SÃO PAULO
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria de Educação

APRENDER SEMPRE

VOLUME 1

1ª À 3ª SÉRIE - ENSINO MÉDIO

MATEMÁTICA
2021

PROFESSOR

Governo do Estado de São Paulo

Governador
João Doria

Vice-Governador
Rodrigo Garcia

Secretário da Educação
Rossieli Soares da Silva

Secretário Executivo
Haroldo Corrêa Rocha

Chefe de Gabinete
Renilda Peres de Lima

Coordenador da Coordenadoria Pedagógica
Caetano Pansani Siqueira

Presidente da Fundação para o Desenvolvimento da Educação
Nourival Pantano Junior

APRESENTAÇÃO

Estas sequências didáticas/de atividades foram elaboradas com o intuito de oferecer um suporte adicional aos estudantes, auxiliando-os no processo de recuperação e aprofundamento de aprendizagens essenciais para seu percurso educacional.

A fim de favorecer a aprendizagem de todos os estudantes, não deixando ninguém para trás, serão oferecidas, além das sequências de atividades, avaliações diagnósticas e formativas a fim de acompanhar a evolução da aprendizagem dos estudantes e direcionar o ensino às suas necessidades; e formações, com foco no uso do resultado das avaliações e no desenvolvimento das atividades presentes neste material.

Os materiais, as avaliações e as formações do Programa de Recuperação e Aprofundamento estão articulados entre si, fortalecendo o desenvolvimento das habilidades essenciais para o percurso educacional dos estudantes.

Essas habilidades essenciais foram selecionadas a partir de análises do Currículo Paulista no Ensino Fundamental e na 1ª série do Ensino Médio, e do Currículo Oficial vigente na 2ª e 3ª séries do Ensino Médio, dos resultados do SARESP 2019 e da Avaliação Diagnóstica de Entrada (ADE), de 2020, em um trabalho conjunto entre as equipes curriculares da Coordenadoria Pedagógica (COPED), PCNP e professores da rede. Considerando a importância da continuidade do trabalho de recuperação iniciado em 2020, a matriz de habilidades do Programa de Recuperação e Aprofundamento, que serviu de base a este material, foi elaborada tendo em conta um ciclo de progressão das aprendizagens de 2020 a 2021.

As sequências didáticas/de atividades de Língua Portuguesa e Matemática contam com orientações didáticas que auxiliarão no trabalho para o desenvolvimento das habilidades essenciais de cada ano/série, de forma articulada aos demais materiais disponibilizados pela SEDUC.

Para favorecer esse entrelaçamento, há indicações de como utilizar as sequências didáticas/de atividades juntamente com o Ler e Escrever, o EMAI e o São Paulo Faz Escola.

Cada professor, a partir de seu contexto, poderá utilizar essas sequências didáticas/de atividades para promover o desenvolvimento dos estudantes, de acordo com as necessidades de cada um, com o objetivo de oferecer a todos oportunidades de aprendizagem, não deixando ninguém para trás.

Desejamos a todos um excelente trabalho!

Coordenadoria Pedagógica - Coped

ANOTAÇÕES

1ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 01

1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAIS**
1	Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta; Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica; Números reais: notação científica e problemas.	(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica. (EF09MA04) Resolver e elaborar situações- problema com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 9º ano:** Vol. 1, na Situação de Aprendizagem 2, Atividade 1: Sistema de numeração decimal; Vol.2, na Situação de Aprendizagem 1, Atividade 1: Operando com notação científica.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

Olá, Professor!

Espera-se que os estudantes cheguem ao final desta Sequência de Atividades com habilidades desenvolvidas para resolver e elaborar situações-problema envolvendo o significado de números irracionais, reais e notação científica. Esperamos também que apliquem estes significados em diferentes contextos na Matemática, nas demais áreas do conhecimento e no cotidiano.

HABILIDADES: (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica; **(EF09MA04)** Resolver e elaborar situações-problema com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	REVISANDO NÚMEROS RACIONAIS
3ª e 4ª/ 90 min	NÚMEROS REAIS
5ª e 6ª/ 90 min	NOTAÇÃO CIENTÍFICA
7ª e 8ª/ 90 min	REPRESENTAÇÃO DE MEDIDAS COM NÚMEROS REAIS

AULAS 1 E 2: REVISANDO NÚMEROS RACIONAIS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes em duplas produtivas ou trios e, se preferir, organize a sala em forma de U para facilitar o movimento do professor quando chamado pelo estudante.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

- Para o estudante: Caderno de Atividades impresso e calculadora científica.
- Para o professor: Caderno de Atividades do Professor, giz ou canetões coloridos.

INICIANDO

Professor, para as aulas 1 e 2 dessa Sequência de Atividades, primeiramente converse com os seus estudantes para diagnosticar quais conhecimentos eles possuem sobre os números racionais. Verifique por meio de exemplos na lousa se o estudante reconhece as diferentes representações dos números racionais e quais conhecimentos o estudante possui sobre representação decimal finita ou infinita periódica. A ideia intuitiva de aproximação e a utilização dos números irracionais em situações de medição também pode ser explorada neste primeiro momento. Após essa breve conversa, os estudantes poderão receber o caderno impresso e realizar as atividades.

DESENVOLVENDO

Mantenha a sala organizada e solicite que, em duplas ou trios, analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. Sugira que os estudantes dialoguem entre eles, troquem informações e resolvam as atividades propostas. O objetivo das atividades propostas é revisar alguns significados sobre números racionais e aprofundar o significado de números irracionais. Incentive o uso da calculadora, pois pode agilizar a resolução das atividades. Circule pela sala, para verificar possíveis dúvidas, enquanto os estudantes discutem e resolvem as atividades. Observe as discussões das duplas, e se necessário, oriente-as sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: "como vocês estão resolvendo?", "pensou em qual significado para desenvolver esta estratégia?", "por que dessa forma?", "o que vocês acham se..." e outros questio-

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

Caro estudante, para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir, será necessário relembrar alguns conceitos relacionados ao significado de frações, pensamento algébrico, divisão e multiplicação. Você deve ficar atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará no decorrer das aulas.

AULAS 1 E 2: REVISANDO NÚMEROS RACIONAIS

Objetivos das aula:

- Reconhecer as diferentes representações dos números racionais.
- Identificar um número racional pela sua expansão decimal finita ou infinita periódica.
- Reconhecer números irracionais em situações de medição.
- Aproximar um número irracional de números inteiros e racionais.

Decimal Finito	Dízima Periódica Simples	Dízima Periódica Composta
$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{3} = 0{,}333\ ...$	$\frac{25}{99} = 0{,}252525\ ...$
$\frac{7}{5} = 1{,}4$	$\frac{2}{9} = 0{,}222\ ...$	$\frac{5}{6} = 0{,}8333\ ...$

As dízimas periódicas podem ser simples ou compostas, dependendo dos números que aparecem após a vírgula na parte decimal.

Seguem alguns exemplos de como encontrar a **fração geratriz** de uma dízima periódica

- Como converter 0, 333... para uma representação fracionária:

1º passo: chamando $x = 0{,}333\ldots$

2º passo: Multiplicando x por 10 $\rightarrow 10x \rightarrow 10\,(0{,}333\ldots) \rightarrow 10x = 3{,}3333\ldots$

3º passo: Fazendo $10x - x \rightarrow$

$$\begin{array}{r} 10x = 3{,}333\ ... \\ -\ \ x = 3{,}333\ ... \\ \hline 9x = 3 \end{array}$$

Resolvendo a equação $9x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{9} \rightarrow x = \frac{1}{3}$ Obtemos a fração geratriz, que é $\frac{1}{3}$

• Como converter 0,252525 ... para uma representação fracionária:

1º passo: chamando $x = 0{,}252525\ldots$

2º passo: Multiplicando x por 100 $\rightarrow 100x \rightarrow 100\,(0{,}252525\ldots) \rightarrow 100x = 25{,}25\ldots$

3º passo: Fazendo $100x - x \rightarrow$

$$\begin{array}{r} 100x = 25{,}25\ldots \\ -\quad x = 0{,}25\ldots \\ \hline 99x = 25 \end{array}$$

Resolvendo a equação $99x = 25 \rightarrow x = \frac{25}{99}$, Obtemos a fração geratriz, que é $\frac{25}{99}$.

Os Números Irracionais são números decimais infinitos, não-periódicos, o que significa que não possuem uma repetição de números após a vírgula na parte decimal e não podem ser representados por meio de frações irredutíveis.

Exemplos:

a) $\sqrt{5} = 2{,}2360679774997\ldots$

b) $\pi = 3{,}14159265\ldots$

1. Determine a representação fracionária de cada um dos números abaixo.

a. $0,\overline{15}$

Chamando $x = 0{,}151515\ldots$

Multiplicando x por 100 → 100x = 15,15...

$$100x - x = (15{,}15\,) - (0{,}15\ldots) \rightarrow 99x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{99} \rightarrow x = \frac{5}{33}.$$

A fração geratriz é $\frac{5}{33}$.

b. 0,75

$$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

c. $0{,}2\overline{41}$

$$0{,}241 = \frac{241 - 2}{990} = \frac{239}{990}$$

namentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses, trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

FINALIZANDO

Depois de uma breve sondagem das respostas dos estudantes, faça uma correção oral e escrita na lousa, de modo que promova uma discussão entre os estudantes. Neste momento podem surgir dúvidas, sendo válido abrir um novo debate, fazendo uso de outras estratégias que possibilitem aos estudantes a aprendizagem. Sempre que necessário o professor deve complementar os conceitos e significados sobre os números racionais e irracionais não compreendidos pelos estudantes durante resolução das atividades.

d. $0,\overline{7}$

$x = 0{,}777\ldots \rightarrow 10x = 7{,}7\ldots \rightarrow 10x - x = (7{,}7\ldots) -$

$(0{,}7)\ldots \rightarrow 9x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{9} \rightarrow x = \frac{7}{9}.$

e. 0,3

$0{,}3 = \frac{3}{10}$

f. $0,2\overline{5}$

$x = 0{,}2555\ldots \rightarrow 10x = 2{,}555\ldots \rightarrow 10x = 2 + 0{,}555\ldots \rightarrow$

$10x \;=\; 2 + \frac{5}{9} \rightarrow 90x = 18 + 5 \rightarrow 90x = 23 \rightarrow x = \frac{23}{90}$

2. No quadro abaixo escreva, se o número é: natural, inteiro, racional, decimal finito, dízima periódica simples, dízima periódica composta ou um número irracional.

27	$\frac{1}{3}$	- 9
0,151515 ...	$\sqrt{5}$	2,6

27 é um número natural, inteiro e racional.
1/3 é um número racional.
- 9 é um número inteiro negativo e também racional.
0,151515… número racional com uma dízima periódica simples.
$\sqrt{5}$ = 2,23606797… é um número irracional.
2,6 é um número decimal finito.

3. (AAP, 2019) Observe os números apresentados nos itens a seguir.

I. $\frac{1}{\sqrt{5}}$

II. 4,121212 ...

III. $\frac{\pi}{2}$

IV. 0,11223344 ...

V. $\frac{17}{8}$

Os números irracionais estão apresentados nos itens:

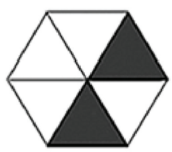
(A) I, II e III.

(B) II, III e V.

(C) II e V .

(D) I, III e IV.

4. A figura abaixo está dividida em seis partes iguais. A parte pintada de preto corresponde a que fração da figura?



(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{2}{6}$

(D) $\frac{6}{2}$

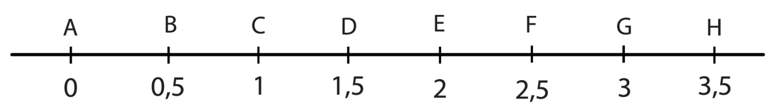
5. (AAP, 2018) A representação decimal correspondente à fração $\frac{3}{4}$ é:

(A) 0,33333...
(B) 0,5
(C) 0,66666...
(D) 0,75

Cálculos:

$3 \div 4 = 0{,}75$

6. (SAEPE, 2017 – Adaptado) Observe a reta numérica a seguir.



O número irracional $\sqrt{8}$ está localizado entre os pontos:

(A) A e E. (B) E e F. (C) F e G. (D) G e H.

7. A fração $\frac{7}{9}$ é a geratriz da dízima periódica:

(A) 0,898989...
(B) 0,77777...
(C) 0,88888...
(D) 0,11111...

Cálculos:

$7 \div 9 = 0{,}7777...$

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, aproveite esta atividade para trabalhar a ideia de aproximação de números inteiros e racionais. Se achar necessário amplie a atividade utilizando inteiros negativos.

8. Pedro tem um terreno no formato quadrado e área de 20m². Ele quer construir uma cerca de arame ao redor do terreno. Utilizando uma calculadora descubra a medida do perímetro aproximado desse terreno.

Perímetro é a soma dos lados do quadrado

$A = l \times l \rightarrow A = l^2 \rightarrow 20 = l^2 \rightarrow l = \sqrt{20} \rightarrow l = 4,472135$... é irracional

Vamos considerar 4,47 como medida aproximada de cada lado do quadrado

$4 \times 4,47 \cong 17,88\ m$ é o perímetro aproximado deste terreno.

AULAS 3 E 4: NÚMEROS REAIS

Caro estudante, para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir, será necessário relembrar alguns conjuntos numéricos. Você deve ficar atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará no decorrer das aulas, pois serão apresentados novos significados sobre números.

Objetivos das aulas:
- Localizar um número irracional na reta numérica.
- Reconhecer as características dos números reais.

1. (SARESP, 2014 - Adaptado) Das afirmações a seguir.

I. O conjunto dos números inteiros é formado pelos números naturais positivos e negativos e também os números representados por frações.

II. Os números Irracionais são aqueles em que a representação decimal é finita ou infinita e periódica.

III. Os números reais representam a união dos conjuntos dos números racionais com os irracionais.

Escolha a alternativa correta.

(A) Somente a afirmação III é correta.

(B) Somente a afirmação II é correta.

(C) Somente a afirmação I é correta.

(D) Somente as afirmações II e III estão corretas.

2. Observe os números do quadro abaixo e indique qual pode ser chamado de Racional e qual pode ser chamado de Irracional:

2,1	Racional	$\frac{11}{7}$	Racional	-2	Inteiro negativo e racional
$\sqrt{7}$	Irracional	3	Natural	0, 787878...	Dízima Periódica
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	Irracional	$\frac{\pi}{2}$	Irracional	- 1,5	Racional

AULAS 3 E 4: NÚMEROS REAIS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes em duplas e, se preferir, organize a sala em U para facilitar a circulação do professor.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

- Para o estudante: Caderno de Atividades impresso e calculadora científica.
- Para o professor: Caderno de Atividades do Professor, giz ou canetões coloridos.

INICIANDO

Professor, para as aulas 3 e 4 dessa Sequência de Atividades, primeiramente converse com seus estudantes sobre localizar um número na reta numérica. Desenhe uma reta numérica na lousa e explore possíveis representações utilizando números em forma de fração, na raiz, decimais finitos e infinitos. Fale sobre o significado de números finitos e infinitos. Converse com eles sobre os números naturais, inteiros, racionais, irracionais e por fim introduza o significado dos números reais. Após essa breve conversa peça aos estudantes que resolvam as atividades propostas no Caderno do Estudante.

DESENVOLVENDO

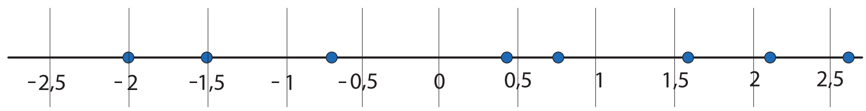
Mantenha a sala organizada, e solicite que, em duplas ou trios, analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. Sugira que os estudantes dialoguem entre si, troquem informações e resolvam as atividades propostas. O objetivo das atividades proposta para estas aulas é estabelecer o significado dos números reais. Circule pela sala, para esclarecer possíveis dúvidas, enquanto os estudantes discutem e resolvem as atividades. Observe as discussões das duplas e, se necessário, oriente-as sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: "como vocês estão resolvendo?", "pensou em qual significado para desenvolver esta estratégia?", "por que dessa forma?", "o que vocês acham se..." e outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses, trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

FINALIZANDO

Depois de uma breve sondagem das respostas dos estudantes, faça uma correção oral e escrita na lousa, de modo que promova uma discussão entre os estudantes. Neste momento podem surgir dúvidas, sendo válido abrir um novo debate, fazendo uso de outras estratégias que possibilitem aos estudantes, a aprendizagem. Sempre que necessário o professor deve complementar os conceitos e significados sobre os números reais não compreendidos pelos estudantes durante resolução das atividades.

3. Utilize uma régua e esboce uma reta numérica, em seguida, represente os números $2,1$; $\frac{11}{7}$; -2; $\sqrt{7}$; $-1,5$; $0,\overline{43}$; $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{\pi}{3}$ na reta numérica. Considere a ideia de aproximação para os números infinitos ou irracionais.

Resposta esperada



4. Considerando os números $2,1$; $\frac{11}{7}$; -2; $\sqrt{7}$; $-1,5$; $0,\overline{43}$; $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{\pi}{3}$, qual é o nome que pode ser dado a todos estes números?

Resposta:

Números reais

5. Indique entre quais números inteiros consecutivos fica cada um dos números reais:

a) $\sqrt{6}$ entre 2 e 3

b) $\frac{11}{7}$ entre 1 e 2

c) $\frac{\pi}{2}$ entre 1 e 2

d) $\sqrt{10}$ entre 3 e 4

e) $\frac{\sqrt{12}}{3}$ entre 1 e 2

6. Considere os números reais $-\sqrt{5}$ e $+\sqrt{7}$.

a) Quantos números reais existem entre eles? E números inteiros?

$-\sqrt{5} = -2{,}236067977$ e $+\sqrt{7} = 2{,}645751311$
Logo, são infinitos números reais que existem entre $-\sqrt{5}$ e $+\sqrt{7}$
e existem apenas dois números inteiros entre eles, que são – 1 e + 1.

b) Quantos números racionais existem entre eles? E números irracionais?

$\sqrt{5} = -2{,}236067977$ e $+\sqrt{7} = 2{,}645751311$
Logo, são infinitos números racionais que existe entre $-\sqrt{5}$ e $+\sqrt{7}$
e sobre os números irracionais, partimos do princípio de que toda raiz quadrada que não resulta em um valor exato é tida como irracional, logo, temos infinitos números irracionais entre $-\sqrt{5}$ e $+\sqrt{7}$. O professor pode sugerir que os estudantes verifiquem, fazendo o uso da calculadora, o valor da raiz de $\sqrt{5}$,4 ; $\sqrt{5}$,7; $\sqrt{6}$ ou $\sqrt{6}$,8 e promover um discurso reflexivo em torno dos resultados.

7. Coloque em ordem crescente os números reais abaixo.

0,25 0,555... $\frac{1}{2}$ $\frac{4}{5}$ 0,53 $\frac{8}{3}$

$0{,}25;\ \frac{1}{2};\ 0{,}53;\ 0{,}555\ldots;\ \frac{4}{5};\ \frac{8}{3}$

8. Complete com os símbolos >, < ou =, de modo que obtenha as afirmações verdadeiras.

a) $-\sqrt{5}$ _<_ 1

b) $\frac{13}{3}$ _<_ 9

c) π _>_ 2

d) 1,33 _>_ 1,2

e) $\frac{7}{3}$ _=_ 2, 3333...

f) 0,5 _>_ - 3

g) $-\pi$ _<_ 2

h) 1, 7320508 ... _=_ $\sqrt{3}$

AULAS 5 E 6: NOTAÇÃO CIENTÍFICA

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes em duplas ou trios, se preferir, organize a sala em U para facilitar a movimentação do professor.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

- Para o estudante: Caderno de Atividades impresso e calculadora científica.
- Para o professor: Caderno de Atividades do Professor, giz ou canetões coloridos.

INICIANDO

Professor, para as aulas 5 e 6 dessa Sequência de Atividades, primeiramente converse com seus estudantes sobre o que é um número escrito em notação científica. A partir do diagnóstico introduza o conceito de notação científica, inicie partindo do pressuposto de que notação científica é uma forma de se escrever números usando potência de base 10 e prossiga a aula utilizando o significado de que a notação científica é utilizada para reduzir a escrita de números que apresentam muitos algarismos. Após as explicações, proponha aos estudantes que resolvam as atividades propostas no Caderno.

DESENVOLVENDO

Mantenha a sala organizada, solicite que, em duplas ou trios produtivos analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. Sugira que os estudantes dialoguem entre si, troquem informações e resolvam as atividades propostas. O objetivo das atividades propostas para estas aulas é que os estudantes compreendam o significado da notação científica, desenvolvam habilidades para efetuar conversões e aplicar em diferentes contextos as possíveis representações dos números reais. Circule pela sala, para verificar possíveis dúvidas, enquanto os estudantes discutem e resolvem as atividades. Observe as discussões das duplas, e se necessário, oriente-as sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: "como vocês estão resolvendo?", "pensou em qual significado para desenvolver esta estratégia?", "por que dessa forma?", "o que vocês acham se..." e outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar

AULAS 5 E 6: NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Caro estudante, para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir, será necessário relembrar alguns conceitos sobre potenciação. Você deve ficar atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará no decorrer das aulas, pois serão apresentados novos significados sobre potenciação.

Objetivos das aulas:
- Reconhecer o valor da notação científica para a expressão de grandezas com valores muito grandes ou muito pequenos.
- Expressar numericamente o valor de grandezas por meio da notação científica em diferentes contextos.
- Associar um problema à operação entre números reais.
- Indicar as operações com números reais.

1. Escreva cada número na forma de potência de base 10.

a) 100 — a) 10^2
b) 1 000 — b) 10^3
c) 10 000 — c) 10^4
d) 100 000 — d) 10^5
e) $\frac{1}{10}$ — e) 10^{-1}
f) $\frac{1}{100}$ — f) 10^{-2}
g) $\frac{1}{1000}$ — g) 10^{-3}

2. Converta os números abaixo para uma notação científica.

a) 0,00004 — a) $4,0 \times 10^{-5}$
b) 24 000 000 — b) $2,4 \times 10^{7}$
c) 0,0000008 — c) $8,0 \times 10^{-7}$
d) 0,0053 — d) $5,3 \times 10^{-3}$
e) 8 000 000 000 — e) $8,0 \times 10^{9}$
f) 0,7 — f) $7,0 \times 10^{-1}$
g) 50 500 — g) $5,05 \times 10^{4}$

3. Os números abaixo estão escritos em notação científica, escreva-os com todos os algarismos.

a) $7{,}6 \times 10^5$ a) 760 000

b) $9{,}4 \times 10^{-3}$ b) 0,0094

c) $6{,}13 \times 10^5$ c) 613 000

d) 5×10^7 d) 50 000 000

e) $2{,}3 \times 10^{-5}$ e) 0,000023

f) $1{,}03 \times 10^8$ f) 103 000 000

4. Resolva as operações:

a) $3.10^2 + 4.10^2$ a) $7{,}0 \times 10^2$

b) $3.10^2 \times 2.10^3$ b) $6{,}0 \times 10^5$

c) $5.\ 10^4 \times 8.10^3$ c) $40{,}0 \times 10^7 \rightarrow 4{,}0 \times 10^8$

d) $8.\ 10^6 \div 4.10^3$ d) $2{,}0 \times 10^3$

e) $4.10^3 + 5.10^3$ e) $9{,}0 \times 10^3$

f) $2.\ 10^4 \times 2.10^3$ f) $4{,}0 \times 10^7$

g) $9.10^3 \div 3.10^6$ g) $3{,}0 \times 10^{-3}$

h) $15.10^8 \div 3.\ 10^4$ h) $5{,}0 \times 10^4$

i) $24.10^{18} \div 6.\ 10^9$ i) $4{,}0 \times 10^9$

5. Calcule o valor da expressão $x = (51000 \,.\, 10^{-3}) + (3 \,.\, \sqrt{6})$.

Cálculos:

$$(51000 \,.\, 10^{-3}) + (3 \,.\, \sqrt{6})$$

$$51 \quad + \quad 7{,}34\ldots \cong 58{,}34\ldots$$

$x \cong 58{,}34\ldots$ aproximadamente

6. (Saresp, 2017 - Adaptado) Um ano-luz, em notação científica, corresponde a $9{,}461 \times 10^{12}$ km, esse número em sua representação extensa com todos os algarismos é:

Cálculos:

9.461.000.000.000.

a turma a investigar, levantar hipóteses, trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

FINALIZANDO

Depois de uma breve sondagem das respostas dos estudantes, faça uma correção oral e escrita na lousa, de modo que promova uma discussão entre eles. Neste momento podem surgir dúvidas, sendo válido abrir um novo debate, fazendo uso de outras estratégias que possibilitem aos estudantes a aprendizagem. Sempre que necessário, você deve complementar os conceitos e significados sobre os números racionais e irracionais não compreendidos pelos estudantes durante resolução das atividades.

AULAS 7 E 8: REPRESENTAÇÃO DE MEDIDAS COM NÚMEROS REAIS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes em duplas ou trios. Se preferir, organize a sala em U para facilitar a circulação do professor.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

- Para o estudante: Caderno de Atividades impresso e calculadora científica.
- Para o professor: Caderno de Atividades do Professor, giz ou canetões coloridos.

INICIANDO

Professor, para as aulas 7 e 8 dessa Sequência de Atividades, primeiramente converse com seus estudantes sobre as aulas anteriores, para verificar possíveis dúvidas sobre o significado de números reais e notação científica, pois as atividades destas aulas são sequência das aulas anteriores.

DESENVOLVENDO

Mantenha a sala organizada, solicite que, em duplas ou trios, os estudantes analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. Sugira que os estudantes dialoguem entre si, troquem informações e resolvam as atividades propostas. O objetivo central destas aulas 7 e 8 é aplicar os significados de números reais na resolução de problemas envolvendo contextos de medições. Circule pela sala, para verificar possíveis dúvidas, enquanto os estudantes discutem e resolvem as atividades. Observe as discussões das duplas, e se necessário, oriente-as sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: “como vocês estão resolvendo?”, “pensou em qual significado para desenvolver esta estratégia?”, “por que dessa forma?”, “o que vocês acham se...” e outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses, trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

FINALIZANDO

Analise as respostas dos estudantes para identificar possíveis erros e dificuldades, proponha uma discussão entre eles para que exponham suas dificuldades durante o

7. (AAP/SP, 2017) Usando um microscópio eletrônico, um pesquisador mediu o diâmetro de uma partícula obtendo 3943,57 fentômetros de diâmetro. Observe o quadro com as unidades de medida menores que o milímetro. Prefixos do Sistema Internacional de Medidas

Prefixo		10^n	Equivalência numérica (metros)
Nome	Símbolo		
milímetro	mm	10^{-3}	0,001
micrômetro	μm	10^{-6}	0,000 001
nanômetro	nm	10^{-9}	0,000 000 001
picômetro	pm	10^{-12}	0,000 000 000 001
fentômetro	fm	10^{-15}	0,000 000 000 000 001

A alternativa que mostra a medida do diâmetro, em metros, encontrado pelo pesquisador, representada na norma de escrita da notação científica, é:

X) $3,94357 \cdot 10^{-12}$m

(B) $3,94357 \cdot 10^{-14}$ m

(C) $3943,57 \cdot 10^{-16}$ m

(D) $3943,57 \cdot 10^{-18}$ m

Cálculos:

3943,57 fentômetros = $3,94357 \cdot 10^{3} \times 10^{-15}$

m = $3,94357 \cdot 10^{-12}$m

AULAS 7 E 8: REPRESENTAÇÃO DE MEDIDAS COM NÚMEROS REAIS

Caro estudante, para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir, será necessário relembrar os conceitos estudados nas aulas anteriores, lembre-se que você pode e deve reler as suas anotações feitas anteriormente em outros momentos e aulas. Você deve ficar atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará no decorrer das aulas.

Objetivo das aulas:

- Resolver e elaborar situações-problema em contextos de medições que possam envolver números reais.

1. (FCC, 2010) Se os cientistas desenrolarem e unirem todos os cordões do DNA contidos em uma célula o tamanho total chegaria a 186 cm. Sabe-se que um ser humano possui em torno de 100 trilhões de células. Qual o comprimento de todos os cordões unidos contidos nas células de um ser humano?

X) $1,86 \cdot 10^{11}$ km.

(B) $1,86 \cdot 10^{13}$ km.

(C)$1,86 \cdot 10^{15}$ km.

(D)$1,86 \cdot 10^{16}$ km.

Cálculos:

100 trilhões = 10^{14}

186 cm em km = 0,00186

0,00186 . 10^{14} km

1,86 . 10^{11} km.

2. (FCC, 2012) A avó da Joana vai colocar renda em volta da sua toalha redonda. A toalha tem um metro de diâmetro. A Joana para saber qual o comprimento de renda que a avó precisa de comprar, calculou o perímetro da toalha. Verifica que a Joana obteve para o comprimento da renda π . Quantos metros Joana deve comprar?

Cálculos:

π = 3,1415926... é irracional

Joana deve comprar aproximadamente 3,14m de tecidos

3. Determine o valor aproximado da área de um quadrado que tenha a medida do lado $\sqrt{5} + 3$ cm.

Cálculos:

$$A = l^2 \rightarrow A = (\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}+3) \rightarrow A = 5 + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 9 \rightarrow$$
$$A = 14 + 6\sqrt{5} \rightarrow A = 14 + 6 \times 2{,}23 \rightarrow A = 14 + 13{,}41 \rightarrow A = 27{,}41cm^2$$

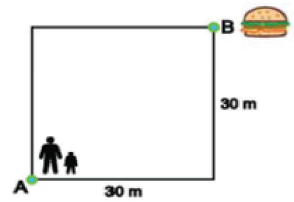
Logo, a área aproximada é 27,41 cm^2

4. Um professor pediu aos estudantes que indicassem um número real entre 6 e 8. Veja algumas das respostas dadas pelos estudantes e indique quais deles acertaram.

Sofia $\sqrt{32}$	Paulo – 8, 6
Vinícius 7, 8 X	Roberta $\sqrt{38}$ X
Cícero 8	Flávia $\frac{19}{3}$ X

processo de elaboração e resolução dos problemas. Neste momento podem surgir muitos "por ques" e o debate pode ser enriquecedor para evidenciar as estratégias bem sucedidas entre os estudantes.

5. Rafael e o seu filho Gustavo vão tomar um lanche. Eles farão o trajeto do ponto A ao ponto B, de forma retilínea sem virar para a direita ou para a esquerda. Calcule a distância aproximada entre estes dois pontos.



Cálculos:

$d^2 = 30^2 + 30^2$

$d^2 = 1800$

$d = \sqrt{1800}$

$d = 42{,}426406...$ aproximadamente 42,4 metros

6. (ENEM, 2017) Uma das principais provas de velocidade do atletismo é a prova dos 400 metros rasos. No Campeonato Mundial de Sevilha, em 1999, o atleta Michael Johnson venceu essa prova, com marca de 43,18 segundos. Esse tempo, em segundos, escrito em notação científica é:

Cálculos:

$$43{,}18 = \frac{43{,}18}{10}\ x\ 10 = 4{,}318\ x\ 10^1$$

7. Atividade

I. Medida de distância média entre o Sol e Marte: 227 900 000 km.

II. Medida de distância média entre o Sol e Júpiter: 778 300 000 km.

III. Medida da massa de um elétron: aproximadamente 0,00000000000000000000000000000911g.

A partir destes dados, elabore uma situação-problema.

Rascunho:

Professor, acompanhe os estudantes neste processo de elaboração.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

1ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 02

1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAIS**
2	Razão entre grandezas de espécies diferentes; Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	(EF09MA07) Resolver situações-problema que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica. (EF09MA08) Resolver e elaborar situações- problema que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 9º ano:** Vol. 1, na Situação de Aprendizagem 3, Atividade 1: Razão: Uma relação entre grandezas, Atividade 2: Densidade Demográfica: Uma razão presente em nosso cotidiano; Atividade 4: A proporcionalidade direta: Uma razão para existir.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

Olá, Professor!

Os estudantes deverão chegar ao final desta Sequência de Atividades com habilidades desenvolvidas para resolverem e elaborarem situações-problema envolvendo o significado de razão entre grandezas, as relações de proporcionalidade e a regra de três simples. Esperamos, também, que apliquem esses significados em diferentes contextos na Matemática, nas demais áreas do conhecimento e no cotidiano.

HABILIDADES: (EF09MA07) Resolver situações-problema que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica; **(EF09MA08)** Resolver e elaborar situações-problema que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	RAZÃO ENTRE DUAS GRANDEZAS
3ª e 4ª/ 90 min	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO RAZÃO ENTRE DUAS GRANDEZAS
5ª e 6ª/ 90 min	PROPORCIONALIDADE DIRETA E INVERSA ENTRE DUAS GRANDEZAS
7ª e 8ª/ 90 min	REGRA DE TRÊS SIMPLES

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

Caro estudante, para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir, será necessário relembrar alguns conceitos relacionados ao significado de frações, pensamento algébrico, divisão e multiplicação. Você deve ficar atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará no decorrer das aulas.

AULAS 1 E 2: RAZÃO ENTRE DUAS GRANDEZAS

Objetivos da aula:
- Compreender o significado de razão entre duas grandezas;
- Identificar a fração como representação da razão entre duas grandezas, em diferentes contextos.

A **razão** entre duas grandezas diferentes é a divisão entre as medidas dessas grandezas.

Exemplos:

a) $\frac{300.000\ hab}{520\ km^2}$ b) $\frac{200\ km}{5\ h}$

Chamamos de grandeza: o volume, a massa, a superfície, o comprimento, a capacidade, a velocidade, o tempo, o custo, etc. Vale recordar que a **razão** entre dois números, a e b, com $b \neq 0$, é dada por $\frac{a}{b}$.

Segue um exemplo em que podemos aplicar o significado de razão entre duas grandezas.

Exemplo: A cidade de Salvador, capital do estado da Bahia, possui uma população estimada para o ano de 2019, de 2.872.347 habitantes, e uma área territorial de 693.453 km². Qual é a densidade demográfica desse município?

Para calcularmos a densidade demográfica utilizamos a razão $d = \frac{habitantes}{área}$ → $d = \frac{2.872.347\ hab}{693.463\ km^2} \rightarrow d = 4.014\ hab/km^2$.

A razão é 4.014 hab/km²

Essa razão significa que, em cada quilômetro quadrado existem em média 4.014 habitantes.

Nesse problema, vimos que a densidade demográfica é a razão entre duas grandezas: habitantes e área.

AULAS 1 E 2: RAZÃO ENTRE DUAS GRANDEZAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes em duplas ou trios. Se preferir, posicione-os em fileira em formato de U, para facilitar o movimento do professor quando chamado pelo estudante.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

- Para o estudante: Caderno de Atividades impresso e calculadora científica.
- Para o professor: Caderno de Atividades do Professor, giz ou canetões coloridos.

INICIANDO

Professor, para as aulas 1 e 2 desta Sequência de Atividades, converse com seus estudantes para diagnosticar quais conhecimentos eles possuem sobre razão e proporção. Verifique através de exemplos na lousa, se reconhecem a representação de uma razão por meio de uma fração e o seu significado. Ao decorrer, introduza a definição de razão entre duas grandezas. Explore o significado que eles têm construído de grandeza, e pergunte sobre as representatividades das grandezas tempo, massa, volume, distância, velocidade, espaço, trabalho e temperatura. Se necessário, estenda a discussão falando sobre os diferentes tipos de grandezas e a utilização do significado delas na Matemática e nas Ciências. Após essa breve conversa, os estudantes poderão receber o Caderno impresso e realizar as atividades.

DESENVOLVENDO

Mantenha a sala organizada. Solicite que, em duplas ou trios, analisem e resolvam as questões das respectivas aulas. Sugira que os estudantes dialoguem entre si, troquem informações e resolvam as atividades propostas, cujo objetivo é desenvolver o significado de razão entre duas grandezas e reconhecer a fração como representação dessa razão entre duas grandezas em diferentes contextos. Verifique se esses significados estão sendo trabalhados entre os pares ou trios de estudantes. Incentive o uso da calculadora, pois pode agilizar a simplificação das frações. Circule pela sala enquanto os estudantes discutem e resolvem as atividades, para verificar possíveis dúvidas. Observe as discussões das duplas, e se necessário, oriente-as sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: "Como vocês estão resolvendo?", "Pensou em qual significado para desenvolver esta estratégia?", "Por que dessa forma?", entre outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e, trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

FINALIZANDO

Depois de uma breve sondagem das respostas, faça correções oral e escrita na lousa, de modo a promover uma discussão entre os estudantes. Neste momento podem surgir dúvidas, sendo válido abrir um novo debate, fazendo uso de outras estratégias que possibilitem a aprendizagem. Sempre que necessário, o professor deve complementar os conceitos e significados sobre razão entre grandezas.

1. Durante um jogo de futebol, um time chutou sete bolas a gol e marcou três gols. Responda:

a. Qual a razão entre os chutes a gol e os gols marcados?

Resolução

A razão entre os chutes a gol e os marcados é $\frac{7}{3}$.

b. Qual a razão entre os gols marcados e os chutes a gol?

Resolução

A razão entre os gols marcados e os chutes a gol é $\frac{3}{7}$.

2. Um pote de azeitonas possui 250g de peso líquido e 300g de peso bruto. Qual a razão entre o peso líquido e o peso bruto do pote?

Resolução

$\frac{250}{300} = \frac{5}{6}$ A razão entre o peso líquido e o peso bruto do pote é $\frac{5}{6}$.

3. Na olimpíada de Língua Portuguesa do colégio, Jeferson resolveu 40 questões e acertou 24. Cibele resolveu 40 questões e acertou 28. Quem apresentou o melhor desempenho?

Resolução

Jeferson $\frac{40}{24} = \frac{5}{3}$. ; Cibele $\frac{40}{28} = \frac{10}{7}$.

Logo, quem teve o melhor desempenho foi Cibele, apresentando uma razão $\frac{10}{7}$.

4. Em uma escola, o grupo docente é composto por 30 mulheres e 18 homens. Qual é a razão entre o número de mulheres e o número de homens?

Resolução

$\frac{30}{18} = \frac{5}{3}$. A razão entre o número de mulheres e o número de homens é $\frac{5}{3}$.

5. Joana e Paula fizeram caminhadas juntas em uma pista circular. Joana deu oito voltas em 40 minutos e Paula, 10 voltas em 40 minutos. Qual foi a razão entre o número de voltas e o tempo gasto, para cada um deles?

Resolução

Joana → $\frac{8}{40} = \frac{1}{5}$ A razão do número de voltas foi $\frac{1}{5}$; então, para cada volta Joana gastou 5 minutos.

Paula → $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ A razão do número de voltas foi $\frac{1}{4}$; então, para cada volta Paula gastou 4 minutos.

6. Um hospital tem 1.600 m² de área construída e 4.000 m² de área livre. A razão da área construída para a área livre é:

Resolução

$\frac{1600}{4000} = \frac{2}{5}$ Isso significa que a área construída representa $\frac{2}{5}$ da área livre.

7. A idade de Rodolfo é 25 anos e a idade de Ariane é 45 anos. Qual é a razão entre as idades de Rodolfo e Ariane?

Resolução

$\frac{25}{45} = \frac{5}{9}$ Isso significa que a razão entre as idades de Rodolfo e Ariane é $\frac{5}{9}$.

AULAS 3 E 4: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO RAZÃO ENTRE DUAS GRANDEZAS

Caro estudante, para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir, será necessário relembrar algumas fórmulas, raciocínio algébrico e técnicas de resolução de equações. Você deverá ficar atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará no decorrer das aulas, pois serão apresentados novos significados sobre proporcionalidade.

Objetivo da aula:
- Resolver situações-problema que envolvam a razão entre duas grandezas de natureza diferentes, como velocidade e densidade demográfica.

AULAS 3 E 4: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO RAZÃO ENTRE DUAS GRANDEZAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes em duplas ou trios. Se preferir, posicione-os em fileira em formato de U, para facilitar o movimento do professor quando chamado pelo estudante.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

- Para o estudante: Caderno de Atividades impresso e calculadora científica.
- Para o professor: Caderno de Atividades do Professor e giz ou canetões coloridos.

INICIANDO

Professor, para iniciar as aulas 3 e 4, relembre com seus estudantes os significados de massa, volume, distância, escala cartográfica e densidade demográfica. Faça um diagnóstico para verificar se eles se recordam de fórmulas ou estratégias para resolver problemas envolvendo essas grandezas. Cite exemplos curtos, de modo que possam utilizar raciocínio algébrico ou cálculo mental nas resoluções. Por exemplo: "Dona Joana para fazer um bolo usa três ovos, se ela triplicar o tamanho do bolo quantos ovos vai utilizar?". O objetivo é desenvolver o raciocínio proporcional. Após essa breve conversa, proponha aos estudantes que resolvam as atividades do Caderno do Estudante.

