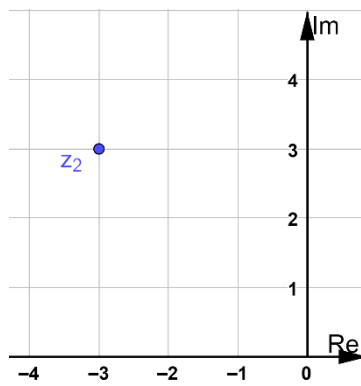
## ATIVIDADE 4

Dados os complexos a seguir, represente-os no plano complexo.

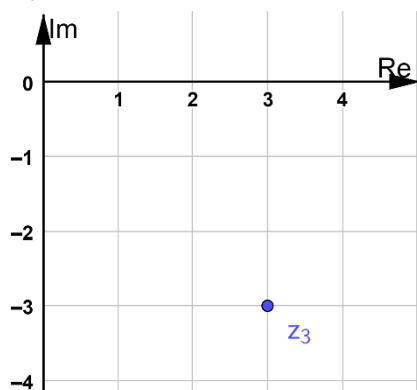
a.  $Z_1 = 3 + 3i$



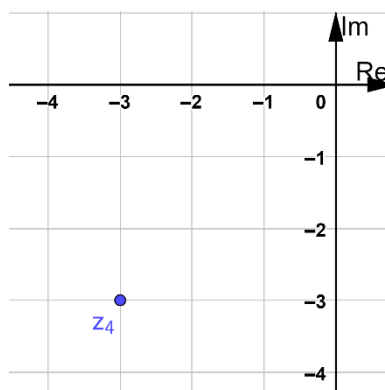
b.  $Z_2 = -3 + 3i$



c.  $Z_3 = 3 - 3i$



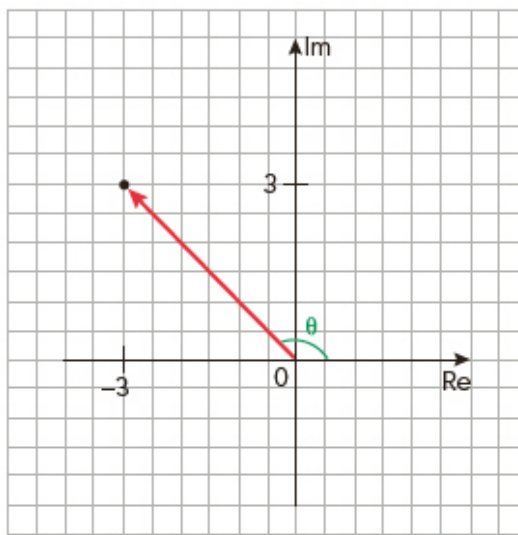
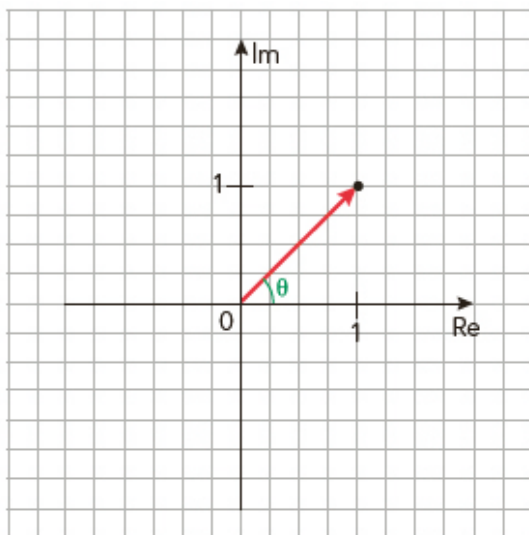
d.  $Z_4 = -3 - 3i$



Fonte: Elaborada pelos autores

## ATIVIDADE 5

Observe os números complexos  $a + bi$  representados no plano de *Argand – Gauss* e determine, para cada um, a medida do ângulo  $\theta$  e do segmento que une o ponto  $(a; b)$  à origem do sistema.



Fonte: Elaborada pelos autores

Resolução:

a.  $z = 1 + i$

$$\rho^2 = a^2 + b^2$$

$$\rho^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\rho^2 = 1 + 1$$

$$\rho = \sqrt{2}$$

$$\theta = \text{Arg}(z)$$

$$\text{tg}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\text{tg}\theta = \frac{1}{1} = 1$$

Assim sendo,  $\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

b.  $z = -3 + 3i$

$$\rho^2 = a^2 + b^2$$

$$\rho^2 = (-3)^2 + 3^2$$

$$\rho^2 = 9 + 9$$

$$\rho = \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} \Rightarrow \rho = 3\sqrt{2}$$

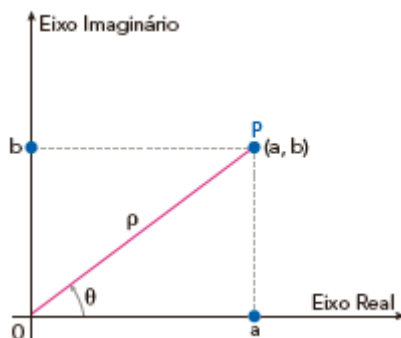
$$\theta = \text{Arg}(z)$$

$$\text{tg}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\text{tg}\theta = \frac{-1}{1} = -1$$

Assim sendo,  $\theta = 135^\circ = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$

O ponto "P" e a imagem geométrica ou afixo do número complexo  $(a + bi)$



Fonte: Elaborada pelos autores

Na imagem acima foi evidenciada a distância de P até origem O representada pela letra grega  $\rho$  (Rho). Esse segmento  $\rho$  representa o módulo do número complexo  $(a + bi)$  e pode ser encontrado usando o Teorema de Pitágoras, em que  $a$  e  $b$  representam os catetos do triângulo e  $\rho$  a hipotenusa. O ângulo formado entre o Eixo Real e o seguimento  $\rho$ , aqui representado pela letra grega  $\theta$  (theta) é o argumento do número complexo  $(a + bi)$ . Determinado o triângulo retângulo  $aOP$  podemos fazer uso das razões trigonométricas estudadas nos anos anteriores, mais especificamente  $\text{sen } \theta$  e  $\text{cos } \theta$  e  $\text{tg } \theta$ .

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{\rho}; \text{cos } \theta = \frac{a}{\rho}; \text{tg } \theta = \frac{b}{a}$$

Possibilitando a representação trigonométrica ou polar do complexo  $(a + bi)$ , temos:

$$\rho \cdot (\text{cos } \theta + i \cdot \text{sen } \theta)$$

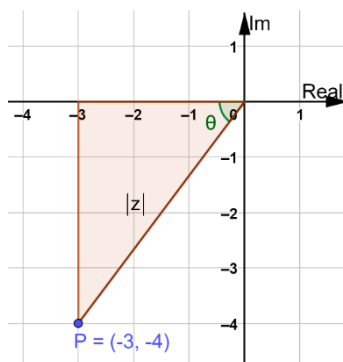
## ATIVIDADE 6

Determine o argumento do número complexo  $z = -3 - 4i$ .

$\theta$	$\text{tg } \theta$
<b>50°</b>	1,1918
<b>51°</b>	1,2349
<b>52°</b>	1,2799
<b>53°</b>	1,3333
<b>54°</b>	1,3764
<b>55°</b>	1,4281
<b>56°</b>	1,4826

Fonte: Elaborada pelos autores

## Resolução



Fonte: Elaborada pelos autores

Para determinar o argumento do número complexo  $z = -3 - 4i$ , precisamos calcular o valor de  $\theta$ , assim como  $a = -3$  e  $b = -4$ , teremos:

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Segue que:

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{-4}{5}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{a}{|z|} = \frac{-3}{5}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{-3}{5}} =$$

$$= \frac{-4}{5} \cdot \frac{5}{-3} = \frac{-4}{-3} = 1,3333\dots$$

Portanto, o argumento  $\theta$ , será o arco cuja tangente é 1,3333, que é aproximadamente a  $53,13^\circ$ .