DESENVOLVENDO

Mantenha a sala organizada. Solicite que, em duplas ou trios, analisem e resolvam as questões das respectivas aulas. Sugira que os estudantes dialoguem entre si, desenvolvam estratégias ou modelos, troquem informações e resolvam as questões propostas. Caso necessário, retome os exemplos já estudados. O objetivo destas aulas é resolver situações-problema que envolvam a razão entre duas grandezas de naturezas diferentes, como velocidade e densidade demográfica. Circule pela sala enquanto os estudantes discutem e resolvem as atividades, para verificar possíveis dúvidas. Observe as discussões das duplas e, se necessário, oriente-as sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: "Como vocês estão resolvendo?", "Pensou em qual significado para desenvolver esta estratégia?", "Por que dessa forma?"; entre outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

FINALIZANDO

Depois de uma breve sondagem das respostas, faça correções oral e escrita na lousa, de modo a promover uma discussão entre os estudantes. Se preferir, convide as duplas ou os trios para resolverem alguma questão para a turma. Explore a relação de proporcionalidade entre as diferentes grandezas. Neste momento podem surgir dúvidas, sendo válido abrir um novo debate, fazendo uso de outras estratégias que possibilitem a aprendizagem. Sempre que necessário, o professor deve complementar os conceitos e significados sobre os números reais não compreendidos pelos estudantes durante resolução das atividades.

1. A distância entre as cidades de Osasco e Barretos é de 427 km. Um motorista fez esse percurso em 5 horas. Qual a velocidade média em que esse motorista viajou?

(Para calcular a Velocidade Média utilize a fórmula $v_m = \dfrac{\text{Distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$)

Resolução **Vamos chamar velocidade de v.**

$$v_m = \frac{427}{5} \rightarrow v = 85{,}4\ km/h.$$

A velocidade média é uma razão.

2. Uma moto tem autonomia de 20 km/l de gasolina. Em uma viagem, essa moto percorreu 350 km. Considerando que o valor do litro de gasolina é de R$ 3,99, qual foi o valor gasto nessa viagem?

Resolução **Primeiramente, vamos calcular o consumo (c), em litros, da moto no percurso.**

$$c = \frac{350}{20} \rightarrow c = 17{,}5l$$

No percurso, foram consumidos 17,5 litros de gasolina. Multiplicando a quantidade de litros de combustível consumidos pelo custo do litro da gasolina, encontramos o valor gasto.

17,5 × 3,99 = 69,82. Logo, foram gastos R$ 69,82.

3. Um automóvel partiu da cidade do Recife, às 10h, e chegou na cidade de Natal, às 17h. Ele percorreu 290 km. Qual foi a velocidade média desse automóvel?

Resolução

$$17h - 10h = 7h$$

$$v_m = \frac{290\ km}{7h} \rightarrow v = 41{,}5\ km/h$$

A velocidade escalar média foi de 41,5 km/h.

4. A população estimada para a cidade de Foz do Iguaçu, no ano de 2019, foi de 258.532 habitantes. A área territorial do município é de 618,057 km². Qual é a densidade demográfica desse município?

(Para calcularmos a densidade demográfica, utilizamos a fórmula $d = \dfrac{\text{habitantes}}{\text{área}}$)

Resolução

$$d = \frac{258.532}{618{,}057} \rightarrow d = 418{,}298\ hab/km^2$$

A densidade demográfica é de 418,298 hab/km²

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, para todos os itens a seguir, explore o significado de proporcionalidade entre a distância no mapa e o tamanho real. Fique atento aos cálculos, pois os processos exigem atenção e generalizações por parte dos estudantes. As suas dicas e observações são importantes nesta fase.

5. Considerando que escala (E) é a relação entre uma distância do mapa (d) e o seu valor na superfície real (D), $E = \frac{d}{D}$, resolva os problemas abaixo.

a. Considere a construção de uma rodovia entre duas cidades, com extensão de 150 quilômetros. No mapa, a sua medida está em 10 centímetros. De acordo com os dados, a escala cartográfica é de:

Resolução

$d = 10\ cm \rightarrow 1\ Km = 100.000\ cm.$ **Logo,** $15\ km = 1\ 5.000\ 000\ cm$

Assim, temos que: $E = \frac{10}{15.000.000} \rightarrow E = 10 : 15.000.000$

Simplificamos o valor da divisão por 10 para obter o valor da escala:

E = 1: 1.500.000. A escala cartográfica é de 1: 1.500.000.

b. Considerando que a distância real entre duas cidades é de 220km, e que a sua distância gráfica, num mapa, é de 5cm, podemos afirmar que esse mapa foi projetado na escala cartográfica de:

Resolução

$d = 5\ cm \rightarrow 1\ Km = 100.000\ cm, logo\ 220\ km = 22.000.000$

Assim, temos que: $E = \frac{5}{22000000} \rightarrow E = 5 : 22.000.000$

Simplificamos o valor da divisão por 5 para obter o valor da escala:

E = 1: 4.400.000. A escala cartográfica projetada foi de 1: 4.400.000.

c. (VUNESP, 2013 - Adaptado) Em um mapa, a distância entre dois pontos é de 4 cm e a distância real é de 4 km. Esse mapa está representado na seguinte escala cartográfica:

(A) 1:100.

(B) 1: 1.000.

(C) 1: 10.000.

(D) 1: 100.000.

Resolução

$d = 4\ cm \rightarrow 1\ Km = 100.000\ cm, logo\ 4\ km = 400.000$

Assim, temos que: $E = \frac{4}{400.000} \rightarrow E = 4 : 400.000$

Simplificamos o valor da divisão por 4 para obter o valor da escala:

E = 1: 100.000. A escala cartográfica é de 1: 100.000.

d. (AAP, 2014) Um mapa foi feito na escala 1: 30 000 000 (lê-se: "um para trinta milhões"). Essa notação representa a razão de proporcionalidade entre o desenho e o real. Ou seja, cada unidade no desenho, é na realidade, 30 milhões de vezes maior.

Utilizando uma régua, constatou-se que a distância do Rio de Janeiro a Brasília, nesse mapa, é de aproximadamente 4 cm. Assim, a distância real entre Rio de Janeiro e Brasília, nessa escala, é de

(A) 750 km.

(X) 1200 km.

(C) 3000 km.

(D) 4000 km.

Resolução $\frac{1}{30.000.000} = \frac{4}{D} \rightarrow 1D = 120.000.000 \rightarrow 1D = 120.000.000\ cm \rightarrow$

Convertendo para metro = 1.200.000 m → Convertendo para quilômetros = 1.200 km.

Portanto a alternativa correta é B.

5. **Para calcular o gasto de energia mensal de um aparelho elétrico podemos usar a fórmula:**

$$C = \frac{P \times h \times d}{1\,000}$$

Em que:

C = Consumo em quilowatts – hora (kWh)

P = Potência do aparelho em Watts (W)

h = Número de horas que o aparelho funciona por dia

d = Número de dias em que o aparelho funciona

A partir dessas informações, responda os itens abaixo.

a. Considerando que o preço do kWh é, em média, R$ 0,30, calcule o consumo de uma lâmpada incandescente de 80W, ligada por um período de 6 horas, por 30 dias.

Resolução

$$C = \frac{80 \times 6 \times 30}{1\,000} = \frac{14400}{1\,000} \rightarrow C = \frac{144}{10} \rightarrow C = 14{,}4\ kWh$$

Para encontrar o valor gasto durante os 30 dias, multiplicamos 14,4 × 0,30 = 4,32 → R$ 4,32.

b. Considerando que o preço do kWh é, em média, R$ 0,30, calcule o consumo de uma lâmpada fluorescente de 20W, ligada por um período de 6 horas, por 30 dias.

Resolução

$$C = \frac{20 \times 6 \times 30}{1\,000} = \frac{3600}{1\,000} \rightarrow C = \frac{36}{10} \rightarrow c = 3{,}6\,kWh$$

Para encontrar o valor gasto durante os 30 dias, multiplicamos 3,6 × 0,30 = 1,08 → R$ 1,08.

AULAS 5 E 6: PROPORCIONALIDADE DIRETA E INVERSA ENTRE DUAS GRANDEZAS

Caro estudante, para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir, será necessário relembrar alguns significados de proporção. Você deverá ficar atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará no decorrer das aulas, pois serão apresentados novos significados de razão, proporção e grandezas.

Objetivos da aula:

- Diferenciar relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas grandezas;
- Identificar as relações de proporcionalidade em escalas, em divisão em partes proporcionais e em taxas de variações de duas grandezas;
- Associar a contextos diversos a relação de proporcionalidade entre grandezas.

A **proporção** é a relação entre duas grandezas. Duas grandezas podem ser **diretamente proporcionais** ou **inversamente proporcionais**.

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando um aumento na medida da primeira grandeza gera um aumento de mesma proporção na medida da segunda grandeza, ou quando uma diminuição da medida da primeira grandeza gera uma diminuição de mesma proporção da medida da segunda grandeza.

Quando temos duas grandezas, x e y, diretamente proporcionais, temos que $x\,.y = k$. Neste caso, o K é a constante de proporcionalidade.

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando um aumento na medida da primeira grandeza gera uma diminuição na medida da segunda grandeza na mesma proporção, ou quando uma diminuição da medida da primeira grandeza gera um aumento da medida da segunda grandeza na mesma proporção.

Quando temos duas grandezas, x e y, inversamente proporcionais, temos que $x\,.y = k$. Neste caso, o K é a constante de proporcionalidade.

AULAS 5 E 6: PROPORCIONALIDADE DIRETA E INVERSA ENTRE DUAS GRANDEZAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes em duplas ou trios. Se preferir, posicione-os em fileira em formato de U, para facilitar o movimento do professor quando chamado pelo estudante.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

- Para o estudante: Caderno de Atividades impresso e calculadora científica.
- Para o professor: Caderno de Atividades do Professor e giz ou canetões coloridos.

INICIANDO

Professor, para as aulas 5 e 6 dessa Sequência de Atividades, converse com seus estudantes sobre proporção e introduza o significado de proporcionalidade direta e inversa entre grandezas. Explore as definições sobre proporção e sobre grandezas direta e inversamente proporcionais, descritas no início das atividades. Se possível, você poderá apresentar exemplos para ilustrar melhor os significados definidos. Após as explicações, peça aos estudantes que resolvam as atividades propostas no caderno.

DESENVOLVENDO

Mantenha a sala organizada. Solicite que, em duplas ou trios analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. Sugira que dialoguem entre si, troquem informações e resolvam as questões propostas. O objetivo destas aulas é que os estudantes consigam diferenciar as relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas grandezas e compreendam que os significados dessas estão presentes em diversos contextos do cotidiano. Circule pela sala enquanto os estudantes discutem e respondem as atividades para verificar possíveis dúvidas. Observe as discussões das duplas, e se necessário, oriente-as sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: "Como vocês estão resolvendo?", "Pensou em qual significado para desenvolver esta estratégia", "Por que dessa forma?"; entre outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

FINALIZANDO

Depois de uma breve sondagem das respostas, faça correções oral e escrita na lousa, de modo que promova uma discussão entre os estudantes. Neste momento podem surgir dúvidas, sendo válido abrir um novo debate, fazendo uso de outros raciocínios que possibilitem a aprendizagem. Sempre que necessário, você deve complementar os conceitos e significados sobre proporcionalidade direta e inversa.

1. Para decorar as mesas de uma escola para a festa junina, serão comprados tecidos coloridos. Suponha que 1m de tecido, de largura constante, custasse R$ 17,80.

a. Complete a tabela com o respectivo valor a pagar pelo tecido, considerando a quantidade em metros.

Comprimento do tecido (em metros)	Valor a pagar (R$)
1	17,80
2	35,60
3	53,40
4	71,20
5	89,00

b. Ao duplicar o comprimento do tecido em metros, o valor a pagar duplicou?

Resposta
Sim

c. E ao triplicar o tamanho, o valor a pagar triplicou?

Resposta
Sim

d. Então que tipo de relação de proporcionalidade existe entre o comprimento do tecido em metros e o valor a pagar?

Resposta
Professor, o objetivo desta atividade é explorar o significado de proporcionalidade. Promova um discurso utilizando esta atividade e outros exemplos, caso ache necessário, para explorar o significado da divisão em partes proporcionais.

2. Os itens abaixo tratam da relação de proporcionalidade entre duas grandezas. Leia com atenção e classifique as grandezas em diretamente ou inversamente proporcionais.

a. Consumo de combustível e quilômetros percorridos por um automóvel.

Resposta
Diretamente proporcional, pois se aumentar o consumo de combustível, aumenta-se a quilometragem percorrida.

b. A velocidade de um trem e o tempo gasto no percurso.

Resposta

É inversamente proporcional, pois se aumentarmos a velocidade do trem, o tempo gasto no percurso será reduzido.

c. A velocidade de um automóvel e a distância percorrida por ele.

Resposta

É diretamente proporcional, pois se aumentarmos a velocidade de um automóvel, a distância percorrida por ele aumentará também.

d. A distância percorrida por um aplicativo de transporte e o valor a pagar no final da corrida.

Resposta

Diretamente proporcional, pois se aumentarmos a distância percorrida pelo aplicativo de transporte, o valor a ser pago aumentará também.

e. Número de operários trabalhando e tempo para realizar um trabalho.

Resposta

Inversamente proporcional, pois se aumentarmos o número de operários, diminuímos o tempo para fazer o trabalho.

3. Para melhor compreendermos o significado de grandezas direta ou inversamente proporcionais, observe as relações de proporcionalidade nos itens **a, b, c** e **d** e as classifique em diretamente ou inversamente proporcional.

a. 5 *l* de combustível ------------- 50 km percorridos

10 *l* de combustível ------------ 100 km percorridos

Resposta

Diretamente proporcional.

b. 200km/h ------------ 3h
100km/h -------------1h30min

Resposta

Inversamente proporcional.

c. 1 torneira aberta ------------ enche a piscina em 12h
4 torneiras abertas --------- enchem a piscina em 3h

Resposta

Inversamente proporcional.

d. 10 pedreiros ------------ fazem um muro em 10h
25 pedreiros ------------ fazem o muro em 4h

Resposta

Inversamente proporcional.

e. 1 chocolate ------------ custa R$ 2,90
3 chocolates ---------- custam R$ 8,70

Resposta

Diretamente proporcional.

4. Caro estudante, resolva os problemas a seguir utilizando diferentes estratégias de cálculo. Discuta também com os seus colegas se as grandezas relacionadas nos problemas são diretamente ou inversamente proporcional.

a. Uma torneira despeja 20 litros de água por minuto e leva uma hora para encher uma caixa d'agua que estava vazia. Se forem colocadas mais 2 torneiras com a mesma vazão, em quanto tempo elas encherão esta mesma caixa?

Resposta

Como serão 3 torneiras abertas, o tempo para encher a caixa vazia será de 20 minutos. As grandezas envolvidas são inversamente proporcionais.

b. Maurício pagou R$ 90,00 por uma calça Jeans. Se ele comprasse 2 calças custando esse mesmo valor, quanto pagaria?

Resposta

Ele pagaria R$ 180,00. As grandezas envolvidas são diretamente proporcionais.

5. (AAP, 2016) Considere as afirmações a seguir.

I – Um pintor leva 1 hora para pintar uma parede. Para pintar duas paredes em condição idêntica, ele levará 2 horas.

II – Um time marcou 2 gols nos primeiros 15 minutos de jogo. Portanto, ao final do primeiro tempo (45 minutos), ele terá marcado 6 gols.

III – Em 1 hora de viagem, um trem com velocidade média constante, percorreu 60 km. Mantendo a mesma velocidade média, após 3 horas ele terá percorrido 180 km.

IV – A massa de uma pessoa é diretamente proporcional a sua idade.

Há proporcionalidade entre as grandezas envolvidas, apenas nas afirmações

(A) I e II.

(B) II e III.

X (C) I e III.

(D) III e IV.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, estenda o discurso com os estudantes para outros contextos, pontuando a aplicação da proporcionalidade na resolução de problemas no cotidiano.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, discuta a relação de proporcionalidade dos itens com os estudantes.

I) Um pintor leva 1 hora para pintar uma parede. Para pintar duas paredes em condição idêntica, ele levará 2 horas.

III) Em 1 hora de viagem, um trem com velocidade média constante, percorreu 60 km. Mantendo a mesma velocidade média, após 3 horas, ele terá percorrido 180 km.

AULAS 7 E 8: REGRA DE TRÊS SIMPLES

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes em duplas ou trios. Se preferir, posicione-os em fileira em formato de U, para facilitar o movimento do professor quando chamado pelo estudante.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

- Para o estudante: Caderno de Atividades impresso e calculadora científica.
- Para o professor: Caderno de Atividades do Professor e giz ou canetões coloridos.

INICIANDO

Professor, para as aulas 7 e 8, converse com seus estudantes, para verificar possíveis dúvidas sobre o significado de razão, proporção, grandezas direta e inversamente proporcionais, pois as próximas atividades são sequências do que foi aprendido nas aulas anteriores. Utilize a situação-problema proposta no início das atividades a fim de apresentar aos estudantes os procedimentos de cálculos envolvendo regra de três simples para resolver situações-problema que envolvam relações de proporcionalidade.

DESENVOLVENDO

Mantenha a sala organizada. Solicite que, em duplas, analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. Sugira que os estudantes dialoguem entre si, troquem informações, discutam as novas estratégias e resolvam as atividades propostas. O objetivo destas aulas é utilizar procedimentos de cálculo para resolver situações-problema que envolvam relações de proporcionalidade. Circule pela sala enquanto os estudantes discutem e resolvem as atividades, para verificar possíveis dúvidas. Observe as discussões das duplas e, se necessário, oriente-as sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: “Como vocês estão resolvendo?”, “Pensou em qual significado para desenvolver esta estratégia”, “Por que dessa forma?”; entre outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e trocar estratégias para solucionar as situações-problema.

AULAS 7 E 8: REGRA DE TRÊS SIMPLES

Caro estudante, para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir, será necessário relembrar os conceitos estudados nas aulas anteriores. Você deverá ficar atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará, no decorrer das aulas, sobre os significados da regra de três simples.

Objetivos da aula:
- Utilizar procedimentos de cálculo para resolver situações- problema que envolvam relações de proporcionalidade;
- Elaborar situações-problema que envolvam relações de proporcionalidade.

A regra de três simples é uma forma de resolver problemas utilizando o significado de proporção e uma equação. Vejamos o exemplo abaixo:

Viajando a uma velocidade média de 70 km por hora, o percurso entre duas cidades pode ser feito em 5 horas. Qual deveria ser a velocidade escalar média para se fazer o mesmo percurso em 4 horas?

Resolução:

km/h	horas
70	5
x	4

- Verificamos se as grandezas são diretas ou inversamente proporcionais.
  Se aumentar a velocidade, diminuirá o tempo, logo as grandezas são inversamente proporcionais.

$$\frac{70}{x} = \frac{4}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{70} = \frac{5}{4}$$

- Resolvendo $\frac{70}{x} = \frac{4}{5} \rightarrow 4x = 350 \rightarrow \frac{350}{4} \rightarrow x = 87{,}5$. A velocidade média deveria ser de 87,5 km/h.

1. Se 4,8 *m* de fio custam R$ 240,00, qual será o preço de 6 *m* do mesmo fio?

Resolução

Fio(m)	Custo (R$)
4	240
6	x

- **Verificamos se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais.**
  São diretamente proporcionais.

$$\frac{4}{6} = \frac{240}{x} \rightarrow 4x = 1440 \rightarrow x = \frac{1440}{4} \rightarrow x = 360.$$

Logo, 6 m do mesmo fio custará R$ 360,00

2. Um automóvel com velocidade constante percorre 20 m em 4 minutos. Quantos metros percorrerá em 6 minutos?

Resolução

Percurso(m)	Tempo (min)
20	4
x	6

• Verificamos se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais.

São inversamente proporcionais.

$$\frac{20}{x} = \frac{6}{4} \rightarrow 6x = 80 \rightarrow x = \frac{80}{6} \rightarrow x = 13{,}3$$

Logo, o automóvel percorrerá 13,3 metros em 6 minutos.

3. Em um dia de trabalho, 5 operários produziram 800 peças. Se 8 operários trabalhassem no mesmo ritmo, quantas peças iriam produzir?

Resolução

Operários	Peças
5	800
8	x

• Verificamos se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais.

São diretamente proporcionais.

$$\frac{5}{8} = \frac{800}{x} \rightarrow 5x = 6400 \rightarrow x = \frac{6400}{5} \rightarrow x = 1280.$$

Logo, 8 operários trabalhando no mesmo ritmo produzirão 1 280 peças em um dia.

4. Para construir uma casa, 4 pedreiros levaram 60 dias. Em quantos dias 5 pedreiros, com mesma capacidade de trabalho, fariam a mesma casa?

Resolução

Pedreiros	Dias
4	60
5	x

• Verificamos se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais.

São inversamente proporcionais.

$$\frac{5}{4} = \frac{60}{x} \rightarrow 5x = 240 \rightarrow x = \frac{240}{5} \rightarrow x = 48.$$

Logo, 5 pedreiros trabalhando no mesmo ritmo construiriam a casa em 48 dias.

5. Uma fábrica de tecidos consumiu 1.820 fardos de algodão em 13 dias. Em 8 dias, quantos fardos consumiu?

Resolução

Fardos de algodão	Dias
1820	13
x	8

• Verificamos se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais.

São inversamente proporcionais.

$$\frac{1820}{x} = \frac{13}{8} \rightarrow 13x = 14560 \rightarrow x = \frac{14560}{13} \rightarrow x = 1120.$$

Logo, em 8 dias a fábrica consumiu 1. 120 fardos de algodão.

FINALIZANDO

Analise as respostas dos estudantes para identificar possíveis erros e dificuldades. Resolva todas as atividades na lousa, explore atentamente as observações e questionamentos dos estudantes e, se achar oportuno, proponha uma discussão entre eles para que exponham suas dificuldades durante o processo de elaboração e resolução dos problemas. Neste momento podem surgir muitas dúvidas e os debates podem ser enriquecedores para evidenciar as estratégias de soluções bem sucedidas.

6. Caro estudante, apresentamos, nos itens a e b, os esquemas sobre a relação de proporcionalidade entre duas grandezas. Para cada item, elabore e resolva um problema envolvendo as grandezas dadas.

a. 5 kg de farinha de trigo ------------- 70 pães
7 kg de farinha de trigo ------------- **faz quantos pães?**

Escreva neste espaço o seu problema:

Professor, complemente as ideias dos estudantes neste processo de elaboração.

b. 5 pedreiros ------------- fazem um muro em 10 horas
15 pedreiros ------------- **faz o mesmo muro em quantas horas?**

Escreva neste espaço o seu problema:

Professor, complemente as ideias dos estudantes neste processo de elaboração.

IMAGENS E ILUSTRAÇÕES
pixabay.com - freepik.com

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

1ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 03

1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATÉRIAS**
3	Estatística: pesquisa e organização de dados; Porcentagens: cálculo de índices, taxas e coeficientes; Estatística: Interpretação de gráficos, medidas de tendência central e medidas de dispersão.	(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.	**Algumas atividades dessa habilidade encontram-se no Caderno da 1ª série:** Vol. 1 na Situação de Aprendizagem 1 Atividade 1: Índices e taxas

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

Olá, Professor! Nesta Sequência de Atividades, falamos diretamente com você que está aí, na sala de aula, no convívio direto com os estudantes. Estes terão oportunidade, nesse momento, de se envolverem com atividades que possibilitam a retomada de conceitos, propriedades e procedimentos essenciais para o desenvolvimento de seus conhecimentos e capacidades em matemática.

A Sequência de Atividades deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração. Além disso, as socializações das atividades, por parte dos estudantes, são percebidas como oportunidades de serem desenvolvidas habilidades e competências que dizem respeito à cooperação, à empatia, à argumentação e à comunicação, entre outras.

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam etapas de uma pesquisa estatística, interpretação de informações veiculadas em gráficos e tabelas, identificação de variáveis, índices, taxas ou coeficientes.

A habilidade escolhida para a sequência de atividades, proposta nestas aulas, foi: (EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	PESQUISA! VAMOS ELABORAR UMA?
3ª e 4ª/ 90 min	TABELAS E GRÁFICOS, UMA INTERPRETAÇÃO
5ª e 6ª/ 90 min	TAXAS, ÍNDICES E COEFICIENTES ESTATÍSTICOS HORA DE CONHECER
7ª e 8ª/ 90 min	SOCIALIZAR PARA CONHECER

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

AULAS 1 E 2 – PESQUISA! VAMOS ELABORAR UMA?

Objetivos das aulas:

- Selecionar um tópico referente a práticas sociais que possa ser tema de uma pesquisa estatística;
- Organizar as etapas de uma pesquisa estatística;
- Coletar dados em uma pesquisa estatística;
- Conhecer as ferramentas de uma planilha eletrônica para a produção de gráficos;
- Utilizar uma planilha eletrônica para elaborar gráficos;
- Interpretar informações veiculadas em gráficos e tabelas;
- Produzir texto com as conclusões tiradas com base em dados pesquisados e representados por meio de tabelas e gráficos.

1. Atividade

a. Vamos fazer uma pesquisa sobre pessoas que utilizam a Matemática em suas profissões? Que profissões você acha que mais utilizam conteúdos matemáticos em suas rotinas diárias? Cite alguns exemplos de profissionais e dos conteúdos matemáticos que são utilizados no exercício de suas funções.

Resposta

Resposta pessoal.

AULAS 1 E 2 – PESQUISA! VAMOS ELABORAR UMA?

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Para a realização das atividades, formar equipes de, no máximo, 4 estudantes, respeitando as regras de distanciamento.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Papel sulfite, canetas coloridas, compasso, lápis, régua graduada, caderno de atividades do estudante;

Computador ou outro recurso eletrônico que permita acesso a planilhas eletrônicas;

Malhas diversas, quadriculadas, pontilhadas, isométricas, triangulares.

INICIANDO

Vamos iniciar nossas atividades! Para as aulas 1 e 2, propomos uma conversa sobre a importância da Matemática em nossas vidas, desde o momento em que acordamos, até a hora que vamos dormir.

Professor, no portal do Domínio Público[1] – biblioteca digital desenvolvida em softwares livre (http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.do), você encontrará vários vídeos que poderão ser utilizados para destacar a importância da Matemática em nossas atividades diárias e, assim, iniciar a conversa sobre o tema. Sugerimos o vídeo *Matemática na vida, série: Razão e Proporção*[2]. Cada vídeo dura, em média, entre 10 e 20min. Você pode escolher outros e apresentar em algum momento da discussão que ache pertinente.

1 Domínio Público, 2020. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.do>. Acesso em: 20 set. 2020.

2 Domínio Público: Matemática na vida, série: Razão e Proporção. 2020. Disponível: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/video/me001053.mp4>. Acesso em: 20 set. 2020.

DESENVOLVENDO

Após a introdução sobre a relevância da Matemática em nossas atividades diárias, sugerimos que os estudantes formem equipes de, no máximo, 4 componentes (respeitando as orientações de distanciamento, uso de máscaras e álcool em gel) para discutirem sobre profissões e sua relação com a Matemática. Após a discussão, os estudantes farão uma lista das quatro (ou mais) profissões que o grupo selecionou e realizará uma pesquisa de opinião sobre quais destes profissionais utilizam conceitos matemáticos, com maior frequência, em suas atividades. A pesquisa poderá ser realizada entre os outros estudantes na sala ou com outras turmas na escola, se assim julgar necessário e seguro. Diante dos dados coletados, as equipes realizarão o tratamento dos dados. Nesta etapa, será necessário o uso de computador ou outro meio eletrônico que possibilite acesso a planilhas. As equipes organizarão os dados numa tabela de frequências (absoluta e relativa), utilizando a planilha eletrônica e, posteriormente, a escolha do gráfico que melhor representa os dados coletados. Certifique-se de que cada equipe escolha profissões diferentes e, se possível, áreas distintas (Saúde, Humanas, Linguagens, Exatas, Tecnológicas, ...), e de diferentes níveis (técnico, superior, ...). Professor, você pode sugerir algumas pro-

b. Formem equipes, de até 4 estudantes, escolham 4 profissões e pesquisem, com os estudantes da sala (ou da escola), ***Quais dos profissionais, listados abaixo, utilizam mais matemática em seu dia a dia?*** Organize os dados que a equipe obteve numa tabela como a sugerida abaixo.

Profissional	Freq. Absoluta	Freq. Relativa	Conteúdo Matemático
Advogado	25	31,25	Pensamento lógico-matemático, cálculo percentual de valores de pensões, ...
Médico (clínico)	18	22,50	Leitura e interpretação de gráficos e tabelas de resultados de exames, proporções de medicamentos relacionadas ao "peso", idade e altura do paciente, ...
Cabelereiro	21	26,25	Proporcionalidade de produtos com relação a quantidade, tipo de cabelo do cliente, ...
Pedreiro	16	20,00	Proporcionalidade de materiais utilizado na construção, leitura de planta baixa, ...
Total	80	100,00	

c. A partir da tabela acima, vamos construir um gráfico utilizando uma planilha eletrônica. Selecione os dados que você quer que apareça no gráfico.

Selecione *inserir* e depois *gráficos*. Escolha o gráfico que melhor representa os dados de sua tabela.

d. Você já havia parado para pensar na importância da Matemática nas profissões? Já escolheu qual é a profissão à qual pretende se dedicar? Produza um texto sobre sua(s) escolha(s), destacando a relação da Matemática com esta profissão. (Caso não tenha pensado em qual profissão pretende se dedicar, escolha uma que você queira escrever sobre ela).

Resposta

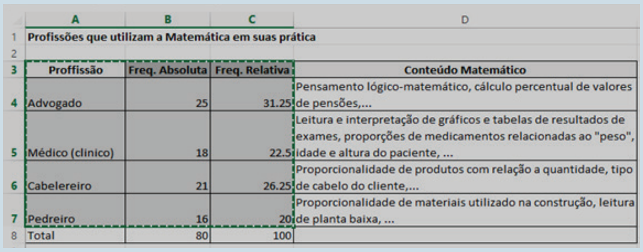
fissões, caso os estudantes tenham dificuldades em escolhê-las. Recomenda-se fazer uma breve revisão sobre o cálculo para equivalência entre valores percentuais e ângulo central para a representação dos dados num gráfico de setores, além do cálculo da frequência relativa (cálculo percentual).

FINALIZANDO

Para concluir a atividade, sugerimos uma discussão com foco na escolha da profissão de cada estudante. Após a finalização das discussões, o professor poderá propor um projeto interdisciplinar, com a culminância numa feira de profissões em que os estudantes estariam caracterizados e apresentariam o dia a dia de cada profissional citado na pesquisa.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

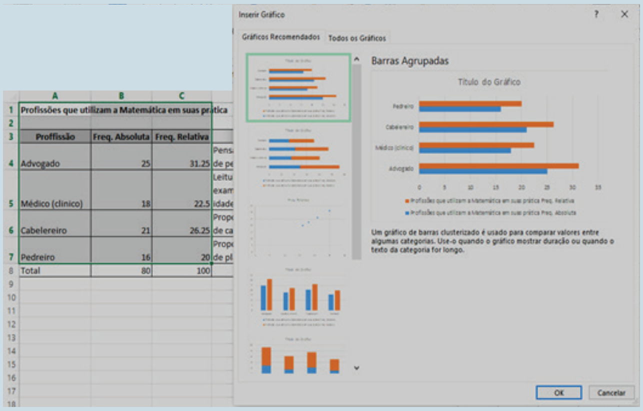
Professor, uma sugestão é que você faça uma breve explicação sobre o preenchimento da tabela. Antes de completar a tabela com os dados coletados pela equipe, seria interessante explicar sobre a diferença entre frequência absoluta e relativa, bem como revisar que, no gráfico de setores, a divisão das partes considera a relação entre frequência (geralmente relativa) e o ângulo central.



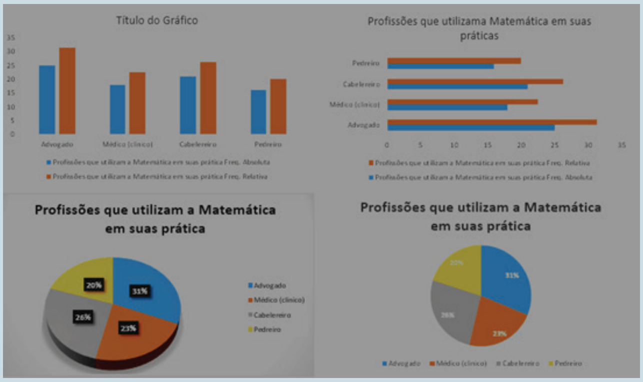
Profissões que utilizam a Matemática em suas prática

Proffissão	Freq. Absoluta	Freq. Relativa	Conteúdo Matemático
Advogado	25	31.25	Pensamento lógico-matemático, cálculo percentual de valores de pensões,...
Médico (clinico)	18	22.5	Leitura e interpretação de gráficos e tabelas de resultados de exames, proporções de medicamentos relacionadas ao "peso", idade e altura do paciente, ...
Cabelereiro	21	26.25	Proporcionalidade de produtos com relação a quantidade, tipo de cabelo do cliente,...
Pedreiro	16	20	Proporcionalidade de materiais utilizado na construção, leitura de planta baixa, ...
Total	80	100	

Selecione os dados que você quer que apareça no gráfico.



Selecione *inserir* e depois *gráficos*. Escolha o gráfico que melhor representa os dados de sua tabela.



Exemplo de alguns gráficos que podem representar os dados na tabela

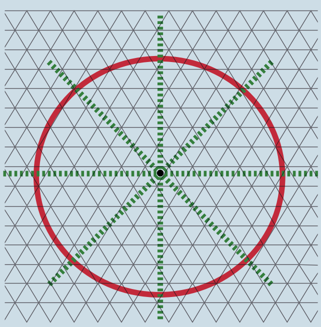
CONVERSANDO COM O PROFESSOR

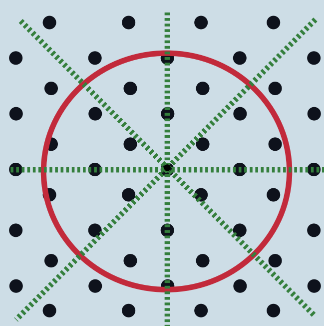
Professor, aproveite esse momento para chamar a atenção sobre a importância da escolha de uma profissão a qual o estudante se identifique. Solicite ao estudante que liste as habilidades características que ele destacaria possuir e as que ele julga que não possui afinidade, que apresenta dificuldades em desenvolver. Depois, questione que profissionais se enquadrariam no perfil criado. Pergunte se ele já ouviu falar em "teste vocacional" e se teria interesse em realizá-lo.

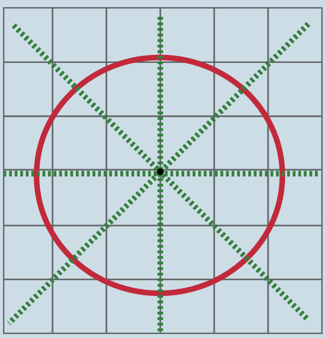
Professor, caso não tenha acesso a planilhas eletrônicas, as atividades de construção poderão ser realizadas utilizando malhas quadriculadas e/ou outras malhas, de acordo com sua conveniência.

Para os gráficos de setores, é possível escolher, juntamente com os estudantes, a opção que facilita a construção, a depender dos dados a serem considerados para a realização das pesquisas. Para essas construções, será necessário dispor, aos estudantes, régua, canetas coloridas e compasso.

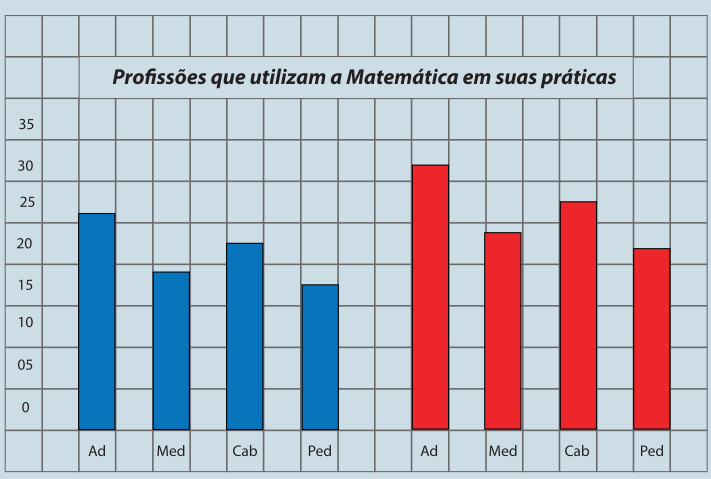
Representamos, abaixo, algumas opções de malhas que podem ser utilizadas de acordo com a conveniência e resultados dos dados da pesquisa.







Se for utilizar gráficos de colunas, indicamos a malha quadriculada para apresentação dos resultados. Representamos, abaixo, os resultados obtidos na pesquisa hipotética, citada como possível resposta da mesma, numa malha quadriculada.



AULAS 3 E 4 – TABELAS E GRÁFICOS, UMA INTERPRETAÇÃO

Objetivos das aulas:
- Calcular a média de um conjunto de dados numéricos;
- Compreender o significado de amplitude de um conjunto de dados numéricos;
- Relacionar o valor da média à tendência dos valores de uma pesquisa estatística;
- Identificar situações em que a média corresponde, ou não, à tendência dos valores de uma pesquisa estatística, em função da amplitude dos dados.

1. (BB – Fundação Carlos Chagas – adaptada). O supervisor de uma agência bancária obteve dois gráficos que mostravam o número de atendimentos realizados por funcionários. O Gráfico I mostra o número de atendimentos realizados pelos funcionários A e B, durante 2 horas e meia e, o Gráfico II mostra o número de atendimentos realizados pelos funcionários C, D e E, durante 3 horas e meia.

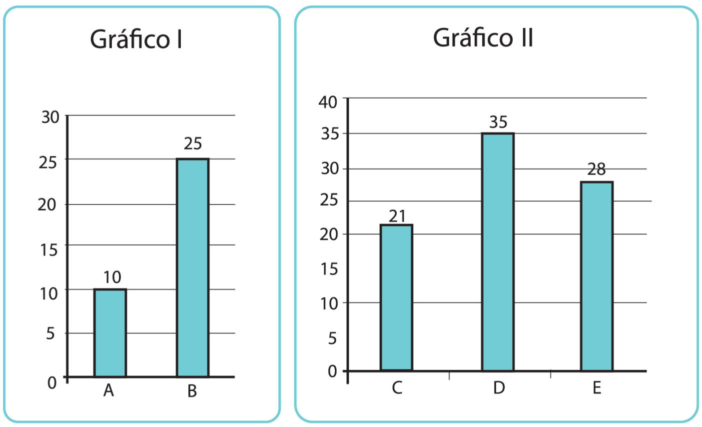


Imagem: Banco do Brasil Fundação Carlos Chagas

a. Como você avalia o desempenho de cada funcionário? Qual deles é o mais eficiente nos atendimentos, considerando a quantidade de atendimentos realizados por hora?

Cálculos

Funcionário A: 10 atendimentos / 2,5 horas = 4 clientes por hora.
Funcionário B: 25 atendimentos / 2,5 horas = 10 clientes por hora.
Funcionário C: 21 atendimentos / 3,5 horas = 6 clientes por hora.
Funcionário D: 35 atendimentos / 3,5 horas = 10 clientes por hora.
Funcionário E: 28 atendimentos / 3,5 horas = 8 clientes por hora.
O mais eficiente é o funcionário B, que atende 10 clientes em uma hora de trabalho.

AULAS 3 E 4 – TABELAS E GRÁFICOS, UMA INTERPRETAÇÃO

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas, respeitando as regras de distanciamento.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno de Atividades do estudante impresso.

INICIANDO

Na atividade desta sequência, sugerimos que você, professor, faça uma retomada de alguns conceitos como média de valores representados em tabelas e gráficos, conceito de desvio padrão e a ideia de amplitude de um conjunto de dados numéricos.

DESENVOLVENDO

As duplas de estudantes resolvem as questões propostas e registram suas conclusões para, depois, compartilhar com os outros estudantes da turma. Na primeira questão, o gráfico indica a ideia de produtividade e eficiência em atendimentos de alguns funcionários de uma agência bancária. Os estudantes terão que estabelecer uma relação entre atendimentos e o tempo, em horas, para cada funcionário. Os estudantes devem concluir o levantamento sobre o número de atendimentos a cada hora e comparar o desempenho dos funcionários ao realizá-los. Na segunda questão, os gráficos apresentam dados sobre a produção e a reciclagem de lixo em algumas regiões do planeta. A ideia principal é estabelecer uma relação entre o lixo produzido e o reciclado, por cada região. Professor, nesse momento, sugerimos que faça uma investigação sobre os conhecimentos que os estudantes possuem sobre reciclagem, incluindo suas opiniões sobre a importância de se reciclar. O tema, também, pode ser abordado como uma pesquisa local (na escola, comunidade, cidade) ou mais abrangente (no estado, país) e ser feito um comparativo entre os resultados. Ou ainda, pode ser realizado um projeto interdisciplinar envolvendo toda a comunidade escolar, em que cada componente curricular contribuirá com suas especificidades. A terceira e quarta questões abordam o conceito de desvio padrão. Para a resolução dessas questões, o estudante necessita lembrar-se do conceito de desvio padrão, que se traduz da seguinte forma: é uma medida que mostra a uniformidade ou não de um conjunto de dados. Sendo assim, quanto menor for o valor do desvio padrão, mais homogêneos serão os dados envolvidos.