## ATIVIDADE 7

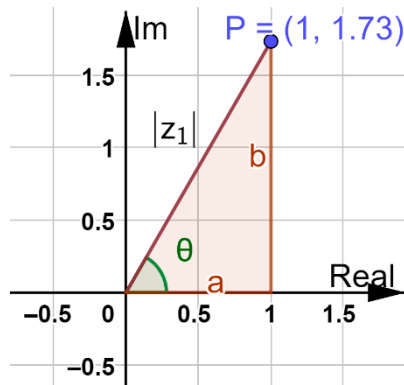
Represente no plano complexo os números a seguir e, em seguida, escreva-os na forma trigonométrica:

- $Z_1 = 1 + \sqrt{3}i$
- $Z_2 = -1 + \sqrt{3}i$
- $Z_3 = -\sqrt{3} + 3i$
- $Z_4 = \sqrt{3} - 3i$



Resolução:

a.  $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$



Fonte: Elaborada pelos autores

$$|z_1| = \left| \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \right| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

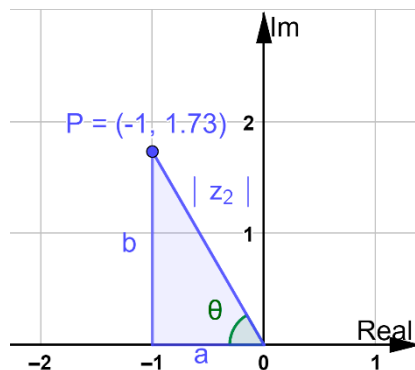
$$\text{sen}\theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\text{ou } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\therefore z_1 = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \text{sen} \frac{\pi}{3} \right)$$

b.  $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$



Fonte: Elaborada pelos autores

$$|z_2| = \left| \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} \right| = \left| \sqrt{1+3} \right|$$

$$= \left| \sqrt{4} \right| = 2$$

$$\text{sen}\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos}\Theta = -\frac{1}{2}$$

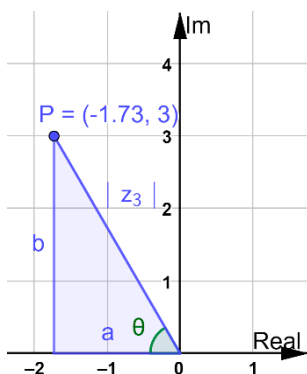
$$\text{tg}\Theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot -\frac{2}{1} =$$

$$\sqrt{3} \text{ (3}^\circ \text{ quadrante)} \Rightarrow \Theta = 60^\circ$$

$$\text{ou } \Theta = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\therefore z_2 = 2 \cdot \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \text{sen} \frac{2\pi}{3} \right)$$

c.  $z_3 = -\sqrt{3} + 3i$



Fonte: Elaborada pelos autores

$$|z_3| = \left| \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} \right| =$$

$$\left| \sqrt{3+9} \right| = \left| \sqrt{12} \right| = 3\sqrt{2}$$

$$\text{sen}\Theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos}\Theta = \frac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

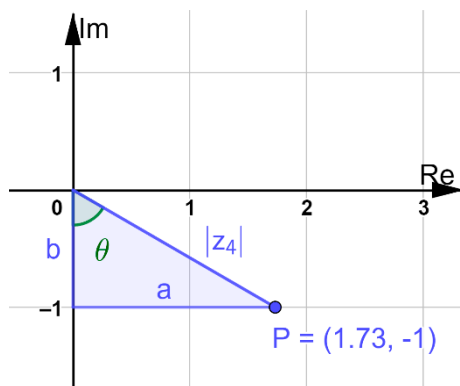
$$\text{tg}\Theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{-\sqrt{3}} = \frac{6}{-2\sqrt{3}} =$$

$$-\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3} \text{ (2º quadrante)} \Rightarrow \Theta = 60$$

$$= \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\therefore z_3 = 3\sqrt{2} \cdot \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right)$$

d.  $z_4 = \sqrt{3} - i$



Fonte: Elaborada pelos autores

$$|z_4| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{sen}\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\Theta = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3} \text{ (4º quadrante)} \Rightarrow \Theta = 60^\circ = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\therefore z_4 = 2 \cdot \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} \right)$$

## TEMA 2 – DAS FÓRMULAS À ANÁLISE QUANTITATIVA – COEFICIENTES E RAÍZES

Uma equação de 1º grau com uma raiz igual a p pode ser assim escrita:

$$x - p = 0.$$

Uma equação de 2º grau com uma raiz igual a  $p$  e outra raiz igual a  $m$  pode ser assim escrita:

$$(x - p) \cdot (x - m) = 0$$

Escrita dessa maneira, dizemos que a equação está em sua forma fatorada. Aplicando a propriedade distributiva nessa expressão, obtemos:

$$x^2 - (p + m)x + pm = 0$$

### Exemplos práticos

Considere a equação do 2º grau,  $x^2 - 5x + 6 = 0$ . Não é difícil verificar que os valores 2 e 3 são raízes da equação, pois satisfazem a "igualdade"

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \Rightarrow 10 - 10 = 0$$

$$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0 \Rightarrow 15 - 15 = 0$$

As raízes 2 e 3 quando somadas dão resposta 5 e quando multiplicadas, dão resposta 6.

De forma reduzida podemos escrever:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

### Agora é com você.

Na equação  $x^2 - 7x + 12 = 0$ , quais seriam as raízes?

**Resolução:**

4 + 3 e 4 · 3

### Formalizando:

Uma forma genérica de se escrever uma equação do 2º grau é  $ax^2 + bx + c = 0$ . Comparando a forma generalizada com a equação  $x^2 - 5x + 6 = 0$ , podemos estabelecer uma relação de correspondência, como a seguinte:

$$a = 1; b = -5; c = 6$$

E pensando na soma e produto das raízes, temos que:

### Atenção:

- Quando o valor do coeficiente **a** for diferente de 1 uma opção para a resolução do problema é dividir toda equação por **a**, obtendo assim  $a = 1$ ;
- O coeficiente **c** é o produto das raízes, quando  $a = 1$ , então, as raízes são divisores de **c**;
- 6 tem como divisores inteiros (-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6), de fato, de todos os divisores de 6, temos 2 e 3 que são raízes da equação.

## ATIVIDADE 1

Encontre ao menos uma raiz das seguintes equações de 3º grau:

a.  $x^3 + x - 10 = 0$

- b.  $x^3 - 5x + 6x = 0$   
 c.  $8 + x^3 = 0$   
 d.  $2x^3 + 4x - 2x - 4 = 0$

### Formas fatoradas de equações polinomiais de grau 2, 3 e 4

Resolução:

a.  $x^3 + x - 10 = 0$

Pode-se constatar que a equação acima possui, apenas uma raiz, conforme segue:

Para  $x = 2$ ,

temos:  $2^3 + 2 - 10 = 8 + 2 - 10 = 0$

b.  $x^3 - 5x + 6x = 0$

Agrupando os termos semelhantes, temos:  $x^3 + x = 0$ , desta forma a única raiz será  $x = 0$

c.  $8 + x^3 = 0$

a única raiz da equação será  $x = -2$ , pois:

$$x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

d.  $2x^3 + 4x - 2x - 4 = 0$

Agrupando os termos semelhantes, temos:  $2x^3 + 2x - 4$ , e pode-se verificar que a soma dos coeficientes é igual a 0, então concluímos que  $x = 1$  é a raiz da equação, pois:  $2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 - 4 = 2 + 2 - 4 = 0$ .

### Formas fatoradas de equações polinomiais de grau 2, 3 e 4.

Você sabia que quando conhecemos as raízes de uma dada equação polinomial, podemos escrevê-la na forma fatorada?

Sim, no caso de uma equação polinomial de grau 2,  $ax^2 + bx + c = 0$ , de raízes  $r_1$  e  $r_2$ , sabemos que, após a divisão de todos os coeficientes por **a**, ela pode ser escrita na forma  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ , que podemos imaginar fatorada e escrita na forma  $(x - r_1) \cdot (x - r_2) = 0$ , ou seja:

- $x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2 = 0$ , ou seja:
- $x^2 - S_1x + S_2 = 0$ , onde  $S_1 = r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$  é a soma das raízes e  $S_2 = r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$  é o produto das raízes.

No caso de uma equação de 3º grau, temos  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . Mesmo sem conhecer fórmulas para as soluções, se a equação tiver como raízes  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ , procedendo de maneira análoga ao que fizemos para a equação polinomial de grau 2, após a divisão por **a** de todos os seus coeficientes, ela pode ser escrita na forma  $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$ , que poderíamos imaginar na forma fatorada e escrita como:

$$(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) = 0$$

Efetuando as multiplicações indicadas e ordenando, os resultados, obtemos a forma equivalente:

$$x^3 - (r_1 + r_2 + r_3) \cdot x^2 + (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3)x - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

$$x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$$

onde:

$S_1 = r_1 + r_3$  é a soma das raízes,

$S_2 = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3$  é a soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas

e  $S_3 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$  é a soma dos produtos das raízes tomadas três a três, ou seja, é o produto das raízes.

Por exemplo, se uma equação polinomial de grau 3, tiver como raízes 2, 3 e 5, então ela poderá ser escrita na forma:

$$(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 5) = 0$$

e ao efetuarmos as multiplicações, obtemos:

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0;$$

podemos notar que  $S_1 = 2 + 3 + 5 = 10$ ,

$$S_2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 31$$

$$S_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

ou seja, a equação pode ser escrita na forma:

$$x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$$

Se procedermos analogamente no caso de uma equação de 4º grau:  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ , de raízes  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  chegaremos à forma equivalente:

$$x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$$

onde:

$$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

$$S_2 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4$$

$$S_3 = r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4$$

$$S_4 = r_1r_2r_3r_4$$

Tal relação pode ser generalizada para uma equação algébrica de grau **n**. É importante notar a alternância nos sinais das somas **S**: as somas das raízes tomadas de 1 em 1, de 3 em 3, de 5 em 5, aparecem como coeficientes na equação com o sinal trocado; as somas de 2 em 2, de 4 em 4, de 6 em 6, ... aparecem como coeficientes com o próprio sinal

Essas relações entre as raízes e sua forma fatorada são conhecidas como as Relações de Girard.

## AATIVIDADE 2

Levando em consideração os apontamentos anteriormente descritos, e considerando o quadro de soma e produto das raízes, para equações polinomiais de graus maiores que 2, responda:

- Escreva na forma fatorada uma equação de 3º grau com raízes **m**, **p** e **k**.
- Escreva na forma fatorada de uma equação de 3º grau com raízes 2, 3 e 4.

- c. Desenvolva a equação do item anterior, aplicando a propriedade distributiva, e identifique a soma e o produto das raízes na equação final.
- d. Como foi descrito anteriormente uma equação polinomial de grau 3, pode ser escrita da seguinte maneira:  $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$ . Retome a equação do item c e responda quanto é, nessa equação:

$$\frac{b}{a} ?$$

$$\frac{c}{a} ?$$

$$\frac{d}{a} ?$$

Resolução;

a.  $(x - m) \cdot (x - p) \cdot (x - k) = 0$

b.  $(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

c.  $x^3 - (2 + 3 + 4)x^2 + (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4)x - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0$

$$x^3 - \underbrace{9x^2} + 26x - \underbrace{24}$$

Soma das raízes      Produto das raízes

d.  $\frac{b}{a}$ : é igual à soma das raízes da equação com "sinal trocado".

$\frac{c}{a}$ : é igual à soma das raízes da equação com "sinal trocado".

$\frac{d}{a}$ : é igual ao produto das raízes com o "sinal trocado".

### ATIVIDADE 3

Já vimos que uma equação polinomial de grau 3:  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  pode ser escrita da forma:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

E também que, se essa equação tiver como raízes , ela pode ser fatorada e escrita na forma:

$$(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) = 0$$

Efetuada as multiplicações indicadas e ordenando os resultados, obtemos a forma equivalente:

$$x^3 - \underbrace{(r_1 + r_2 + r_3)}_{s_1}x^2 + \underbrace{(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)}_{s_2}x - \underbrace{(r_1r_2r_3)}_p = 0$$

onde  $s_1 = r_1 + r_2 + r_3$  é a soma das raízes,  $s_2 = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3$  é a soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas e  $P = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$  é a soma dos produtos das raízes tomadas três a três, ou seja, é o produto das raízes.

Se uma equação polinomial de grau 3 tem como raízes  $-2$ ,  $3$  e  $4$ , calcule  $S_1$ ,  $S_2$  e  $P$ .

- Escreva a equação na forma fatorada.
- Aplicando a propriedade distributiva e eliminando os parênteses na equação do item anterior, qual será a forma final da equação obtida?

Resolução:

- $$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 = -2 + 3 + 4 = 5$$

$$S_2 = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 4 = -6 - 8 + 12 = -2$$

$$P = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -2 \cdot 3 \cdot 4 = -24$$
- $(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$
- $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$

## ATIVIDADE 4

Uma equação polinomial de grau 3 tem como raízes  $2$ ,  $3$  e  $5$ . Escreva essa equação na forma  $ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

Resolução:

$$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 = 2 + 3 + 5 = 10$$

$$S^2 = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 =$$

$$= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 =$$

$$= 6 + 10 + 15 = 31$$

$$P = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$\text{Equação: } x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$$

## ATIVIDADE 5

Escreva na forma fatorada uma equação algébrica de grau 4 cujas raízes são:

- $2, 3, 4$  e  $5$ ;
- $-2, 3, 4$  e  $-5$ ;
- $1, 0, 3$  e  $7$ .

Resolução:

- $(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) \cdot (x - 5) = 0$
- $(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) \cdot (x + 5) = 0$
- $(x - 1) \cdot x \cdot (x - 3) \cdot (x - 7) = 0$

## ATIVIDADE 6

Escreva todas as equações da Atividade 5, na forma:  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ . Para isso faça as multiplicações que forem indicadas.



Resolução:

Da equação:  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ , vamos dividir todos os coeficientes por  $a$ , então temos:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$$

onde:

$$\frac{b}{a} = -(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$$

$$\frac{c}{a} = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4 + r_3 \cdot r_4$$

$$\frac{d}{a} = -(r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_3 \cdot r_4)$$

$$\frac{e}{a} = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4$$

Aplicando aos itens da atividade anterior, teremos:

a. Calculando as somas das raízes tomadas 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3 e 4 a 4, temos

$$S_1 = -(2 + 3 + 4 + 5) = -14$$

$$S_2 = (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5) = (6 + 8 + 10 + 12 + 15 + 20) = 71$$

$$S_3 = -(2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5) = -(24 + 30 + 40 + 60) = -154$$

$$S_4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

A equação cujas raízes são: 2, 3, 4 e 5 será dada por:  $x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$

b. Da mesma maneira, temos:

$$S_1 = -(-2 + 3 + 4 - 5) = 0$$

$$S_2 = (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-5) + 3 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot (-5) =$$

$$= (-6) + (-8) + 10 + 12 + (-15) + (-20) = -27$$

$$S_3 = -((-2) \cdot 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 \cdot (-5) + (-2) \cdot 4 \cdot (-5) + 3 \cdot 4 \cdot (-5)) =$$

$$= -((-24) + 30 + 40 + (-60)) = -(-14) = 14$$

$$S_4 = (-2) \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-5) = 120$$

A equação cujas raízes são: -2, 3, 4 e -5 será dada por:  $x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$

c. Efetuando os cálculos temos:

$$S_1 = -(1 + 0 + 3 + 7) = -11$$

$$S_2 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 3 + 7 + 21 = 31$$

$$S_3 = -(1 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 7 + 0 \cdot 3 \cdot 7) = -21$$

$$S_4 = 1 \cdot 0 \cdot 3 \cdot 7 = 0$$

A equação cujas raízes são: 1, 0, 3 e 7 será dada por:  $x^4 - 11x^3 + 31x^2 - 21x = 0$

## ATIVIDADE 7

Dada a equação polinomial  $x^3 - 8x^2 + kx - 24 = 0$ , responda:

- Quais são as possíveis raízes inteiras da equação?
- Se a equação tiver duas raízes simétricas, qual será a terceira raiz?
- Se uma das raízes for o inverso da outra, qual será a terceira raiz?
- É possível que a equação tenha uma raiz nula?