FINALIZANDO

Após a resolução e discussão da proposta de cada questão, sugerimos que as duplas façam uma socialização das conclusões, dúvidas e resultados obtidos com a classe.

b. Quantos atendimentos, por hora, o funcionário B realizou a mais que o funcionário C?

Cálculos

Funcionário B: 25 atendimentos / 2,5 horas = 10 clientes por hora
Funcionário C: 21 atendimentos / 3,5 horas = 6 clientes por hora
Diferença: 10 – 6 = 4

2. (BB – Cesgranrio – adaptada). Os gráficos, abaixo, apresentam dados sobre a produção e a reciclagem de lixo em algumas regiões do planeta.

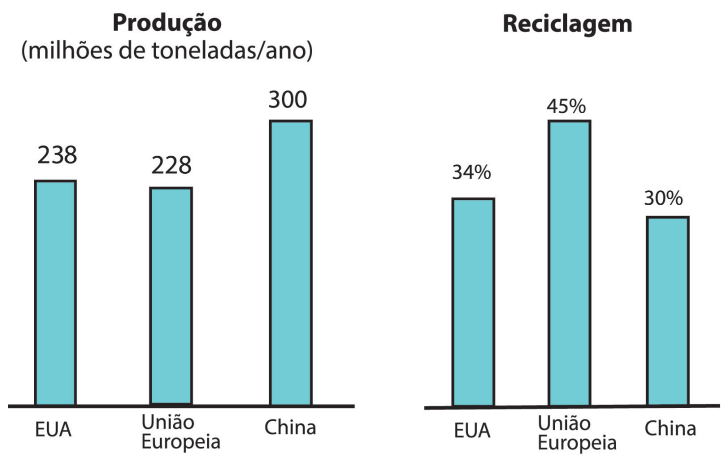


Imagem: Banco do Brasil Fundação Cesgranrio

a. Qual é a relação entre o lixo produzido e o reciclado?

Cálculos

A China produz 300 milhões e recicla 30%, ou seja, recicla 90 milhões.
A União Europeia produz 228 milhões e recicla 45%, ou seja, recicla 102,6 milhões.
Os EUA produzem 238 milhões e recicla 34%, ou seja, reciclam 80,92 milhões.

b. Baseando-se nos dados apresentados, qual é, em milhões de toneladas, a diferença entre as quantidades de lixo recicladas na China e nos EUA, em um ano?

Cálculos

A China produz 300 milhões e recicla 30%, ou seja, recicla 90 milhões.

Os EUA produzem 238 milhões e recicla 34%, ou seja, reciclam 80,92 milhões.

China – EUA = 90 – 80,92 = 9,08 milhões de toneladas.

c. Na sua opinião, qual é o material que pode ser reciclado mais vezes? Qual é o material que demora mais tempo para se decompor na natureza?

Resposta

Exemplos de materiais e quantidade de vezes que podem ser reciclados.

Alumínio: Pode ser reciclado infinitamente, já que não perde a sua composição ao longo do processo de reciclagem.

Papel: Só é possível reciclar de cinco a sete vezes o material em laboratório, já que a fibra vai degradando ao longo do processo.

Vidro: Além de ser um material que pode ser reutilizado diversas vezes, ele pode ser reciclado infinitamente, visto que não perde a qualidade e pode ser substituído 100% em uma nova produção.

Plástico: Tudo depende do tipo de plástico. Garrafa PET, pode ser transformada diversas vezes, sem perder as características.

Cobre e aço: Podem ser reciclados diversas vezes, sem perder a qualidade.

Papelão: Diferente do papel, o papelão tem mais resistência e pode ser reciclado diversas vezes.

d. Em sua casa, é feita a separação do lixo para a reciclagem?

Resposta

Resposta pessoal.

Descubra quantas vezes o mesmo material pode ser reciclado. Papel semente, 2020. Disponível em: <https://papelsemente.com.br/blog/quantas-vezes-o-mesmo-material-pode-ser-reciclado/>. Acesso em: 04 set 2020.

Exemplos de materiais e tempo que leva para se decompor na natureza:[1]

Material	Tempo de decomposição
Cascas de frutas	de 1 a 3 meses
Papel	03 a 06 meses
Pano	de 6 meses a 1 ano
Chiclete	05 anos
Filtro de cigarro	de 05 a 10 anos
Tampa de garrafa	15 anos
Madeira pintada	15 anos
Nylon	mais de 30 anos
Sacos plásticos	de 30 a 40 anos
Lata de conserva	100 anos
Latas de alumínio	200 anos
Plástico	450 anos
Fralda descartável	600 anos
Garrafas de vidro	tempo indeterminado
Pneu	tempo indeterminado
Garrafas de plástico (pet)	tempo indeterminado
Borracha	tempo indeterminado
Vidro	1 milhão de anos

Decomposição do lixo. Portal São Francisco, 2020. Disponível em: https://www.portalsaofrancisco.com.br/meio-ambiente/decomposicao-do-lixo>. Acesso em: 04 set. 2020.

1 Decomposição do lixo. Portal São Francisco, 2020. Disponível em: https://www.portalsaofrancisco.com.br/meio-ambiente/decomposicao-do-lixo>. Acesso em: 04 set. 2020.

e. Produza um pequeno texto, expressando sua opinião, por que reciclar é importante?

Resposta

Resposta pessoal.

3. (ENEM – 2016 – adaptada) O Procedimento de perda rápida de "peso" é comum entre os atletas de esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas, da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três "pesagens" antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações, com base nas pesagens dos atletas, estão no quadro.

Atleta	1ª Pesagem (Kg)	2ª Pesagem (Kg)	3ª Pesagem (Kg)	Média	Médiana	Desvio Padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram, aos atletas, quais deles se enfrentariam na primeira luta. A primeira luta foi entre quais atletas?

Resposta

Para encontrar os atletas mais regulares usaremos o desvio padrão, pois essa medida indica o quanto que o valor desviou da média.

O atleta III é o com menor desvio padrão (4,08), logo é o mais regular. O menos regular é o atleta II com maior desvio padrão (8,49).

Esses resultados, para o desvio padrão, são obtidos utilizando a fórmula:

$$DP = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i-M_A}\right)^2}{n}}$$

onde,

$\sum$: símbolo de somatório. Indica que temos que somar todos os termos, desde a primeira posição (i=1) até a posição n

x_i: valor na posição i no conjunto de dados

M_A: média aritmética dos dados

n: quantidade de dados.

4. (ENEM – 2010) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso, o candidato deveria obter média aritmética, na pontuação, igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro, a seguir, são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos. Dados dos candidatos no concurso.

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marcos	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é:

X) Marco, pois a média e a mediana são iguais.

B) Marco, pois obteve menor desvio padrão.

C) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 pontos em Português.

D) Paulo, pois obteve maior mediana.

E) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Se achar conveniente, pode trabalhar a ideia da fórmula em outro momento, visto que os valores do desvio padrão já estão calculados nas questões, ou seja, os estudantes só precisarão do conceito.

1ª série

AULAS 5 E 6 – TAXAS, ÍNDICES E COEFICIENTES ESTATÍSTICOS: HORA DE CONHECER

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Para a realização das atividades, formar equipes de, no máximo, 4 estudantes, respeitando as regras de distanciamento.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Papel sulfite, canetas coloridas, lápis, compasso, régua graduada, caderno de atividades do estudante;

Acesso a livros (biblioteca) ou meios digitais (com internet) para a realização de pesquisa;

Malhas diversas, quadriculadas, pontilhadas, isométricas, triangulares (disponíveis em anexo).

INICIANDO

Professor, para as atividades desta sequência, os estudantes desenvolverão pesquisas sobre uso e cálculo de alguns índices, taxas e/ou coeficientes que possuam relevância socioeconômica, como ***taxa de natalidade; taxa de mortalidade; crescimento vegetativo; taxa de fecundidade; taxa de desemprego; índice de desenvolvimento humano,*** dentre outros. Sugerimos uma conversa sobre o que os estudantes compreendem sobre o tema que a equipe escolheu para desenvolver a pesquisa, quais as ideias intuitivas sobre como são calculados índice, taxa e/ou coeficiente, quais as relações entre suas variáveis e por que essas informações são relevantes.

Resolução

Como a média de Marco e Paulo foram iguais, o desempate será feito pelo menor valor do desvio padrão, pois é o que indica pontuação mais regular.

Alternativa correta b: Marco, pois obteve menor desvio padrão

AULAS 5 E 6 – TAXAS, ÍNDICES E COEFICIENTES ESTATÍSTICOS: HORA DE CONHECER

Objetivos das aulas:
- Identificar as variáveis associadas ao cálculo de um determinado índice, taxas ou coeficiente;
- Explicar a relação que uma variável mantém com outra na composição de um índice;
- Comparar diferentes índices, taxas e coeficientes relativos.

1. As atividades serão realizadas em equipes de, no máximo, 4 estudantes

- Cada equipe escolherá um tema para desenvolver uma pesquisa. O tema escolhido terá relação direta com taxas, índices ou coeficientes estatísticos. Ou seja, será obtido a partir dos cálculos destas taxas, índices e/ou coeficientes ***(taxa de natalidade; taxa de mortalidade; crescimento vegetativo; taxa de fecundidade; taxa de desemprego; índice de desenvolvimento humano, dentre outros)***;
- A equipe realizará uma pesquisa com o objetivo de conhecer e se aprofundar sobre o tema;
- A pesquisa terá uma parte quantitativa e outra mais qualitativa;
- As equipes realizarão a pesquisa entre os colegas na sala de aula e/ou outros estudantes na comunidade escolar;
- Os questionamentos para cada equipe, independente do tema, serão os mesmos. Pode-se acrescentar, mas não retirar questões;
- Cada equipe deve entrevistar, no mínimo, 30 pessoas;
- Para cada questão, a equipe deverá fornecer de 4 a 6 alternativas, possibilidades de respostas.

Tema escolhido pela equipe.

Resposta

Resposta pessoal.

DESENVOLVENDO

Professor, sugerimos que medie o processo de escolha do tema para a pesquisa nas equipes. Se ocorrer de alguma equipe apresentar dificuldade em escolher, sugira um tema que poderá ser obtido a partir do cálculo das taxas, índices e/ou coeficientes.

FINALIZANDO

Os estudantes poderão fazer o tratamento dos dados e colocá-los em planilhas, tabelas ou gráficos. Sugerimos, também, uma análise qualitativa das conclusões da equipe em relação às respostas e entendimento dos entrevistados com relação ao tema.

Questionamentos para desenvolvimento da pesquisa. Para cada item, cite 4 ou 6 possíveis respostas.

a. O que você entende sobre o tema?

Resposta

Resposta pessoal.

b. Quais os motivos que podem levar ao aumento (ou à redução) da taxa (ou índice, ou coeficiente)?

Resposta

Resposta pessoal.

Taxa de mortalidade = $\frac{\text{nº de óbitos x 1000}}{\text{nº de habitantes}}$

Crescimento vegetativo = taxa de natalidade - taxa de mortalidade

Professor, para saber mais, acesse o site do IBGE: https://brasilemsintese.ibge.gov.br/populacao/taxas-brutas-de-natalidade.html

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, seguem algumas informações sobre taxas e índices

Taxa de natalidade e **taxa de mortalidade** são indicadores demográficos realizados por meio de cálculos.

Taxa de natalidade = $\frac{\text{nº de nascimentos x 1000}}{\text{nº de habitantes}}$

c. O que o aumento (ou redução) dessa taxa (ou índice, ou coeficiente) poderá ocasionar?

Resposta

Resposta pessoal.

d. Como é possível fazer um controle da taxa (ou índice, ou coeficiente)?

Resposta

Resposta pessoal.

AULAS 7 E 8 – SOCIALIZAR PARA CONHECER

Objetivos das aulas:
- Elaborar conclusões envolvendo índices, taxas e coeficientes em um determinado contexto;
- Resolver problemas que envolvam a utilização de taxas e índices diversos.

1. Nessa atividade, as equipes, organizadas nas aulas anteriores (aulas 5 e 6), farão uma apresentação das conclusões e resultados obtidos nas pesquisas realizadas.

a. Tema escolhido pela equipe

Resposta

Resposta pessoal.

b. Como você classifica e descreve a importância de se investir em pesquisas estatísticas sobre o tema?

Resposta

Resposta pessoal.

AULAS 7 E 8 – SOCIALIZAR PARA CONHECER

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Os estudantes poderão ficar próximos das equipes formadas na aula anterior com, no máximo, 4 estudantes, respeitando as regras de distanciamento.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno de Atividades do estudante;
Resultados obtidos nas aulas anteriores.

INICIANDO

Professor, este será um momento de socialização dos resultados da aula anterior (aulas 5 e 6). A proposta da atividade é, inicialmente, fazermos um levantamento sobre as dúvidas geradas com o desenvolvimento da pesquisa. Quais foram as dificuldades apresentadas desde a elaboração e discussão das questões até o tratamento dos dados, construção de gráficos e resultados?

DESENVOLVENDO

Para iniciarmos a aula, será necessário resgatar as informações e registros das aulas anteriores (aulas 5 e 6). Solicite que um representante de cada equipe socialize os resultados, as conclusões e observações dos componentes do grupo.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, sugerimos que, após os estudantes terem resolvidos as questões em seus cadernos impressos, socializem os resultados e suas dúvidas. Dessa forma, o detalhamento de sua resolução e explicação da estratégia que usou para solucionar o problema, aumenta o repertório matemático dos estudantes. Além do mais, habilidades que dizem respeito à argumentação e comunicação, por meio de conhecimentos matemáticos, estão em destaque. Além disso, valores ligados à ética e o respeito com a voz do próximo, também, são trabalhados.

c. Explique o que você entende por índices, taxas e coeficientes, considerando o tema escolhido pela equipe, na aula anterior, para a realização da pesquisa.

Resposta

Resposta pessoal.

d. Que informações você não conhecia e que achou relevantes a partir da pesquisa realizada?

Resposta

Resposta pessoal.

e. Que outro tema, que relacione a ideia/conceito de índices, taxas e coeficientes estatísticos, você gostaria de pesquisar e saber mais?

Resposta

Resposta pessoal.

ANOTAÇÕES

IMAGENS E ILUSTRAÇÕES
pixabay.com - freepik.com

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

1ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 04

1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULÇÃO DE MATERIAIS**
4	Polígonos regulares e suas características: ângulos internos, ângulos externos etc; Pavimentações no plano (usando o mesmo tipo de polígono ou não); Linguagem algébrica: fórmulas e habilidade de generalização.	(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.	**Algumas atividades dessa habilidade encontram-se no Caderno da 1ª série:** Vol. 1 na Situação de Aprendizagem 4 Ladrilhamentos com polígonos: A arte de criar padrões geométricos.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

Olá, Professor!

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam a compreensão do conceito de ângulo, medidas e classificação de ângulos em situações-problema, resolução de problemas relacionando conceito de ângulo em polígonos regulares, e também polígonos regulares e a possibilidade ou não de pavimentação do plano.

A habilidade escolhida para a Sequência de Atividades proposta nestas aulas foi: (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	IDEIAS INICIAIS SOBRE ÂNGULOS E POLÍGONOS
3ª e 4ª/ 90 min	ÂNGULOS E POLÍGONOS NO TANGRAM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
5ª e 6ª/ 90 min	GENERALIZAR PROCEDIMENTOS, ESTABELECER PADRÕES
7ª e 8ª/ 90 min	POLÍGONOS PARA PAVIMENTAÇÃO

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 4

AULAS 1 E 2 – IDEIAS INICIAIS SOBRE ÂNGULOS E POLÍGONOS

Objetivos da aula:

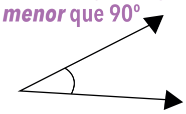
- Compreender a noção de ângulo por meio de um giro em torno de um ponto.
- Associar a noção de ângulo a sua representação geométrica.
- Identificar ângulos em polígonos.
- Diferenciar ângulos retos e não retos.
- Utilizar o conceito de ângulo na classificação de triângulos e quadriláteros de acordo com os ângulos dessas figuras.

Primeira parte – Conceitos iniciais

1. Desenhe e defina (de forma resumida) os ângulos indicados abaixo.

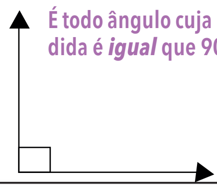
a) ângulo agudo

É todo ângulo cuja medida é ***menor*** que 90°



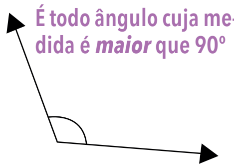
b) ângulo reto

É todo ângulo cuja medida é ***igual*** que 90°



c) ângulo obtuso

É todo ângulo cuja medida é ***maior*** que 90°



2. O que você entende por:

a. ângulos complementares:

Dois ângulos são complementares quando soma de suas medidas é igual a 90°.

b. ângulos suplementares:

Dois ângulos são suplementares quando soma de suas medidas é igual a 180°.

c. ângulos opostos pelo vértice:

São ângulos congruentes, formados pelo ponto de encontro entre duas semiretas.

AULAS 1 E 2 – IDEIAS INICIAIS SOBRE ÂNGULOS E POLÍGONOS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes com carteiras organizadas em formato de U ou em círculo.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno de Atividades do Estudante.

INICIANDO

Professor, vamos iniciar esta Sequência de Atividades fazendo um levantamento dos conhecimentos que os estudantes possuem sobre ângulo e polígonos.

DESENVOLVENDO

A proposta da Sequência de Atividades é fortalecer os conceitos que os estudantes já assimilaram sobre ângulos e polígonos e aprofundar seus repertórios de procedimentos através da resolução e reflexão de problemas propostos.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, sugerimos uma retomada dos principais tópicos abordados e esclarecimento de dúvidas que não puderam ser tiradas antes.

Vamos continuar nossa revisão?

Agora, vamos utilizar a ideia de ângulo para classificar triângulos e quadriláteros.

3. Como você já sabe, todo triângulo possui três lados e três ângulos. Com relação aos ângulos, teremos três tipos de triângulos:

a) Acutângulo b) Obtusângulo c) Retângulo

Como você diferencia cada um deles? Explique resumidamente.

Triângulo Acutângulo é aquele que possui todos os ângulos agudos, ou seja, menores que 90°.

Triângulo Obtusângulo é aquele que possui um ângulo obtuso, ou seja, maior que 90°.

Triângulo Retângulo é aquele que possui um ângulo reto, ou seja, igual a 90°

No que se refere aos quadriláteros, podem ser agrupados, com relação aos lados, da seguinte maneira:

a) Paralelogramos
(possuem dois pares de lados paralelos)
- Retângulo
- Losango
- Quadrado
- Outros

b) Trapézios
(possuem um par de lados paralelos)
- Escaleno
- Retângulo
- Isósceles

c) Trapezoides
(não possuem pares de lados paralelos)

4. Com relação aos ângulos, como você agrupa estes quadriláteros? Ou seja, como separar estes quadriláteros considerando seus ângulos internos?

Resposta:

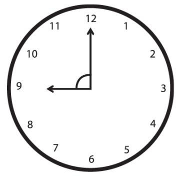
Paralelogramos:
Quatro ângulos retos: quadrado e retângulo
Dois ângulos agudos e dois obtusos: losango e outros

Trapézios:
Dois ângulos retos: retângulo
Dois ângulos agudos e dois obtusos: escaleno e isósceles

Trapezoides:
Os quatro ângulos diferentes

Segunda Parte – Resolução de Questões

5. (SARESP/2009) O relógio a seguir marca 9h:



Assinale a alternativa que mostra corretamente qual a medida do ângulo formado pelos 2 ponteiros, indicado na figura.

a. 180°   X. 90°   c. 60°   d. 45°

Resposta:

O ângulo formado pelos dois ponteiros é de 90°

6. (SARESP/2010) Lourenço estava com o seu skate posicionado para a esquerda, como mostra a figura 1, e a seguir fez uma manobra dando um giro de forma a posicionar o skate para a direita, como mostra a figura 2.

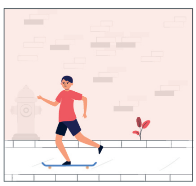


Figura 1

Figura 2

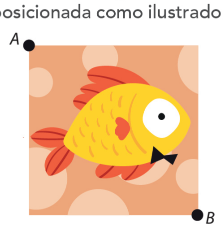
A medida de ângulo que pode ser associada ao giro dessa manobra é

a. 45°.   b. 90°.   X. 180°.   d. 360°.

Resposta:

A manobra executada por Lourenço faz o sentido. Para isso, foi necessário um giro de 180°

7. (ENEM 2017 - adaptada) A imagem apresentada a seguir é uma representação da tela quadrada intitulada O peixe, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B. Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.



1ª série

Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°. A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de

a. 90º no sentido horário.

X. 135º no sentido horário.

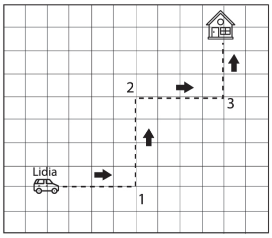
c. 180º no sentido anti-horário.

d. 270º no sentido anti-horário.

e. 315º no sentido horário.

Resposta:
Observando a figura, para retornar a posição original, girando-a no sentido horário o ângulo será de: 45º +90º = 135º.

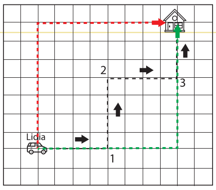
8. (SEDUC-GO - adaptada). Para chegar a sua casa Lídia tem que seguir o trajeto representado na malha a seguir passando pelas esquinas 1, 2 e 3. Para fazer isso, você pode acionar 3 comandos: **avançar** (indicando o número de lados do quadradinho), **virar à direita** e **virar à esquerda**.



Indique a sequência de comandos que Lídia precisará fazer para chegar em sua casa.

Resposta:
Avançar 4, virar à esquerda, avançar 4, virar à direita, avançar 4 virar à esquerda e avançar 3.

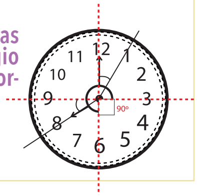
Se, Lídia não precisasse passar, obrigatoriamente, pelas esquinas 1, 2 e 3, teria outro trajeto mais curto? Indique outro caminho (mesmo que não seja o curto) para ela chegar a sua casa. (Todos os trajetos devem passar por lados dos quadradinhos, nunca pela diagonal.)

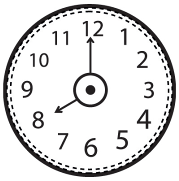


Resposta:
Como não é possível passar por diagonais dos quadradinhos, os trajetos mais curtos utilizam a mesma quantidade de "passos" do caminho de Lídia, passando pelas esquinas 1, 2 e 3.
No aminho vermelho, avançar 7, virar à direita e avançar 8.
No caminho verde, avançar 8, virar à esquerda e avançar 7

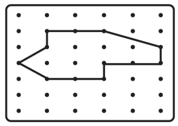
9. (Prova Brasil - adaptada). Qual a medida dos dois ângulos formados pelos ponteiros de um relógio às 8 horas?

Resposta:
120º e 240º
Os ângulos são formados pela abertura ente os ponteiros das horas (menor) dos minutos (maior). Se dividirmos o relógio em 4 partes, teremos 4 ângulos de 90º. Então, cada 5min corresponde a um ângulo de 30º (30º x 12 = 360º).
Assim, o ângulo menor corresponde a 90º + 30º = 120º e o ângulo maior corresponde a 90º + 90º + 60º = 240º
Logo, os ângulos são 120º e 240º.



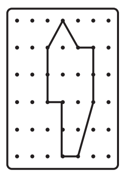


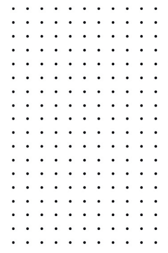
10. (SAEGO - adaptada). Observe a figura abaixo:



Desenhe na malha pontilhada abaixo a figura acima, após realizarmos um giro de 90º no sentido horário.

Resposta:





AULAS 3 E 4 – ÂNGULOS E POLÍGONOS NO TANGRAM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

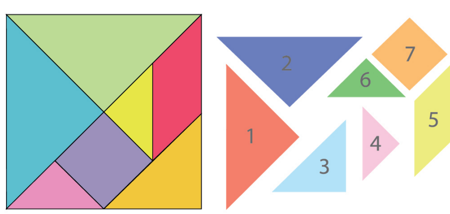
Objetivos da aula:

- Identificar o conceito de ângulo em situações-problema.
- Utilizar medidas e classificação de ângulos em situações-problema.
- Relacionar ângulos e suas medidas em triângulos e quadriláteros.

1. Vamos iniciar esta Sequência de Atividades de forma mais interativa, através de um quebra cabeça muito conhecido, formado por triângulos e quadriláteros.

Você já ouviu falar no Tangram?

O Tangram é um antigo jogo de quebra cabeças chinês, que consiste na formação de figuras e desenhos por meio de 7 peças.



AULAS 3 E 4 –ÂNGULOS E POLÍGONOS NO TANGRAM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante.

Tangram confeccionado em emborrachado ou em papel.

INICIANDO

Vamos iniciar esta Sequência de Atividades com um quebra-cabeças chinês bem conhecido: o Tangram, dando prosseguimento com as ideias iniciais sobre ângulos, triângulos e quadriláteros.

DESENVOLVENDO

A proposta de trazer o Tangram para a sala de aula é fazer com que o estudante possa manusear e compreender melhor os conceitos trabalhados. A composição e a transformação das figuras ajudam a entender as possibilidades dos encaixes entre triângulos e quadriláteros, considerando a medida de seus lados e ângulos. De um modo geral, as atividades de formação de figuras com o Tangram utilizam todas a sete peças. Entretanto, algumas pessoas desistem quando não conseguem chegar ao objetivo, que é formar a figura escolhida, com as sete peças. Nossa proposta é começar com apenas duas peças e aumentar a dificuldade gradativamente. Solicitamos a formação de quadrados e triângulos com até cinco peças. Com seis peças, não é possível. Com as sete, já está formado na atividade. Num segundo momento, propomos a resolução de algumas questões para o estudante testar os conhecimentos revisados e aprimorados nas aulas anteriores.

FINALIZANDO

Como sugestão, se ainda restarem alguns minutos da aula, retome as atividades com o Tangram. Solicite que o estudante forme com as sete peças um triângulo, em seguida um retângulo não-quadrado, depois um paralelogramo e por último um trapézio. Discuta com os estudantes como eles interpretam a possibilidade desses composições.

As regras desse jogo consistem em usar as sete peças em qualquer montagem colocando-as lado a lado sem sobreposição, com as quais é possível criar e montar cerca de 1700 figuras, como animais, pessoas, objetos, letras, números, figuras geométricas entre outros.

1. Vamos conhecer melhor as peças do Tangram?

O Tangram é formado por 5 triângulos (2 grandes, 1 médio e 2 pequenos), 1 quadrado e 1 paralelogramo.

Quais as medidas dos ângulos internos de cada peça?

a) Triângulo grande: **90°, 45° e 45°.**

b) Triângulo médio: **90°, 45° e 45°.**

c) Triângulo pequeno **90°, 45° e 45°.**

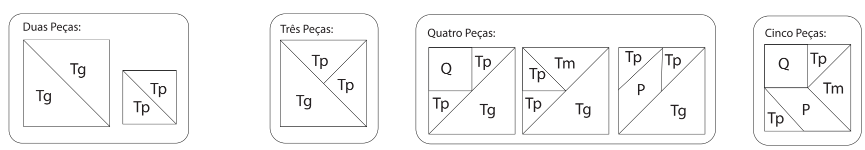
d) Quadrado: **90°, 90°, 90° e 90°.**

e) Paralelogramo: **45°, 45°, 135° e 135°.**

2. **Forme quadrados utilizando:**

a) 2 peças b) 3 peças c) 4 peças d) 5 peças

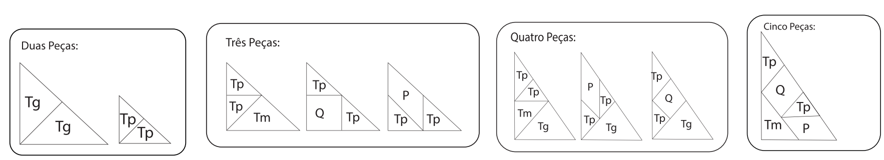
Resposta:



3. **Forme triângulos utilizando:**

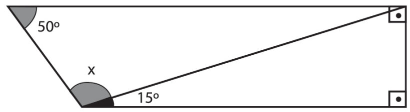
a) 2 peças b) 3 peças c) 4 peças d) 5 peças

Resposta:



Agora, vamos resolver algumas questões.

4. (SARESP/2009) Pode-se calcular a medida do ângulo indicado por x na figura sem necessidade de uso do transferidor. Sua medida é igual a



X 115°.   c. 125°.
b. 125°.   d. 135°.

Resposta: A figura é um quadrilátero. Logo, a soma das medidas dos ângulos internos é 360°. Assim, podemos obter a medida x, somando seus ângulos internos
$90° + 90° + 50° + 15° + x = 360°$
$245° + x = 360°$
$x = 360° - 245°$
$x = 115°$

5. (Concurso público – Eletrobrás – adaptada). Considere o polígono ao lado.

Analise as seguintes afirmativas sobre esse polígono:

I – possui 11 lados;

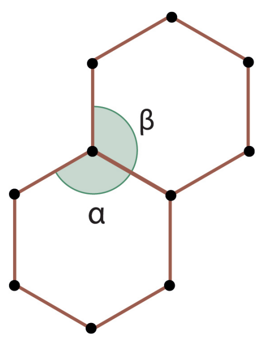
II – possui 11 ângulos internos;

III – possui 5 ângulos internos obtusos (maiores que 90º).

São verdadeira(s) somente:

a. I.   b. III.   c. I e II.   X I, II e III.

6. (SPAECE - adaptada). A figura ao lado é composta por dois hexágonos regulares. Veja o desenho. Determine a soma das medidas dos ângulos α e β é



Resposta:

Considerando que cada ângulo interno de um hexágono regular mede 120°, a medida de $\alpha + \beta$ será 240°.

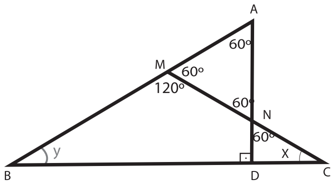
7. (Saresp – adaptada). Sabendo que, na figura abaixo, o triângulo AMN é equilátero, determine a medidas de x + y.

Resposta:
Sabendo que o triângulo AMN é equilátero, temos que cada ângulos internos do triângulo mede 60º. No triângulo DNC, temos, os ângulos 60º(oposto pelo vértice) e 90º (suplementar ao de 90º externo). Como a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180º, a medida de x será igual a 30º .

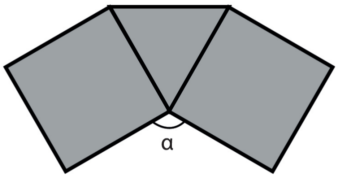
No triângulo ABD, temos os ângulos, de 60º e 90º logo, a medida de y será 30º, o que falta para 180º.

Assim, temos que x = y = 30º.

x + y = 60º



8. (GAVE – adaptada). Com dois quadrados e um triângulo equilátero, formamos a figura ao lado. Determine o valor da medida do ângulo α.



Resposta:

Somando os ângulos dos quadrados e do triangulo, temos: $90 + 90 + 60 = 240º$

$\alpha = 360 - 240$

$\alpha = 120º$

AULAS 5 E 6 – GENERALIZAR PROCEDIMENTOS, ESTABELECER PADRÕES

Objetivos da aula:
- Determinar a soma das medidas de ângulos internos de polígonos, tendo em vista que a soma dos ângulos internos de qualquer triangulo é 180º.
- Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares.
- Investigar a soma das medidas dos ângulos externos de polígonos.
- Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas.
- Estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas a ladrilhamento.

Nesta Sequência de Atividades, vamos aprofundar nossas revisões sobre ângulos, vivenciadas nas aulas anteriores, para o estudo dos polígonos e poliedros.

Primeira parte - Vamos iniciar nossas atividades, revendo alguns conceitos básico.

1. O que você entende por polígono?

Resposta: Polígonos são figuras planas, fechadas, formadas por segmentos de reta e ângulos.

AULAS 5 E 6 – GENERALIZAR PROCEDIMENTOS, ESTABELECER PADRÕES

ORGANIZAÇÃO DA TURMA
Estudantes organizados em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS
Caderno de Atividades do Estudante.

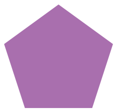
INICIANDO
Nesta Sequência, trabalharemos as deduções de algumas fórmulas e procedimentos que auxiliarão o estudante na compreensão dos conceitos e resolução das situações

2. O que você entende por polígonos regulares? Exemplifique sua resposta.

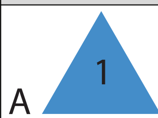
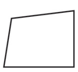
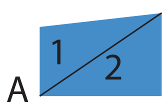
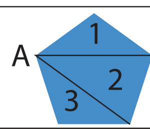
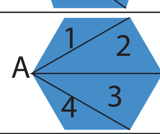
Resposta:

São polígonos que possuem lados com a mesma medida, ângulos internos com a mesma medida e ângulos externos com a mesma medida.

Ex.: Pentágono regular



3. Complete a tabela abaixo:

Polígono	Quantidade de lados	Quantidade de triângulos	Soma dos ângulos internos
Triângulo 	3		1 . 180º = 180º
Quadrilátero 	4		2 . 180º = 360º
Pentágono 	5		3 . 180º = 540º
Hexágono 	6		4 . 180º = 720º
Polígono de n-lados	n	n - 2	(n - 2) . 180º = Si

1ª série

e problemas propostos.

DESENVOLVENDO

As três primeiras questões desta Sequência têm o objetivo de revisar conceitos e ideias intuitivas que serão trabalhadas. Na atividade 4, propomos a dedução da fórmula da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono (Si); sugerimos, como ideia intuitiva, a observação da quantidade de triângulos que podem ser obtidos fixando um vértice do polígono em questão. Em seguida, relacione a quantidade de lados do polígono (n) com a quantidade de triângulos formados. Considerando que cada triângulo possui a soma dos ângulos internos igual a 180º, deduzimos a fórmula para a soma dos ângulos internos de qualquer polígono. Chame a atenção que esta relação não é restrita a polígonos regulares. As atividades a seguir complementam a atividade 4, ampliando as conclusões relacionadas à soma das medidas dos ângulos internos de um polígono. Outro objetivo das atividades é levar o estudante a novas conclusões relacionadas aos ângulos internos e externos. Chamamos a atenção que, para encontrar um ângulo interno ou externo, através da fórmula, o polígono precisa ser regular. No entanto, a soma dos ângulos internos e a soma dos externos não é restrita a polígonos regulares. É interessante demonstrar porque a soma dos ângulos externos de qualquer polígono (regular ou não) é igual a 360º.

FINALIZANDO

Professor, sugerimos uma breve revisão sobre divisão de ângulos. Visto que em algumas questões, a medida do ângulo será dada fracionada, ou seja, expressa em graus e minutos.

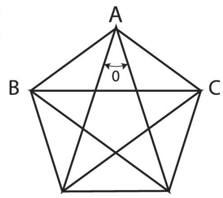
1ª série

4. Complete a tabela com informações sobre alguns polígonos regulares.

Polígono regular	Número de lados	Soma das medidas dos ângulos internos	Medida de cada ângulo interno	Soma das medidas dos ângulos externos	Medida de cada ângulo externo
Triângulo equilátero	3	180º	60º	360º	120º
Quadrado	4	360º	90º	360º	90º
Pentágono	5	540º	108º	360º	72º
Hexágono	6	720º	120º	360º	60º
Heptágono	7	900º	128º34′	360º	51º26′
Octógono	8	1080º	135º	360º	45º
Eneágono	9	1260º	140º	360º	40º
Decágono	10	1440	144º	360º	36º
Undecágono	11	1620º	147º16′	360º	32º44′
Dodecágono	12	18000	150º	360º	30º
Polígono de n-lados	n	(n – 2) . 180	$\frac{(n-2) . 180}{n}$	360º	$\frac{360}{n}$

Segunda parte – Resolução de questões do SARESP

5. (SARESP 2010) O pentagrama (estrela de cinco pontas) foi obtido unindo-se os vértices de um pentágono regular. A medida do ângulo θ destacado na figura é



a. 30º.

c. 40º.

X b. 36º.

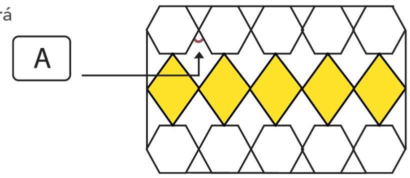
d. 45º.

Resposta:

O ângulo BÂC interno ao pentágono regular é igual a 108º.
Para acharmos a medida do ângulo θ, basta dividirmos 108 por 3.
Teremos como resposta 36º.

6. (SARESP 2009) Para ladrilhar o piso de uma sala, como indicado abaixo, um decorador de interiores precisa mandar fazer os ladrilhos que estão em branco na figura.

Sabendo que os hexágonos são regulares, ele poderá informar que o ângulo Â indicado mede



X a. 60°. c. 70°.

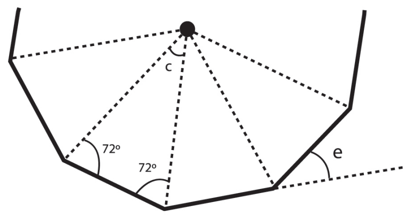
b. 65°. d. 80°.

Resposta:

Na figura, temos dois ângulos internos de um hexágono regular que mede 120° cada. Então já temos 240°. Para encontrarmos o Â, basta calcular quanto falta para 360° e dividirmos o resultado por 2. Ou seja, 360 – 240 = 120 120 / 2 = 60.

7. (SARESP 2009) Ao lado está representada uma parte de um polígono regular, como o valor de um de seus ângulos notáveis.

Apenas com essa informação é possível concluir que o polígono é um



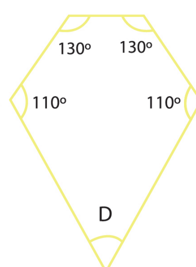
a. octógono (8 lados). b. eneágono (9 lados).

X c. decágono (10 lados). e. dodecágono (12 lados).

Resposta:

Como o polígono é regular, todos os triângulos são congruentes. Logo, a medida de cada vértice será 144°. Como já vimos anteriormente, o polígono o qual o ângulo interno mede 144° é o decágono.

8. (SARESP 2011) No polígono apresentado na figura, o ângulo D mede



a) 90°. b) 80°. c) 70°. X d) 60°.

Resposta: A figura possui 5 lados, logo é um pentágono. A soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono é igual a 540°.

Somando as medidas dos ângulos temos:

130 + 130 + 110° + 110° + D = 540°

480° + D = 540° D = 540° – 480° = 60°

AULAS 7 E 8 – POLÍGONOS PARA PAVIMENTAÇÃO

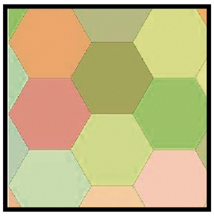
Objetivos da aula:

- Reconhecer a relação entre as medidas de ângulos internos de polígonos regulares e a possibilidade ou não de pavimentação do plano (*ladrilhamentos*).
- Analisar e utilizar padrões, através de formas geométricas, na resolução de problemas

Nesta aula, vamos estudar atividades envolvendo pavimentação de polígonos, *ladrilhamento* de figuras planas. *Ladrilhar* (ou pavimentar o plano) significa preencher o plano, com padrões, sem deixar espaços vazios.

Vamos iniciar nossas atividades com a pavimentação de polígonos regulares. Ao optarmos por utilizar apenas um polígono por pavimentação, só teremos três polígonos regulares possíveis: triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos, como mostram as pavimentações abaixo.





1. Na sua opinião, por que a pavimentação, utilizando um único tipo de polígono regular, só é possível se for um desses três?

Resposta:
Porque apenas estes três possuem ângulos internos divisíveis por 360º. Ou seja,

Triângulo: $\frac{360^o}{60^o} = 6$ **quadrado:** $\frac{360^o}{90^o} = 4$ **hexágono:** $\frac{360^o}{120^o} = 3$

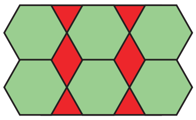
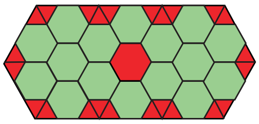
Observe que estes valores correspondem a quantidade de polígonos que incidem em um mesmo vértice.