Resolução:

- Observando os coeficientes, concluímos que 24 é igual ao produto das três raízes. Logo, os divisores de 24 são possíveis raízes inteiras da equação, ou seja,  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12$  e  $\pm 24$ . Naturalmente, dependendo do valor de  $k$ , tal equação pode não admitir qualquer um desses divisores como raiz; o que se pode afirmar é precisamente o fato de que, se houver raiz inteira, ela terá de ser um dos divisores de 24.
- Como a soma das raízes simétricas é zero e a soma das três raízes é 8, então a terceira raiz deverá ser igual a 24.
- Como o produto das duas raízes inversas é igual a 1 e o produto das três raízes é 24, então a terceira raiz deverá ser igual a 24.
- Não é possível que a equação tenha raiz nula, pois, nesse caso, o produto das raízes seria zero, e já vimos que o produto das raízes é igual a 24.

## ATIVIDADE 8

Considere a equação polinomial  $3x^4 - 12x^3 + kx^2 - 6x + 3 = 0$

- Quais são as possíveis raízes inteiras da equação?
- Quais são os valores de  $k$  que fazem com que a equação proposta tenha raízes inteiras?

Resolução:

- Dividindo os coeficientes da equação por 3, que é o coeficiente do termo de maior grau, obtemos a equação equivalente (com as mesmas raízes) expressa na forma:

$$x^4 - 4x^3 + \frac{k}{3}x^2 - 2x + 1 = 0$$

Comparando com a forma  $x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$ , concluímos que o produto das raízes da equação é igual a  $S_4 = 1$ . Logo, as possíveis raízes inteiras da equação são os divisores de 1, ou seja, +1 ou -1.

- Para que a equação tenha raízes inteiras, ou seja, para que ela tenha +1 ou -1 como raízes, quando substituirmos os valores de  $x$  por +1 ou por -1 no primeiro membro da equação, o resultado deve ser igual ao segundo membro, ou seja, zero.

Para  $x = 1$ , temos

$$1^4 - 4 \cdot 1^3 + \frac{k}{3} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$$

ou seja,  $k = 12$

Para  $x = -1$ , temos:

$$(-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 + \frac{k}{3} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1$$

ou seja,  $k = 24$

## ATIVIDADE 9

Sabendo que 1 é raiz da equação  $x^3 + 7x^2 + kx - 15 = 0$ , determine o valor de  $k$  e encontre as outras raízes.

Como 1 é raiz, substituindo  $x$  por 1 devemos ter a igualdade verdadeira, logo,  $1 + 7 + k - 15 = 0$ , e então  $k = 7$ .

Como a soma das três raízes é igual a  $-7$ , sendo uma delas igual a 1, a soma das outras duas deve ser igual a  $-8$ .

Como o produto das três raízes é igual a 15, sendo uma delas igual a 1, o produto das outras duas é igual a 15.

Logo, além da raiz dada  $r_1 = 1$ , as outras duas raízes da equação são tais que sua soma é  $-8$  e seu produto é 15, elas são portanto, as raízes da equação de segundo grau  $x^2 + 8x + 15 = 0$ .

Resolvendo tal equação, obtemos  $r_2 = -3$  e  $r_3 = -5$ .

Concluimos que a equação proposta no enunciado tem como raízes os números reais 1,  $-3$  e  $-5$ .

*Observação:*

*Outras atividades como as anteriores podem ser propostas, mas lembramos que não interessa tanto, nesse caso, a realização de muitos cálculos, quanto, por exemplo, a percepção do fato de que, conhecendo uma raiz da equação, é possível reduzi-la a uma equação mais simples, ou seja, a pesquisa sobre as possíveis raízes inteiras pode resultar na solução da equação.*

### **Equações e polinômios: divisão por $x - k$ e redução do grau de uma equação polinomial.**

Como se sabe, um polinômio de grau  $n$  é uma expressão algébrica do tipo:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \text{ com } a_0 \neq 0$$

Então, uma equação algébrica também pode ser chamada uma equação polinomial, uma vez que ela pode ser escrita na forma  $P(x) = 0$ , sendo  $P(x)$  um polinômio.

Dessa forma, se o valor de  $P(x)$  para  $x = k$ , que indicaremos por  $P(k)$ , for igual a zero, ou seja  $P(k) = 0$ , então isso significa que  $k$  é uma raiz da equação polinomial  $P(x) = 0$ .

Seja  $P_1(x)$  um polinômio e  $P_2(x)$  outro polinômio, podemos ter o caso de  $P_1(x) = P_2(x)$  para alguns valores particulares de  $x$  e  $P_1(x) \neq P_2(x)$  para outros valores de  $x$ .

Por exemplo:

$P_1(x) = x^2 + 3x - 1$  e  $P_2(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 13$ , então temos:

$P_1(2) = 9$  e  $P_2(2) = 9$ , mas  $P_1(0) = -1$  e  $P_2(0) = 13$

Quando dois polinômios  $P_1(x)$  e  $P_2(x)$  são tais que, para todos os valores possíveis para  $x$ , temos  $P_1(x) = P_2(x)$ , então dizemos que os polinômios são idênticos, e escrevemos  $P_1(x) = P_2(x)$ .

Seja  $P_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \dots + a_{n-1}x + \dots + a_n$  um polinômio de grau  $n$  e  $P_2(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + b_3x^{m-3} + \dots + b_{m-1}x + b_m$  outro polinômio de grau  $m$ , para termos  $P_1(x) = P_2(x)$ , ou seja, para os dois polinômios serem iguais para todos os valores de  $x$ , tal como,  $a_n = b_m$ , pois  $a_n = P_1(0)$  e  $b_m = P_2(0)$ . Podemos mostrar que a igualdade entre os dois polinômios para todos os valores de  $x$  obriga a igualdade de todos os coeficientes dos termos de mesmo grau, ou seja:

$a_n = b_m$ ;  $a_{n-1} = b_{m-1}$ ;  $a_{n-2} = b_{m-2}$ , e assim por diante.

Em consequência, dois polinômios idênticos devem ser sempre do mesmo grau, uma vez que, se forem de graus diferentes, os coeficientes dos termos de maior grau serão distintos (um deles é zero e o outro, diferente de zero).

Por exemplo, podemos ter  $P_1(x) = x^2 + 3x - 1$  e  $P_2(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 13$  iguais para alguns valores de  $x$ , ou seja, não é verdade que  $P_1(x) = P_2(x)$ , nesse caso, pois os termos de grau 3 são distintos (1 em  $P_2(x)$  e 0 em  $P_1(x)$ ).

### Operações com polinômios.

Para somar, subtrair e multiplicar polinômios, basta operar com as expressões algébricas que compõem suas parcelas, que são os monômios. Assim, é necessário realizar as operações indicadas, recorrendo à propriedade distributiva, quando for o caso, e reunir os termos que correspondem a potências de  $x$  de mesmo grau (chamados "termos semelhantes").

## ATIVIDADE 1

Considere os polinômios  $A(x) = x^2 - 3x + 2$  e  $B(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

- Calcule  $A(1)$  e  $B(1)$
- Calcule  $x$  para que  $A(x) = 0$
- Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  forem raízes de  $B(x)$ , quanto é o produto de  $a \cdot b \cdot c$ ?
- É possível termos  $A(x) = B(x)$ ?
- É possível termos  $A(x) \equiv B(x)$ ?

Resolução:

- $A(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 \Rightarrow A(1) = 0$   
 $B(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = B(1) = -2$
- $A(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

- c. O produto das raízes (a, b e c) do polinômio  $B(x)$  é  $-2$ .  
 d. Sim, é possível.

Resolvendo a equação algébrica  $A(x) = B(x)$ , temos:  $x^2 - 3x + 2 = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ ; logo, fatorando, obtemos  $x \cdot x \cdot (x - 3) = 0$ , portanto, para o produto ser nulo, um dos fatores deve ser nulo, ou seja, ou  $x = 0$ , ou  $x = 0$  (0 é uma raiz dupla), ou então  $x = 3$ . Logo, a equação  $A(x) = B(x)$  tem como raízes 0 e 3. Para todos os valores de  $x$  diferentes de 0 e de 3, os polinômios  $A(x)$  e  $B(x)$  assumem valores distintos.

- e. Não. Os polinômios têm graus diferentes. Em consequência, os coeficientes de  $x^3$  são diferentes em  $A(x)$  e  $B(x)$ .

## ATIVIDADE 2

Considere os polinômios  $A(x) = x^3 - 3x + 2$  e  $B(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10$ .

- a. É possível termos  $A(x) = B(x)$ ?  
 b. É possível termos  $A(x) \neq B(x)$ ?

Resolução:

- a. Sim. Basta resolver a equação correspondente:  $x^3 - 3x + 2 = x^3 - 2x^2 - 3x + 10$ . Efetuando os cálculos, obtemos:  $2x^2 = 8$  e então,  $x = \pm 2$ .  
 b. Não, pois os coeficientes de  $x^2$  são diferentes nos dois polinômios.

## ATIVIDADE 3

Considere os polinômios:

$$P_1(x) = ax^5 - 11x^4 - 2x^3 + 7x^2 + bx + d$$

$$P_2(x) = bx^5 + bx^4 + cx^3 - 2x^3 + 7x^2 - \sqrt{3}x + d$$

- a. Determine os valores de **a**, **b** e **c**, de modo que os polinômios sejam idênticos.  
 b. Calcule o valor de **d**, sabendo que  $-1$  é raiz da equação  $P_1(x) = 0$ .

Resolução:

- a. Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau, temos:  
 b. Se  $-1$  é raiz da equação  $P_1(x) = 0$ , então devemos ter  $P_1(-1) = 0$ . Logo, substituindo  $x$  por  $-1$ , e igualando o resultado a zero, obtemos:

$$-\sqrt{3} \cdot (-1)^5 - 11 \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 - \sqrt{3} \cdot (-1) + d = 0$$

Concluimos, efetuando os cálculos, que  $d = 2 - 2\sqrt{3}$

## ATIVIDADE 4

Considere o polinômio:

- Mostre que  $x = 1$  é raiz da equação  $P(x) = 0$
- Calcule o quociente da divisão de  $P(x)$  pelo binômio  $x - 1$ .

Resolução:

- Basta substituir  $x$  por 1 em  $P(x)$  e verificar que o resultado é zero, ou seja, que temos  $P(1) = 0$ . Isso significa que  $P(x)$  pode ser fatorado e apresenta  $x - 1$  como um fator, ou seja, é divisível por  $x - 1$ . Podemos, então, escrever:

$P(x) \equiv (x - 1) \cdot Q(x)$  sendo  $Q(x)$  o quociente da divisão de  $P(x)$  por  $x - 1$ .

- O quociente da divisão será um polinômio de grau 4, podendo ser escrito na forma geral  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ .

Devemos ter a identidade:

$$3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12 \equiv (x - 1) \cdot (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e).$$

Efetuada as operações indicadas no segundo membro, obtemos:

$$3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12 \equiv ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e$$

Agrupando os termos semelhantes do segundo membro, obtemos:

$$\begin{array}{c}
 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12 \\
 \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \swarrow \\
 \underbrace{ax^5} + \underbrace{(b - a)x^4} + \underbrace{(c - b)x^3} + \underbrace{(d - c)x^2} + \underbrace{(e - d)x} - \underbrace{e}
 \end{array}$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau nos dois membros da identidade temos:

$$3 = a$$

$$-2 = b - a$$

$$5 = c - b$$

$$-11 = d - c$$

$$-7 = e - d$$

$$12 = -e$$

Logo concluímos que  $a = 3$ ,  $b = 1$ ,  $c = 6$ ,  $d = -5$ ,  $e = -12$  e, em consequência,  $Q(x) = 3x^4 + x^3 + 6x^2 - 5x - 12$

Assim, para resolver a equação  $P(x) = 0$ , sabendo que uma de suas raízes é  $x = 1$ , obtemos o quociente de  $P(x)$  por  $x - 1$ , chegando ao quociente  $Q(x)$ ; as demais raízes de  $P(x) = 0$  são as raízes de  $P(x) = 0$  são as raízes da equação  $Q(x) = 0$ .

**Reduzindo o grau da equação. Divisão por  $(x - k)$** 

Na equação  $2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$  podemos descobrir que uma possível raiz utilizando os conceitos apresentados, primeiro dividimos a equação toda pelo "coeficiente a", que resulta em: , resultando  $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ , o que nos leva a supor que uma de suas raízes seria um de seus divisores  $(-1, 1, -2, 2)$  e por verificação podemos chegar nos números  $(-2, -1, 1)$ , pois:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$(-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 2 = 0$$

$$10 - 10 = 0$$

Do mesmo modo podemos verificar que  $-1$  e  $1$  também satisfazem a igualdade, sendo assim raízes da equação.

Podemos escrever, então, que o polinômio  $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$  tem uma de suas raízes  $-2$ , pois,  $P(-2) = 0$ , ou seja, substituindo o valor  $-2$  na variável  $x$ , verificamos que a igualdade se estabelece.

Ampliando essa ideia, podemos dizer que se um polinômio  $P(x)$  tem como raiz o número  $k$ , então a divisão de  $P(x)$  por  $(x - k)$  dá resto zero, além de obtermos uma equação (Quociente da divisão) com grau menor que  $P(x)$ .

$$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4; [x - (-2)]$$

$$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4; (x+2)$$

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 \\
 \underline{-2x^3 - 4x^2} \\
 0 \quad 0 \quad -2x - 4 \\
 \qquad \qquad \underline{+2x + 4} \\
 \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \phantom{2x^3 + 4x^2 - 2x - 4} \bigg| x + 2 \\
 \phantom{2x^3 + 4x^2 - 2x - 4} \phantom{0 \quad 0} \underline{2x^2 - 2}
 \end{array}$$

**ATIVIDADE 5**

Agora descubra as raízes das seguintes equações polinomiais:

a.  $x^3 + x - 10 = 0$

b.  $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c.  $8 + x^3 = 0$

**Resolução:**

- a. O número 10 tem como divisores  $(\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10)$  sendo qualquer um desses divisores uma de suas possíveis raízes.

Teste de raízes do polinômio:  $x^3 + x - 10$

Para  $x=1$

$$1^3 + 1 - 10 = 0$$

$$1 + 1 - 10 = 0$$

$$-8 \neq 0$$

$\therefore$  não é raiz

Para  $x=5$

$$5^3 + 5 - 10 = 0$$

$$125 + 5 - 10 = 0$$

$$120 \neq 0$$

$\therefore$  não é raiz

Dividindo o polinômio por  $(x - \text{raiz}) = (x - 2)$ ; teremos:

$$\begin{array}{r}
 \cancel{x^3} + x - 10 \\
 - (\cancel{x^3} - 2x^2) \\
 \hline
 -2\cancel{x^2} + x - 10 \\
 - (-2\cancel{x^2} + 4x) \\
 \hline
 5x - 10 \\
 - (5x - 10) \\
 \hline
 0x + 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \boxed{x - 2} \\
 x^2 - 2x + 5
 \end{array}$$

Encontrando as raízes da equação quociente:

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$a = 1; b = -2; c = 5$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Como não existem raízes reais para a equação quociente, concluímos que a única raiz do Polinômio é 2.

- b. Como o polinômio não possui termo independente, conclui-se que uma de suas raízes é zero. Dividindo o polinômio por  $(x - \text{raiz}) = (x - 0)$ , teremos:



$$\begin{array}{r}
 \cancel{x^3} - 5x^2 + 6x \\
 - (\cancel{x^3}) \\
 \hline
 -\cancel{5x^2} + 6x \\
 - (-\cancel{5x^2}) \\
 \hline
 \cancel{6x} \\
 - \cancel{6x} \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \phantom{x} \\
 \hline
 x^2 - 5x + 6
 \end{array}$$

Encontrando as raízes da equação quociente temos:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$a = 1; b = -5; c = 6$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x' = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x'' = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

As raízes do polinômio  $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ ; são (0, 2, 3)

c. Neste caso a única raiz do polinômio é  $-2$ , pois  $x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$

### Algoritmo de Briot – Ruffini

Uma das maneiras de se obter o quociente de um polinômio por um binômio, seria a aplicação do algoritmo de Briot – Ruffini, cujas características principais são destacadas a seguir:

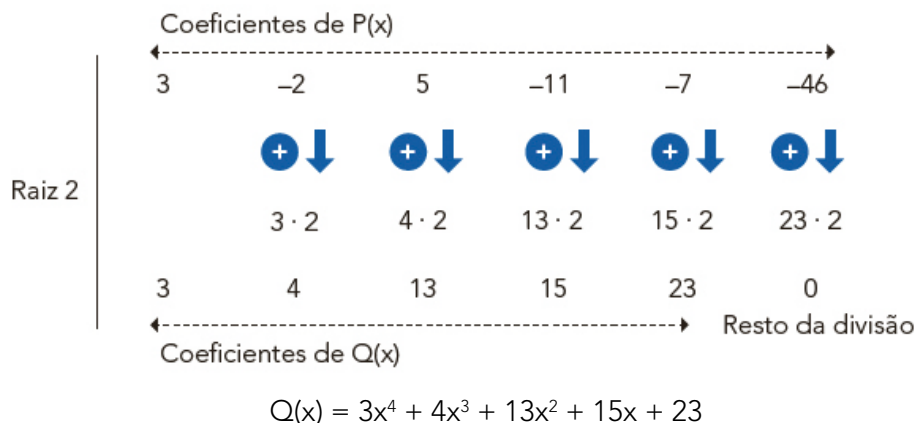
Tomando-se como exemplo, calcularemos o quociente de  $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x - 46$  pelo binômio  $x - 2$ .