Agora é sua vez de construir uma pavimentação.

2. Construa uma pavimentação utilizando:

a. triângulos e hexágonos (utilizes apenas canetas coloridas e réguas).

Resposta: **Veja algumas possíveis respostas**

AULAS 7 E 8 – POLÍGONOS PARA PAVIMENTAÇÃO

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

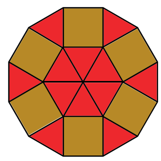
Estudantes organizados em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno de Atividades do Estudante.
Canetas coloridas.
Réguas graduadas.

b. triângulos e quadrados (utilizes apenas canetas coloridas e réguas).

Resposta: **Veja uma possível resposta**

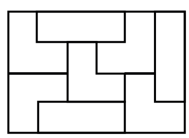


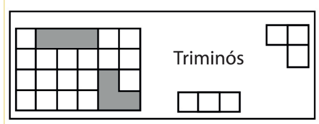
Agora vamos resolver algumas questões.

3. (OBMEP - Banco de Questões 2020) Triminós são peças formadas por três quadradinhos, como indica a figura abaixo. Dois desses triminós foram colocados dentro de um tabuleiro 4×6.

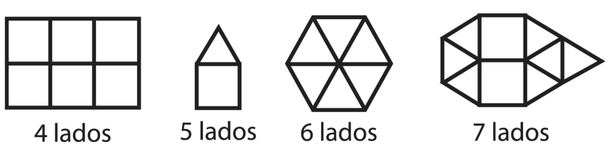
Qual o número máximo de triminós que podem ser colocados dentro do tabuleiro de modo a cobrir sem sobreposição as casinhas restantes?

Resposta:
É possível cobrir o tabuleiro por completo com 8 triminós, como indica a figura a seguir.





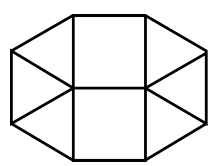
4. (OBMEP - Banco de Questões 2012) Um polígono convexo é elegante quando ele pode ser decomposto em triângulos equiláteros, quadrados ou ambos, todos com lados de mesmo comprimento. Abaixo, mostramos alguns polígonos elegantes, indicando para cada um deles uma decomposição e o número de lados.



a. Desenhe um polígono elegante de 8 lados, indicando uma decomposição.

Resposta:

Uma possibilidade de construção seria, a partir da figura 4, composta por 2 quadrados e 7 triângulos, removermos o triângulo da extremidade do lado direito.



INICIANDO

Iniciamos esta Sequência de Atividades com uma conversa sobre o que significa ladrilhar, pavimentar. Como sugestão, faça uma abordagem sobre outras pavimentações, que não utilizem polígonos, para o estudante se familiarizar com a ideia.

DESENVOLVENDO

Dividimos a Sequência de Atividades em duas partes. Na primeira, o estudante irá, a partir de conclusões e observações de padrões, citados no início da aula, construir padrões de pavimentação para fixar a compreensão das ideias. Na segunda parte, o estudante resolverá questões, envolvendo a ideia de ladrilhar superfícies ou construir padrões.

FINALIZANDO

Ao final da Sequência de Atividades, explore mais a ideia de construir padrões e faça uma exposição com a produção dos estudantes.

b. Quais são as possíveis medidas dos ângulos internos de um polígono elegante?

Resposta:
Como um polígono elegante é convexo e é formado colocando lado a lado quadrados e triângulos equiláteros, seus ângulos são somas de parcelas iguais a 60° ou 90° que não ultrapassm 180°. Os valores possíveis são então:

60°, 90°, 120° = 60° + 60° e 150° = 60° + 90°

c. Mostre que um polígono elegante não pode ter mais que 12 lados.

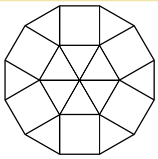
Resposta:
Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono com n lados é $(n - 2) \times 180°$

Por outro lado, vimos no item b) que o maior valor possível do ângulo interno de um polígono elegante é 150°; logo, a soma dos ângulos internos de um polígono elegante de n lados é no máximo $n \times 150°$

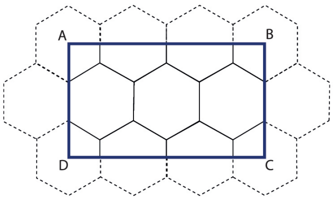
Temos então $180(n - 2) \leq 150n$, e segue que $30n \leq 360$, ou seja, $n \leq 12$.

d. Desenhe um polígono elegante de 12 lados.

Resposta:
Sabendo que todo polígono elegante pode ser construdo apenas por triângulos e quadrados com lados de mesma medida, a figura ao lado é uma possibilidade de resposta.



5. (SARESP 2008/2009) O retângulo ABCD da figura ao lado foi obtido a partir de um mosaico de hexágonos regulares, de modo que os pontos A, B, C e D correspondem aos centros dos hexágonos em cujo interior se encontram. Assim, admitindo que o retângulo seja pavimentado com partes de hexágonos recortados, sem perdas, o menor número de hexágonos que possibilita essa pavimentação é



a) 4. X b) 6. c) 8. d)10.

Na figura, temos:

3 hexágonos inteiros = 3

4 partes que correspondem a $\frac{1}{2}$ do hexágono cada = 2 hexágonos

4 partes que correspondem a $\frac{1}{4}$ do hexágono cada = 1 hexágono

Logo, o menor número de hexágonos para pavimentar o retângulo, sem perdas é 6 hexágonos.

2ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 01

2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAIS**
1	Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas); Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características	(EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos. (EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 6º ano:** Vol. 4, na Situação de Aprendizagem 5, Atividade 1: Pirâmides e Prismas; Atividade 2: Prismas e Pirâmides: Planificações; Atividade 3: Explorações sobre Prismas e Pirâmides.

OLÁ, PROFESSOR! OLÁ, PROFESSORA!

Olá, Professor! Nesta Sequência de Atividades, falamos diretamente com você, que está aí, na sala de aula, no convívio direto com os estudantes, os quais terão oportunidade, neste momento, de se envolver com atividades que possibilitam a retomada de conceitos, propriedades e procedimentos essenciais para o desenvolvimento de seus conhecimentos e capacidades em matemática.

A Sequência de Atividades deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração. Além disso, as socializações das atividades, por parte dos estudantes, são percebidas aqui como oportunidades de desenvolvimento de habilidades e competências que dizem respeito à cooperação, à empatia, à argumentação, à comunicação, entre outras.

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam reconhecimento, representações, planificações e características de figuras geométricas espaciais em geral e, em particular, planificações e relações entre os elementos (vértices, faces e arestas) de prismas e pirâmides.

As escolhas das habilidades foram feitas por meio das análises dos resultados de avaliações internas e externas (diagnóstico de entrada e SARESP), que revelaram fragilidades dos estudantes com relação às habilidades: (EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos; e (EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.

Aula / Tempo	Atividade
1ª e 2ª/ 90 min	Observação de formas geométricas espaciais
3ª e 4ª/ 90 min	Da planificação à forma tridimensional
5ª e 6ª/ 90 min	Um passeio pela escola
7ª e 8ª/ 90 min	Retomando o que aprendemos

Sabemos que as atividades por si só não ensinam. Por isso, professor, sua atuação é tão importante em cada uma das situações propostas aqui, cujo objetivo é recuperar as aprendizagens e desenvolver as habilidades esperadas. Para isso, este caderno deverá servir como mais uma ferramenta que o auxiliará no processo de ensino, sendo necessário, portanto, que você considere, em seu replanejamento, outras possibilidades de discussão e recursos, para além daqueles sugeridos nesta Sequência de Atividades. Para ajudá-lo nessa ação, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenal acerca das Sequências de Atividades, nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPCs). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

AULAS 1 E 2 – OBSERVAÇÃO DE FORMAS GEOMÉTRICAS ESPACIAIS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes com carteiras organizadas em formato de U ou de círculo.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Para o estudante: **Caderno do Estudante** impresso e canetinhas para colorir.

Para o professor: embalagens e objetos em formatos de prismas, pirâmides, cones e cilindros; cartolinas, papel *kraft* ou papel madeira; pincel atômico.

INICIANDO

Professor, para as aulas 1 e 2 desta Sequência de Atividades, é necessário que você disponibilize embalagens e objetos em formatos de pirâmides, primas, cones e cilindros. Como exemplos, sugerimos: caixa de sapato, embalagens de presente, chapéu de aniversário, recipientes diversos, entre outros. Se considerar mais conveniente, você poderá produzir as embalagens para usar nas aulas. Com as carteiras organizadas em formato de U ou de círculo, pode começar com uma conversa informando que, nas próximas aulas, serão estudadas figuras geométricas espaciais, com o destaque de que as atividades iniciais requerem observação de algumas figuras e anotação das principais características percebidas. Oriente-os quanto à importância do estudo das formas para o desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à noção espacial, bem como para o seu recorrente uso em diversas profissões, sobretudo àquelas ligadas à produção de peças diversas, móveis projetados, entre outras. Após essa introdução, os estudantes poderão receber o **Caderno do Estudante** impresso e realizar a leitura coletiva das atividades.

DESENVOLVENDO

Para começar, as embalagens e os objetos poderão ser expostos em uma mesa ao centro da sala, com a orientação de que os estudantes tenham alguns minutos (a combinar) para observarem as peças e registrarem, no espaço indicado na Atividade

2ª série

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

AULAS 1 E 2 - OBSERVAÇÃO DE FORMAS GEOMÉTRICAS ESPACIAIS

Objetivos da aula:
- Reconhecer prismas e pirâmides e diferenciá-los por meio de seus atributos;
- Reconhecer faces, vértices e arestas em prismas e pirâmides;
- Analisar diferentes planificações de pirâmide, prisma, cone e cilindro.

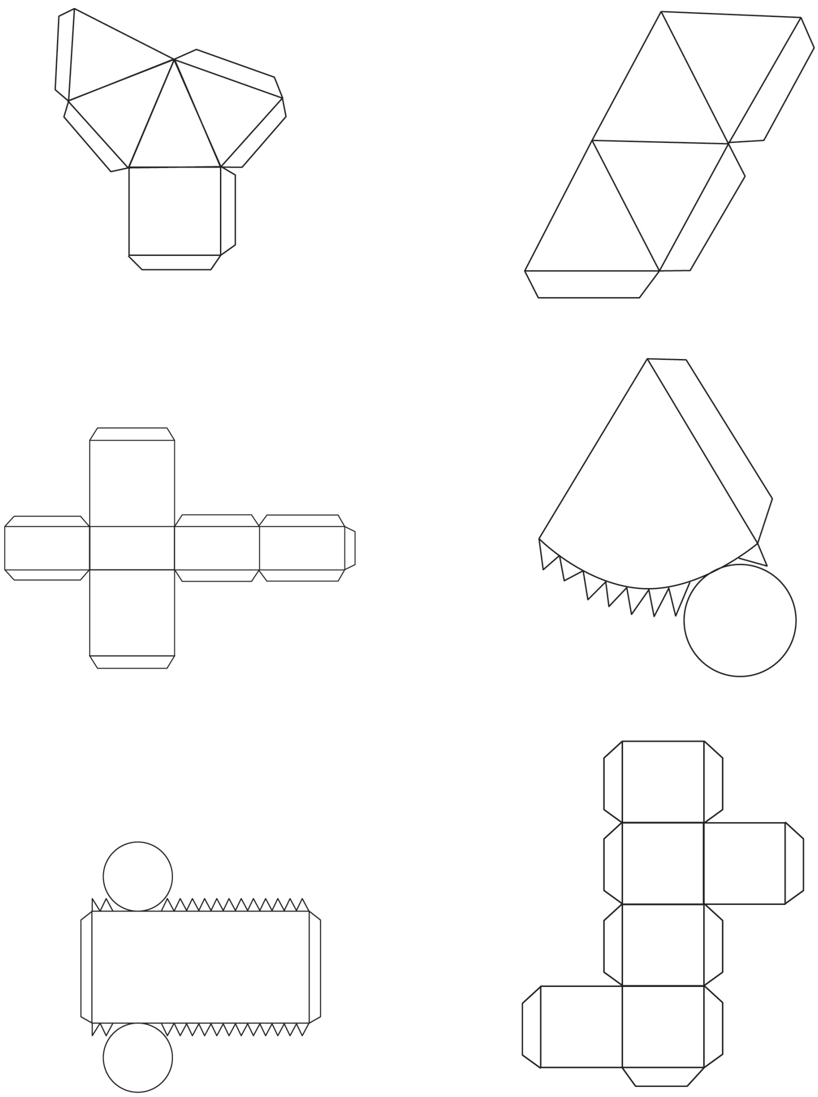
1. Após observar atentamente os objetos que o professor disponibilizou, responda: quais as principais características que você percebeu em relação ao formato de cada um?

Professor, a resposta é pessoal, mas oriente que os estudantes devem: observar e registrar informações sobre os objetos tratarem-se de formas espaciais, formados por figuras planas; identificar quais são as figuras planas que formam as faces dos objetos; informar se possuem partes arredondadas ou se são formados apenas por segmentos de retas. É importante, também, que falem sobre a quantidade e o formato das faces, e a quantidade de arestas e vértices.

2. Retome os registros feitos na atividade 1. Atente-se para as discussões orientadas pelo professor e produza um breve comentário a respeito das características e da quantidade de faces, vértices e arestas dos prismas, das pirâmides, dos cones e dos cilindros observados.

Prismas:	**Professor, a resposta é pessoal, mas dentre as principais características dos prismas, é importante que os estudantes percebam que são figuras espaciais e que são formados somente por segmentos de retas; que têm duas bases em forma de polígonos e que suas faces laterais são paralelogramos; e que a quantidade de faces, vértices e arestas depende da quantidade de lados da base.**
Pirâmides:	**Professor, a resposta é pessoal, mas dentre as principais características das pirâmides, é importante que os estudantes percebam que são figuras espaciais e que são formadas somente por segmentos de retas; que há apenas uma base com a forma de polígono; e que as suas faces laterais são triangulares. Cabe destacar o fato de que a quantidade de faces, vértices e arestas depende da quantidade de lados da base.**
Cones:	**Professor, a resposta é pessoal, mas dentre as principais características dos cones, é importante que os estudantes percebam que são figuras espaciais e que têm uma face não plana e uma base em forma de círculo; que são corpos redondos e que não possuem arestas.**
Cilindros:	**Professor, a resposta é pessoal, mas dentre as principais características dos cilindros, é importante que os estudantes percebam que são figuras espaciais que têm uma face não plana e duas bases em forma de círculo; que são corpos redondos e que não possuem vértices, nem arestas.**

3. A seguir, estão algumas planificações de formas geométricas espaciais. Observe, com atenção, cada uma e informe a que figura espacial se refere. Use a criatividade para colorir todas elas.



1 do **Caderno do Estudante**, as características que considerarem importantes quanto ao formato de cada uma. Passados dois ou três minutos, sugerimos que mude a posição de todas as peças, para permitir a percepção das diferentes faces. Lembre-se de obter cartolina, papel *kraft* ou papel madeira e pincel atômico. Ao final do tempo total combinado, será o momento de os estudantes socializarem as anotações feitas a partir da observação das embalagens e dos objetos. Para registrar tais observações, sugerimos que as anotações sejam realizadas em cartolinas, papel *kraft* ou papel madeira, produzindo-se um cartaz, que poderá ficar fixado na sala de aula.

Além das anotações, você poderá convidar algum estudante para desenhar no cartaz as representações das figuras que observaram na aula. Indicamos que faça questionamentos à turma sobre o conhecimento de outros objetos com formas parecidas a essas. Os estudantes poderão associá-las a itens do dia a dia, como geladeira, televisão e outros. Cabe aqui uma discussão sobre as semelhanças e diferenças entre tais formatos, com posterior sistematização das ideias apresentadas, associando-as com o fato de as embalagens e os objetos observados terem o formato de prismas, pirâmides, cones e cilindros. Aproveite a oportunidade para comentar que são exemplos de formas geométricas espaciais que serão estudadas nas próximas aulas e, por essa razão, o cartaz permanecerá disponível na sala para que possam consultá-lo, quando julgarem necessário. Nessa ocasião, reflita sobre faces, vértices e arestas, incentivando os estudantes a observarem, com atenção, tais elementos em cada forma estudada. Se julgar conveniente, acrescente ao cartaz as novas informações, contendo detalhes sobre a quantidade de faces, vértices e arestas de cada uma. Esses registros contribuirão para as respostas das atividades e, portanto, eles já poderão respondê-las. Para orientações quanto à Atividade 3, sugerimos que converse sobre planificações, associando-as às características já percebidas. Os estudantes deverão, após a observação, informar a que figura espacial se refere cada planificação. Por fim, recomende que usem a criatividade para colorir as planificações e lembre a todos que deverão trazê-las para a próxima aula.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, a retomada da síntese que está no cartaz é uma boa opção. Incentive a participação dos estudantes, de modo que possíveis dúvidas sejam esclarecidas, com a recomendação de que verifiquem suas respostas das atividades e informem se há alguma característica que eventualmente não tenha sido contemplada no cartaz. Caso isso tenha ocorrido, permita que acrescentem.

AULAS 3 E 4 – DA PLANIFICAÇÃO À FORMA TRIDIMENSIONAL

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso, planificações (**ANEXO 1**), canetinhas para colorir, cola e tesoura sem ponta.

INICIANDO

Para continuar o estudo sobre as formas geométricas espaciais, sugerimos que retome brevemente, com a turma, o que foi discutido na aula passada. Professor, relembre as planificações a que tiveram acesso na aula anterior e discuta sobre o uso delas para a montagem das figuras tridimensionais. Na busca por despertar o interesse dos estudantes de forma ativa, sugerimos que desenvolva uma conversa associando as formas geométricas apresentadas a objetos que fazem parte do dia a dia, como móveis, eletrodomésticos, eletrônicos ou outros

DESENVOLVENDO

Com os estudantes organizados em duplas produtivas, oriente o uso de tesoura sem ponta e cola para a montagem das formas tridimensionais a partir das planificações que estão no **ANEXO 1**. Essa prática corresponde à Atividade 1, prevista para as aulas

2ª série

AULAS 3 E 4 - DA PLANIFICAÇÃO À FORMA TRIDIMENSIONAL

Objetivos da aula:
- Identificar características e propriedades de formas geométricas espaciais, como prismas e pirâmides, e relacionar cada uma delas a suas planificações;
- Descrever características e propriedades de formas geométricas espaciais, como prismas e pirâmides, e relacionar cada uma delas a suas planificações.

1. Seja criativo ao colorir e use, cuidadosamente, tesoura sem ponta e cola para montar as formas tridimensionais que aparecem no **ANEXO 1** deste **Caderno**. Observe as planificações com atenção.

2. Até aqui, você estudou sobre prismas, pirâmides, cones e cilindros. Para sintetizar os conhecimentos, produza um poema, uma poesia, uma canção, uma paródia, um cordel ou uma história em quadrinhos, abordando características dessas formas espaciais. Socialize sua produção textual, recitando-a para a turma. Lembre-se de incluir um título criativo para o seu texto.

TÍTULO

Poema ...
Poesia ...
Canção ...
Paródia ...
Cordel ...
História em quadrinhos ...

ANOTAÇÕES

3 e 4 do **Caderno do Estudante**. Com as figuras espaciais em mãos, é possível realizar uma boa discussão de retomada e enriquecimento dos conceitos tratados nas aulas 1 e 2. Será um momento pertinente para identificar as propriedades de prismas e pirâmides, associando-as às suas planificações. Os estudantes terão a oportunidade de argumentar sobre suas ideias, percepções e conhecimentos acerca do assunto. Se achar interessante, permita que colem algumas das representações tridimensionais no cartaz já produzido. A Atividade 2 diz respeito a uma produção que os estudantes serão encaminhados a realizar. A proposta consiste em utilizarem os conhecimentos sobre as formas espaciais estudadas até agora para elaborarem uma produção textual, com o propósito de sistematização do que foi discutido. Sugerimos, já no enunciado, que sejam indicados alguns gêneros para que as duplas escolham a sua opção e produzam o seu texto. Nesse sentido, apontamos que as produções poderão ser nos seguintes gêneros: cordel, poema, poesia, história em quadrinho, paródia ou canção. Disponibilize tempo para que as duplas elaborem o seu texto, abordando os temas estudados até aqui. Ao final dessa prática, os estudantes deverão estar familiarizados com as principais características das formas espaciais estudadas no decorrer desta Sequência.

FINALIZANDO

A finalização poderá ser feita com a socialização das produções textuais dos estudantes em sala de aula. Consideramos que essa etapa tem um papel importante no processo de aprendizagem, pois permitirá que os estudantes sintetizem os conhecimentos na forma de textos. Se possível, pode-se promover um evento de socialização das produções para toda a escola. Um sarau, por exemplo, pode incentivar os estudantes a se envolverem ainda mais com a Matemática. Contribuições dos professores de Artes, Língua Portuguesa, Língua Inglesa ou Espanhola, poderão tornar o evento significativamente mais rico, de modo a envolver outros atores da comunidade escolar.

ANOTAÇÕES

AULAS 5 E 6 - UM PASSEIO PELA ESCOLA

Objetivos da aula:
- Diferenciar figuras planas e formas espaciais;
- Diferenciar poliedros e corpos redondos;
- Diferenciar prismas e pirâmides;
- Comparar sólidos geométricos;
- Identificar figuras planas em sólidos geométricos.

Para a realização dessa atividade, o professor irá proporcionar um momento de passeio da turma pela escola. Será uma visita em que vocês circularão pelos diferentes ambientes do local, observando atentamente os objetos contidos em cada lugar. À medida em que a observação for acontecendo, cada estudante deverá deixar registrado, por meio de fotografias ou através de desenhos, os objetos com formatos de sólidos geométricos conhecidos.

1. Ao retornar para a sala de aula após o passeio pela escola, organize-se com sua dupla para compartilhar seus registros fotográficos ou de desenho. Vocês deverão trocar, entre si, os registros que fizeram no decorrer da visita, para analisarem cada objeto e identificarem a que sólido geométrico se refere. Após essa etapa, anotem aqui as principais características de cada um.

Objeto 1:	***A que forma corresponde:***
Principais características: RESPOSTA PESSOAL.	

Objeto 2:	***A que forma corresponde:***
Principais características: RESPOSTA PESSOAL.	

Objeto 3:	***A que forma corresponde:***
Principais características: RESPOSTA PESSOAL.	

AULAS 5 E 6 – UM PASSEIO PELA ESCOLA

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

A apresentação da proposta poderá acontecer com a leitura coletiva do **Caderno do Estudante**. Nesse momento, ressalte que a visita à escola e os registros serão feitos de maneira individual e com as devidas atenções de segurança e cuidados com a higiene. Cabe deixar claro que será uma visita de observação, em que cada estudante irá identificar, entre móveis, eletrodomésticos, eletrônicos e outros possíveis equipamentos da escola, objetos com formato de sólidos geométricos conhecidos e registrá-los com foto ou desenho.

DESENVOLVENDO

Para o passeio pela escola, a orientação é de que os estudantes observem com atenção cada ambiente e registrem, individualmente, com fotografias ou desenhos, os objetos que têm a forma de sólidos geométricos conhecidos. Ao retornarem para a sala, as duplas irão compartilhar suas fotos ou desenhos, para que cada componente se atente para os objetos percebidos pelo colega, verifique qual forma representa cada um e perceba suas principais

2ª série

características. Essas ações estão orientadas na Atividade 1 do **Caderno do Estudante**, que também solicita sobre características como: formato de cada figura; elementos como quantidade de faces, vértices e arestas; quantidade e forma das bases; quais figuras planas a formam; possíveis semelhanças e diferenças. Em seguida, recomendamos a realização das Atividades 2 e 3

FINALIZANDO

Para concluir, propomos a correção coletiva das atividades. Com vistas à formação integral do estudante e ao desenvolvimento das habilidades previstas para esta Sequência de Atividades, sugerimos que, nas discussões durante a correção, atentem-se para a importância do estudo da geometria em profissões como desenhistas, engenheiros, designers, marceneiros, arquitetos, pedreiros, artistas, entre outras. O incentivo à participação de todos os estudantes é muito importante. Assim, é possível identificar os que ainda apresentam fragilidades quanto aos objetos de conhecimento tratados, para então planejar possíveis estratégias em busca de esclarecer essas dúvidas.

Objeto 4:	***A que forma corresponde:***
Principais características: RESPOSTA PESSOAL.	

Objeto 5:	***A que forma corresponde:***
Principais características: RESPOSTA PESSOAL.	

2. Veja as figuras apresentadas em cada situação e preencha os textos com as informações corretas em cada caso.

a. A caixa de presente a seguir tem, aproximadamente, a forma de um ___prisma hexagonal___. Podemos dizer que é um poliedro, pois é uma ___forma espacial formada apenas por segmentos de reta___. Essa figura tridimensional é formada por ___2 hexágonos iguais___ e por ___6 retângulos iguais___. Além disso, tem ___2___ bases, no formato de ___hexágono___ e um total de ___8___ faces, ___18___ arestas e ___12___ vértices.

b. O Louvre, em Paris, é um dos principais museus do mundo. A pirâmide na entrada principal é uma de suas marcas registradas. É uma pirâmide quadrangular, logo, ela tem apenas ___uma___ base na forma de ___quadrado___. Além disso, é formada apenas por segmentos de retas e, por isso, é um exemplo de ___poliedro___. Suas faces laterais têm formato de ___triângulos___. Por ser uma pirâmide de base quadrada, ela é formada por 4 ___triângulos___ e 1 ___quadrado___. Ela tem um total de ___4___ faces, ___5___ vértices e ___8___ arestas.

c. Se enfileirarmos direitinho as moedas que aparecem na figura seguinte, obteremos um sólido geométrico muito conhecido, chamado ___cilindro___. Ele não é um poliedro, é um ___corpo redondo___ já que tem ___uma face não plana___. Esse sólido é obtido a partir da rotação de um ___quadrado ou retângulo___ e ainda dois ___círculos___. Possui duas bases paralelas e iguais, na forma de ___círculos___. É um exemplo de sólido geométrico que não possui ___vértices___ nem ___arestas___. Duas de suas faces são ___planas___ e a outra é ___não plana___.

3. A partir das observações, das discussões e dos registros realizados quanto ao estudo das formas geométricas espaciais, relembre as propriedades identificadas e preencha o quadro com o que é solicitado.

Nome da forma espacial	É poliedro ou é corpo redondo?	Figuras planas que formam o sólido	Quantidade de bases	Formato da base	Quantidade de arestas na base	Total de faces	Total de vértices	Total de arestas
Pirâmide hexagonal	Poliedro	1 hexágono 6 triângulos	1	Hexagonal	6	7	7	12
Prisma pentagonal	Poliedro	2 pentágonos 5 paralelogramos	2	Pentagonal	5	7	10	15
Cubo	Poliedro	6 quadrados iguais	2	Quadrada	4	6	8	12
Cone	Corpo redondo	1 setor circular 1 círculo	1	Circular	_	2	1	_
Cilindro	Corpo Redondo	1 retângulo rotacionado 2 círculos	2	Circular	_	3	_	_

ANOTAÇÕES

AULAS 7 E 8 – RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

Para essas atividades, propomos uma retomada sobre os principais conceitos tratados no decorrer desta Sequência de Atividades. Desse modo, sugerimos atividades com o caráter de revisitar os estudos já realizados. Assim, professor, o início pode ser por meio de um diálogo com informações sobre a proposta. Além disso, consideramos interessante esclarecimentos quanto às atividades que serão desenvolvidas nas aulas desse dia, que poderão ocorrer à medida em que se realiza a leitura coletiva do **Caderno do Estudante**.

DESENVOLVENDO

Com a leitura do **Caderno do Estudante**, os alunos deverão ter clareza de que, para responderem à Atividade 1, eles precisarão resgatar o conhecimento dos principais sólidos geométricos, bem como suas propriedades e informações sobre seus principais elementos. Caso considerem necessário, é possível consultar o cartaz que foi produzido nas aulas iniciais desta Sequência de Atividades. Essa atividade pode ser respondida de maneira coletiva, com tempo determinado para cada questionamento e posterior discussão. Destacamos que o principal olhar é para a retomada das características dos sólidos, sobretudo no que diz respeito à relação entre a quantidade de faces, vértices e arestas de prismas e pirâmides, e a quantidade de lados do polígono da base. Em especial, sugerimos que o último item da Atividade 1 seja resolvido coletivamente, com vistas a se discutir a relação de Euler. Para o segundo momento da aula, as duplas deverão se envolver com itens do ENEM e do SARESP. A correção poderá focar na leitura atenciosa de cada um e na observação cuidadosa das figuras como fatores indispensáveis quando nos deparamos com questões de geometria. Conversar com os estudantes

AULAS 7 E 8 – RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

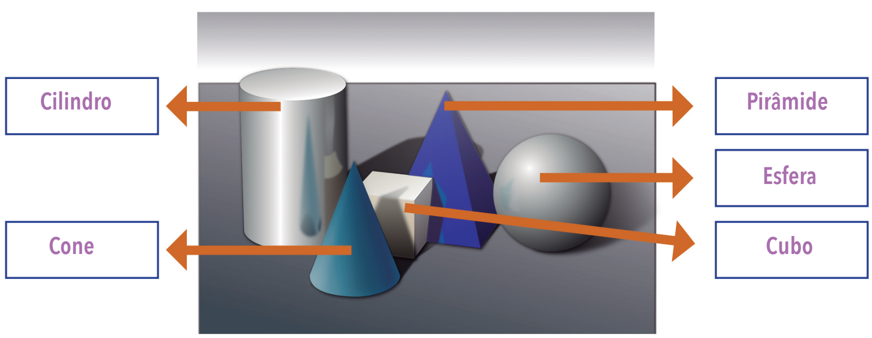
Objetivos da aula:
- Relacionar o número de faces, vértices e arestas de prismas e pirâmides ao número de lados do polígono da base;
- Resolver problemas que envolvam as relações dos elementos de prismas e pirâmides a suas bases.

As próximas atividades propõem a sistematização do que foi estudado sobre as formas espaciais. Sendo assim, leia com clareza os enunciados e busque resgatar os conhecimentos já desenvolvidos nas aulas anteriores. As demais atividades são itens do ENEM e do SARESP. Concentre-se e mãos à obra!

1. Principais formas espaciais:

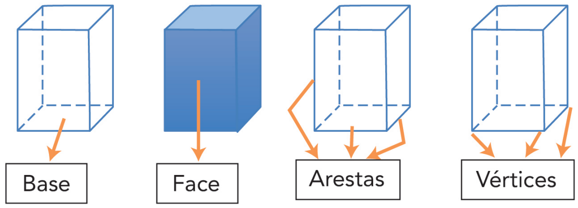
- Sólidos Geométricos → Poliedros
  - Poliedros → Pirâmides
  - Poliedros → Prismas
- Sólidos Geométricos → Corpos Redondos
  - Corpos Redondos → Cones
  - Corpos Redondos → Cilindros
  - Corpos Redondos → Esferas

a. Relembrando as figuras espaciais e suas principais características estudadas, reconheça as figuras da imagem abaixo e informe o nome de cada uma delas.

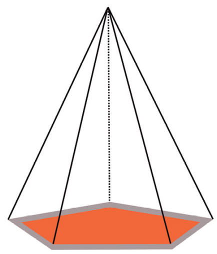


2ª série

b. Alguns elementos dos poliedros:



c. A partir da definição de base, faces, arestas e vértices como importantes elementos dos poliedros, indique, na figura a seguir: o nome dela, a base, uma face lateral, uma aresta da base e um de seus vértices.



d. **Quantidade de faces, vértices e arestas de pirâmides e prismas:** os quadros abaixo indicam informações referentes a pirâmides e prismas. Há, inclusive, expressões algébricas que generalizam a quantidade de lados da base, faces, vértices e arestas para esses tipos de poliedros.

PIRÂMIDE	Formato da base	Nº de lados da base	Nº de faces	Nº de vértices	Nº de arestas
Triangular	Triângulo	3	4	4	6
Quadrangular	Quadrilátero	4	5	5	8
Pentagonal	Pentágono	5	6	6	10
Hexagonal	Hexágono	6	7	7	12
Generalizações	**Polígono qualquer**	**n**	**n + 1**	**n + 1**	**2.n**

PRISMA	Formato da base	Nº de lados da base	Nº de faces	Nº de vértices	Nº de arestas
Triangular	Triângulo	3	5	6	9
Quadrangular	Quadrilátero	4	6	8	12
Pentagonal	Pentágono	5	7	10	15
Hexagonal	Hexágono	6	8	12	18
Generalizações	**Polígono qualquer**	**n**	**n + 2**	**2.n**	**3.n**

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, para articular ainda melhor o último questionamento da Atividade 1, há a ideia de se realizar uma atividade experimental, com cortes em cubos confeccionados em espuma, sabão ou massinha de modelar, para a verificação da relação de Euler. Para tanto, acompanhe a atividade intitulada **Cortar cubos**, cujo Guia do Professor está disponível no site do IME da UNICAMP, https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1369.

sobre o fato de que itens envolvendo geometria aparecem com frequência nos exames em larga escala pode ser pertinente.

FINALIZANDO

Por fim, ressaltamos que esse encontro tem um importante papel quanto à verificação do desenvolvimento das habilidades assumidas para o trabalho com esta Sequência de Atividades. Nesse sentido, o encerramento, a partir da resolução das atividades propostas para as aulas 7 e 8, deverá se articular no sentido de sistematizar os conceitos estudados sobre as formas geométricas espaciais. Destacamos a relevância do envolvimento ativo dos estudantes nesses momentos.

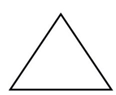
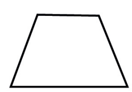
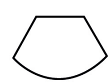
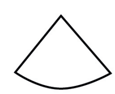
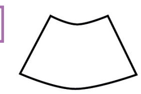
e. Revisando as informações apresentadas acima, preencha a tabela seguinte com a quantidade que está sendo solicitada em relação à figura indicada.

FIGURA	Formato da base	Nº de lados da base	Nº de faces	Nº de vértices	Nº de arestas
Pirâmide de base octogonal	Octógono	8	9	9	16
Prisma de base decagonal	Decágono	10	12	20	30

f. Leonhard Euler (1707 – 1783) foi um importante estudioso das ciências, com significativos trabalhos publicados nas áreas de matemática, física, engenharia e astronomia. Um importante legado desse matemático suíço foi a chamada "Relação de Euler", que relaciona a quantidade de vértices, arestas e faces de um poliedro. Essa relação garante que vale: **V – A + F = 2**, onde V, A e F correspondem às quantidades de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, respectivamente. Os poliedros que satisfazem à relação de Euler são chamados de ***poliedros eulerianos***. De acordo com essas informações, verifique se um poliedro convexo com 14 vértices, 21 arestas e 9 faces é um ***poliedro euleriano***.

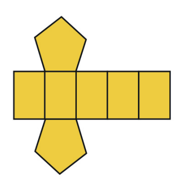
RESPOSTA: É um poliedro euleriano, pois: 14 – 21 + 9 = 2

2. (ENEM - 2014) Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida. Qual deverá ser a forma do adesivo?

a. 
b. 
c. 
d. 
e. 

3. (SARESP - 2009) A forma geométrica espacial que pode ser associada à planificação abaixo é:

a. Um cilindro.
b. Uma pirâmide de base pentagonal.
c. Um prisma de base pentagonal.
d. Um paralelepípedo.
e. Um cubo



4. (ENEM - 2011) A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais. Essa figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de:

a. Pirâmide.

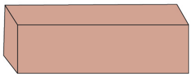
b. Semiesfera.

c. Cilindro.

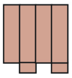
d. Tronco de cone.

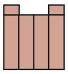
e. Cone.

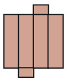
5. (SARESP - 2010) Observe a caixa representada abaixo:

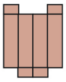


Uma planificação dessa caixa é:

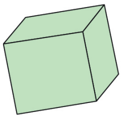
a. 

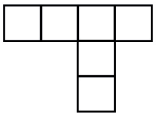
b. 

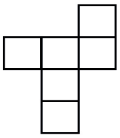
c. 

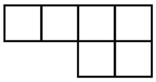
d. 

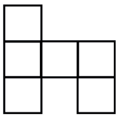
6. (SARESP - 2008) Observe o modelo de um cubo. Ele tem 11 planificações diferentes, isto é, existem 11diferentes moldes possíveis para se montar um cubo, por meio de dobradura. Identifique dentre as alternativas abaixo, uma dessas planificações:



a. 

b. 

c. 

d. 

7. (SARESP - 2008) Num dado cúbico, ficam em faces opostas os números: 1 e 6, 2 e 5, 3 e 4. Observe as figuras dadas e responda quais representam planificações possíveis de um dado.

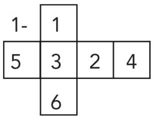
a. 1 e 2.

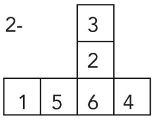
b. 1 e 3.

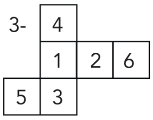
c. 2 e 3.

d. 1, 2 e 3.

e. Nenhuma.

1- 

2- 

3- 

2ª série

8. (SARESP - 2007) As figuras 1, 2 e 3 correspondem, respectivamente, às planificações dos sólidos:

a. Cubo, cone, pirâmide.
b. Pirâmide, cilindro, cubo.
c. Cubo, cilindro, pirâmide.
d. Pirâmide, cone, cubo.
e. Prisma, cilindro, prisma.

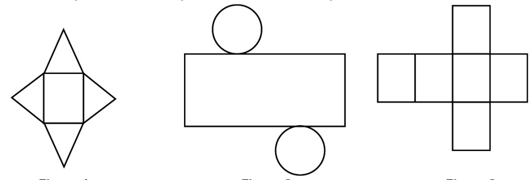


Figura 1 Figura 2 Figura 3

9. (ENEM - 2012) Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas. Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

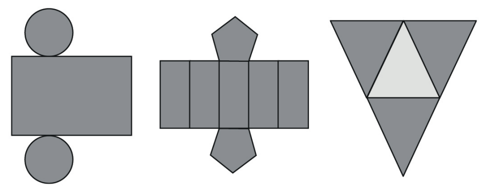
a. Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.

b. Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.

c. Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.

d. Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.

e. Cilindro, prisma e tronco de cone.



10. (SARESP - 2008) Observe as planificações I, II, e III de três sólidos. Assinale a alternativa que mostra corretamente os nomes dos sólidos associados as planificações I, II e III, respectivamente.

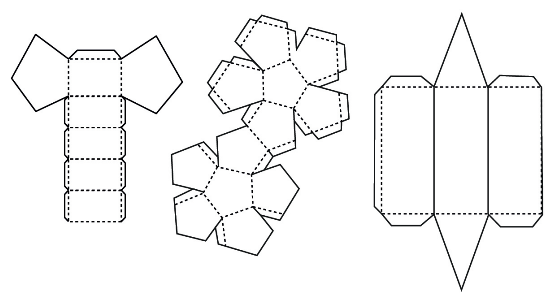
a. Prisma reto base pentagonal; dodecaedro; prisma reto de base triangular.

b. Icosaedro; dodecaedro; tetraedro.

c. Pirâmide reta de base triangular; icosaedro; prisma reto base pentagonal.

d. Dodecaedro; prisma reto de base triangular; tetraedro.

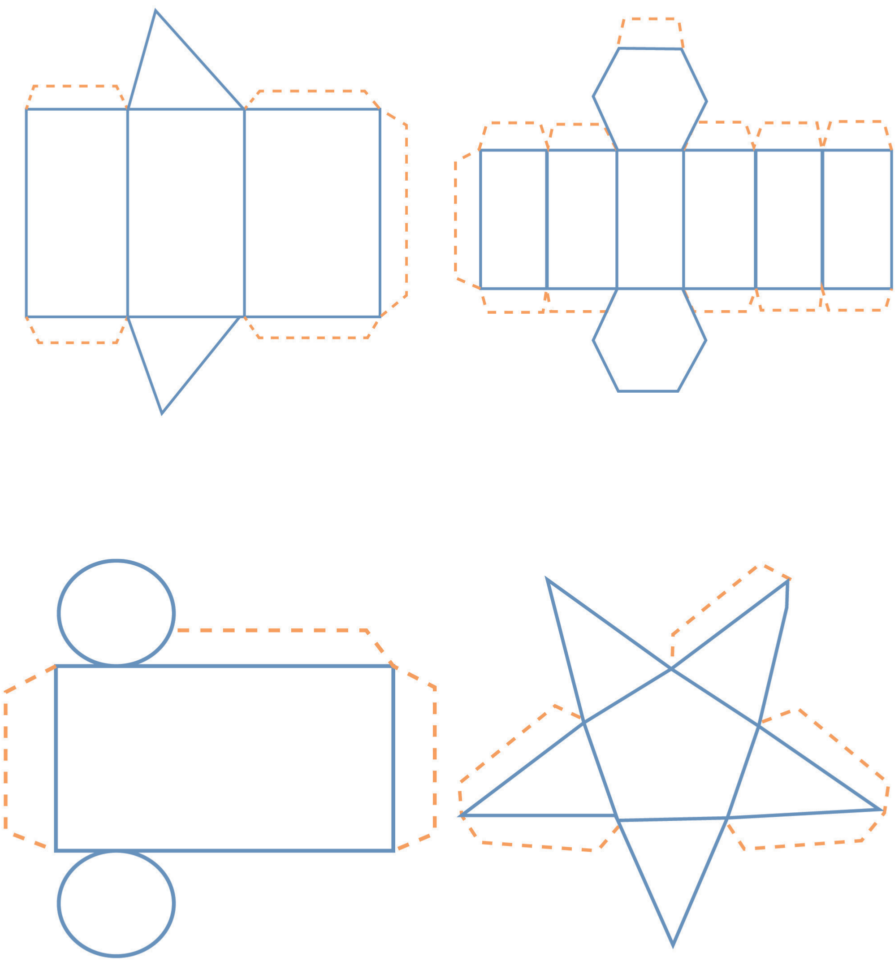
e. Cubo, prisma de base pentagonal, pirâmide de base triangular.



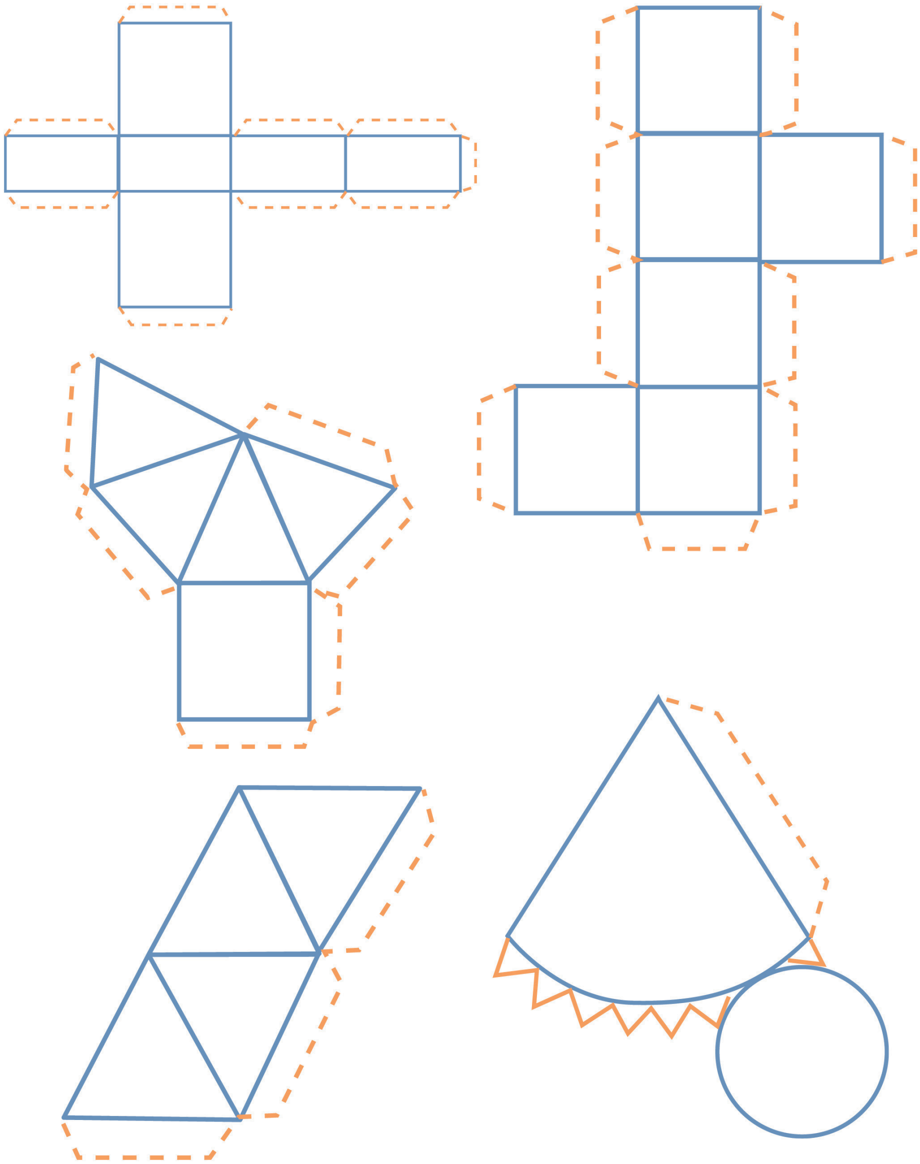
I II III

IMAGENS E ILUSTRAÇÕES
pixabay.com - freepik.com

ANEXO 1 - PARA RECORTAR



ANOTAÇÕES



2ª série

ANOTAÇÕES

2ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 02

2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAIS**
2	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis; Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações.	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 9º ano:** Vol. 2, na Situação de Aprendizagem 2, Atividade 1: Produtos Notáveis, Atividade 2: Fatoração; Atividade 6: Equações Polinomiais do 2º grau, por meio de fatorações; Atividade 7: Equações Polinomiais do 2º grau: Completando quadrados.

OLÁ, PROFESSOR! OLÁ, PROFESSORA!

Olá, Professor! Nesta Sequência de Atividades, falamos diretamente com você, que está aí na sala de aula, no convívio direto com os estudantes, os quais terão oportunidade, nesse momento, de se envolver com atividades que possibilitam a retomada de conceitos, propriedades e procedimentos essenciais para o desenvolvimento de seus conhecimentos e capacidades em matemática.

A Sequência de Atividades deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração. Além disso, as socializações das atividades, por parte dos estudantes, são percebidas aqui como oportunidades de serem desenvolvidas habilidades e competências que dizem respeito à cooperação, à empatia, à argumentação e à comunicação, entre outras.

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam expressões algébricas, sobretudo procedimentos de fatoração e ideias associadas aos produtos notáveis, bem como a resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações.

As escolhas das habilidades foram feitas por meio das análises realizadas dos resultados de avaliações internas e externas (diagnóstico de entrada e SARESP), que revelaram fragilidades dos estudantes com relação à habilidade:

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª / 90 min	Uma outra forma de escrever números e expressões.
3ª e 4ª / 90 min	Dois quadrados interessantes.
5ª e 6ª / 90 min	Uma importante diferença.
7ª e 8ª / 90 min	E continuamos fatorando...

Sabemos que as atividades por si só não ensinam. Por isso, professor, a sua atuação é tão importante em cada uma das situações propostas aqui cujo objetivo é recuperar as aprendizagens e desenvolver as habilidades esperadas para a 2ª série do Ensino Médio. Para isso, este caderno deverá servir como mais uma ferramenta que o auxiliará no processo de ensino, sendo necessário, portanto, que você considere, em seu replanejamento, outras possibilidades de discussão e recursos, para além daqueles sugeridos nesta Sequência de Atividades. Para ajudá-lo nessa ação, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenal acerca das Sequências de Atividades, nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPCs). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

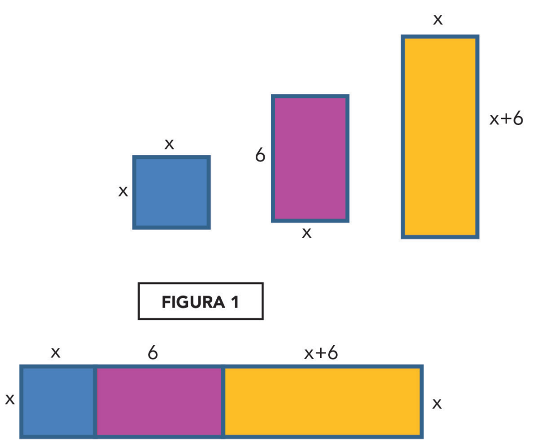
AULAS 1 E 2 - UMA OUTRA FORMA DE ESCREVER NÚMEROS E EXPRESSÕES

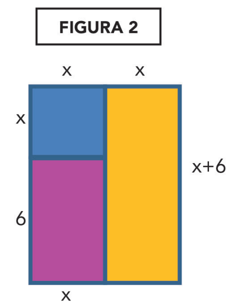
Objetivos das aulas:
- Identificar os fatores comuns em expressões algébricas quadráticas;
- Escrever expressões algébricas quadráticas na forma fatorada;
- Estabelecer relações entre a expressão algébrica fatorada e outras expressões algébricas equivalentes;
- Resolver fatoração de expressões algébricas com mais de um fator comum.

As próximas atividades contemplam situações cujos problemas envolvem e relacionam expressões algébricas. É hora de utilizar elementos algébricos!!!

1. Para começar os estudos propostos nessa Sequência de Atividades sobre as expressões algébricas, faremos uma dinâmica. A ideia é usar expressões algébricas para representar algumas sentenças matemáticas. Cada estudante vai receber uma tirinha do tipo "**Eu tenho... Quem tem?**". Alguém se candidata a iniciar a dinâmica fazendo a leitura em voz alta do texto que aparece em sua tirinha, por exemplo: **Eu tenho x. Quem tem** o dobro do meu número somado com 5? O estudante que tiver a expressão **2x + 5** sinaliza e faz a leitura em voz alta de sua tirinha e assim sucessivamente até que todos os envolvidos participem. Todos devem estar muito atentos às leituras para conseguirem identificar corretamente a expressão associada ao texto. **Quem se candidata a iniciar a brincadeira? Divirtam-se!!!!**

2. Abaixo existem 3 polígonos com dimensões diferentes. É possível obter novas figuras a partir da junção deles. Vejamos alguns exemplos,





AULAS 1 E 2: UMA OUTRA FORMA DE ESCREVER NÚMEROS E EXPRESSÕES

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso e tirinhas cortadas do **"Eu tenho ... Quem tem?" (ANEXO 1)**.

INICIANDO

Professor, as atividades desta Sequência propõem estudos de importantes elementos da unidade temática Álgebra. Para as aulas 1 e 2, serão tratadas as expressões algébricas quadráticas, em sua forma desenvolvida e em sua forma fatorada, por exemplo:
$x \cdot (2x + 12) = 2x^2 + 12x$.
Sugerimos, para começar, que o **Caderno do Estudante** seja apresentado e que sejam entregues as tirinhas para a realização da dinâmica do **Eu tenho... Quem tem?**, que está no **ANEXO 1** desta Sequência de Atividades. É indispensável que você esteja atento para a quantidade de tirinhas, pois deve ser, no mínimo, igual à quantidade de estudantes ou duplas.

DESENVOLVENDO

A ideia é que a dinâmica **"Eu tenho...Quem tem?"** aconteça para uma introdução sobre a temática a ser estudada. Será uma retomada sobre o uso de expressões algébricas para representar situações diversas. Para a realização, cada estudante ou dupla deve receber uma tirinha do tipo **"Eu tenho... Quem tem?"**. Em cada uma delas há a indicação da expressão que o estudante tem e um questionamento do tipo "quem tem?". A prática deve começar escolhendo-se quem será a primeira pessoa a participar. É interessante incentivar que algum estudante se voluntarie para isso. Definindo-se quem vai iniciar, este deverá ler em voz alta o texto disponível na sua tirinha e, então, o estudante que estiver com a expressão que corresponde ao ***"Quem tem"*** associado à sentença que foi lida, deve sinalizar e, em seguida, ler também em voz alta a sua tirinha. Essas ações devem ser repetidas até que todos participem. Professor, se achar interessante, pode registrar na lousa as expressões algébricas que aparecem nas tirinhas. Ao final do **"Eu tenho... Quem tem?"** os estudantes, organizados em duplas, devem realizar as demais atividades do **Caderno do Estudante**, previstas para essa aula. Essas atividades abordam fatoração por meio da identificação do fator comum. É importante, professor, destacar as relações entre a expressão algébrica fatorada e as expressões desenvolvidas equivalentes.

2ª série

a. Forneça uma expressão para se calcular o perímetro da:

Figura	Perímetro
Figura 1	$2 \cdot x + 2 \cdot (x + 6 + x + 6) = 2x + 4x + 24 = 6x + 24$
Figura 2	$2 \cdot 2x + 2 \cdot (x + 6) = 4x + 2x + 12 = 6x + 12$

b. Escreva uma expressão que represente a área da:

Figura	Área
Figura 1	$x \cdot (2x + 12) = 2x^2 + 12x$
Figura 2	$2x \cdot (x + 6) = 2x^2 + 12x$

c. O perímetro da Figura 1 é igual ao da Figura 2? E o que acontece com as áreas dessas figuras, são iguais?

RESPOSTA: As figuras 1 e 2 são exemplos de figuras que têm perímetros diferentes e áreas iguais. Para justificar é necessário observar as expressões algébricas escritas nos itens a) e b).

3. Fatorar significa escrever números ou expressões algébricas na forma de produto de fatores. Em se tratando de expressões algébricas, a fatoração pode ser iniciada com a identificação dos fatores comuns aos termos que formam a expressão para, então, explicitá-los como produto com os outros fatores. Por exemplo:

$35 = 7 \cdot 5 = 7 \cdot (2 + 3)$ $\quad$ $2x^2 - 18x = 2x \cdot (x - 9)$

Retome as expressões usadas para representar o perímetro e a área das Figuras 1 e 2 da Atividade 2. Identifique os fatores comuns aos termos em cada expressão e escreva-os em sua forma fatorada.

Figura	Forma fatorada do perímetro	Forma fatorada da área
Figura 1	$6x + 24 = 6 \cdot (x + 4)$	$2x^2 + 12x = 2x \cdot (x + 6)$
Figura 2	$6x + 12 = 6 \cdot (x + 2)$	$2x^2 + 12x = 2x \cdot (x + 6)$

FINALIZANDO

Consideramos importante a correção coletiva das atividades com o envolvimento ativo dos estudantes. Esse momento será crucial para a identificação de possíveis dificuldades sentidas durante a realização e dúvidas que tenham surgido, para esclarecê-las. Professor, cabe, nessa etapa, destacar que as propostas associam Álgebra e Geometria. Reflexões quanto à concepção de que as unidades temáticas não são independentes nem excludentes, sendo, por isso, possível lidar com situações em que estão interconectadas, podem enriquecer significativamente as discussões com os estudantes.

4. Fatore as seguintes expressões algébricas:

a. $2x^2 - 9x =$ $x \cdot (2x - 9)$

b. $24a^2 - 18a =$ $6a \cdot (4a - 3)$

c. $3y^2 + 6y =$ $3y \cdot (y + 2)$

d. $b + 21b^2 =$ $b \cdot (1 + 21b)$

5. Relacione as colunas:

a. $a \cdot (1 + 120a)$	(e) $5 \cdot (x^2 + 20)$
b. $-3a^2 + 21a$	(f) $x - 4x^2$
c. $2y \cdot (y - 8)$	(b) $3a \cdot (-a + 7)$
d. $-36 - 9y^2$	(d) $9 \cdot (-4 - y^2)$
e. $5x^2 + 100$	(c) $2y^2 - 16y$
f. $x \cdot (1 - 4x)$	(a) $a + 120a^2$

AULAS 3 E 4 - DOIS QUADRADOS INTERESSANTES

Objetivos das aulas:
- Reconhecer que as expressões $(x + a)^2$ e $x^2 + 2ax + a^2$ são equivalentes;
- Fatorar expressões do tipo $x^2 + 2ax + a^2$;
- Reconhecer que as expressões $(x - a)^2$ e $x^2 - 2ax + a^2$ são equivalentes;
- Fatorar expressões do tipo $x^2 - 2ax + a^2$;
- Relacionar expressões fatoradas a produtos notáveis com uma variável.

1. Alguns erros são comuns quando se enuncia o Teorema de Pitágoras. Juliano o definiu da seguinte maneira: *a hipotenusa elevada ao quadrado é igual ao quadrado da soma dos catetos*. Usando **a** para a hipotenusa e **b** e **c** para os catetos, a fala de Juliano pode ser representada por:

a. $a^2 = b^2 + c^2$

b. $a^2 = (b - c)^2$

$\boxed{\text{c.}}$ $a^2 = b^2 + 2bc + c^2$

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, para finalizar a correção, promova uma discussão sobre o enunciado correto do Teorema de Pitágoras, destacando que Juliano definiu de maneira equivocada.

AULAS 3 E 4: DOIS QUADRADOS INTERESSANTES

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

Para continuar o estudo sobre as expressões algébricas e os processos de fatoração, sugerimos uma breve retomada sobre o que se discutiu na aula anterior, com destaque ao uso de expressões com incógnitas para representar contextos diversos e fatoração a partir da identificação dos fatores comuns. Para despertar o interesse e a participação ativa dos estudantes nas atividades, sugerimos que você desenvolva uma conversa associando os cálculos de área e perímetro a expressões com incógnitas, apresentando, inclusive, exemplos.

DESENVOLVENDO

A Atividade 1 pode ser feita de forma oral e coletiva. Ela traz alguns elementos sobre ideias que foram discutidas na aula anterior. É indispensável a participação dos estudantes, então, convidá-los para socializarem suas respostas na lousa pode ser interessante. Práticas dessa natureza contribuem com o desenvolvimento de habilidades relativas à comunicação e à argumentação. Após a correção, encaminhe a leitura em voz alta do texto introdutório da Atividade 2. A leitura já pode conter orientações para a realização. Em seguida, os estudantes, em duplas, terão mais repertório para resolver às demais atividades. Durante a realização, é pertinente o acompanhamento de perto, para isso, circular pela sala observando o envolvimento deles é uma boa ideia. Na resolução dessas atividades, o quadrado da soma e da diferença têm destaque, tanto em suas formas fatoradas quanto em suas expressões desenvolvidas. A correção pode ser feita com os estudantes registrando suas soluções na lousa.

FINALIZANDO

Por fim, para o encerramento da aula, sugerimos que indique aos estudantes que retomem toda a atividade, destacando os conceitos mais importantes e fazendo os seus registros pessoais sobre o que foi discutido em sala. Entendemos, professor, que os registros escritos por parte dos estudantes são práticas que devem fazer parte da sala de aula de matemática. Nesse sentido, apontamos para o seu olhar quanto a esse incentivo.

2. Aplicando a propriedade distributiva em: $(x + a)^2$ e $(x – a)^2$, podemos concluir que os resultados têm algumas particularidades. Podemos generalizar cada caso. Vejamos:

$$(x + a)^2 = (x + a) \cdot (x + a) = x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x - a)^2 = (x - a) \cdot (x - a) = x^2 - ax - ax + a^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

Usando a língua materna, podemos escrever: O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo. Além disso, o quadrado da diferença de dois termos corresponde ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o primeiro vezes o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo. Na igualdade $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, $(x + a)^2$ é a fatoração do trinômio $x^2 + 2ax + a^2$. Do mesmo modo, $(x - a)^2$ é a fatoração de $x^2 - 2ax + a^2$.

Entendeu? Agora é hora de aplicar o que aprendeu. Responda às questões seguintes que envolvem expressões algébricas:

a. Simplifique a expressão: $(x + 2)^2 + (x + 2) \cdot (x – 2) + (x – 2)^2$

RESPOSTA: $x^2 + 4x + 4 + x^2 - 4 + x^2 - 4x + 4 = 3x^2 + 4$.

b. Ao desenvolver o quadrado da diferença de dois termos $(a – b)^2$, que expressão obtemos?

RESPOSTA: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

3. Desenvolva os produtos abaixo até a forma irredutível:

a. $(x + 9)^2 =$ $x^2 + 9x + 9x + 81 = x^2 + 18x + 81$

b. $(3 – a)^2 =$ $9 - 3a - 3a + a^2 = 9 - 6a + a^2$

c. $(x + 7) \cdot (x – 7) =$ $x^2 - 7x + 7x - 49 = x^2 - 49$

d. $(x + 2y) \cdot (x – 2y) =$ $x^2 - 2xy + 2xy - 4y^2 = x^2 - 4y^2$

e. $(3y^2 – 2)^2 =$ $9y^4 - 6y^2 - 6y^2 + 4 = 9y^4 - 12y^2 + 4$

f. $(5 – m^3)^2 =$ $25 - 5m^3 - 5m^3 + m^6 = 25 - 10m^3 + m^6$

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, destaque que para desenvolver cada potência, basta aplicar a propriedade distributiva e, em seguida, somar os termos semelhantes.

4. Observe atentamente a expressão seguinte e, sem simplificá-la, identifique qual dos números abaixo faz com que essa expressão se torne zero e justifique sua resposta: $(x - 7) \cdot (x - 3) \cdot x \cdot (x^2 + 1)$

a. 1
b. 3
c. 5
d. -7
e. -3

RESPOSTA: Dentre as alternativas de respostas, a única que torna essa expressão igual a zero é a letra B, ou seja, $x = 3$. Vejamos o que ocorre quando substituimos x por 3:
$x - 3 = 3 - 3 = 0$.

5. Que termo devemos adicionar à expressão $4x^8 - 6x^4y + 9y^2$ para que ela represente o quadrado de uma soma?

a. $6x^4y$
b. $- 6x^4y$
c. $12x^4y$
d. $- 12x^4y$
e. $18x^4y$

RESPOSTA: Desenvolvendo o quadrado
$(2x^4 + 3y)^2 = 4x^8 + 6x^4y + 6x^4y + 9y^2 = 4x^8 + 12x^4y + 9y^2$. Dessa forma, para que a expressão indicada no enunciado represente o quadrado de uma soma, é necessário somar $18x^4y$.

6. Sendo $a^2 + b^2 = x$ e $ab = y$, então $(a + b)^2$ é igual a:

a. x^2
b. $x + y$
c. $x - 2y$
d. $x^2 + 2y$
e. $x + 2y$

RESPOSTA: Desenvolvendo o quadrado indicado, obtemos:
$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$. Ao substituir os valores que o enunciado indica, ficamos com: $a^2 + b^2 + ab + ab = x + y + y = x + 2y$.

7. Qual alternativa representa a simplificação correta da expressão abaixo?

$$\frac{9x^2 + 27x}{9x}$$

a. $x + 3$
b. $x - 1$
c. 0
d. 3
e. 4

RESPOSTA: O fator comum a todos os termos da expressão é 9x, dessa forma, dividindo todos por 9x, obtemos $x + 3$.

2ª série

AULAS 5 E 6: UMA IMPORTANTE DIFERENÇA

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

A apresentação das atividades poderá acontecer através da leitura compartilhada do **Caderno do Estudante**. Nesse momento, cabe ressaltar que, até agora, os estudantes compreenderam o quadrado da soma e da diferença, na forma desenvolvida, na forma fatorada e as relações entre elas. Então, professor, converse sobre a continuidade de estudos relativos à Álgebra e que para as próximas duas aulas, eles tratarão da diferença entre dois quadrados. Além disso, nessa introdução, já pode ser indicado para os estudantes que a Atividade 1 corresponde a uma investigação em que se relacionam apenas números.

DESENVOLVENDO

Para o desenvolvimento propriamente das atividades, apontamos a realização da investigação indicada na Atividade 1. Combine com a turma, professor, o tempo para essa etapa, de modo que, ao finalizar, haja um momento de discussão com apresentação dos possíveis resultados pensados pelos estudantes. Uma conversa informando que a forma fatorada de expressões pode facilitar os cálculos em diversas situações será bem-vinda. A Atividade 2 será realizada em seguida. Também tem um caráter investigativo por meio do encaminhamento a partir de algumas ações. É de muita relevância que os estudantes, em suas duplas, discutam sobre as tarefas e se esforcem na busca pelas soluções, realizando, de fato, um trabalho colaborativo. Em seguida, proponha a leitura silenciosa com realização das próximas atividades. Juntamente com a correção, desenvolva a sistematização das ideias tratadas nas investigações realizadas nas atividades por meio de um diálogo.

2ª série

AULAS 5 E 6 – UMA IMPORTANTE DIFERENÇA

Objetivos das aulas:
- Reconhecer que as expressões $(x - a) \cdot (x + a)$ e $x^2 - a^2$ são iguais;
- Fatorar expressões do tipo $x^2 - a^2$.

Já conhecemos alguns produtos notáveis, tanto na forma fatorada quanto na forma desenvolvida. Estudamos o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois termos. Para as próximas aulas, você vai realizar algumas investigações utilizando números para concluir sobre as relações que dizem respeito ao produto da soma pela diferença de dois termos. Articule-se bem com a sua dupla para realizar as ações propostas com mais facilidade. Agora, vamos às atividades!

1. Investigação: A partir de alguns processos de fatoração que estudamos, é possível resolver cálculos aparentemente trabalhosos de maneira rápida e eficiente. Pense sobre isso e determine o valor de:

$$4330^2 - 4329^2$$

Você encontrou uma maneira rápida para solucionar essa sentença? Em caso afirmativo, você terá facilidade para calcular os valores a seguir. Caso ainda não, continue tentando.

RESPOSTA PESSOAL: É uma questão subjetiva e, portanto, de resposta pessoal. Por essa razão, ressaltamos a importância de serem ouvidos os possíveis caminhos pensados pelos estudantes sem que um seja considerado mais correto do que outro, contudo, é interessante verificar se alguma dupla conseguiu apresentar a proposta: $(4330 + 4329).(4330 - 4329) = 8659 . 1 = 8659$.

a. $50^2 - 40^2 =$ $(50 + 40) \cdot (50 - 40) = 90 \cdot 10 = 900$

b. $299^2 - 1^2 =$ $(299 + 1) \cdot (299 - 1) = 300 \cdot 298 = 89400$

c. $343^2 - 342^2 =$ $(343 + 342) \cdot (343 - 342) = 685 \cdot 1 = 685$

2. *AÇÃO:* Leia com atenção e faça o que se pede

a. Quanto é $8 \cdot 8$?

RESPOSTA: 64.

b. Realize o seguinte experimento:

Some 3 unidades a um dos fatores de 8 · 8;
subtraia 3 unidades ao outro fator;
multiplique os resultados.

RESPOSTA: $(8 + 3) \cdot (8 - 3) = 11 \cdot 5 = 55$.

c. Observe os resultados obtidos nos itens **a** e **b**. Relacione os dois com os números 8 e 3 e escreva um comentário com as suas conclusões.

RESPOSTA PESSOAL: O comentário dos estudantes deve incluir informações sobre as ideias do seguinte cálculo: $8^2 - 3^2 = 64 - 9 = 55$.

d. Será que aconteceria algo parecido se usássemos outros valores? Vamos testar?

	AÇÃO	RESULTADO OBTIDO
i)	10 · 10	100
ii)	Some 2 unidades a um dos fatores de i).	$10 + 2 = 12$
iii)	Subtraia 2 unidades ao outro fator de i).	$10 - 2 = 8$
iv)	Multiplique os resultados de ii) e iii).	$12 \cdot 8 = 96$
	Compare os resultados i) e iv) e comente.	$10^2 - 2^2 = 100 - 4 = 96$

e. ***CONCLUSÃO:*** Reveja as ações realizadas nas Atividades 1 e 2. Atente para os detalhes, observe os resultados obtidos e os seus comentários. Agora, escreva uma breve explicação com as conclusões gerais a que você chegou.

RESPOSTA PESSOAL: O mais importante nessa questão é que os estudantes tenham alcançado a conclusão de que o produto da soma pela diferença entre dois valores representa a diferença entre os quadrados desses valores, assim, usando os números das questões 1 e 2, eles podem argumentar mostrando que: $(8 + 3) \cdot (8 - 3) = 8^2 - 3^2$ e que, de forma similar, $(10 + 2) \cdot (10 - 2) = 10^2 - 2^2$.

2ª série

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, encaminhe a discussão no sentido de mostrar que é possível generalizar essas ideias e usar incógnitas para representá-las.

FINALIZANDO

Por fim, ressaltamos a importância de a sistematização envolvendo as formas fatorada e desenvolvida da diferença de dois quadrados ser realizada com o envolvimento e empenho de todos os estudantes. Dessa forma, é possível identificar os que ainda apresentam fragilidades quanto aos objetos de conhecimento tratados e planejar possíveis estratégias em busca de esclarecer essas dúvidas. Isso com vistas ao desenvolvimento das habilidades previstas para essa Sequência de Atividades.

3. A diferença entre os quadrados de dois termos x e y pode também ser representada por:

a. $x^2 + y^2$
b. $x^2 - 2xy$
c. $(x + y) \cdot (x - y)$
d. $x \cdot (x + y)$
e. $y \cdot (y + x)$

RESPOSTA: Desenvolvendo a expressão fatorada, obtemos: $(x + y)(x - y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$. A expressão obtida é a diferença entre os quadrados de x e y.

4. É interessante que você tenha notado, a partir dos experimentos, das observações e em suas conclusões, que é possível generalizar os resultados alcançados nas Atividades 1 e 2. Podemos indicar que, o produto da soma pela diferença de dois termos corresponde à diferença entre os seus quadrados. Essa propriedade pode ser escrita em linguagem matemática do seguinte modo: $(x + a) \cdot (x - a) = x^2 - a^2$, de onde podemos concluir que o produto $(x + a) \cdot (x - a)$ é a fatoração da expressão $x^2 - a^2$, ou seja, essas expressões são equivalentes. Uma maneira de comprovar que essa igualdade é verdadeira é desenvolvendo esse produto, usando a propriedade distributiva. Vejamos:

$$(x + a) \cdot (x - a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$$

Para aplicar esses conceitos, responda: Se $\boldsymbol{a - b = 5}$ e $\boldsymbol{a + b = 20}$, qual é o valor de $a^2 - b^2$?

RESPOSTA: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b) = 20 \cdot 5 = 100$.

5. Identifique, dentre as sentenças seguintes, a única alternativa que é falsa.

a. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b. $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$
c. $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$
d. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
e. $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2)$

AULAS 7 E 8 – E CONTINUAMOS FATORANDO...

Objetivos das aulas:
- Resolver fatorações do tipo $(bx + a)^2$, estabelecendo relações com a expressão algébrica $(bx)^2 + 2a(bx) + a^2$;
- Resolver fatorações do tipo $b \cdot (x + a) \cdot (x - a)$, estabelecendo relações com a expressão algébrica $bx^2 - ba^2$;
- Resolver situações-problema envolvendo fatoração do tipo $(x + a) \cdot (x - a)$;
- Resolver situações-problemas envolvendo fatoração do tipo $(x+a)^2$.

As próximas atividades propõem a sistematização do que foi estudado durante as aulas com essa Sequência da Atividades. Para tanto, a Atividade 1 requer que você elabore um resumo sobre os principais produtos notáveis estudados, que poderá ser utilizado para a resolução das demais atividades. Sendo assim, leia com clareza os enunciados e busque resolvê-los utilizando os conhecimentos já desenvolvidos nas aulas anteriores.

Concentre-se e mãos à obra!

1. Como atividade de sistematização dessa Sequência, você irá produzir, em seu caderno, um resumo sobre os produtos notáveis estudados até agora. Registre, então, além das formas fatoradas indicadas a seguir, as formas desenvolvidas de todas elas. Esse pode ser um material de apoio e que poderá ser consultado durante as aulas.

$(x + a)^2$

$(bx + a)^2$

$(x - a)^2$

$(bx - a)^2$

$(x + a) \cdot (x - a)$

$b \cdot (x + a) \cdot (x - a)$

2. Desenvolva os produtos abaixo até a forma irredutível:

a. $(2x + 9)^2 =$ $4x^2 + 36x + 81$

b. $(x - 3y)^2 =$ $x^2 - 6xy + 9y^2$

c. $(2x + b) \cdot (2x - b) =$ $4x^2 - b^2$

d. $(4p + 5q)^2 =$ $16p^2 + 40pq + 25q^2$

e. $3 \cdot (7a + 1) \cdot (7a - 1) =$ $3 \cdot (49a^2 - 1) = 147a^2 - 3$

AULAS 7 E 8: E CONTINUAMOS FATORANDO...

ORGANIZAÇÃO DA TURMA
Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO
Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO
As atividades pensadas para as aulas 7 e 8 dessa Sequência têm duas grandes frentes: o caráter de retomada sobre os principais conceitos tratados até aqui quanto à fatoração e produtos notáveis e à aplicação de tais conceitos na resolução de problemas. Desse modo, sugerimos que o início seja por meio de um diálogo com informações sobre a proposta. Isso pode acontecer através da leitura compartilhada do texto introdutório do **Caderno do Estudante**.

DESENVOLVENDO
A título de sistematização, a Atividade 1 indica a produção de um resumo sobre os produtos notáveis estudados. Essa produção implica retomar conhecimentos sobre as formas fatoradas e desenvolvidas dos produtos notáveis e poderá ser utilizada para consulta na resolução dos problemas que vêm em seguida e, por essa razão, sugerimos que fique registrado no caderno. As outras atividades poderão ser respondidas de maneira coletiva, disponibilizando-se tempo determinado para cada uma, com posterior discussão,

visando a revisão sobre os estudos já realizados. Ressalte a importância da leitura atenciosa de cada enunciado para a resolução. As duplas deverão estar concentradas nessas resoluções e, em seguida, envolver-se na socialização para a turma.

FINALIZANDO

Por fim, ressaltamos que esse encontro tem um importante papel quanto à verificação do desenvolvimento das habilidades assumidas para o trabalho com essa Sequência de Atividades. Nesse sentido, o encerramento, a partir da resolução das atividades propostas para as aulas 7 e 8 deverá se articular no sentido de sistematizar os conceitos estudados sobre produtos notáveis e processos de fatoração. Destacamos a relevância do envolvimento ativo dos estudantes nesses momentos.

3. A expressão $9x^2 + 12xy + 4y^2$ é um exemplo de trinômio quadrado perfeito. Isso quer dizer que a sua fatoração é o quadrado da soma de dois termos. Fatore corretamente esse trinômio.

RESPOSTA: $9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2.3x.2y + (2y)^2 = (3x + 2y)^2$.

4. Pense sobre a equação: $x^2 + 6x + 9 = 0$. Ela é formada por um trinômio do 2º grau.

a. Fatorando esse trinômio, o que obtemos?

RESPOSTA: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

b. Que valores numéricos a incógnita x pode assumir para zerar essa sentença?

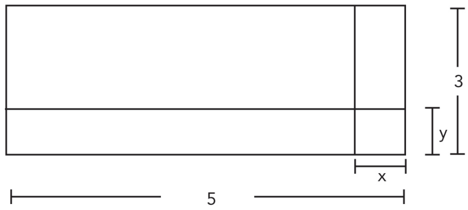
RESPOSTA: Apenas $x = -3$ zera essa sentença.

c. Faça o mesmo para $x^2 - 2x + 1 = 0$:

- Fatoração: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$
- Valores que zeram a sentença: $x = 1$

ANOTAÇÕES

5. (ENEM 2012) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é (5 – x) (3 – y).



Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

a. 2xy
b. 15 – 3x
c. 15 – 5y
d. - 5y – 3x
e. 5y + 3x - xy

RESPOSTA: Desenvolvendo a expressão que representa a área do forro após ser lavado temos:

$15 - (5 - x) \cdot (3 - y) = 15 - 15 + 5y + 3x - xy = 5y + 3x - xy.$

IMAGENS E ILUSTRAÇÕES
pixabay.com - freepik.com

2ª série

ANOTAÇÕES

ANEXO 1 (PARA RECORTAR)

Eu tenho ... Quem tem?

Eu tenho x. **Quem tem** o dobro do meu número?	**Eu tenho $3x^2$.** **Quem tem** a terça parte do meu número?
Eu tenho 2x. **Quem tem** o quadrado do meu número?	**Eu tenho $3x^2 + 5$.** **Quem tem** o meu número menos a raiz quadrada positiva de 25?
Eu tenho $4x^2$. **Quem tem** o meu número menos 1?	**Eu tenho x^2.** **Quem tem** o meu número mais x?
Eu tenho $4x^2$ - 1. **Quem tem** o dobro do meu número?	**Eu tenho $x^2 + x$.** **Quem tem** o meu número dividido por x?
Eu tenho $8x^2 – 2$. **Quem tem** o meu número mais 2?	**Eu tenho x + 1.** **Quem tem** o quadrado do meu número?
Eu tenho $8x^2$. **Quem tem** (1/4) do meu número?	**Eu tenho $x^2 + 2x + 1$.** **Quem tem** o meu número menos 1?
Eu tenho $2x^2$. **Quem tem** o meu número mais 3?	**Eu tenho $x^2 + 2x$.** **Quem tem** a forma fatorada do meu número?
Eu tenho $6x^2 + 9$. **Quem tem** o meu número mais o valor da área de um quadrado com lado medindo 1 unidade?	**Eu tenho x(x + 2).** **Quem tem** a letra que é a incógnita dessa expressão?
Eu tenho $2x^2 + 3$. **Quem tem** o triplo do meu número?	**Eu tenho $6x^2 + 10$.** **Quem tem** a metade do meu número?

Observação: É necessário que a quantidade de tirinhas seja, no mínimo, igual à quantidade de alunos/duplas da sala.

2ª série

ANOTAÇÕES

2ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 03

2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAIS**
3	Relações Trigonometria: Fenômenos periódicos	Reconhecer a periodicidade presente em alguns fenômenos naturais, associando-a às funções trigonométricas básicas.	**Algumas atividades dessa habilidade encontram-se no Caderno do 2ªsérie:** Vol. 1 – Tema 1: Fenômenos Periódicos Tema 2: A periodicidade e o Modelo da Circunferência Trigonométrica.

OLÁ, PROFESSOR! OLÁ, PROFESSORA!

Os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam funções periódicas.

HABILIDADE: reconhecer a periodicidade presente em alguns fenômenos naturais, associando-a às funções trigonométricas básicas.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	Relações métricas no Triângulo Retângulo
3ª e 4ª/ 90 min	Fenômenos periódicos
5ª e 6ª/ 90 min	Gráfico de funções periódicas
7ª e 8ª/ 90 min	Painel de questões

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

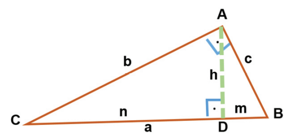
AULAS 1 E 2 – RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Objetivos da aula:
- Identificar triângulos semelhantes formados pela altura em relação à hipotenusa de um triângulo retângulo.
- Distinguir, entre as relações métricas do triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras.
- Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

1. Com o uso da trigonometria do triângulo retângulo:

- Os gregos determinaram a medida do raio da Terra, por um processo simples.
- É possível medir a distância da Terra à Lua.
- Um engenheiro pode saber a largura de um rio para construir uma ponte.
- Um cartógrafo (desenhista de mapas) pode saber a altura de uma montanha, o comprimento de um rio, etc.
- Pode-se determinar a altura de certo prédio.

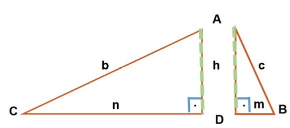
As razões trigonométricas podem ser utilizadas em diversas situações em que se pretende verificar comprimentos inacessíveis às medidas diretas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Vejamos esse triângulo retângulo em que
- a = hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto);
- b, c = catetos (lados que formam o ângulo reto);
- m, n = projeções dos catetos;
- h = altura do triângulo referente à hipotenusa.

Podemos perceber que a altura em relação à hipotenusa divide o triângulo ABC em dois triângulos retângulos menores: ADC e ADB. Para melhorar a observação dos triângulos, vejamos a decomposição seguinte:



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa decomposição nos mostra que ABC, ADC e ADB são semelhantes. Isso ocorre porque seus ângulos

AULAS 1 E 2: RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Sala de aula organizada em formato de semicírculo para a realização das atividades individualmente.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante, material impresso (**ANEXO 1**), tesoura e recursos para exibição de vídeo.

INICIANDO

Professor, sugerimos, para começar, a apresentação do **Caderno do Estudante** e um diálogo sobre as ideias centrais das atividades desta Sequência. Destaque que estudaremos funções periódicas e que partiremos de importantes conceitos relacionados à trigonometria. Ressalte que na proposta inicial eles realizarão experimentos com manipulação de formas geométricas planas.

DESENVOLVENDO

Após essa conversa inicial, proponha a realização da Atividade 1, que consiste no estudo das relações métricas no triângulo retângulo e pode ocorrer com a leitura compartilhada entre todos da turma. Durante a leitura, professor, promova reflexões e discussões sobre a semelhança de triângulos a que o texto se refere. Destaque, sobretudo, as relações métricas desenvolvidas a partir das proporções entre os lados dos triângulos semelhantes indicados, com ênfase, sobretudo, ao Teorema de Pitágoras. Para a apresentação da Atividade 2, cabe propor a leitura do texto introdutório e o recorte das peças do **ANEXO 1**. Os estudantes vão precisar de tempo disponível para realizarem as experimentações e responderem às perguntas. Em seguida, é possível discutir as respostas deles juntamente com a realização da leitura do texto que vem após o enunciado. Disponibilize tempo para pensarem e responderem aos demais questionamentos. É interessante discutir a respeito. Para concluir essas atividades, apresente o vídeo ***Teorema de Pitágoras*** (TV Escola – MEC. Teorema de Pitágoras. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=NQjxroaxY8o>. Acesso em: 21 ago. 2020.), que é um trecho do vídeo ***O Barato de Pitágoras*** (TV Escola – MEC. O Barato de Pitágoras. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=kHIZxwgpNLs>. Acesso em: 21 ago. 2020.), produzido pela TV Escola – MEC. Se considerar interessante, professor, exiba também o vídeo ***O Barato de Pitágoras*** completo. Recomende que devem estar atentos, já que terão que registrar as principais informações tratadas no vídeo.

internos correspondentes são congruentes, já que o ângulo no vértice D é comum aos dois triângulos, $C\hat{A}D \equiv \hat{B}$ e $D\hat{A}B \equiv \hat{C}$.