Sendo  $Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$ :

- O coeficiente **a** é igual ao coeficiente de  $x^5$  em  $P(x)$ : **a = 3**
- O coeficiente **b** é obtido somando-se ao coeficiente de  $x^4$  em  $P(x)$  o produto de 2 por a: **b = -2 + 2a**;
- O coeficiente **c** é obtido somando-se ao coeficiente de  $x^3$  em  $P(x)$  o produto de 2 por b: **c = 5 + 2b**;

- O coeficiente **d** é obtido somando-se ao coeficiente de  $x^2$  em  $P(x)$  o produto de 2 por e:  
 $d = -11 + 2c$ ;
- O coeficiente **d** é obtido somando-se ao coeficiente de  $x^1$  em  $P(x)$  o produto de 2 por e:  
 $d = -11 + 2c$ ;

Esses cálculos podem ser organizados no algoritmo seguinte, conhecido como algoritmo de Briot-Ruffini, para a divisão de um polinômio por um binômio da forma  $x - k$ .

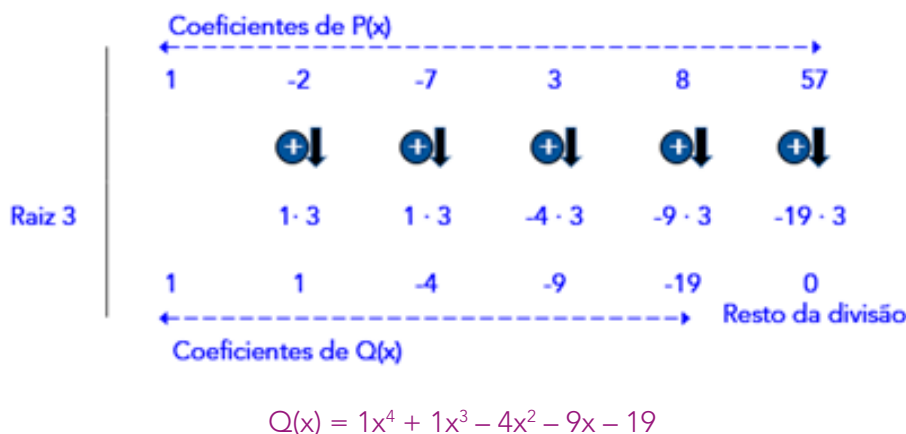


## ATIVIDADE 6

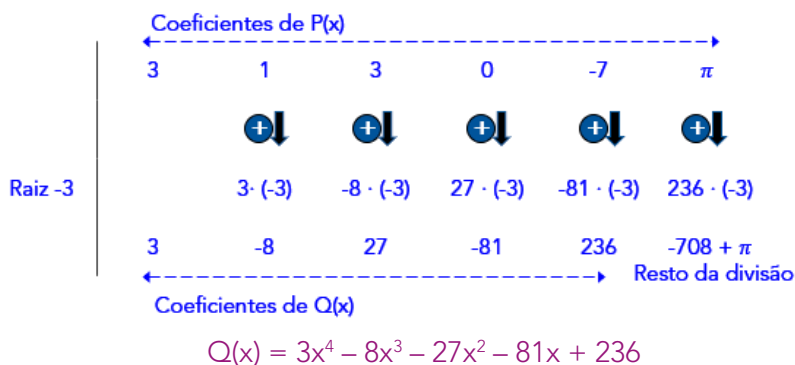
- Para verificar o entendimento do conteúdo apresentado, construa o algoritmo de Briot-Ruffini para determinar o quociente de  $P(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x + 57$  por  $x - 3$ .
- Calcule o resto da divisão de  $P(x) = 3x^5 + x^4 + 3x^3 - 7x + \pi$  pelo binômio  $x + 3$ .

Resolução:

a.



b.



Fonte: Elaborada pelos autores

## ATIVIDADE 7

Responda às seguintes questões:

- a. Mostre que a equação  $2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$  apresenta raízes inteiras.
- b. Resolva a equação do item anterior.

Resolução:

- a. Dividindo os coeficientes por 2, obtemos a equação equivalente:

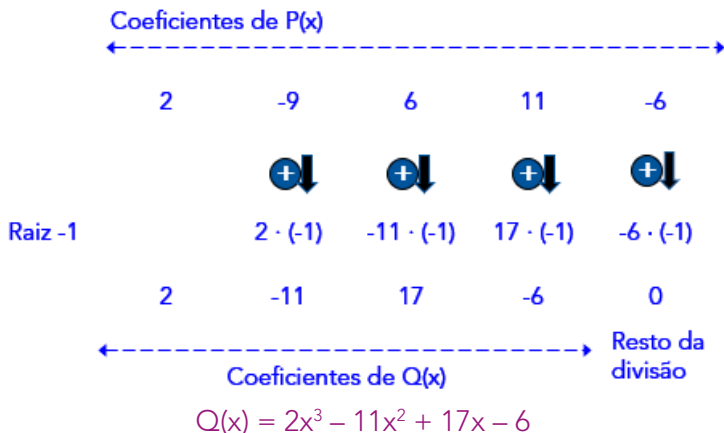
$$x^4 - \frac{9}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{11}{2}x - 3 = 0$$

Escrita nessa forma, já vimos que os divisores de  $-3$  serão possíveis raízes inteiras, pois esse coeficiente representa o produto das raízes da equação. Calculando os valores numéricos do polinômio do primeiro membro da equação para  $x = \pm 1$  e  $x = \pm 3$ , concluímos que  $-1$  e  $3$  são raízes da equação dada.

- b. A equação dada é, portanto, equivalente à equação:

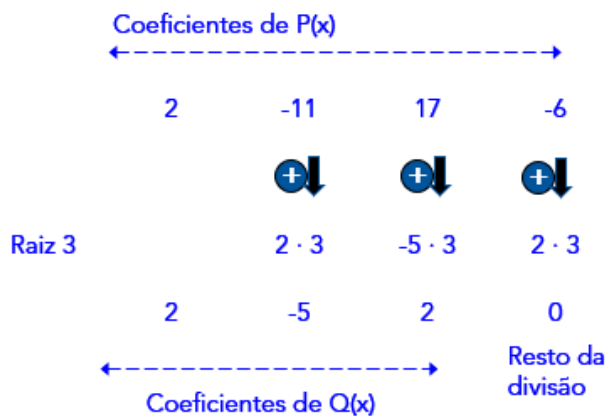
Para encontrar o trinômio  $mx^2 + nx + p$ , e descobrir as outras raízes da equação, basta dividir o polinômio do primeiro membro sucessivamente por  $(x + 1)$  e  $(x - 3)$ , conforme indicamos a seguir:

$$2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6 \equiv (x - 1) \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d)$$



$$2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6 \equiv (x + 1) \cdot (2x^3 - 11x^2 + 17x - 6)$$

Dividindo-se agora  $Q_1(x)$  por  $(x - 3)$ , obtemos  $Q_2(x)$ :



$$Q(x) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$(2x^3 - 11x^2 + 17x - 6) \equiv (x - 3) \cdot (2x^2 - 5x + 2)$$