As semelhanças entre esses triângulos nos garantem que são verdadeiras as proporções:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{b}{n}=\frac{c}{h}} \quad \boxed{\frac{a}{c}=\frac{b}{h}=\frac{c}{m}} \quad \boxed{\frac{b}{c}=\frac{n}{h}=\frac{h}{m}}$$

De onde podemos verificar que:

$\frac{a}{b}=\frac{b}{n}\Rightarrow b^2=a\cdot n$	$\frac{a}{c}=\frac{c}{m}\Rightarrow c^2=a\cdot m$
$\frac{a}{c}=\frac{b}{h}\Rightarrow a\cdot h=b\cdot c$	$\frac{n}{h}=\frac{h}{m}\Rightarrow h^2=m\cdot n$

Partindo-se, então, dessas relações e também considerando que no triângulo inicial ABC ocorre $a=m+n$, se somarmos b^2 com c^2, obtemos:

$$\boxed{b^2+c^2=a\cdot n+a\cdot m=a(m+n)=a\cdot a=a^2}$$

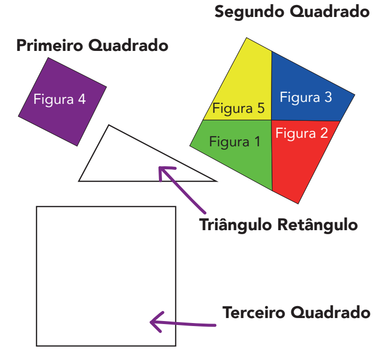
que resulta no Teorema de Pitágoras: $\boxed{b^2+c^2=a^2}$.

2. **Experimentação para interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras:** Agora que você já conhece algumas das expressões algébricas que relacionam lados, projeções dos catetos e altura relativa à hipotenusa de triângulos retângulos, vamos realizar uma atividade experimental. Para começar, observe e recorte os seis polígonos que estão desenhados no **ANEXO 1** dessa Sequência de Atividades. Agora, por sobreposição, encaixe as peças no local correto de forma que seja possível comparar as medidas das áreas das Figuras 1, 2, 3, 4 e 5 com a da Figura 6. Feita essa sobreposição, observe atentamente a figura obtida e responda:

a. Que figuras são necessárias para obter a Figura 6?

RESPOSTA: A Figura 6 é composta de três quadrados (Primeiro quadrado: Figura 4; segundo quadrado: união das Figuras 1, 2, 3 e 5; e um terceiro quadrado que se encontra em branco) e um triângulo retângulo.

Professor, a sobreposição revelou a composição da Figura 6 como representada abaixo:

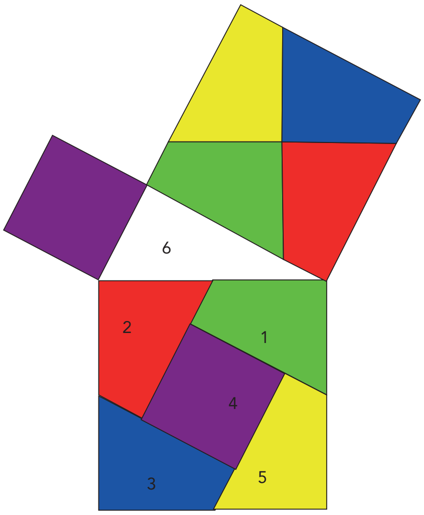


Fonte: Portal do Professor – MEC (2009)

Perceba que os lados do triângulo central correspondem aos lados dos três quadrados. Se chamarmos o lado do primeiro quadrado de b, diremos que sua área é igual a b^2 e ainda que um dos catetos do triângulo retângulo também mede b. Se dissermos que o lado do segundo quadrado tem c unidades, chegamos que sua área será c^2 e o outro cateto do triângulo também é igual a c. E ainda, se considerarmos que o terceiro quadrado tem lado medindo a unidades, podemos garantir que sua área é igual a a^2 e que a medida da hipotenusa desse triângulo é igual a a.

b. Para um outro momento de exploração, manipule as peças novamente e responda: você consegue encaixar perfeitamente as figuras 1, 2, 3, 4 e 5 de modo a obter o terceiro quadrado? Faça testes para verificar.

Professor, consideramos relevante retomar os nomes dos lados do triângulo retângulo e ressaltar que a hipotenusa é o maior lado porque está oposto ao maior ângulo, que é o de 90°, e que os catetos, juntos, formam esse ângulo reto. Após uma nova manipulação, os estudantes deverão obter uma figura como a que está representada na imagem abaixo:



Fonte: Portal do Professor – MEC (2009)

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, se quiser conhecer mais sobre essa proposta, acesse o link http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1645. A atividade é intitulada: Teorema de Pitágoras – Atividade Concreta (OLIVEIRA e MALAGUTTI, 2009).

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, os estudantes podem socializar seus registros referentes ao vídeo. Convide alguns deles para fazerem a leitura em voz alta de suas anotações. Nesse momento, promova um debate sobre as conclusões acerca dos conceitos estudados durante a aula, assim, poderá perceber possíveis dúvidas e dificuldades que os estudantes tenham enfrentado.

2ª série

AULAS 3 E 4: FENÔMENOS PERIÓDICOS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso, recursos para exibição de vídeo.

INICIANDO

Para o início das aulas sugerimos um diálogo sobre a temática que será tratada. Essa conversa pode abordar reflexões sobre fenômenos periódicos, ou seja, que se repetem da mesma maneira em um mesmo intervalo de tempo. Questione a turma se eles lembram de fenômenos da natureza que têm essa característica. Alguns exemplos podem ser citados, como as fases da Lua, as estações do ano, o movimento dos planetas, entre outros. O movimento do sol também é um bom exemplo a ser utilizado, pois aparece pela manhã e se põe no final da tarde, determinando o período de tempo que chamamos de dia.

DESENVOLVENDO

Após as discussões iniciais, proponha a realização coletiva das Atividades 1 e 2, contudo, disponibilize alguns minutos para que os estudantes possam pensar a respeito dos contextos envolvidos e trazer possíveis respostas e caminhos para a resolução. O momento das discussões é de extrema importância. Incentivar a participação da turma é indispensável. Após tais discussões, exiba o vídeo ***Desenhando Ondas*** (MEC – FNDE – Secretaria de Educação à Distância. Desenhando ondas. Matemática Multimídia. UNICAMP. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1086>. Acesso em: 22 ago. 2020.). Lembre-se de recomendar a atenção dos estudantes enquanto o assistem, argumentando que a Atividade 3 prevê registros importantes sobre o vídeo com discussões posteriores. É necessário tempo para a socialização das anotações e reflexões sobre o que apresenta o vídeo. Ressalte, professor, o conceito de função periódica, a ideia de período e sua representação gráfica. A observação do gráfico apresentado no vídeo para a percepção de alguns elementos das funções periódicas

Vamos às conclusões.

c. Retomando os resultados obtidos a partir da observação e da manipulação das peças, preencha os espaços vazios de modo que deixem o texto com sentido e com informações corretas:

A peça 4 tem área b^2 e juntando as peças 1, 2, 3 e 5 obtivemos uma figura com área igual a c^2. Após manipular todas as peças novamente, percebemos que a área do terceiro quadrado corresponde à soma dessas duas outras áreas e como havíamos informado que ela valia a^2, concluímos que: $a^2 = b^2 + c^2$. Essa expressão corresponde ao Teorema de Pitágoras. Portanto, podemos enunciar que, segundo o Teorema de Pitágoras, no triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

d. A última etapa dessa atividade consiste em assistir, com muita atenção, ao vídeo que será exibido, registrar as principais informações e apresentar oralmente à turma o que julgar mais importante.

RESPOSTA PESSOAL:

Professor, embora seja uma resposta subjetiva e, portanto, pessoal, é importante que os estudantes indiquem que o vídeo traz informações sobre o Teorema de Pitágoras, que cita triângulos em diversos objetos para dar estabilidade sem deformar como, por exemplo, tripé, estruturas em prédios e ripa na diagonal de portões. Além disso, apresenta a definição e classificação de triângulos quanto aos lados e fala a respeito da importância do triângulo retângulo.

AULAS 3 E 4 – FENÔMENOS PERIÓDICOS

Objetivos da aula:
- Reconhecer os principais elementos de fenômenos periódicos.

1. Suponha que hoje seja terça-feira. Se você desejar pensar, sem olhar o calendário, sobre que dia da semana será daqui 12 dias, por exemplo, como você fará? Como descobrir isso?

RESPOSTA: A resposta é pessoal, mas uma possibilidade é organizar a seguinte discriminação: Domingo = 0; Segunda = 1; Terça = 2; Quarta = 3; Quinta = 4; Sexta = 5; Sábado = 6. Os números associados aos dias da semana podem ser vistos como os restos de uma divisão por 7, já que cada período completo de uma semana tem sete dias, ou seja, ao final de uma semana completa, o ciclo recomeça.

Então, sendo hoje uma terça-feira, para saber o dia da semana em que estaremos daqui 12 dias podemos fazer: 2 + 12 = 14 cujo resto, ao dividirmos por 7, é zero, logo será um domingo.

Professor, se considerar interessante, destaque que, com informações extras, como o número de dias em cada mês e determinando se um dado ano é ou não bissexto, é possível saber o dia da semana de qualquer data em qualquer ano.

2ª série

2. E se pensarmos sobre um relógio que marca as horas no formato AM/PM, há ciclos? Discuta sobre isso com a sua dupla e registre as conclusões.

RESPOSTA: Há ciclos de 12 horas o que significa que a cada período de 12h é como se os ponteiros recomeçassem a contagem. Sendo assim, fica simples entender por que 3h da tarde é indicado por 15h, pois já passaram 3h depois de um ciclo completo.

3. Esteja atento às informações apresentadas no vídeo ***Desenhando ondas***[1] que será exibido. Ao final haverá um momento de discussão sobre os conceitos abordados, então, registre suas percepções a respeito dos conceitos que foram tratados.

RESPOSTA: A resposta é pessoal, mas é importante que os estudantes registrem informações quanto à ideia de funções periódicas, período, frequência de onda, bem como informações sobre a função seno. Além disso, é indispensável que os estudantes observem o comportamento da curva que corresponde ao gráfico das funções periódicas apresentadas no vídeo.

AULAS 5 E 6 – GRÁFICO DE FUNÇÕES PERIÓDICAS

Objetivos da aula:
- Construir o gráfico de funções periódicas.

1. Vamos investigar o comportamento da função $f(x) = (-1)^x$, $f: N \to N$. . Para começar, preencha o quadro com os valores corretos:

x	$f(x) = (-1)^x$
0	$f(x) = (-1)^0 = 1$
1	$f(x) = (-1)^1 = -1$
2	$f(x) = (-1)^2 = 1$
3	$f(x) = (-1)^3 = -1$
4	$f(x) = (-1)^4 = 1$
5	$f(x) = (-1)^5 = -1$

Percebam que os valores de $f(x)$ têm uma regularidade. Ocorre, nesse caso, que $f(x) = f(x+p)$ para todo valor de x do domínio. Quando isso acontece, dizemos que se trata de uma função periódica. Além disso, o menor valor de p é o período da função. Sendo assim, qual é o período de $f(x) = (-1)^x$?

RESPOSTA: Essa função tem período igual a 2 porque $f(x) = f(x+2) = f(x+4)$.

1 MEC – FNDE – Secretaria de Educação à Distância. Desenhando ondas. Matemática Multimídia. UNICAMP. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1086>. Acesso em: 22 ago. 2020.

AULAS 5 E 6 – GRÁFICO DE FUNÇÕES PERIÓDICAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

Professor, para essa aula há a proposição de quatro atividades que tratam da representação geométrica de funções periódicas a partir das quais destacamos as funções trigonométricas. Então, o início pode ser com um diálogo de retomada sobre as atividades já realizadas com essa abordagem. Promova a leitura dirigida dos enunciados.

DESENVOLVENDO

No decorrer da aula, motive os estudantes a se envolverem ativamente na resolução das questões, bem como na participação durante as correções. Para as atividades desse dia, consideramos pertinente que as situações sejam lidas, interpretadas e resolvidas nas duplas. Disponibilize o áudio intitulado ***Tempestades Solares*** (MEC – FNDE – Secretaria de Educação à Distância. Tempestades Solares. Matemática Multimídia. UNICAMP. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1353>. Acesso em: 22 ago. 2020.) e oriente os alunos a anotarem informações que considerem importantes. Após discutirem sobre o merece atenção. Questione se os estudantes lembram de funções com essas características.

FINALIZANDO

O encerramento da aula pode acontecer com a fala de cada dupla apresentando um dos conceitos que foram estudados sobre as funções periódicas além de sinalizarem, caso tenham ocorrido, possíveis dificuldades ou dúvidas.

que apresenta o áudio, disponibilize tempo para a resolução das Atividades 3 e 4, com posterior correção.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, retome com os estudantes situações que envolvem fenômenos periódicos. É possível olhar novamente para as atividades desenvolvidas nessa aula, enfatizando as características das funções periódicas, sobretudo, as propriedades de seus gráficos. Incentive a participação dos estudantes, para que explicitem possíveis dúvidas e dificuldades.

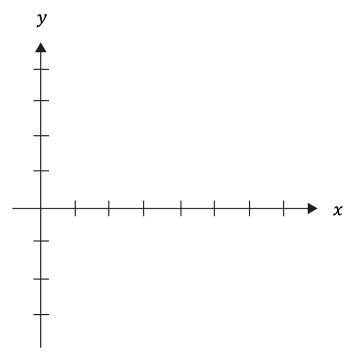
2. Acompanhe com atenção o áudio que o professor vai disponibilizar intitulado ***Tempestades Solares***[2]. Registre as principais informações.

RESPOSTA: A resposta é pessoal, mas é importante que os estudantes registrem informações quanto à ideia de funções periódicas, período, bem como informações sobre a função seno.

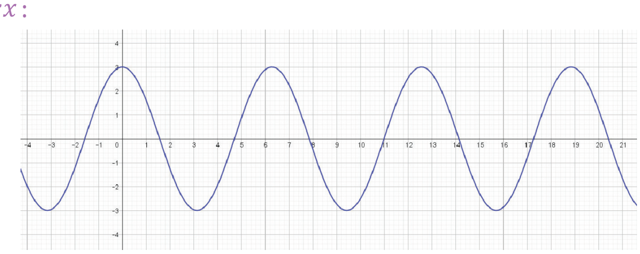
3. Os eixos ortogonais a seguir devem ser utilizados para a construção do gráfico de cada função indicada. Para tanto, comece realizando os cálculos necessários e preenchendo o quadro abaixo.

a. $y = 3.cosx$

x	$Cosx$	$y = 3.cosx$	(x, y)
0°	1	y = 3 . 1 = 3	(0°, 3)
90°	0	y = 3 . 0 = 0	(90°, 0)
180°	-1	y = 3 . (- 1) = - 3	(180°, - 3)
270°	0	y = 3 . 0 = 0	(270°, 0)
360°	1	y = 3 . 1 = 3	(360°, 3)



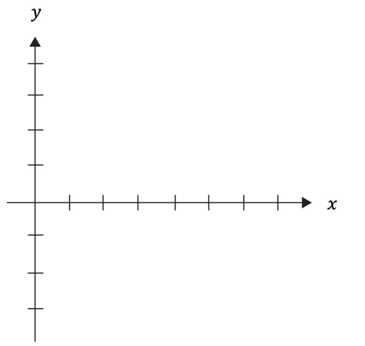
Professor, marcando os pontos cujas coordenadas estão no quadro, o aluno deverá encontrar, para $y = 3.cosx$:



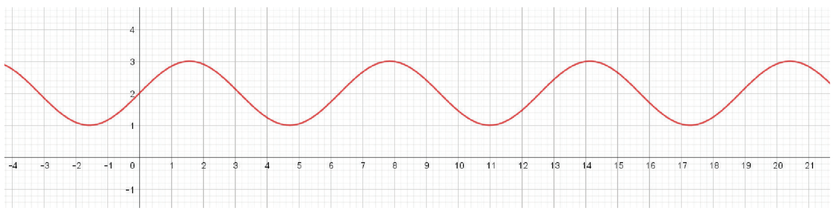
2 MEC – FNDE – Secretaria de Educação à Distância. Tempestades Solares. Matemática Multimídia. UNICAMP. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1353>. Acesso em: 22 ago. 2020.

b. $y = 2 + senx$

x	$Senx$	$y = 2 + senx$	(x, y)
0°	0	y = 2 + 0 = 2	(0°, 2)
90°	1	y = 2 + 1 = 3	(90°, 3)
180°	0	y = 2 + 0 = 2	(180°, 2)
270°	-1	y = 2 - 1 = 1	(270°, 1)
360°	0	y = 2 + 0 = 2	(360°, 2)

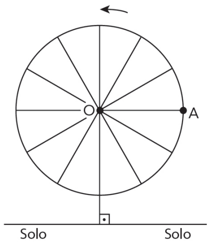


Professor, marcando os pontos cujas coordenadas estão no quadro, o aluno deverá encontrar, para $y = 2 + senx$:

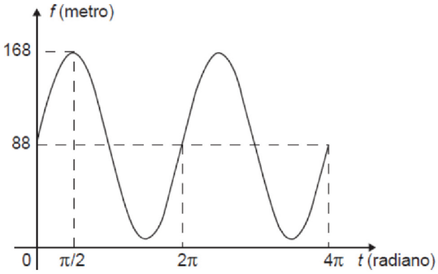


ANOTAÇÕES

4. (ENEM 2018) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam **t** o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e ***f*** a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de **t**. Após duas voltas completas, ***f*** tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por

a. $f(t) = 80\text{sen}(t) + 88$

b. $f(t) = 80\cos(t) + 88$

c. $f(t) = 88\cos(t) + 168$

d. $f(t) = 168\text{sen}(t) + 88\cos(t)$

e. $f(t) = 88\text{sen}(t) + 168\cos(t)$

RESPOSTA: Vamos resgatar o que já discutimos sobre as propriedades do gráfico das funções trigonométricas e observar a representação gráfica disponibilizada no enunciado. A partir disso, considerando a função $f(t) = a + b.\text{ sen } t$, como $f(0) = 88$, temos que: $88 = a + b\,.\text{ sen } 0$, de onde concluímos que $a = 88$. Como $f(\frac{\pi}{2}) = 168$, também temos que: $168 = 88 + b\,.\text{ sen }\frac{\pi}{2}$ e, então, $b = 80$. Desse modo, retornando a $f(t) = a + b.\text{ sen } t$, concluímos que o gráfico aprsentado corresponde à função $f(t) = 88 + 80.\text{ sen } t$.

AULAS 7 E 8 – PAINEL DE QUESTÕES

Objetivos da aula:

- Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

1. Pense sobre todos os conceitos que foram estudados a respeito das funções periódicas até aqui. Use a criatividade e, juntamente com o seu colega de dupla, elabore um problema que seja possível solucionar a partir desses conceitos. Para isso, você poderá consultar as atividades anteriores sobre o assunto e novamente assistir aos vídeos e ouvir os áudios que foram utilizados nas aulas. Após a elaboração, troque o seu problema com a dupla vizinha e resolva. Para finalizar, escreva o seu problema em uma folha de sulfite à parte e, em conjunto com os demais colegas de classe, seguindo as orientações do professor, disponibilize-o em cartolina ou papel kraft para a produção de um painel que permanecerá exposto na sala de aula.

RESPOSTA PESSOAL

AULAS 7 E 8 – PAINEL DE QUESTÕES

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso, papel sulfite, cartolina ou papel kraft, *software* Geogebra (versão para computador ou aplicativo para smartphone).

INICIANDO

Professor, para as últimas aulas dessa Sequência propomos a elaboração de um problema incluindo um contexto de fenômenos periódicos. Inicie conversando sobre a importância de serem criativos e que esse tipo de atividade contribui com o desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à comunicação e argumentação, bem como da escrita matemática.

DESENVOLVENDO

Oriente cada dupla a elaborar um problema que relacione fenômenos periódicos. Para isso, recomende que eles poderão consultar as atividades anteriores sobre o assunto, bem como revisitar os vídeos e áudios que foram disponibilizados no decorrer dessa Sequência de Atividades e usarem o *software* livre *Geogebra* para a construção de gráficos. Informe que após a elaboração, as duplas trocarão entre si os seus problemas para que uma resolva o que foi elaborado pela outra.

Além disso, cada dupla deverá escrever a sua situação em uma folha de sulfite à parte para a organização dessas produções em um painel, em cartolina ou papel kraft, que será exposto na própria sala de aula.

FINALIZANDO

Por fim, promova um momento de socialização, com discussões sobre as questões elaboradas pelas duplas e suas respectivas resoluções. Ouvir os argumentos com atenção é muito importante. É uma interessante oportunidade de os estudantes explicitarem a organização de seus pensamentos frente à cada problema. Além disso, falar sobre como articularam o trabalho colaborativo na dupla é válido. Caso sejam indicadas dúvidas, professor, busque esclarecê-las. A socialização dos caminhos usados para resolver os problemas é uma importante ferramenta para aumentar o repertório matemático dos estudantes.

ANOTAÇÕES

ANEXO 1 (PARA RECORTAR)

Figura 1

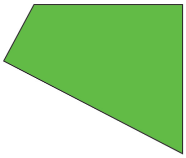


Figura 2

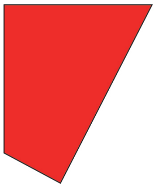


Figura 3

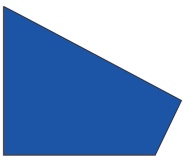


Figura 4

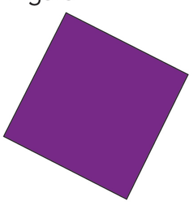


Figura 5

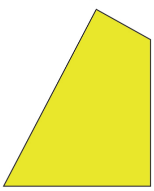
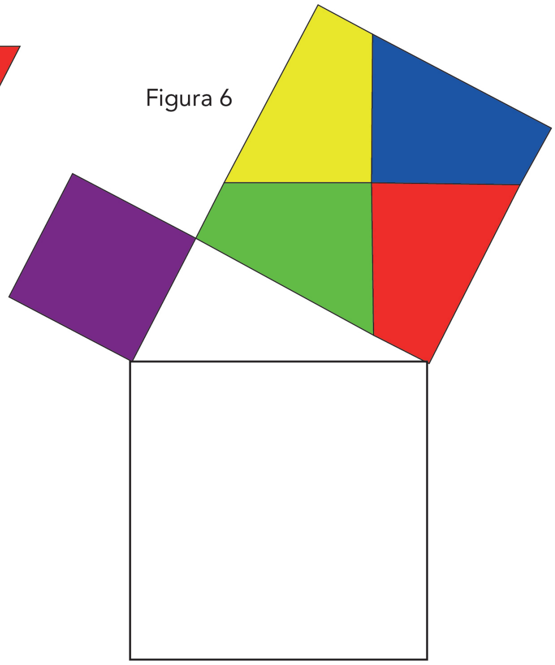
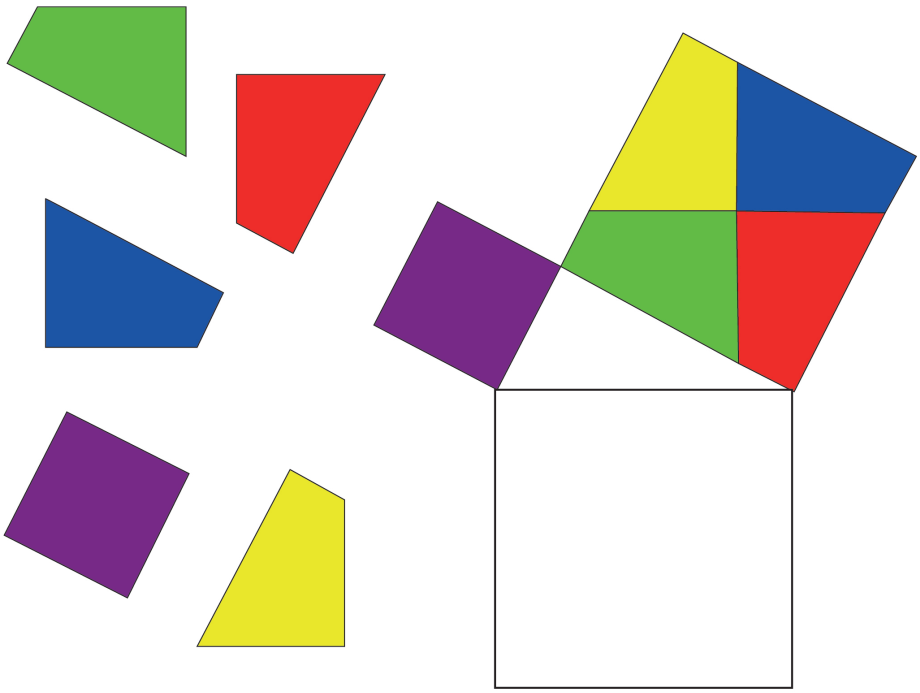


Figura 6



ANOTAÇÕES

ANEXO 2 (PARA RECORTAR)



ANOTAÇÕES

2ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 04

2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATÉRIAS**
4	Relações Trigonometria: Funções trigonométricas	Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o seno, o cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos e aplicá-las em diversos contextos.	**Algumas atividades dessa habilidade encontram-se no Caderno do 2ªsérie:** Vol. 1 – Tema 3: Gráficos de funções periódicas envolvendo senos e cossenos.

Os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam trigonometria.

HABILIDADE: Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente seno, cosseno e tangente), sabendo construir seus gráficos e aplicá-las em diversos contextos.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	Das voltas que uma circunferência dá
3ª e 4ª/ 90 min	Graus, radianos e a circunferência trigonométrica
5ª e 6ª/ 90 min	Gráficos
7ª e 8ª/ 90 min	Mais gráficos

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 4

AULAS 1 E 2 - DAS VOLTAS QUE UMA CIRCUNFERÊNCIA DÁ

Objetivos da aula:

- Estabelecer o número π como a razão entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas.

Para as próximas atividades, você realizará uma tarefa prática que consiste em utilizar instrumentos de medidas, fita métrica ou barbante/linha e régua, para verificar comprimentos e diâmetros de circunferências. Além disso, utilizará calculadora para determinar as razões entre essas grandezas e, a partir daí, algumas investigações serão propostas.

1. Mão na massa: Para começar, utilize fita métrica ou barbante/linha e régua para medir o comprimento e o diâmetro dos cinco (5) objetos que lhes foram disponibilizados. Realize as medições e os cálculos necessários e preencha, completamente, a tabela a seguir com as informações solicitadas. Para os cálculos, você poderá usar calculadora.

OBJETO	MEDIDAS		
	Comprimento ***(C)***	Diâmetro ***(d)***	$\frac{C}{d}$

2. Investigações: Observe, com atenção, os dados numéricos que estão na tabela. Verifique coluna por coluna. Lembre-se de que, em cada linha, as medidas correspondem a um objeto diferente e responda:

a. Os objetos que você mediu têm comprimentos iguais? E os diâmetros, são iguais ou diferentes?

RESPOSTA PESSOAL

AULAS 1 E 2: DAS VOLTAS QUE UMA CIRCUNFERÊNCIA DÁ

OBJETIVOS DA AULA

Estabelecer o número π como a razão entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante, objetos circulares, fita métrica ou barbante/linha e régua.

INICIANDO

Professor, para a concretização das atividades dessa aula, são necessários objetos circulares de variados tamanhos, fita métrica ou barbante/linha e régua. Disponha desses materiais ou combine, antecipadamente, que os estudantes tragam. A aula pode ser iniciada com a apresentação do **Caderno do Estudante** e um diálogo sobre as ideias centrais das atividades dessa Sequência. Ressalte que, para as primeiras aulas, eles vivenciarão uma atividade prática, com experimentações que incluem medições e cálculos referentes a objetos circulares, usando instrumentos de medidas de comprimento e calculadora.

DESENVOLVENDO

Após essa conversa, propomos a leitura compartilhada da Atividade 1 e a distribuição, entre as duplas, dos objetos que irão medir. Destaque a importância do uso correto dos instrumentos de medidas para evitar falhas nos resultados. Concluída essa etapa, é o momento da realização da Atividade 2, que envolve investigação. Indicamos, professor, que até esse momento, não é necessário referir-se ao valor de π. Consideramos que é mais interessante deixar que os estudantes percebam a constante, a partir dos cálculos e experimentações. Proponha tempo para as discussões. Em seguida, realize coletivamente a leitura do texto da Atividade 3 e disponibilize tempo para a realização.

FINALIZANDO

Sugerimos que a finalização aconteça por meio de discussões e reflexões quanto à Atividade 3. Nesse momento, resgatar os conceitos e as discussões realizadas sobre as Atividades anteriores pode contribuir significativamente. Incentive a participação dos estudantes, sobretudo para indicarem possíveis dificuldades e dúvidas com vistas a esclarecê-las.

b. Compare os valores obtidos para a última coluna. Há algum resultado que se destaca por ser muito diferente, maior ou menor, do que os outros dessa mesma coluna? Caso isso ocorra, refaça as medições do comprimento ***(C)*** e do diâmetro ***(d)*** e os cálculos da razão $\frac{C}{d}$.

RESPOSTA PESSOAL

c. A que conclusão você chega: os valores que aparecem na última coluna são iguais, diferentes ou aproximados?

RESPOSTA: São próximos a 3,1.

d. A partir dessas investigações, o que você poderia afirmar sobre a razão $\frac{C}{d}$ para um objeto cujo comprimento ***(C)*** da circunferência é igual a 15 cm e o diâmetro ***(d)*** vale aproximadamente 4,8 cm?

RESPOSTA: Que vale aproximadamente 3,1.

e. Dessa forma, o que é possível concluir sobre a razão entre o comprimento ***(C)*** e o diâmetro ***(d)*** de uma mesma circunferência?

RESPOSTA: Independente do valor do comprimento e do diâmetro da circunferência, a razão entre essas medidas é constante e vale aproximadamente 3,1.

ANOTAÇÕES

3. Após as suas medições, cálculos e investigações, foi possível verificar que, embora sejam utilizadas circunferências distintas, isso é, com comprimento e/ou diâmetro com medidas diferentes, a razão entre essas duas grandezas permanece a mesma. Essa razão é constante para qualquer circunferência. É um importante número irracional e recebe o nome de "Pi", representado pela letra grega π. Saber que é um número irracional garante afirmar que é um número decimal com infinitas casas, não periódicas.

$$\pi = 3{,}14159265359\ldots$$

a. Os estudos realizados mostraram que: $\frac{C}{d} = \pi \Rightarrow C = d \cdot \pi \Rightarrow C = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Dessa forma, estamos dizendo que o comprimento de uma circunferência é igual

Ao produto do valor do diâmetro por 3,14 ou, então, duas vezes 3,14, vezes a medida do raio da circunferência.

b. No protótipo antigo de uma bicicleta, conforme a figura abaixo, a roda maior tem raio medindo 55 cm e a roda menor tem 15 cm de raio. Calcule o comprimento de cada circunferência que corresponde às rodas da bicicleta.

Agora responda: quantas voltas a roda menor precisa dar para equivaler a uma única volta da roda maior? Explique como você chegou a essa conclusão.

RESPOSTA: Serão necessárias quase 4 voltas (3,6 voltas), que é o resultado da divisão do comprimento da roda maior pelo comprimento da roda menor:

$C_{maior} = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 55 = 345{,}4$ cm

$C_{menor} = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 15 = 94{,}2$ cm

2ª série

AULAS 3 E 4: GRAUS, RADIANOS E A CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

OBJETIVOS DA AULA

Identificar e localizar, na circunferência trigonométrica, a extremidade final de arcos dados em graus ou em radianos;
Converter, para radianos, uma medida de arco expressa em graus;
Identificar as simetrias presentes na circunferência trigonométrica;
Obter a menor determinação positiva de um arco qualquer.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Carteiras dispostas em formato de U, ou semicírculo, para a realização das atividades individualmente.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso e régua.

INICIANDO

Para o início das aulas, sugerimos um diálogo sobre a temática que será tratada. Essa conversa pode abordar reflexões sobre trigonometria, para verificar o que os estudantes lembram a respeito e resgatarem conceitos importantes. Informe que as atividades serão resolvidas individualmente, mas a partir de leituras coletivas dos enunciados. Professor, é interessante orientar os estudantes a olharem as atividades, antes mesmo de iniciarem as leituras e resoluções.

AULAS 3 E 4 - GRAUS, RADIANOS E A CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Objetivos da aula:
- Identificar e localizar, na circunferência trigonométrica, a extremidade final de arcos dados em graus ou em radianos;
- Converter, para radianos, uma medida de arco expressa em graus;
- Identificar as simetrias presentes na circunferência trigonométrica;
- Obter a menor determinação positiva de um arco qualquer.

1. A unidade de medida grau é uma das mais usadas para representarmos ângulos e arcos. Contudo, há uma outra unidade bastante usual chamada de radiano, abreviada como rad. A medida de 1 radiano (1 rad) corresponde a um arco de circunferência em que o comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém. Circunferências com 1 cm de raio têm arco de 1 rad com comprimento igual a 1 cm. Circunferências com 2 cm de raio têm arco de 1 rad com comprimento igual a 2 cm e assim por diante. Agora pense:

a. O que acontece com o arco de uma circunferência completa, ou seja, quantos radianos correspondem ao arco de uma circunferência completa?

RESPOSTA: Como discutimos na atividade anterior, o comprimento de uma circunferência é dado por $C=2\cdot\pi\cdot r$, onde r é o seu raio. Sendo assim, o arco de uma circunferência completa corresponde a $2\cdot\pi\,rad$.

b. Com essas discussões, que correspondência podemos estabelecer entre as unidades grau e radiano?

RESPOSTA: Com o que concluímos na questão anterior, o arco de uma circunferência completa corresponde a $2\cdot\pi$ rad que equivale a uma volta completa ou 360°, de onde temos a relação: $2\cdot\pi$ rad=360°. Dessa forma, podemos concluir, também, que π rad equivale a meia volta ou 180°. A partir dessas relações, é possível transformar qualquer medida de grau para radiano e vice-versa.

c. Transforme as unidades de medidas solicitadas:

- 30° em radianos

RESPOSTA: Usando a relação explicitada na questão anterior, temos:
temos:

$$\pi\,rad = 180^\circ \qquad x\,rad = 30^\circ \qquad x = \frac{30\,\pi}{180}\,rad = \frac{\pi}{6}\,rad$$

- $\frac{\pi}{4}rad$ em graus

$$\pi\,rad = 180^\circ \qquad \frac{\pi}{4}\,rad = x^\circ \qquad \pi . x\,rad = \frac{\pi}{4} . 180\,rad \qquad x = 45^\circ$$

2. Ciclo trigonométrico é uma circunferência unitária orientada, associada ao sistema de coordenadas cartesianas, cujo centro coincide com a origem desse sistema. O ciclo, ao se interligar ao sistema de coordenadas, define quatro regiões iguais (quadrantes), numeradas de 1 a 4, de onde se convencionou o sentido anti-horário como positivo, a partir do ponto A indicado na figura. Quando o deslocamento acontece no sentido horário, significa que estamos marcando arcos negativos. A cada arco, se associa o ângulo central a ele correspondente. Tendo isso em vista, utilize a figura a seguir para marcar:

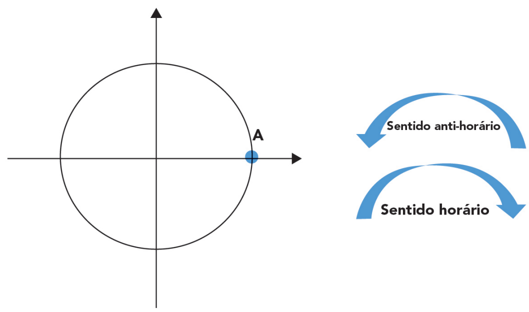
a. A extremidade dos arcos que medem: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270° e 360°.

b. A extremidade do arco simétrico a 60°, mas situado no II quadrante.

c. A extremidade do arco simétrico a 45°, no III quadrante.

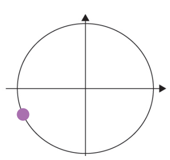
d. A extremidade do arco simétrico a 30°, situado no IV quadrante

e. A extremidade dos arcos: $\frac{2\pi}{3}rad, \frac{5\pi}{4}rad, \frac{3\pi}{2}rad, \frac{11\pi}{6}rad$



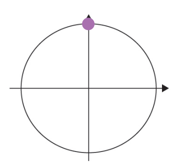
3. Alguns arcos têm a mesma extremidade. Eles são chamados de arcos côngruos. Vejamos o que ocorre com os pares a seguir. Represente-os nas circunferências trigonométricas seguintes e verifique se são arcos côngruos:

a. 210° e – 150°



$210° \equiv -150°$

b. $\frac{\pi}{2}rad$ e $\frac{9\pi}{2}rad$



$\frac{\pi}{2}rad \equiv \frac{9\pi}{2}rad$

RESPOSTA: Em ambos os casos, temos pares de arcos côngruos, já que têm a mesma extremidade, como mostram as figuras.

DESENVOLVENDO

Após a conversa inicial, encaminhe a leitura compartilhada da Atividade 1 e disponibilize tempo para a resolução, com posterior discussão. Nesse momento, partindo do conceito de 1 radiano, propomos reflexões e investigações com vistas à verificação das relações entre graus e radianos por meio da observação sobre o que ocorre com o arco de uma circunferência completa. Para as Atividades seguintes, informe que eles poderão usar régua, caso considerem necessário, para as tarefas que requerem marcações na circunferência trigonométrica. De modo similar, consideramos pertinente a leitura compartilhada dos enunciados com tempo para a realização e discussões das demais Atividades. Professor, as atividades, aqui propostas, têm como foco principal a circunferência trigonométrica a partir da qual recomendamos reflexões relativas à localização de arcos, estudos de simetria e menor determinação positiva. Dessa forma, tratar das razões trigonométricas e retomar as ideias de fenômenos periódicos, bem como relembrar sobre o plano cartesiano, faz todo sentido.

FINALIZANDO

Para o encerramento da aula, professor, é interessante conversar com os estudantes sobre possíveis dúvidas ou dificuldades que sentiram no decorrer da realização das atividades. Então, propomos que seja feita uma breve retomada sobre as questões, incentivando a participação dos estudantes de forma oral.

4. Perceba que a diferença entre arcos côngruos é um múltiplo de 360° ou 2π rad. Verifique essa afirmação nos casos seguintes:

a. 15° e 735°

a) 735° - 15° = 720° = 2 . 360°, ou seja, a diferença corresponde a duas voltas completas.

b. $\frac{13\pi}{2} rad$ e $-\frac{\pi}{2} rad$

b) $\frac{13\pi}{2} rad + \frac{\pi}{2} rad = \frac{14\pi}{2} rad = 7\pi\, rad$

Acontece que $7\pi\, rad$ não corresponde a uma quantidade de voltas completas, logo, $\frac{13\pi}{2} rad$ e $-\frac{\pi}{2} rad$ não são côngruos.

É possível verificar que existem infinitos arcos com mesma extremidade. Vejamos os exemplos, a partir de 60° e $\frac{\pi}{4} rad$.

$60° = (60° + 0 \cdot 360°)$	$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\pi}{4} + 0 \cdot 2\pi\right)$
$420° = (60° + 1 \cdot 360°)$	$\frac{9\pi}{4} = \left(\frac{\pi}{4} + 1 \cdot 2\pi\right)$
$780° = (60° + 2 \cdot 360°)$	$\frac{17\pi}{4} = \left(\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi\right)$

A partir desses valores, podemos generalizar escrevendo $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$, com $k \in Z$, ou ainda $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360°$, com $k \in Z$, como expressões gerais que representam a 'família' de arcos côngruos a α_0, onde k indica o número de voltas. O arco de medida α_0 tal que $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$ rad ou $0° \leq \alpha_0 < 360°$ é denominado **primeira ou menor determinação positiva**. Além disso, $k > 0$ significa sentido anti-horário e $k < 0$, sentido horário.

Dessa forma, temos o posicionamento de arcos com mais de uma volta da seguinte maneira:

Primeira determinação positiva entre	Extremidade situada no
0° e 90° ou 0 e $\frac{\pi}{2}$ rad	**I quadrante**
90° e 180° ou $\frac{\pi}{2}$ rad e π rad	**II quadrante**
180° e 270° ou π rad e $\frac{3\pi}{2}$ rad	**III quadrante**
270° e 360° ou $\frac{3\pi}{2}$ rad e 2π	**IV quadrante**

2ª série

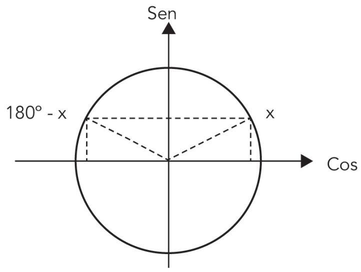
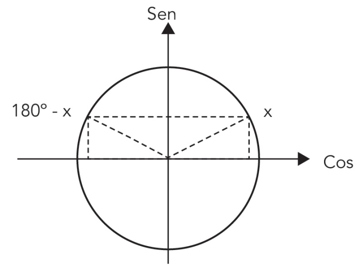
5. Mais simetrias no ciclo trigonométrico

No ciclo trigonométrico, os cossenos são indicados no eixo horizontal e o eixo vertical marca os senos. Assim, é possível saber o sinal do cosseno e do seno de um arco sabendo a localização de suas extremidades. Em resumo:

Localização da extremidade do arco x	Cosseno	Seno
I quadrante	Cos x > 0	Sen x > 0
II quadrante	Cos x < 0	Sen x > 0
III quadrante	Cos x < 0	Sen x < 0
IV quadrante	Cos x > 0	Sen x < 0
Eixo dos cossenos	Cos x = 1 ou Cos x = - 1	Sen x = 0
Eixo dos senos	Cos x = 0	Sen x = 1 ou Sen x = - 1

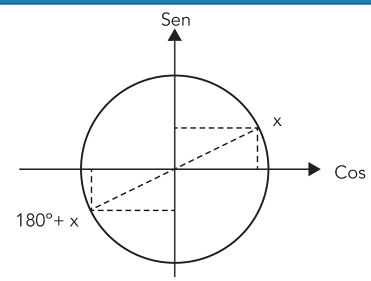
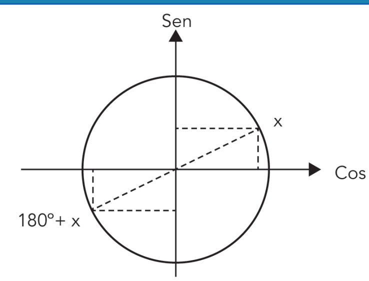
Por simetria é possível relacionar o cosseno e o seno de arcos de qualquer quadrante com aqueles de extremidade situadas no primeiro. Esse procedimento é chamado de **redução ao primeiro quadrante**. Vejamos o que acontece em cada quadrante:

• **Redução do segundo para o primeiro quadrante:**

Cosseno	Seno
 cos (180° - x) = - cos x	 sen (180° - x) = sen x

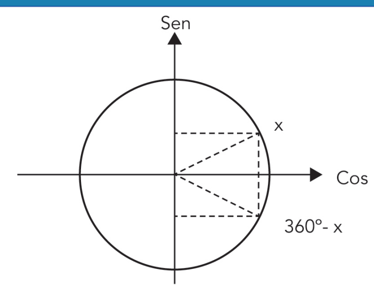
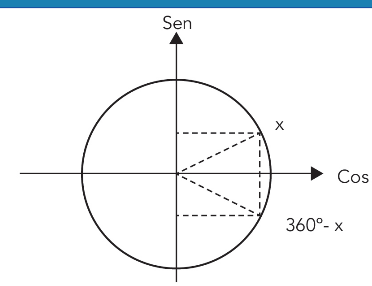
Observe que falta uma quantidade "x" para meia volta (180° equivale a π rad), de onde podemos concluir que arcos suplementares (x e 180° - x) têm cossenos simétricos e senos iguais.

• **Redução do terceiro para o primeiro quadrante:**

Cosseno	Seno
 cos (180°+x)= - cos x	 sen (180°+x)= - sen x

Os arcos x e 180° + x apresentam cossenos e senos simétricos.

• **Redução do quarto para o primeiro quadrante:**

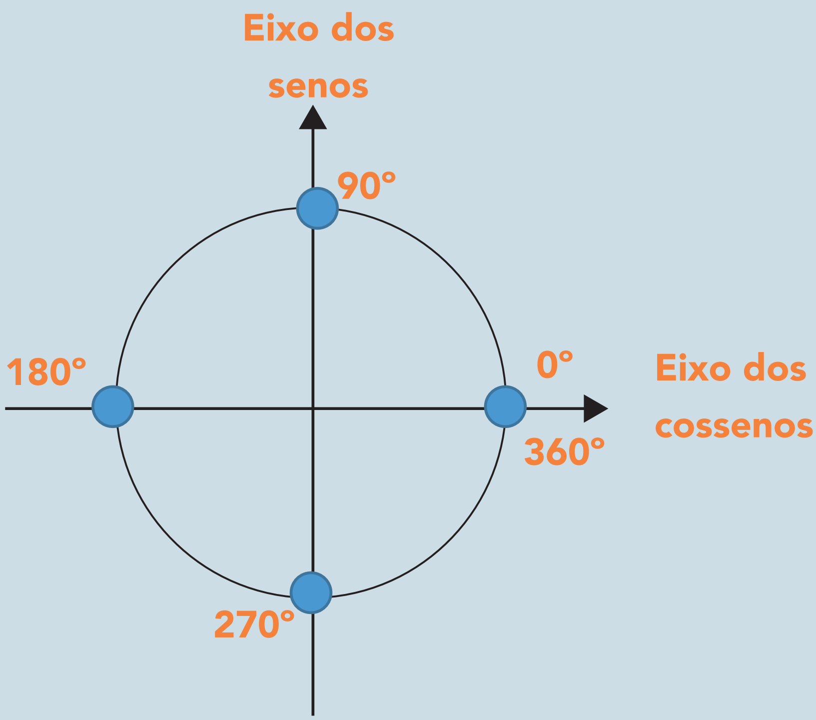
Cosseno	Seno
 cos (360°-x)= cos x	 sen (360°-x)= - sen x

Os arcos x e 360° - x apresentam cossenos iguais e senos simétricos.

ANOTAÇÕES

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, retome com os estudantes as principais características da circunferência trigonométrica.



AULAS 5 E 6 - GRÁFICOS

Objetivos da aula:
- Construir gráficos da função seno e cosseno a partir da tabela de valores;
- Construir gráficos da função seno e cosseno com o auxílio de um aplicativo de geometria dinâmica;
- Reconhecer as diferenças e as semelhanças entre os gráficos das funções y = senx e y = cosx.

1. Entender as características do ciclo trigonométrico pode ajudar a identificar os valores de cosseno e seno de alguns arcos importantes. Lembrando que a circunferência trigonométrica tem raio unitário, preencha o quadro com os valores corretos.

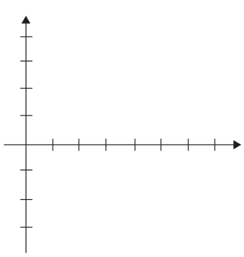
	0°	$90° = \frac{\pi}{2}$ rad	$180° = \pi$ rad	$270° = \frac{3\pi}{2}$ rad	$360° = 2\pi$ rad
Cosseno	1	0	-1	0	1
Seno	0	1	0	-1	0

2. A partir dos valores indicados acima, é possível estabelecer os seguintes pares ordenados para as funções y = cos x e y = sen x.

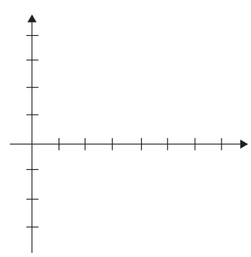
Cos x	(0°, 1)	(90°, 0)	(180°, - 1)	(270°, 0)	(360°, 1)
Sen x	(0°, 0)	(90°, 1)	(180°, 0)	(270°, - 1)	(360°, 0)

Desse modo, utilize os planos cartesianos abaixo para construir os gráficos dessas funções.

a. **y = cos x**



b. **y = sen x**



AULAS 5 E 6: GRÁFICOS

OBJETIVOS DA AULA

Construir gráficos da função seno e cosseno a partir da tabela de valores;
Construir gráficos da função seno e cosseno com o auxílio de um aplicativo de geometria dinâmica;
Reconhecer as diferenças e as semelhanças entre os gráficos das funções y = senx e y = cosx.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso, régua e software *Geogebra* (versão para computador ou aplicativo para smartphone).

INICIANDO

Professor, as atividades pensadas para essa aula são basicamente sobre construção e análise de gráficos de funções trigonométricas. Então, o início pode ser com um diálogo de retomada sobre as atividades já realizadas com essa abordagem. Assim, é interessante resgatar conhecimentos sobre a construção de gráficos de forma manual e utilizando o *Geogebra*. Ressalte que as atividades envolvem as diferentes formas de representação de funções, a saber, representações aritmética, algébrica e geométrica e as relações entre elas.

2ª série

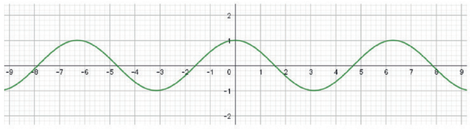
3. O que vai acontecer com o gráfico se tivermos interesse em considerar, também, o que ocorre com cosseno e seno de: - 90°, - 180°, - 270° e – 360°? Verifique preenchendo as tabelas de valores e construindo os gráficos.

x	Cos x	(x,y)
- 90°	0	(- 90°, 0)
- 180°	-1	(- 180°, - 1)
- 270°	0	(- 270°, 0)
- 360°	1	(- 360°, 1)
0°	1	(0°, 1)
90°	0	(90°, 0)
180°	-1	(180°, - 1)
270°	0	(270°, 0)
360°	1	(360°, 1)

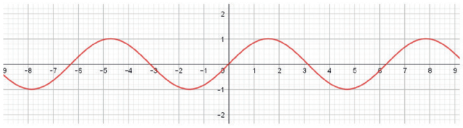
x	Sen x	(x,y)
- 90°	-1	(- 90°, -1)
- 180°	0	(- 180°, 0)
- 270°	1	(- 270°, 1)
- 360°	0	(- 360°, 0)
0°	0	(0°, 0)
90°	1	(90°, 1)
180°	0	(180°, 0)
270°	-1	(270°, -1)
360°	0	(360°, 0)

RESPOSTA:

y = cos x



y = sen x



4. Analise os gráficos da questão 3 e responda:

a. Quais são as principais características do gráfico de y = cos x?

RESPOSTA: Dentre as características do gráfico da função y = cos x, podemos destacar que é uma cossenoide, tem natureza periódica, corta o eixo y apenas no ponto (0, 1), seu domínio é o conjunto dos números reais e seu conjunto imagem é $\{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$.

DESENVOLVENDO

No decorrer da aula, é indispensável que os estudantes se sintam motivados a se envolverem ativamente na resolução das questões e na participação durante as verificações e discussões. Para as Atividades 1, 2, 3, professor, os gráficos são construídos partindo-se das representações aritméticas das funções. Para isso, a proposta é resgatar características da circunferência trigonométrica, no intuito de identificarem valores de cosseno e seno de alguns arcos notáveis que formarão os pares ordenados e serão marcados no plano cartesiano e, então, feitos os gráficos. Sugerimos uma conversa sobre a circunferência trigonométrica. Recomendamos que voltem às atividades anteriores que tratam sobre esse conceito. É muito importante que os estudantes notem que não há a obrigatoriedade de memorizarem os valores das razões trigonométricas, desde que eles sejam capazes de identificá-las na própria circunferência. Enfatize que estas Atividades recorrem à comparação entre os gráficos de y = cosx e y = senx. Convide os estudantes para a leitura oral de suas respostas. Para a Atividade 5, o processo é da representação algébrica para a geométrica, por meio de recursos digitais. Será necessário que os estudantes tenham acesso ao *software Geogebra*. Essa atividade pode, então, ser realizada no laboratório de informática ou com o aplicativo para smartphone. Professor, nesse momento, promova, também, discussões sobre as contribuições do uso da tecnologia informática para a aprendizagem da Matemática.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, os estudantes podem socializar seus gráficos produzidos à mão e com o *Geogebra*. Nesse momento, promova um debate sobre as conclusões acerca das vantagens em se utilizar recursos da informática, por exemplo, para a construção de gráficos.

b. Quais são as principais características do gráfico de y = sen x?

RESPOSTA: Dentre as características do gráfico da função y = sen x, podemos destacar que é uma senoide, tem natureza periódica, corta o eixo y na origem, ou seja, no ponto (0, 0), seu domínio é o conjunto dos números reais e seu conjunto imagem é $\{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$.

c. Você percebe semelhanças entre eles?

RESPOSTA: Os gráficos de y = cos x e y = sen x têm algumas semelhanças, das quais podemos citar que têm natureza periódica, cortam o eixo y apenas uma vez, seu domínio é o conjunto dos números reais e seu conjunto imagem é $\{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$.

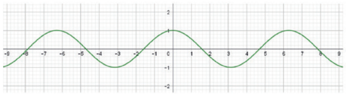
d. Há diferenças?

RESPOSTA: Uma diferença perceptível entre os gráficos de y = cos x e y = sen x é o ponto onde as curvas cortam o eixo y. Embora ambas cortem o eixo vertical uma única vez, enquanto y = cos x passa por (0, 1), y = sen x intercepta no ponto (0,0).

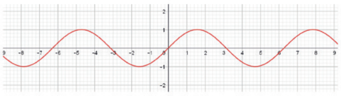
5. Agora, os gráficos serão construídos com o auxílio do software Geogebra. Represente, graficamente, as seguintes funções trigonométricas:

RESPOSTA:

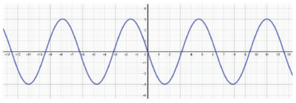
a) y = cos x



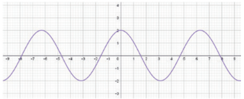
b) y = sen x



c) y = - 3.sen x



d) y = 2.cos x



6. Confirme suas observações registradas na Atividade 4, a partir dos gráficos construídos no *Geogebra*. Comente, se houver informação nova.

RESPOSTA PESSOAL

AULAS 7 E 8: MAIS GRÁFICOS

OBJETIVOS DA AULA

Construir o gráfico de uma função trigonométrica, dada a sentença algébrica que a representa;

Determinar a sentença algébrica da função representada por um gráfico dado.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso, régua, *software Geogebra* (versão para computador ou aplicativo para smartphone).

INICIANDO

Professor, para as últimas aulas dessa Sequência, ainda relacionamos as diferentes formas de representação de uma função, sobretudo as funções trigonométricas. Nos debruçaremos ao estudo dos gráficos desse tipo de função, mas a partir de sua lei de associação, ou seja, de sua representação algébrica. Além disso, o processo inverso, também, aparece, isto é, identificar a sentença algébrica por meio do estudo do gráfico. Então, a conversa inicial deve conter essas ideias para que os estudantes reforcem, ainda mais, as relações entre essas diferentes representações.

DESENVOLVENDO

Com os estudantes organizados em duplas, a Atividade 1 pode ser encaminhada a partir da leitura coletiva do enunciado. É importante notar que haverá momento para a construção manual e outro em que irão usar o *software Geogebra* para os gráficos. Novamente, cabe uma discussão sobre as vantagens em relação ao uso da tecnologia informática para o ensino da Matemática. Na última atividade, há um gráfico já representado para que, a partir da análise detalhada, os estudantes determinem a representação algébrica da função envolvida. Para concretizarem essa ação, é importante que tenham clareza sobre as características do gráfico das funções trigonométricas relacionadas a cosseno e seno. Sendo assim, é interessante orientá-los quanto ao resgate das atividades anteriores, a fim de relembrarem conceitos e propriedades importantes.

AULAS 7 E 8 - MAIS GRÁFICOS

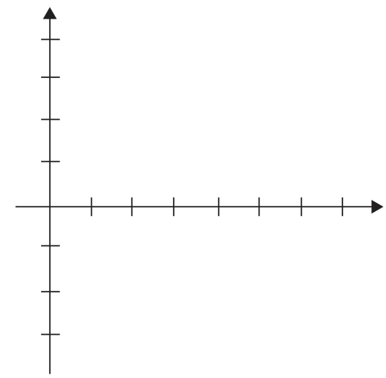
Objetivos da aula:

- Construir o gráfico de uma função trigonométrica, dada a sentença algébrica que a representa;
- Determinar a sentença algébrica da função representada por um gráfico dado.

1. Os eixos ortogonais, a seguir, devem ser utilizados para a construção do gráfico de cada função indicada. Preencha corretamente os quadros e utilize os dados para a representação no plano cartesiano:

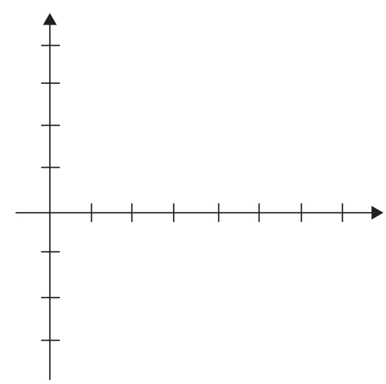
a. y = 3 + cosx

x	Cos x	y = 3 + cos x	(x , y)
0°	1	y = 3 + 1 = 4	(0°, 4)
90°	0	y = 3 + 0 = 3	(90°, 3)
180°	- 1	y = 3 + (- 1) = 2	(180°, 2)
270°	0	y = 3 + 0 = 3	(270°, 3)
360°	1	y = 3 + 1 = 4	(360°, 4)



b. y = 1 - senx

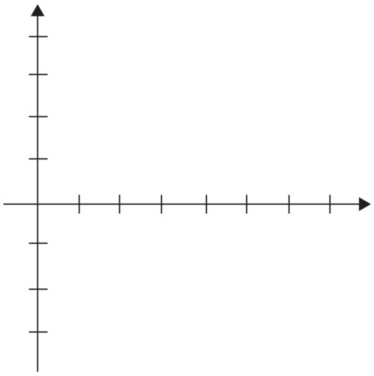
x	Sen x	y = 1 - sen x	(x , y)
0°	0	y = 1 - 0 = 1	(0°, 1)
90°	1	y = 1 - 1 = 0	(90°, 0)
180°	0	y = 1 - 0 = 1	(180°, 1)
270°	- 1	y = 1 + 1 = 2	(270°, 2)
360°	0	y = 1 - 0 = 1	(360°, 1)



2ª série

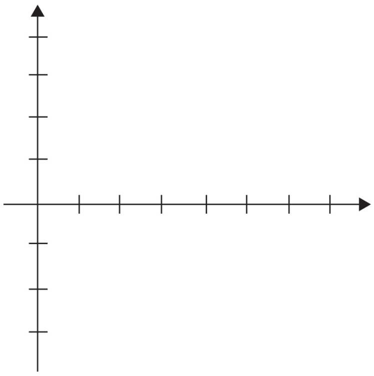
c. y = - 3.senx

x	Sen x	y = - 3.senx	(x , y)
0°	0	y = - 3 · 0 = 0	(0°, 0)
90°	1	y = - 3 · 1 = - 3	(90°, - 3)
180°	0	y = - 3 · 0 = 0	(180°, 0)
270°	- 1	y = - 3 · (-1)= 3	(270°, 3)
360°	0	y = - 3 · 0 = 0	(360°, 0)



d. y = 2.cosx

x	Cos x	y = 2.cosx	(x , y)
0°	1	y = 2 ·1 = 2	(0°, 2)
90°	0	y = 2 · 0 = 0	(90°, 0)
180°	- 1	y = 2 · (-1) = -2	(180°, - 2)
270°	0	y = 2 · 0 = 0	(270°, 0)
360°	1	y = 2 · 1 = 2	(360°, 2)



ANOTAÇÕES

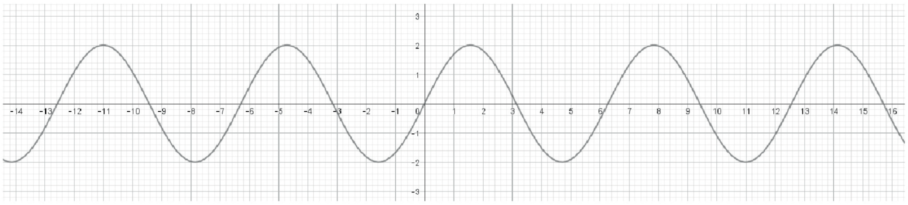
FINALIZANDO

Por fim, promova um momento de socialização com discussões sobre as resoluções dos estudantes. Conversar sobre o uso da tecnologia e o trabalho colaborativo é bastante pertinente. A socialização dos caminhos usados para responderem cada atividade é uma importante ferramenta para aumentar o repertório matemático dos estudantes. Caso sejam sinalizadas dúvidas ou dificuldades procure esclarecê-los. Esse momento tem muito a contribuir com a aprendizagem.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, destaque para os estudantes que resgatar as informações discutidas nas atividades anteriores pode ajudar muito para a realização desta.

2. A seguir, você vai se deparar com a representação gráfica de uma função trigonométrica. Estude as características do gráfico e utilize conceitos sobre esse tipo de função para determinar a sentença algébrica que corresponde a ela.



RESPOSTA: Para o gráfico apresentado, observamos que é uma curva periódica que passa na origem. Desse modo, vemos que é uma senoide cujo conjunto imagem é $\{y \in \mathbb{R} / -2 \leq y \leq 2\}$. Assim, associando à função y = sen x, concluímos que a representação algébrica da função indicada no gráfico é y = 2 . sen x.

IMAGENS E ILUSTRAÇÕES
pixabay.com - freepik.com

3ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 01

3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAIS**
1	Potenciação e radiciação; Potências com expoentes negativos e fracionários.	(EF08MA02) Resolver e elaborar situações-problema usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário. (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 8º ano:** Vol. 1 (versão 2021), na Situação de Aprendizagem 1, Atividade 3: Estimando raiz quadrada.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

Olá, professor! Nessa Sequência de Atividades, falamos diretamente com você, que está aí na sala de aula, no convívio direto com os estudantes. Estes terão oportunidade, nesse momento, de se envolver com atividades que possibilitam a retomada de conceitos, propriedades e procedimentos essenciais para o desenvolvimento de seus conhecimentos e capacidades em Matemática.

A Sequência de Atividades deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração. Além disso, as socializações das atividades, por parte dos estudantes, são percebidas como oportunidades de desenvolver habilidades e competências que dizem respeito à cooperação, à empatia, à argumentação, à comunicação, entre outras.

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final dessa Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam potenciação e radiciação.

As escolhas das habilidades foram feitas por meio das análises realizadas dos resultados de avaliações internas e externas (diagnóstico de entrada e SARESP) que revelaram fragilidades dos estudantes com relação às habilidades: **(EF08MA02) Resolver e elaborar situações-problema usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário e (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.**

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	De onde vem isso?
3ª e 4ª/ 90 min	Qualquer semelhança é mera coincidência
5ª e 6ª/ 90 min	Casas, gatos e ratos
7ª e 8ª/ 90 min	Hora da retomada

Sabemos que as atividades por si só não ensinam. Por isso, professor, a sua atuação é tão importante em cada uma das situações propostas aqui. O objetivo delas é recuperar as aprendizagens e desenvolver as habilidades esperadas para a 3ª Série do Ensino Médio. Para isso, esse caderno deverá servir como uma ferramenta adicional que o auxiliará no processo de ensino, sendo necessário, portanto, que você considere em seu replanejamento, outras possibilidades de discussão e recursos para além daqueles sugeridos nessa Sequência de Atividades Para ajudá-lo nessa ação, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenal acerca das Sequências de Atividades. Tais formações acontecerão nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPCs). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

AULAS 1 E 2 – DE ONDE VEM ISSO?

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso, recursos para exibição de vídeo, folha de sulfite para o painel de soluções.

INICIANDO

Professor, para as Aulas 1 e 2 dessa Sequência, sugerimos que, em uma conversa inicial, retome com os estudantes os conhecimentos sobre os cálculos de potências. Consideramos que este é um objeto de conhecimento que eles já estudaram. Contudo, é sempre válido revisitar. Essa pode ser uma breve introdução para relembrar aos estudantes a definição de potência como produto de fatores iguais e apresentar o **Caderno do Estudante** impresso.

DESENVOLVENDO

Após a retomada sobre potências e a entrega do **Caderno do Estudante** impresso, é o momento de exibição do vídeo **Tudo que você sempre quis perguntar**. Professor, indicamos a importância da organização do recurso para exibição do vídeo com antecedência. São cerca de 10 minutos. Sugerimos que o parágrafo introdutório do **Caderno do Estudante** seja lido antes, no sentido de orientar os estudantes quanto ao contexto do vídeo. Caso considere pertinente, re-

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

Para as atividades iniciais dessa Sequência, vocês irão assistir ao vídeo ***Tudo que você sempre quis perguntar***[1]. Nele, Luciano e o professor Rubão conversam sobre alguns questionamentos relacionados a temas da Matemática que costumeiramente aguçam a curiosidade dos estudantes. A partir das informações tratadas no vídeo e dos seus conhecimentos sobre cálculos de potências e raízes, leia atentamente as Atividades e responda cada uma.

AULAS 1 E 2 – DE ONDE VEM ISSO?

OBJETIVOS DA AULA

- Identificar a potência como representação do produto repetitivo de um mesmo fator.
- Calcular potências de expoentes positivos ou negativos.
- Calcular potências de números decimais (de representação finita).
- Realizar operações de potenciação com potências de expoente fracionário

1. Em Matemática, potência é a representação de produtos de fatores iguais.

Base: é o fator que se repete de acordo com o expoente. ← a^b → **Expoente:** indica quantas vezes a base se repete no produto.

Por exemplo, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; onde 2 é a base e 3 é o expoente da potência. Dentre as propriedades das potências, destacamos:

$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ $\quad$ $a^b : a^c = a^{b-c}$ $\quad$ $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

De acordo com o vídeo, responda:

a. Por que $2^0 = 1$?

A propriedade fundamental das potências garante que $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$. Usando essa propriedade e fazendo $b = 0$, temos que: $a^0 \cdot a^c = a^{0+c} = a^c$, ou seja, $a^0 \cdot a^c = a^c$, contudo, para que o produto entre um número e outro forneça como resultado o próprio número, esse outro número deve ser igual a 1. Assim, $a^0 = 1$, o que mostra que, de acordo com a propriedade fundamental da potência, todo número real elevado a zero é igual a 1, logo, $2^0 = 1$.

[1] COSTA, M. G.; BERCHARA, M.; FIRER, M. **Tudo que você sempre quis perguntar**. Matemática Multimídia, UNICAMP. Campinas. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1186>. Acesso em: 06 ago. 2020.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, pode ser interessante discutir com os estudantes sobre o caso de quando a base é zero. Nesse contexto, é importante reforçar que a Propriedade Fundamental da Potência é válida quando a base é um número diferente de zero e instigar que os estudantes pensem sobre o caso em que $a = 0$. Solicite que observem que $\mathbf{a^0 = a^b \cdot a^{-b}}$, o que corresponde a $\mathbf{a^0 = (a^b)/(a^{-b})}$. Além disso, essa divisão é igual a 1 se $\mathbf{a \neq 0}$ e **0/0** se $\mathbf{a = 0}$. No entanto, 0/0 é uma expressão indeterminada. Portanto, a deve ser diferente de zero.

b. Por que $3^{-5} = \frac{1}{3^5}$?

Utilizando potências negativas, ocorre: $a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$. Dessa forma, teríamos: $(3^5)\cdot(3^{-5}) = 3^{5-5} = 3^0 = 1$. Seguindo essa mesma ideia, $(a^n)\cdot(a^{-n}) = 1$, então, dividindo ambos os lados da sentença por a^n, ficamos com: $((a^n)\cdot(a^{-n}))/(a^n) = 1/(a^n)$. Logo, $a^{-n} = 1/(a^n)$ e, portanto, $3^{-5} = 1/(3^5)$.

2. E o que acontece quando a base ou o expoente são iguais a 1? Por exemplo, qual é o valor de 2020^1? E quanto vale 1^{2020}?

Quando a base é igual a 1, o resultado da potência é igual a 1. Quando o expoente é 1, a potência é a própria base.

$2020^1 = 2020$ $\quad$ $1^{2020} = 1$

3. Há diferença entre -5^3 e -5^2? E com as potências $(-5)^3$ e $(-5)^2$, o que acontece? Escreva um breve comentário explicando as suas ideias.

Entre -5^3 e -5^2 há diferença quanto aos resultados das potências, embora ambos sejam negativos: $-5^3 = -5\cdot5\cdot5 = -125$ e $-5^2 = -5\cdot5 = -25$

Para $(-5)^3$ e $(-5)^2$, teremos um resultado positivo e um negativo: $(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$; $(-5)^2 = (-5)\cdot(-5) = 25$.

4. Se a base for um número decimal, há alguma particularidade? Explique e calcule:

a. $0{,}9^2 =$ 0,81

b. $0{,}01^3 =$ 0,000001

c. $0{,}14^3 =$ 0,002744

d. $2{,}5^2 =$ 6,25

3ª série

comende que registrem partes importantes do vídeo. Após a exibição, disponibilize tempo para que as duplas resolvam as atividades. Consideramos indispensável o acompanhamento da resolução por parte dos estudantes, de modo a garantir que se envolvam efetivamente. Professor, lembre-se de incentivar a participação de todos durante a realização das atividades. Ao final da resolução de todas, proponha o momento de correção coletiva, com discussão dos caminhos usados para resolver cada situação.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, sugerimos que a Atividade 6 seja concluída com um painel de soluções. A proposta é que cada dupla registre, em uma folha separada, o detalhamento de sua resolução e exponha à turma, com a explicação da estratégia que usou para solucionar o problema, aumentando o repertório matemático dos estudantes. Nesse momento, habilidades que dizem respeito à argumentação e comunicação, por meio de conhecimentos matemáticos, estão em destaque. Além disso, valores ligados à ética e respeito com a voz do próximo, também, são trabalhados.

5. É possível escrever potências como radicais. Isso acontece quando os expoentes estão na forma de fração. Veja:

$a^{b/c} = \sqrt[c]{a^b}$		
$a^{1/2} = \sqrt{a}$	$a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$	$a^{4/6} = \sqrt[6]{a^4}$

Sendo assim, explique: como $\sqrt[4]{2^8}$ pode ser escrito no formato de potência de base 2? Qual é o valor da potência obtida?

O radical pode ser escrito na forma de potência com expoente fracionário:

$$2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = 4$$

6. **PAINEL DE SOLUÇÕES:** Para finalizar as Aulas 1 e 2 dessa Sequência, você deverá solucionar o problema seguinte. Leia o enunciado com atenção, escolha a estratégia que julgar mais conveniente para resolvê-lo e registre, em detalhes, a sua solução no local indicado pelo professor. Por fim, socialize a sua resolução com a turma. Esteja atento aos caminhos usados pelos seus colegas para resolver o problema proposto.

Um homem passeava um dia pela rua, quando encontrou um jovem que conheceu há pouco tempo. O jovem propôs o seguinte negócio: iria lhe pagar R$ 1.000,00 a cada dia, durante 15 dias; em contrapartida, o homem daria ao jovem R$ 1,00 no primeiro dia, R$ 2,00 no segundo dia, R$ 4,00 no terceiro dia e assim sucessivamente, dobrando o valor dia a dia, até completar os 15 dias. Quem sairia ganhando mais dinheiro, caso a proposta fosse aceita pelo homem?

Se o homem receber R$ 1.000,00 por dia, após o período de 15 dias ele terá R$ 15.000,00. No entanto, o jovem sugeriu receber, do homem, sempre o dobro do valor recebido no dia anterior. Então, no primeiro dia ele receberia R$ 1,00; no segundo dia R$ 2,00; no terceiro dia R$ 4,00 e assim seria até o décimo quinto dia. As quantias recebidas pelo jovem podem ser escritas da seguinte maneira:

Dia	1	2	3	4	5	6	...	14	15
Quantia	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	...	$2^{13} = 8.192$	$2^{14} = 16.384$

No total, ele receberia o valor de RS 32.767,00 e, como o homem iria receber RS 15.000,00, o jovem sairia ganhando muito mais dinheiro.

AULAS 3 E 4 – QUALQUER SEMELHANÇA É MERA COINCIDÊNCIA

OBJETIVOS DA AULA

- Aplicar os conhecimentos das propriedades e operações com números reais.

1. O vídeo ***Breve Relato do Fim***[2] apresenta uma história fictícia em um futuro distante que deixa o planeta Terra em apuros. É o relato do esforço do capitão Éder para salvar a humanidade. Ele baseia-se em conhecimentos matemáticos para buscar a salvação do nosso planeta. Assista ao vídeo e responda às questões seguintes:

a. Em que ano aconteceu a história relatada?

2537

b. Qual é o problema que eles estão tentando resolver? É possível solucioná-lo?

Infecções por meio de um vírus que se instala no cérebro dos humanos e é o responsável por tornar os humanos violentos e protagonistas de uma destruição implacável. A cura é possível.

c. O que causa a doença a que eles se referem?

Um vírus.

[2] DINIZ, M. A.; ANNUNCIATO, A.; OLIVEIRA, S.R. de. **Breve Relato do Fim**. Matemática Multimídia, UNICAMP. Campinas. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1057>. Acesso em: 06 ago. 2020.

AULAS 3 E 4 – QUALQUER SEMELHANÇA É MERA COINCIDÊNCIA

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso e recursos para exibição de vídeo.

INICIANDO

A aula pode ser iniciada com a leitura coletiva do enunciado da atividade 1, com posterior exibição do vídeo **Breve Relato do Fim** (DINIZ, M. A.; ANNUNCIATO, A.; OLIVEIRA, S.R. de. Breve Relato do Fim. Matemática Multimídia, UNICAMP. Campinas. Disponível em:<https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1057>. Acesso em: 06 ago. 2020). O vídeo tem cerca de 11 minutos e traz uma situação fictícia ocorrida no ano de 2537, quando um vírus ameaça a vida da humanidade. Então, destaque a atenção com que os estudantes devem assisti-lo.

DESENVOLVENDO

Com os estudantes organizados em duplas, oriente a resolução da Atividade 1, a partir da exibição do vídeo. A correção pode ocorrer de maneira coletiva, com incentivo da participação de toda a turma. Nesse momento, já é interessante destacar a importância do conhecimento matemático para a resolução de problemas de contexto mundial, como o que aparece no vídeo. Após essa correção, encaminhe a resolução das Atividades 2 e 3. Recorra a discussões sobre fatores sociais envolvidos em contextos como esses e relacione a situação fictícia do ***Breve Relato do Fim*** com a situação real em que estamos vivendo frente ao novo coronavírus. Durante a correção das atividades, possibilite reflexões sobre a importância de estudos científicos para a busca por uma solução contra o vírus, bem como os cuidados que cada indivíduo deve ter para contribuir com a redução dos índices de transmissão.

d. Em que lugares podem ser encontradas as substâncias para a formação dos anticorpos?

Na quarta lua de Isrinor e no planetoide Veganória.

e. Quais as principais diferenças entre vírus e bactérias?

São várias: os vírus são organismos bem menores do que as bactérias e bem mais simples, são acelulares, enquanto as bactérias são unicelulares. Os vírus são parasitas e nada fazem sem um hospedeiro, enquanto as bactérias se reproduzem rapidamente a partir de uma pequena quantidade de material orgânico.

f. Para refletir: o texto abaixo traz várias informações sobre a situação que acontece no ***Breve Relato do Fim***. Leia e discuta com os colegas de sala.

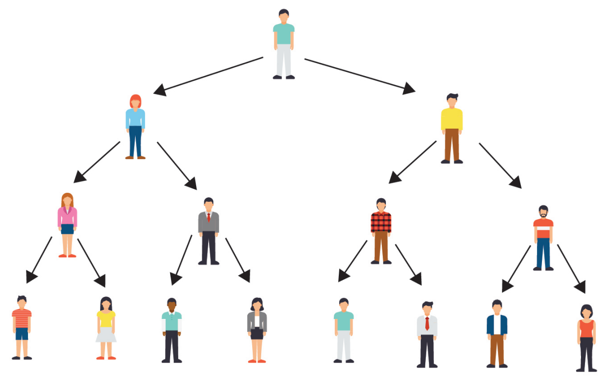
O vídeo fala da importância de se calcular o ritmo de propagação do vírus e que, no contexto relatado, o aumento dos casos de contaminação estava em ritmo exponencial. Isso significa que o crescimento estava muito rápido com o passar do tempo. Na história, os personagens citam alguns exemplos de situações que podem ser descritas através de uma função exponencial: a reprodução de bactérias, o crescimento de uma dívida sobre juros compostos, o crescimento da indústria do setor de informática no século 21. Informam, também, que para uma função ser considerada exponencial, a variável dependente deve aparecer no expoente.

A análise de Elana mostra que, no dia 12, a população contaminada era de 67,38 mil e conclui que se ultrapassasse 75 mil, seria quase impossível reverter o quadro. Para estudar cientificamente a situação, ela calcula as razões entre a população contaminada pelo vírus entre os dias 12 e 13, 13 e 14, obtendo: 1,026. Esse valor revela um crescimento constante por meio de uma função exponencial de base 1,026, a partir das quais é possível prever a população contaminada pelo vírus em qualquer dia, caso sejam mantidas as condições iniciais. Com essa função, verificar quando a população contaminada chegaria aos 75 mil seria fácil.

Esses estudos possibilitariam a tomada de decisão em relação a resolver essa situação tão séria, com embasamento matemático. A população humana estaria a salvo!!!!!!

3ª série

2. Se pensarmos que, em certa região, o fator de contaminação está igual a 2, significa que cada contaminado pode transmitir para outras 2 pessoas. Assim, veja a simulação de transmissão representada no diagrama.



Esse diagrama é uma representação. A partir dela, é possível imaginar a quantidade de contaminados em alguma localidade em que o fator de contaminação está igual a 2. Nessas condições e considerando que cada linha indica um dia, expresse os números na tabela abaixo:

Dia	Quantidade de contaminados por dia
1	1
2	2
3	4
4	8

a. Que operação pode ser utilizada para representar a quantidade de contaminados por dia?

Potenciação.

FINALIZANDO

A finalização poderá ser feita com as discussões propostas. Se possível, promova debates em conjunto com outros componentes curriculares. O professor de Biologia pode contribuir com estudos sobre vírus e bactérias, os professores de História, Geografia e Sociologia podem possibilitar discussões com reflexões sobre temáticas associadas à situação atual do Brasil diante do enfrentamento ao coronavírus. O professor de Língua Portuguesa pode articular alguma produção textual sobre o tema. Caso concretize essas ideias, é interessante planejar momentos de socialização dos estudos e de possíveis produções dos estudantes.

b. Represente, na coluna indicada, a quantidade de contaminados por meio de potência.

Dia	Quantidade de contaminados por dia	Representação na forma de potência
1	1	2^0
2	2	2^1
3	4	2^2
4	8	2^3

3. A situação que acontece no vídeo é fictícia, contudo, em 2020, vivemos algo parecido com a história contada lá. A humanidade teve dificuldades em controlar o aumento dos índices de contaminação da população por um vírus que até então era desconhecido. A partir dessas ideias, responda:

a. De que vírus estamos falando nesse texto introdutório?

O novo coronavírus.

b. Já existe uma solução definitiva?

RESPOSTA PESSOAL

c. Quais ações foram concretizadas por cada indivíduo para contribuir com o controle dos índices de contaminação?

Evitar o contato com pessoas contaminadas. Para isso, é importante manter-se em isolamento social e, se for necessário sair de casa, usar máscara. A higiene com as mãos é indispensável, deve-se lavar, com cuidado, usando água e sabão ou usar álcool em gel.

AULAS 5 E 6 – CASAS, GATOS E RATOS

OBJETIVOS DA AULA

- Relacionar a potenciação e a radiciação por meio da transformação de potências de expoente fracionário em radiciações e das radiciações em potências de expoente fracionário.
- Representar a potenciação com expoentes fracionários sob a forma de radiciação.
- Resolver e elaborar situações-problema em que há potências com expoente fracionário e radiciações.
- Aplicar as propriedades de potência com expoente fracionário.

1. O problema 79 do papiro de Rhind apresenta os curiosos dados:

Fonte: Andrade (2017)

a. A figura acima apresenta o problema 79 do papiro de Rhind. Nele são dispostos dados numéricos sem uma contextualização. Pense sobre esses dados numéricos e elabore um enunciado capaz de transformá-los em um problema com contexto.

RESPOSTA PESSOAL: Professor, esperamos que os estudantes sejam criativos nessa elaboração e que utilizem contextos dos mais variados. A título de exemplo, podemos pensar no seguinte enunciado que faz uso de uma adaptação dos dados: Em uma pequena rua há 7 casas e, em cada casa, estavam 7 gatos. Cada gato comeu 7 ratos e cada rato comeu 7 espigas de milho. Sabendo que cada espiga de milho ocupa 7 hectares de grãos, quantos hectares de grãos existem nessa situação?

b. Resolva o problema que você elaborou e escreva uma resposta completa e adequada para essa questão. Para isso, informe que operações devem ser realizadas para obter o valor 19607 indicado.

RESPOSTA PESSOAL: Para calcular a quantidade total de hectares, basta determinar o valor de $7^5 = 16807$. Para obter o valor 19607 basta somar os valores de todas as linhas: $7 + 49 + 343 + 2401 + 16807 = 19607$.