Sendo assim, concluímos que:

$$2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6 \equiv (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (2x^2 - 5x + 2)$$

Resolvendo a equação de 2º grau  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ , obtemos as raízes:  $r_3 = 2$  e  $r_4 = \frac{1}{2}$

Logo, as raízes da equação dada inicialmente são:

$$r_1 = -1, r_2 = 3, r_3 = 2 \text{ e } r_4 = \frac{1}{2}$$

## SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

### COORDENADORIA PEDAGÓGICA – COPED

Coordenador

Caetano Pansani Siqueira

*Diretor do Departamento de Desenvolvimento*

*Curricular e de Gestão Pedagógica – DECEGEP*

*Viviane Pedrosa Domingues Cardoso*

*Diretora do Centro de Ensino Médio – CEM*

*Ana Joaquina Simoes Sallares de Mattos Carvalho*

*Diretora do Centro de Anos Finais do Ensino Fundamental – CEFAP*

*Patrícia Borges Coutinho da Silva*

### ÁREA DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

#### BIOLOGIA

Aparecida Kida Sanches – Equipe Curricular de Biologia; Beatriz Felice Ponzio – Equipe Curricular de Biologia; Airton dos Santos Bartolotto – PCNP da D.E. de Santos; Evandro Rodrigues Vargas Silveiro – PCNP da D.E. de Apiaí; Ludmila Sadokoff – PCNP da D.E. de Caraguatubá; Marcelo da Silva Alcantara Duarte – PCNP da D.E. de São Vicente; Marly Aparecida Giraldeili Marsulo – PCNP da D.E. de Piracicaba; Paula Aparecida Borges de Oliveira – PCNP da D.E. Leste 3.

#### FÍSICA

Carolina dos Santos Batista Murauskas – Equipe Curricular de Física; Fabiana Alves dos Santos – Equipe Curricular de Física; Ana Claudia Cossini Martins – PCNP D.E. José Bonifácio; Carina Emy Kagohara – PCNP D.E. Sul 1; Debora Cintia Rabelo – PCNP D.E. Santos; Dimas Daniel de Barros – PCNP D.E. São Roque; Jefferson Heleno Tsuchiya – PCNP D.E. Sul 1; Jose Rubens Antoniazzi Silva – PCNP D.E. Tupã; Juliana Pereira Thomazo – PCNP D.E. São Bernardo do Campo; Jussara Alves Martins Ferrari – PCNP D.E. Adamantina; Sara dos Santos Dias – PCNP D.E. Mauá; Thais de Oliveira Muzel – PCNP D.E. Itapeva; Valentina Aparecida Bordignon Guimarães – PCNP DE Leste 5.

#### QUÍMICA

Alexandra Fraga Vazquez – Equipe Curricular de Química; Regiane Cristina Moraes Gomes – Equipe Curricular de Química; Cristiane Marani Coppini – PCNP D.E. São Roque; Gerson Novais Silva – PCNP D.E. São Vicente; Laura Camargo de Andrade Xavier – PCNP D.E. Registro; Natalina de Fatima Mateus – PCNP D.E. Guarulhos Sul; Willian Guirra de Jesus – PCNP D.E. Franca; Xenia Aparecida Sabino – PCNP D.E. Leste 5. Revisão Conceitual (Área de Ciências da Natureza): Edson Grandisoli.

### ÁREA DE CIÊNCIAS HUMANAS

#### GEOGRAFIA

Andreia Cristina Barroso Cardoso – SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia; Mariana Martins Lemes – SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia; Milene Soares Barbosa – SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia; Sergio Luiz Damiani – SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia; André Baroni – PCNP da D.E. Ribeirão Preto; Alexandre Cursino Borges Junior – PCNP da D.E. Guaratinguetá; Beatriz Michele Moco Dias – PCNP da D.E. Taubaté; Bruna Capóia Trescenti – PCNP da D.E. Itu; Camilla Ruiz Manaia – PCNP da D.E. Taquaritinga; Cleunice Dias de Oliveira – PCNP da D.E. São Vicente; Cristiane Cristina Olimpio – PCNP da D.E. Pindamonhangaba; Daniel Ladeira Almeida – PCNP da D.E. São Bernardo do Campo; Dulcinea da Silveira Ballesterio – PCNP da D.E. Leste 5; Elizete Buranello Perez – PCNP da D.E. Penápolis; Maria Julia Ramos Sant’Ana – PCNP da D.E. Adamantina; Marcio Eduardo Pedrozo – PCNP da D.E. Americana; Patricia Silvestre Águas – PCNP da D.E. Pirajú; Regina Célia Batista – PCNP da D.E. Pirajú; Roseli Pereira de Araújo – PCNP da D.E. Bauru; Rosenei Aparecida Ribeiro Liborio – PCNP da D.E. Ourinhos; Sandra Raquel Scassola Dias – PCNP da D.E. Tupã; Sheila Aparecida Pereira de Oliveira – PCNP da D.E. Leste 2; Shirley Schweizer – PCNP da D.E. Botucatu; Simone Regiane de Almeida Cuba – PCNP da D.E. Caraguatubá; Telma Riggio – PCNP da D.E. Itapetininga; Viviane Maria Bispo – PCNP da D.E. José Bonifácio.

#### FILOSOFIA

1ª BIMESTRE - 2ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); Erica C. Frau (PCNP da DRE Campinas Oeste). 3ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); Erica C. Frau (PCNP da DRE Campinas Oeste). 2ª BIMESTRE - 2ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); Erica C. Frau (PCNP da DRE Campinas Oeste). 3ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); Erica C. Frau (PCNP da DRE Campinas Oeste). Organização e revisão: 2ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); 3ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC). Revisão Conceitual: Joelza Ester Domingues.

#### HISTÓRIA

1ª BIMESTRE - 2ª SÉRIE: Viviane Pedrosa Domingues Cardoso (COPED – SEDUC). 3ª SÉRIE: Clarissa Bazzanelli Barradas (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC). 2ª BIMESTRE - 2ª SÉRIE: Clarissa Bazzanelli Barradas (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC); Tadeu Pamplona Pagnossa – PCNP da D.E. de Guaratinguetá. 3ª SÉRIE: Clarissa Bazzanelli Barradas (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC); Rodrigo Costa Silva – PCNP da D.E. de Assis. Organização e revisão: Clarissa Bazzanelli Barradas (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC); Edi Wilson Silveira (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC); Viviane Pedrosa Domingues Cardoso (COPED – SEDUC). Revisão Conceitual: Joelza Ester Domingues.

#### SOCIOLOGIA

Emerson Costa, Marcelo Elias de Oliveira – SEDUC/COPED/CEM - Equipe Curricular de Ciências Humanas; Ilana Henrique dos Santos – PCNP de Sociologia - D.E. Leste 1. Revisão: Emerson Costa, Marcelo Elias de Oliveira – SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas; Ilana Henrique dos Santos – PCNP de Sociologia - D.E. Leste 1. Organização: Emerson Costa, Marcelo Elias de Oliveira – SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas.

### ÁREA DE LINGUAGENS

#### ARTE

Carlos Eduardo Povinha – Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC; Daniela de Souza Martins Grillo - Equipe Curricular de Arte/SEDUC/COPED; Eduardo Martins

Kebbe – Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC; Evania Rodrigues Moraes Escudeiro - Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC; Adriana Marques Ursini PCNP da D.E. Santos; Ana Maria Minari de Siqueira – PCNP da D.E. São José dos Campos; Debora David Guidolin – PCNP da D.E. Ribeirão Preto; Djalma Abel Novaes – PCNP da D.E. Guaratinguetá; Eliana Florindo – PCNP da D. E. Suzano; Elisângela Vicente Prismit – PCNP da D.E. Centro Oeste; Madalena Ponce Rodrigues – PCNP da D.E. Botucatu; Marília Marcondes de Moraes Sarmento e Lima Torres – PCNP da D. E. São Vicente; Patrícia de Lima Takaoka - PCNP da D.E. Caraguatubá; Pedro Kazuo Nagasse – PCNP da D. E. Jales; Renata Aparecida de Oliveira dos Santos – PCNP da D.E. Caiiras; Roberta Jorge Luz – PCNP da D. E. Sorocaba; Rodrigo Mendes – PCNP da D.E. Ourinhos; Silmara Lourdes Truzzi – PCNP da D.E. Marília; Sonia Tobias Prado - PCNP da D.E. Lins.

#### EDUCAÇÃO FÍSICA

Elaboração: Luiz Fernando Vagliengo - Equipe Curricular de Educação Física; Marcelo Ortega Amorim - Equipe Curricular de Educação Física; Mirna Léia Violin Brandt - Equipe Curricular de Educação Física; Sandra Pereira Mendes - Equipe Curricular de Educação Física; Adriana Cristina David Pazian - PCNP da DE São Carlos; Diego Diaz Sanchez - PCNP da DE Guarulhos Norte; Érika Porrelli Drigo - PCNP da DE Capivari; Felipe Augusto Lucci- PCNP da DE Itú; Flavia Naomi Kunihira Peixoto - PCNP da DE Suzano; Gislaine Procópio Queirido- PCNP da DE São Roque; Isabela Muniz dos Santos Cáceres -PCNP da DE Votorantim; Janice Eliane Ferreira Bracci - PCNP da DE José Bonifácio; Joice Regina Simões - PCNP da DE Campinas Leste; Jose Carlos Tadeu Barbosa Freire - PCNP da DE Bragança Paulista; Katia Mendes Silva - PCNP da DE Andradina; Lígia Estronoli de Castro- PCNP da DE Bauru; Meire Grassmann Guido Estragaribia - PCNP da DE Americana; Nabil José Awad - PCNP da DE Caraguatubá; Nearsa Isabel de Freitas Lima- PCNP da DE Sorocaba; Roseane Minatel de Mattos - PCNP da DE Adamantina; Sueli Aparecida Galante - PCNP da DE Sumaré; Tiago Oliveira dos Santos- PCNP da DE Lins; Thaisa Pedrosa Silva Nunes- PCNP da DE Tupã. Revisão: Luiz Fernando Vagliengo - Equipe Curricular de Educação Física. Marcelo Ortega Amorim - Equipe Curricular de Educação Física; Mirna Léia Violin Brandt - Equipe Curricular de Educação Física; Sandra Pereira Mendes - Equipe Curricular de Educação Física. 2ª série: Érika Porrelli Drigo - PCNP da DE Capivari; Meire Grassmann Guido Estragaribia - PCNP da DE Americana. 3ª série: Janice Eliane Ferreira Bracci - PCNP da DE José Bonifácio; Nearsa Isabel de Freitas Lima- PCNP da DE Sorocaba.

#### INGLÊS

Catarina Reis Matos da Cruz – PCNP da DE Leste 2; Cintia Perrenoud de Almeida – PCNP da DE Pindamonhangaba; Eliana Aparecida Burian – Professor PEB II da DE Norte 2; Emerson Thiago Kaishi Ono – COPED – CEM – LEM; Gilmar Aparecida Prado Cavalcante – PCNP da DE Mauá; Jucimeire de Souza Bispo – COPED – CEFAP – LEM; Liana Maura Antunes da Silva Barreto – COPED – CEFAP – LEM; Luiz Afonso Baddini – Professor PEB II da DE Santos; Marisa Mota Novais Porto – PCNP da DE Carapicuíba; Nelise Maria Abib Penna Pagnan – PCNP da DE Centro-Oeste; Pamela de Paula da Silva Santos – COPED – CEM – LEM; Renata Andreia Placa Orosco de Souza – PCNP da DE Presidente Prudente; Rosane de Carvalho – PCNP da DE Adamantina; Sérgio Antonio da Silva Teressaka – PCNP da DE Jacaré; Viviane Barcellos Isidorio – PCNP da DE São José dos Campos; Vladimir Oliveira Ismael – PCNP da DE Sul 1.

#### LÍNGUA PORTUGUESA

Alessandra Junqueira Vieira Figueiredo; Alzira Maria Sa Magalhaes Cavalcante; Andrea Righeto; Cristiane Alves de Oliveira; Daniel Carvalho Nhani; Daniel Venancio; Danubia Fernandes Sobreira Tasca; Eliane Cristina Goncalves Ramos; Igor Rodrigo Valerio Matias; Jacqueline da Silva Souza; Joao Mario Santana; Katia Alexandra Amancio Cruz; Leticia Maria de Barros Lima Viviani; Lidiane Maximo Feitosa; Luiz Fernando Biasi; Marcia Regina Xavier Gardenal; Martha Waffis Salloume Garcia; Neuza de Mello Lops Schonherr; Patricia Fernanda Morande Roveri; Reginaldo Inocenti; Rodrigo Cesar Goncalves; Shirlei Pio Pereira Fernandes; Sonia Maria Rodrigues; Tatiana Balli; Valquíria Ferreira de Lima Almeida; Viviane Evangelista Neves Santos; William Ruotti Organização, adaptação/elaboração parcial e validação Katia Regina Pessoa; Leandro Henrique Mendes; Mary Jacomine da Silva; Mara Lucia David; Marcos Rodrigues Ferreira; Teonia de Abreu Ferreira.

#### MATEMÁTICA

Isaac Cei Dias – Equipe Curricular de Matemática; João dos Santos Vitalino – Equipe Curricular de Matemática; Marcos José Traldi – Equipe Curricular de Matemática; Otávio Yoshio Yamanaka – Equipe Curricular de Matemática; Rafael José Dombrauskas Polonio – Equipe Curricular de Matemática; Sandra Pereira Lopes – Equipe Curricular de Matemática; Vanderley Aparecido Coratione – Equipe Curricular de Matemática; Lilian Silva de Carvalho – PCNP da D.E. de São Carlos; Marcelo Balduino – PCNP da D.E. Guarulhos Norte; Maria Regina Duarte Lima – PCNP da D.E. José Bonifácio; Simone Cristina do Amaral Porto – PCNP da D.E. Guarulhos Norte; Talles Eduardo Nazar Cerizza – PCNP da D.E. Franca; Willian Casari de Souza – PCNP da D.E. Araçatuba.

#### PROJETO DE VIDA

Bruna Waitman Santinho – SEDUC/ COPED/ Assessora da Educação Integral; Cassia Moraes Targa Longo – SEDUC/ COPED/ CEM/ PEI; Claudia Soraia Rocha Moura - SEDUC/ COPED/CEM/ PEI; Helena Claudia Soares Achilles - SEDUC/ COPED/DECEGP; Instituto Ayrton Senna Instituto de Corresponsabilidade pela Educação; Instituto PROA Parceiros da Educação – Nadir do Carmo Silva Campelo; Simone Cristina Succì – SEDUC/ EFAPE Walter Aparecido Borges – SEDUC/ EFAPE; Rodiclay Germano – Ilustrações.

#### Colaboradore(a)s

Andreia Toledo de Lima – PCNP da D.E. Centro Sul; Cristina Inacio Neves – PCNP da D.E. Centro Sul; Elaine Aparecida Giatti – PCNP da D.E. Centro Sul; Lyara Araujo Gomes Garcia – PCNP da D.E. Taubaté; Marcel Alessandro de Almeida – PCNP da D.E. Araçatuba; Patricia Casagrande Malaguetta – PCNP da D.E. Piracicaba; Rosiliane Sanches Martins – PCNP da D.E. Jales; Ruanito Vomiero de Souza – PCNP da D.E. Fernandópolis; Wanderlei Aparecida Grenchi – PCNP da D.E. São Vicente.

#### Assessoria Técnica

Alberto da Silva Seguro, Ariana de Paula Canteiro, Bruno Toshikazu Ikeuti, Denise Aparecida Acacio Paulino, Eleleneide Gonçalves dos Santos, Inelice Aparecida Fraga Ferreira, Isaque Mitsuo Kobayashi, Márcio Roberto Peres e Vinicius Bueno

#### Revisão Língua Portuguesa

Lia Suzana de Castro Gonzalez

#### Impressão e Acabamento

Imprensa Oficial do Estado S/A – IMESP

#### Projeto Gráfico

Fernanda Buccelli

#### Diagramação

Beatriz Luanni, Julia Ahmed, Pamela Silva, Raquel Prado, Ricardo Issao Sato e Robson Santos | Tikinet



| Secretaria da Educação