AULAS 5 E 6 – CASAS, GATOS E RATOS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

A apresentação da proposta de atividade poderá ser por meio da leitura coletiva do **Caderno do Estudante**. Nesse momento, ressalte que a História da Matemática tem muito a contribuir com o estudo dessa área do conhecimento em diversos aspectos, por exemplo, fornecendo problemas interessantes para a sala de aula. Informe que, para as atividades de hoje, os estudantes terão acesso a um problema histórico, a partir do qual farão alguns procedimentos.

DESENVOLVENDO

Depois da leitura do **Caderno do Estudante**, oriente a turma a resolver a Atividade 1. Os estudantes deverão ser criativos para a elaboração de um enunciado que faça sentido para os dados numéricos disponibilizados no problema 79 do papiro de Rhind. Os cálculos envolvidos estão relacionados a potências de base 7. Propicie um momento de discussão, sobre as questões, em que alguns estudantes socializem suas respostas. Em seguida, oriente a resolução das demais atividades. Tratam de potências com expoente na forma fracionária. Disponibilize tempo para a resolução atenciosa, bem como para a sua verificação que deverá contemplar cálculos e propriedades de potências com expoente fracionário. Reforce a importância da atividade que solicita a elaboração de enunciado e ressalte que os estudantes poderão utilizar o jogo, citado na Atividade 2, em outras ocasiões e para outros estudos também.

c. Observe os números que aparecem em cada linha da imagem. Que regularidade você consegue notar em relação a esses valores?

Cada linha mostra o resultado de uma potência de base sete:
$7^1 = 7$; $7^2 = 49$ $7^3 = 343$; $7^4 = 2401$; $7^5 = 16807$

d. Se organizarmos uma sequência com os valores numéricos apresentados na imagem e mantivermos a mesma regularidade, qual será o sexto (6º) elemento dessa sequência? Preencha a tabela abaixo com os elementos da sequência.

1º elemento	2º elemento	3º elemento	4º elemento	5º elemento	6º elemento
7	49	343	2401	16807	117649

2. Dois colegas de classe conversaram sobre potenciação em uma aula de Matemática. Eles criaram um jogo, chamado de ***VERDADEIRO OU FALSO***, para revisarem os principais conceitos e cálculos com potências. O jogo consiste em informar uma sentença sobre o assunto e o outro colega a classifica como verdadeira ou falsa, mas precisa justificar a sua resposta. Em uma rodada, cada jogador pode marcar dois (2) pontos: 1 se acertar o verdadeiro ou falso e 1 se acertar a justificativa. Vence quem tiver mais pontos ao final das cinco (5) rodadas. Veja as sentenças que um grupo de estudantes criou, informe se são verdadeiras ou falsas e justifique.

Sentença 1	Sentença 2	Sentença 3	Sentença 4	Sentença 5
$\sqrt[3]{5^6} = 25$	$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$\sqrt[5]{2^{10}} = 8$	$\sqrt[3]{9} = 3^{2/3}$	$5^{3/2} = \sqrt{125}$

Sentença 1: VERDADEIRA porque $\sqrt[3]{5^6} = 5^{6/3} = 5^2 = 25$

Sentença 2: VERDADEIRA porque $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

Sentença 3: FALSA porque $\sqrt[5]{2^{10}} = 2^{10/5} = 2^2 = 4$

Sentença 4: VERDADEIRA porque $\sqrt[3]{9} = 9^{1/3} = 3^{2/3}$

Sentença 5: VERDADEIRA porque $5^{3/2} = \sqrt[2]{5^3} = \sqrt{125}$

3ª série

3. A afirmação abaixo foi realizada por um estudante como resolução de uma questão de prova de Matemática. Durante a correção, o professor identificou algumas falhas conceituais e levou para a sala de aula para que a sua turma identificasse os erros e respondesse à questão corretamente. Agora é a sua vez, observe a resolução que foi feita, identifique as possíveis falhas conceituais que o professor percebeu e efetue os cálculos corretos.

$$\sqrt[3]{10^8} \cdot \sqrt[4]{10^3} = 100$$

Os estudantes deverão perceber que a falha pode ter acontecido com a aplicação inadequada das propriedades das potências: no produto de potências de mesma base, devemos repetir a base e somar os expoentes, no entanto, para o resultado 100, os expoentes foram multiplicados.

$$10^{\frac{8}{3}} \cdot 10^{\frac{3}{4}} = 10^{\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4}} = 10^{\frac{8}{4}} = 10^2 = 100$$

A resolução correta seria: $\sqrt[3]{10^8} \cdot \sqrt[4]{10^3} = 10^{\frac{8}{3}} \cdot 10^{\frac{3}{4}} = 10^{\frac{8}{3}+\frac{3}{4}} = 10^{\frac{8}{4}} = 10^{\frac{32+9}{12}} = 10^{\frac{41}{12}}$

4. Para determinar o valor de 9^4, basta multiplicar a base **9** por ela mesma **4** vezes, como indica o expoente. Assim, temos $9^4 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$. E, se quisermos calcular o valor de $9^{\frac{1}{2}}$, é prático escrever a potência na forma de raiz e o cálculo fica simples: $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$. Então, usando essas ideias, determine uma maneira prática de mostrar que $64^{\frac{2}{3}} = 16$.

Professor, a resposta é pessoal, já que os estudantes podem indicar algumas maneiras possíveis para esse cálculo. É interessante atentar para o uso das propriedades das potências e dos radicais. Uma possível resposta pode ser:

$$64^{2/3} = \sqrt[3]{64^2} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{64} = 4 \cdot 4 = 16$$

5. Você e o seu colega de dupla devem, cada um, elaborar uma questão envolvendo cálculo de potência com expoente fracionário para que um solucione a do outro. Após a resolução, devolva a questão para quem elaborou corrigi-la. Discutam as questões, dando atenção ao método que cada um usou para resolvê-la.

DICA: Vocês podem retomar às atividades anteriores, dessa Sequência, para que se inspirem na elaboração da sua questão.

RESPOSTA PESSOAL: utilizando as propriedades das potências e dos radicais, determine o valor de $\sqrt{1024}$

$$\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = 2^{10/2} = 2^5 = 32$$

FINALIZANDO

Atente para o incentivo à participação de todos os estudantes durante as correções das atividades. Dessa forma, é possível identificar os que ainda apresentam fragilidades quanto aos objetos de conhecimento tratados, para planejar possíveis estratégias em busca de esclarecer essas dúvidas.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, você pode sugerir que os estudantes pesquisem problemas contextualizados envolvendo potências com expoente fracionário. Situações sobre educação financeira ou controle da população de vírus ou bactérias, por exemplo, são muito comuns. Para essa atividade, que será resolvida em sala de aula, os estudantes podem pensar em um caso que, não necessariamente, relaciona contextos reais, por exemplo: utilizando as propriedades das potências e dos radicais, determine o valor de $\sqrt{1024}$

AULAS 7 E 8 – HORA DA RETOMADA

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

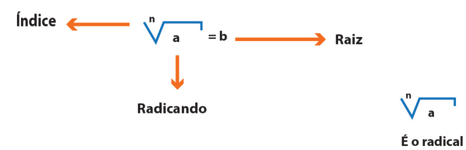
Para essas aulas, trazemos uma atividade que aborda, de maneira sistematizada, as propriedades dos radicais e uma retomada sobre alguns dos principais conceitos tratados no decorrer dessa Sequência. Assim, professor, o início pode ser por meio de um diálogo com informações sobre a proposta. Além disso, consideramos interessante esclarecimentos quanto às atividades que serão desenvolvidas nas aulas desse dia e isso poderá ocorrer à medida que se realize a leitura coletiva do **Caderno do Estudante**.

AULAS 7 E 8 – HORA DA RETOMADA

OBJETIVOS DA AULA

- Aplicar os conhecimentos das propriedades das operações com radicais.
- Racionalizar expressões envolvendo operações com radicais.
- Revisar os principais tópicos estudados nessa Sequência de Atividades.

1. A radiciação é a operação inversa da potenciação. Pelo que estudamos até agora, podemos interpretá-la como consequência da potenciação, na qual buscamos determinar a base quando conhecemos o expoente e o valor da potência.



$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a \ (n>0)$$

Por exemplo, $\sqrt[3]{8} = 2$, porque $2^3 = 2 . 2 . 2 = 8$. Nesse caso, no radical, 8 é o radicando, 3 é o índice e 2 é a raiz. Na potência, 2 é a base, 3 é o expoente e 8 é a potência propriamente. Dentre as propriedades dos radicais, temos:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

2. Os radicais $\sqrt{1024}$ e $\sqrt[10]{1024}$ não são iguais, mas e as raízes deles, são iguais? Justifique.

As raízes não são iguais $\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = 2^5 = 32$

$\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$

3. Decomponha o radicando em fatores primos e calcule as raízes:

a. $\sqrt{625} = \sqrt{5^4} = 5^2 = 25$

b. $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

c. $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

d. $\sqrt{196} = \sqrt{2^2 \cdot 7^2} = 2 \cdot 7 = 14$

e. $\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13$

f. $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{10^3}} = \frac{3}{10}$

4. Utilize as propriedades para simplificar:

a. $\sqrt[5]{2^5 \cdot x^5} = 2 \cdot x = 2x$

b. $\sqrt[6]{a^{12} \cdot b^6} = a^2 \cdot b = a^2 b$

c. $\sqrt{\dfrac{5^4}{7^8}} = \dfrac{5^2}{7^4} = \dfrac{25}{2401}$

5. Na Matemática é comum não usar o formato de frações com radical no denominador. Por essa razão, quando isso acontece é possível racionalizá-las. Racionalizar, na prática, significa retirar o radical do denominador. Vejamos um exemplo: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Agora, racionalize as frações abaixo:

a. $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b. $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}} = \dfrac{a}{\sqrt[3]{b}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^2}} = \dfrac{a \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \dfrac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$

c. $\dfrac{-8}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \dfrac{-8}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \dfrac{-8 \cdot (\sqrt{7}-\sqrt{2})}{\sqrt{7^2}-\sqrt{2^2}} = \dfrac{-8(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5}$

6. Em um programa de condicionamento físico, uma pessoa deve correr durante 7 dias. A cada dia deve percorrer uma distância igual ao dobro do dia anterior. Comecei o programa na segunda-feira, correndo 100 m. Seguindo esse programa, no total, quantos metros correrei em 7 dias?

100 + 200 + 400 + 800 + 1600 + 3200 + 6400 = 12700m ao final dos 7 dias.

7. Na segunda-feira, 10 pessoas ficaram sabendo de uma notícia. Na terça-feira, cada uma contou a notícia para outras 10 e estas, na quarta-feira, contaram para outras 10. Nenhuma dessas pessoas sabia da notícia antes. Quantas pessoas ficaram sabendo da notícia na quarta-feira?

Na quarta-feira, ficaram sabendo, no total, $10 + 10^2 + 10^3 = 1110$ pessoas.

8. Um restaurante oferece três tipos de salada, três tipos de carne e três tipos de sobremesa. Quantas refeições diferentes podem ser oferecidas, se cada uma deve conter apenas uma salada, apenas um tipo de carne e somente uma sobremesa?

Podem ser oferecidas $3^3 = 27$ refeições desse tipo.

DESENVOLVENDO

Com a leitura do **Caderno**, os estudantes poderão realizar as Atividades de 1 a 5, que versam sobre os radicais. Sugerimos que sejam respondidas de maneira coletiva, disponibilizando-se tempo determinado para cada uma, com posterior discussão. Finalizada essa etapa, os estudantes, organizados em duplas, estarão envolvidos com as demais atividades. Estas trazem questionamentos em que eles precisarão resgatar os estudos, principalmente, sobre as potências. Caso considerem necessário, poderão consultar as atividades anteriores dessa Sequência. A verificação poderá acontecer por meio da resolução na lousa, com a participação dos estudantes.

FINALIZANDO

Por fim, ressaltamos que esse encontro tem um importante papel quanto à verificação do desenvolvimento das habilidades assumidas para o trabalho com essa Sequência de Atividades. Nesse sentido, o encerramento, a partir da resolução das questões propostas para as Aulas 7 e 8, deverá se articular no sentido de sistematizar os conceitos estudados sobre potências e radicais. Destacamos a relevância do envolvimento ativo dos estudantes nesses momentos.

9. Uma feira de livros foi instalada num prédio de 3 andares. Cada andar foi dividido em 3 setores. Compondo cada setor havia 3 estandes e, em cada um deles, trabalhariam 3 pessoas que foram identificadas por um crachá. Quantos crachás foram confeccionados?

Foram confeccionados, no total, $3^4 = 81$ crachás.

10. Veja o comentário que um aluno do 9º ano de uma escola fez: **"Já calculei 8^4. Deu 4 096"**. Utilizando esse resultado é fácil determinar o valor de 2^{12}? Explique a sua resposta.

Sim, basta reescrever a potência 8^4 na forma de $(2^3)^4 = 2^{12} = 4096$.

11. Qual é o número maior:

a. 22^2 ou 2^{22}? RESPOSTA: 2^{22} é bem maior do que 22^2.

b. $(2^2)^3$ ou 2^{2^3} RESPOSTA: 2^8 é maior do que 2^6.

12. Calcule o valor de $5^{400} : 5^{397}$.

$5^{400-397} = 5^3 = 125$.

13. Represente na forma de potência:

Sentença	Potência
O dobro de 2^{10}	$2 \cdot 2^{10} = 2^{11}$
O quádruplo de 2^{10}	$2^2 \cdot 2^{10} = 2^{12}$
O quadrado de 2^{10}	$(2^{10})^2 = 2^{20}$
O cubo de 2^{10}	$(2^{10})^3 = 2^{30}$
A metade de 2^{10}	$\frac{2^{10}}{2} = 2^9$

14. Sabendo que $29^2 = 841$, quanto vale

a. $2{,}9^2$? 8,41

b. $0{,}29^2$? 0, 0841

3ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 02

3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAIS**
2	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano; Sistema de equações de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano.	(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano. (EF08MA08) Resolver e elaborar situações-problema que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 8º ano:** Vol. 3, na Situação de Aprendizagem 2, Atividade 3: Resultados de uma equação de 1º grau com duas variáveis Situação de Aprendizagem 3, Atividade 1: Sistemas de duas equações com duas incógnitas; Atividade 2:Problemas com sistemas de Equações de 1º grau; Atividade 3: Análise das diferentes resoluções gráficas de sistema.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

Os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano e sistema de equações de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano.

HABILIDADES: (EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano; e (EF08MA08) Resolver e elaborar situações-problema que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	**Um pouco de história para estudar Álgebra**
3ª e 4ª/ 90 min	**Diferentes representações para contextos iguais**
5ª e 6ª/ 90 min	**Ainda sobre as diferentes representações**
7ª e 8ª/ 90 min	**Elaborar e solucionar problemas**

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

AULAS 1 E 2 – UM POUCO DE HISTÓRIA PARA ESTUDAR ÁLGEBRA

OBJETIVOS DA AULA

- Utilizar o conceito de variável para modelar a relação entre duas grandezas;
- Conhecer as operações básicas envolvendo expressões algébricas com uma variável;
- Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica.

1. Para a realização desta atividade, você deverá ler com atenção o texto abaixo, que traz informações históricas quanto a uma importante ideia estudada em Matemática. Se achar necessário, você poderá utilizar calculadora.

Pesquisas têm mostrado que a noção de função existe desde a Antiguidade e foi se alterando no decorrer do tempo. Argumentos que ligam os processos de contagem a essa ideia, associando esse ente matemático à correspondência entre grandezas, são fortes. Nesse sentido, defende-se que a noção de função já aparecia, por exemplo, nas situações em que, para o controle do rebanho, o homem marcava um nó em corda ou uma dobra no dedo, ou realizava uma marcação em pedra, argila ou madeira para indicar cada animal. Era um dos métodos mais antigos de contar, cujos registros simples aconteciam utilizando-se instrumentos produzidos pelos próprios homens, como, por exemplo, conjuntos de cordões para os nós e talhas e tabletes (tábuas) para as marcações/entalhes em ossos, madeira, pedras e argila.

Dentre as mais citadas por estudiosos, a tábua *Plimpton* 322 merece destaque. Acredita-se que nela são apresentados pares de números primos e ternos pitagóricos, ou seja, são associados números através de operações fundamentais.

Historiadores acreditam que os números disponíveis na *Plimpton 322* correspondem a medidas de dois dos lados de triângulos retângulos. Concordando com essa informação, vejamos um quadro com alguns valores numéricos que formam ternos pitagóricos, em que as colunas **b** e **c** são números indicados na *Plimpton 322* e, em particular, a coluna **c** mostra a medida do maior lado de um triângulo retângulo.

	a	*b*	*c*
Linha 1	120	119	169
Linha 2		3367	
Linha 3	4800		
Linha 4	13500	12709	18541
Linha 5		161	289
Linha 6	2700		3229
Linha 7	90	56	

Fonte: Andrade (2017) - Adaptada

AULAS 1 E 2 – UM POUCO DE HISTÓRIA PARA ESTUDAR ÁLGEBRA

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno de Atividades impresso e calculadora.

INICIANDO

Professor, propomos que a etapa inicial envolva a apresentação do **Caderno do Estudante** e um diálogo sobre a importância da História da Matemática como rica fonte de problemas para o estudo de diversos conceitos matemáticos. Consideramos relevante dar visibilidade às potencialidades do uso da História da Matemática em sala de aula, sobretudo na Educação Básica. Converse com os estudantes, também, sobre a utilização da calculadora para essas atividades.

DESENVOLVENDO

Feita a entrega do **Caderno do Estudante** impresso, é o momento da leitura do texto introdutório da atividade 1, que pode ser realizada de forma compartilhada. Converse com a turma sobre as ideias discorridas no texto e resgate o conhecimento deles sobre o Teorema de Pitágoras, a partir do exemplo apresentado. Recomende que usem a calculadora. Proponha discussão das questões com a participação dos estudantes, socializando suas resoluções. Eles podem registrá-las na lousa ou fazê-las de forma oral. As atividades 2 e 3 tratam das operações com expressões algébricas. É interessante começar com a leitura oral compartilhada e verificação detalhada do exemplo. Disponibilize tempo para a finalização das resoluções.

Utilizando o Teorema de Pitágoras, podemos conferir que as medidas são lados de triângulos retângulos. Por exemplo, a partir dos valores da Linha 1, teremos:

$$120^2 + 119^2 = 169^2 \rightarrow 14400 + 14161 = 28561$$

a. Assim, a partir desses dados, escreva uma expressão algébrica que representa uma relação entre os lados de triângulos retângulos:

Para a Linha 2	Para a Linha 3
$a^2 + 3367^2 = c^2$	$4800^2 + b^2 = c^2$

b. Se na Linha 2 acontecer a = 3456, qual será o valor de c?

$a^2 + 3367^2 = c^2$
$3456^2 + 3367^2 = c^2$
$c = 4825$

c. E na Linha 3, qual será o valor de b, se c = 6649?

$4800^2 + b^2 = c^2$
$4800^2 + b^2 = 6649^2$
$b = 4601$

d. O que acontece de diferente nas linhas 5, 6 e 7 em relação às linhas 2 e 3?

Nas linhas 5, 6 e 7 há apenas um valor desconhecido em cada uma. Já nas linhas 2 e 3, existem dois valores desconhecidos em cada.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, essa questão, em particular, é uma interessante oportunidade de se refletir sobre a ideia de incógnita e variável. Sugerimos que ressalte que ambas são valores desconhecidos, mas que nem toda incógnita é variável.

e. Escreva uma expressão algébrica que representa uma relação entre os lados de triângulos retângulos:

Para a Linha 5	Para a Linha 6	Para a Linha 3
$a^2 + 161^2 = 289^2$	$2700^2 + b^2 = 3229^2$	$90^2 + 56^2 = c^2$

Linha 5: $a^2 + 161^2 = 289^2$ $a = 240$

Linha 6: $2700^2 + b^2 = 3229^2$ $b = 1171$

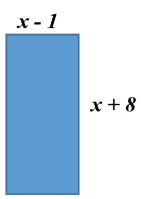
Linha 7: $90^2 + 56^2 = c^2$ $c = 106$

2. Para simplificar uma expressão algébrica, é necessário realizar todas as operações indicadas. Por exemplo, se desejarmos simplificar ao máximo a expressão $3.(5x^2 – 1) – (2x^2 – x + 3)$, aplicamos a propriedade distributiva e somamos os termos semelhantes: **$3 \cdot 5x^2 + 3.(–1) – 2x^2 + x – 3 = 15x^2 – 3 – 2x^2 + x – 3 = 13x^2 + x – 6$.** Agora é a sua vez! Simplifique ao máximo a expressão:

$$E = 3\cdot(x^2 – 2x) – 2\cdot(6x^2 - 3).$$

Ao aplicar a propriedade distributiva e realizar as adições com os termos semelhantes, obtemos:
$E = -9x^2 - 6x + 6$

3. Observe a figura e responda:



a. Que expressão algébrica representa a área desse polígono?

$(x – 1) \cdot (x + 8) = x^2 + 7x - 8$

3ª série

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, pode-se fazer uma retomada por meio de diálogo com a turma, reforçando-se os conceitos matemáticos abordados. Nesse momento, é indispensável o incentivo quanto à participação e envolvimento dos estudantes, para que sejam capazes de se comunicar a partir de argumentos matemáticos, bem como sinalizar possíveis dificuldades quanto aos conceitos vistos.

b. Forneça uma expressão para se calcular o perímetro desse retângulo.

$2.(x - 1) + 2.(x + 8) = 2x - 2 + 2x + 16 = 4x + 14$

c. Para x igual a 6, determine:

- O valor da área da figura:

$6^2 + 7.6 - 8 = 70\ u^2$

- A medida do seu perímetro:

$4 \cdot 6 + 14 = 24 + 14 = 38\ u$

ANOTAÇÕES

AULAS 3 E 4 – DIFERENTES REPRESENTAÇÕES PARA CONTEXTOS IGUAIS

OBJETIVOS DA AULA

- Modelar uma situação-problema por meio de uma expressão algébrica;
- Representar pontos no plano cartesiano associados a uma função de 1º grau;
- Identificar relações entre coeficientes de uma equação da forma y = ax + b com propriedades geométricas da reta que representa essa equação no plano cartesiano.

1. (SARESP – 2010) Uma livraria comprou muitos exemplares de certo livro, pagando por cada exemplar o valor de R$ 30,00. Pagou, ainda, R$ 300,00 pelo transporte da mercadoria até a sua sede. Sabendo que cada livro comprado da editora foi revendido pela livraria por R$ 40,00 e que o lucro resultante, ao final da revenda, foi de R$ 1.200,00, é correto afirmar que o número de exemplares comprados inicialmente pela livraria foi de:

a. 150.
b. 120.
c. 100.
d. 80.
e. 60.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

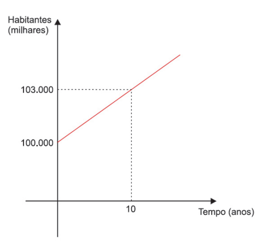
O lucro pode ser calculado subtraindo o custo da receita. Teremos, então, a sentença: 40L – 30L – 300 = 1200, através da qual calculamos que L = 150, em que L é o valor de cada livro.

2. (SARESP – 2010) Um banco estava totalmente ocupado e cada uma das pessoas sentadas usava 70 cm do banco. Chegando mais uma pessoa, todos se reacomodaram para que ela pudesse se sentar, e cada pessoa passou a ocupar 60 cm do banco. Qual o comprimento, em metros, do banco?

Se x é o número de pessoas inicialmente sentadas no banco, temos que y, o comprimento do banco, pode ser dado por: y = 70x (1). Quando há (x + 1) pessoas sentadas, acontece: y = 60(x +1) = 60x + 60 (2). Igualando (1) e (2) → 70x = 60x + 60 → 10x = 60 → x = 6 (número de pessoas inicialmente sentadas no banco). Cada uma destas 6 pessoas ocupava 70 cm do banco. Logo, o comprimento do banco é 6 x 70 cm = 420 cm = 4,20 m.

RESPOSTA: O banco mede 4,20 m.

3. (SARESP 2014) O gráfico a seguir representa uma projeção do número de habitantes de um município em n anos. A taxa de crescimento deste município, em habitantes por ano, foi de:



a. 103.000.
b. 100.000.
c. 3.000.
d. 300.
e. 10.

AULAS 3 E 4 – DIFERENTES REPRESENTAÇÕES PARA CONTEXTOS IGUAIS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso, malha quadriculada (**ANEXO 1**) e régua.

INICIANDO

Professor, para essa aula, os estudantes irão se deparar com situações-problemas cujas atenções se voltam para o uso de representações aritméticas, algébricas e geométricas de equações do 1º grau com duas variáveis. Desse modo, a conversa inicial deve motivá-los à leitura criteriosa dos enunciados e à percepção de que existem diferentes formas de modelar um mesmo contexto, sendo que a escolha pela melhor representação depende, também, do objetivo a ser alcançado.

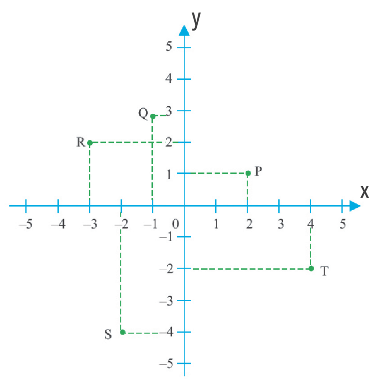
3ª série

DESENVOLVENDO

A leitura dos problemas pode acontecer de forma coletiva, discutindo-se o ponto chave de cada atividade com toda a turma. É de suma importância esclarecer sobre as diferentes formas de representar uma mesma situação. Incentive os estudantes a perceberem que as atividades 1 e 2 relacionam a representação aritmética com a algébrica; a atividade 3 trata da identificação da taxa de crescimento a partir do gráfico; e que as atividades 4 e 5 indicam representações no plano cartesiano. Para essas últimas, caso considerem interessante, eles poderão usar a malha quadriculada (**ANEXO 1**) e régua. Reforce que é indispensável se envolverem efetivamente na realização das questões, em duplas. Disponibilize tempo para a resolução dos problemas.

4. (SARESP 2013) Num jogo de conquista de território, é usado um tabuleiro com o eixo das ordenadas e abscissas como base para o começo do jogo.

Duas equipes são formadas (equipe 1 e equipe 2). Cada equipe recebe 5 cartas com as coordenadas geométricas para o posicionamento de suas peças. As peças da equipe 1 estão representadas no plano cartesiano pelos pontos P, Q, R, S, e T. As coordenadas P, Q, R, S e T da equipe 1 são, respectivamente:



a. (2, 1); (1, 3); (3, 2); (– 2, – 3) e (4, 2).

b. (2, 1); (– 1, 3); (– 3, 2); (– 2, – 4) e (4, – 2).

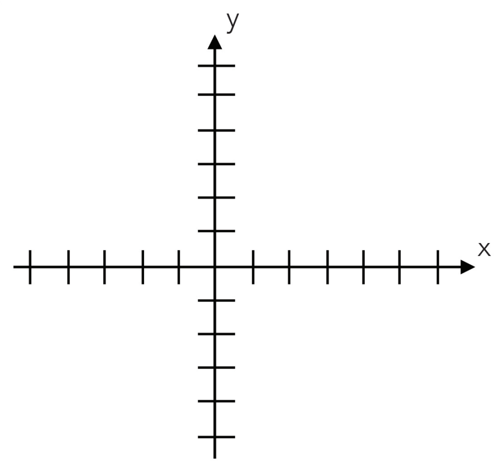
c. (1, 2); (– 1, – 3); (3, 2); (2, 3) e (– 4, 2).

d. (2, 1); (1, – 3); (– 3, 2); (– 2, – 3) e (4, – 2).

e. (1, 2); (– 1, 3); (3, 2); (2, – 3) e (4, 2).

5. Construa, no plano cartesiano a seguir, o gráfico da função y = 2x – 1. Para isso, você deverá: escolher 5 valores para x; calcular os valores de y correspondentes; preencher completamente o quadro abaixo; e, em seguida, marcar os pontos corretamente no plano.

X	Y	(X, Y)



FINALIZANDO

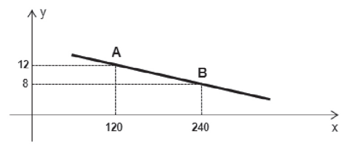
Por fim, a etapa de fechamento das ações do dia pode acontecer com a verificação das resoluções de cada dupla, de maneira coletiva. É uma interessante oportunidade de os estudantes explicitarem a organização de seus pensamentos frente a cada problema. Além disso, é válido falarem sobre como articularam o trabalho colaborativo em pares. Caso sejam indicadas dúvidas, professor, busque esclarecê-las. A socialização dos caminhos usados para resolver os problemas é uma importante ferramenta para aumentar o repertório matemático dos estudantes.

AULAS 5 E 6 – AINDA SOBRE AS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES

OBJETIVOS DA AULA

- Expressar os pontos de uma reta traçada no plano cartesiano por meio de uma equação da forma y = ax + b;
- Representar um sistema de duas equações de 1° grau por retas no plano cartesiano;
- Utilizar sistemas de equações do 1° grau em situações-problemas contextualizadas.

1. O gráfico a seguir representa a quantidade vendida (x) de um livro em função do preço de capa (y). Analisando o gráfico, podemos verificar que, ao diminuir o preço do livro, a quantidade de consumidores que o compram aumenta. Supondo que essa relação ocorre de forma linear, pede-se:



a. A equação da reta que contém os pontos A e B.

y = (-x/30) + 16

b. O valor do livro para que nenhum consumidor deseje comprá-lo.

Pra que nenhum consumidor deseje comprar, o livro deverá assumir o preço de R$ 16,00.

2. (SARESP - 2010) Num campeonato de futebol, os times ganham 3 pontos em cada vitória, 1 ponto por empate e 0 ponto por derrota. O time Cruzadão participou de 50 jogos e fez 54 pontos, tendo perdido 12 jogos. Chame de v o número de jogos que Cruzadão venceu; d o número de jogos em que foi derrotado; e e os jogos em que houve empate. Assinale a alternativa que mostra corretamente o sistema de equações que representa essa situação.

a. $\begin{cases} v+e=50 \\ 3v+1e=54 \end{cases}$

b. $\boxed{\begin{cases} v+e+12=50 \\ 3v+1e=54 \end{cases}}$

c. $\begin{cases} v+e+d=54 \\ 3v+e+0d=50 \end{cases}$

d. $\begin{cases} v+e+0{,}12=50 \\ 3v+1e=54 \end{cases}$

e. $\begin{cases} v+e+0d=50 \\ 3v+1e+d=54 \end{cases}$

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

A leitura do enunciado revela que o time Cruzadão participou de 50 jogos, logo temos que v + e + 12 = 50. Os 54 pontos foram obtidos da seguinte maneira: 3v + e = 54. Assim, temos o sistema indicado na letra B.

AULAS 5 E 6 – AINDA SOBRE AS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno de Atividades impresso, malha quadriculada (**ANEXO 1**) e régua.

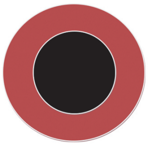
INICIANDO

Professor, para essa aula há a proposição de seis atividades que também tratam das representações aritméticas, algébricas e geométricas de contextos. Então, o início pode ser com um diálogo de retomada sobre as atividades já realizadas com essa abordagem. Promova a leitura dirigida dos enunciados.

DESENVOLVENDO

No decorrer da aula, motive os estudantes a se envolverem ativamente na resolução dos problemas, bem como na participação durante as correções. Consideramos pertinente que as situações sejam lidas, interpretadas e resolvidas coletivamente. Convide algum estudante para a leitura em voz alta dos enunciados. Discuta com a turma os contextos e ressalte as relações entre as representações aritmética, algébrica e geométrica. Em particular, para a atividade 1, retome a ideia de determinação da lei de associação da reta que passa por dois pontos, através do cálculo do coeficiente angular a partir das coordenadas desses pontos. As atividades 2 e 3 podem ser realizadas com leitura e resolvidas de forma oral e compartilhada. Para a atividade 4, é possível o uso de régua e de malha quadriculada (**ANEXO 1**). As discussões sobre ela devem caminhar no sentido de analisar e relacionar as formas algébrica e geométrica de retas, com vistas à verificação sobre serem paralelas ou concorrentes. A atividade 5 requer a resolução do sistema de equações. Aqui, os estudantes podem escolher o método que irão usar. A última atividade prevista para essa aula também recorre ao uso da malha quadriculada para representação geométrica de um sistema de equações. Professor, é muito importante acompanhar o andamento das resoluções das questões. Para isso, então, circular pela sala para observar de perto é uma boa ideia.

3. Em competições do tipo "tiro ao alvo", a pontuação depende do local em que o competidor acerta o alvo. Imagine uma situação em que existem apenas duas regiões possíveis para pontuar: A e B. Cris marcou 17 pontos ao lançar três flechas, das quais acertou uma na região A e duas na região B. Sua adversária, Kate, conseguiu 22 pontos lançando a mesma quantidade de flechas que Cris, mas acertando uma na região B e duas na região A. Considerando o desempenho das duas atletas, qual é o sistema de equações que representa mais adequadamente a pontuação de Cris e Kate?



Fonte: Acervo do autor

a. $\begin{cases} A+B=17 \\ A+B=22 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2A+B=17 \\ 2B+A=22 \end{cases}$

c. $\begin{cases} A+B=17 \\ 2A+2B=22 \end{cases}$

d. $\boxed{\begin{cases} A+2B=17 \\ B+2A=22 \end{cases}}$

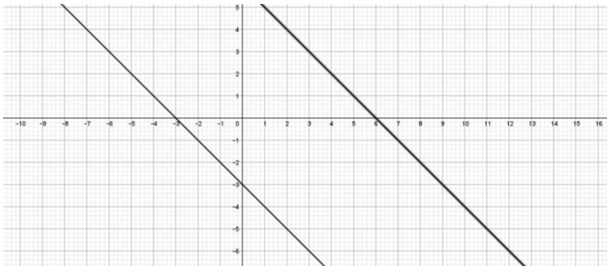
e. $\begin{cases} A+B=17 \\ 2A+B=22 \end{cases}$

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

De acordo com a leitura da situação descrita, podemos representar a pontuação de Cris e de Kate por meio de equações que compõem o sistema indicado no item D.

4. As retas x + y + 3 = 0 e x + y - 6 = 0 são paralelas. Use a malha quadriculada **(ANEXO 1)** e régua para representar r e s no mesmo plano cartesiano.

Cada estudante pode escolher os valores de x que tiver interesse, contudo, o esboço dos gráficos deve ficar dessa forma:



3ª série

5. Determine o ponto de intersecção entre as retas cujas representações algébricas são: r: 2x + y - 3 = 0 e s: 4x - 3y + 9 = 0.

Podemos resolver o sistema usando o método da adição:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \cdot(-2) \\ 4x - 3y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -6 \\ 4x - 3y = -9 \end{cases}$$

$$-5y = -15 \Rightarrow y = 3$$

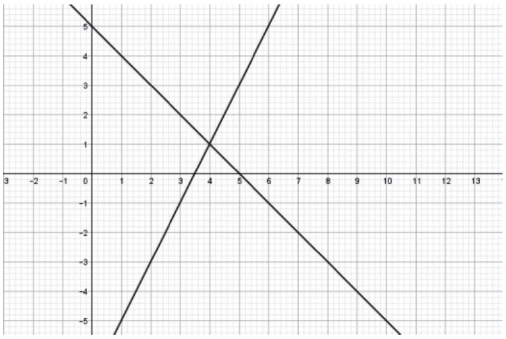
Substituindo o valor de y, obtemos: $2x + 3 = 3 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

Portanto, essas retas se interceptam no ponto (0, 3).

6. Observe as representações algébricas seguintes: r: x + y – 5 = 0 e s: 2x - y - 7 = 0. Estude as duas, represente-as no plano e conclua: elas correspondem a retas paralelas ou concorrentes? Você poderá usar a malha quadriculada (**ANEXO 1**) e régua.

Ao escolherem os valores de x e calcularem seus respectivos valores de y, os estudantes irão marcar os pontos no plano, obtendo a figura seguinte, às quais revela que:

As retas são concorrentes e se cruzam no ponto (4, 1).



ANOTAÇÕES

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, é possível promover um diálogo sobre as diferentes formas de representação de contextos. Indique que as representações aritméticas, algébricas e geométricas podem ser usadas nas mais variadas situações e ressalte a importância de relacioná-las. Estimule as falas dos estudantes para esclarecimento de dúvidas e possíveis dificuldades que tenham enfrentado durante a realização das atividades.

3ª série

AULAS 7 E 8 – ELABORAR E SOLUCIONAR PROBLEMAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso, malha quadriculada (**ANEXO 1**) e régua.

INICIANDO

Professor, para as últimas aulas desta Sequência, trazemos duas atividades. O início pode ser com a leitura oral de ambas e uma conversa com informações quanto à elaboração do problema proposto pela atividade 2.

DESENVOLVENDO

Para a atividade 1, a proposta é que os estudantes solucionem o sistema de equações utilizando procedimentos diversos. Dessa forma, professor, sugerimos que incentive que usem cálculo mental para buscar a solução, que apliquem procedimentos algébricos e também que utilizem a representação geométrica para conferir o resultado. Para essa última opção, eles poderão recorrer à malha quadriculada contida no **ANEXO 1**. Promova um momento de socialização das diferentes maneiras de resolver o problema, com reflexões a respeito. A atividade 2 solicita a elaboração de um problema. Na prática, oriente que cada dupla deve criar um contexto que seja possível modelar por meio de um sistema

AULAS 7 E 8 – ELABORAR E SOLUCIONAR PROBLEMAS

OBJETIVOS DA AULA

- Resolver sistemas de duas equações de 1º grau por diferentes estratégias (mental, processo algébrico, geométrico);
- Elaborar problemas que envolvam sistemas de equações de 1º grau;
- Utilizar sistemas de equações de 1º grau para resolver situações-problema em contexto.

1. Discuta sobre a situação seguinte com seu colega de dupla. Após isso, solucione o sistema usando cálculo mental, procedimentos algébricos e através da representação geométrica.

(SARESP - 2012) Considere o seguinte sistema: $\begin{cases} x = 3y \\ y + x = 40 \end{cases}$

Então, os valores de x e y são, respectivamente:

a. 10 e 30.
b. 3 e 40.
c. 20 e 3.
d. $\boxed{\text{30 e 10.}}$

Fazendo x = 3y na segunda equação, ficamos com y + 3y = 40, pela qual calculamos que y = 10. Substituindo esse valor na primeira equação, temos com x = 30.

2. Agora é a sua vez! Seja criativo e, juntamente com o seu colega de dupla, elabore um problema que seja possível solucionar usando um sistema de equações. Após a elaboração, troque o seu problema com a dupla vizinha e o resolva. Para finalizar, socialize com a turma o seu entendimento sobre o problema elaborado pela outra dupla, e também o caminho que usou para resolvê-lo.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Um exemplo de problema pode ser: Em alguns clubes, os ingressos têm valores diferentes para adultos e crianças. No Clube Dia Feliz, o ingresso para um adulto costumava ser R$ 50,00, e para uma criança, era metade desse valor. Mas, por causa da pandemia, o clube resolveu oferecer uma promoção para os seus clientes. O ingresso para cada adulto sairia por apenas R$ 15,00, e para uma criança, ficaria R$ 10,00. Calcule o número de adultos nesse clube em um dia em que a quantidade de crianças excede em 5 a quantidade de adultos e a arrecadação, apenas com os ingressos, foi de R$550,00.

ANEXO 1

de equações. Com o enunciado pensado e escrito, as duplas da sala devem trocar seus problemas entre si, para que uma resolva o problema da outra.

FINALIZANDO

Por fim, promova um momento de socialização. Este momento deve conter discussões sobre as questões elaboradas pelas duplas e suas respectivas resoluções. Ouvir os argumentos com atenção é muito importante. É uma interessante oportunidade de os estudantes explicitarem a organização de seus pensamentos frente a cada problema. Além disso, falar sobre como articularam o trabalho colaborativo na dupla é válido. Caso sejam indicadas dúvidas, busque esclarecê-las. A socialização dos caminhos usados para resolver os problemas é uma importante ferramenta para aumentar o repertório matemático dos estudantes.

ANOTAÇÕES

3ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 03

3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAIS**
3	Medida do comprimento da circunferência; Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo.	(EF07MA33) Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica. (EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 7º ano:** Vol. 4, na Situação de Aprendizagem 5, Atividade 1: Circunferência . **Caderno do 9º ano:** Vol. 4, na Situação de Aprendizagem 1, Atividade 2: Circunferência: Arcos e ângulos; Atividade 3: Construção de arcos de circunferência e ângulo central; Atividade 4: Circunferência e ângulos inscritos .

Olá, Professor!

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de compreender a origem do número π e a sua importância para o cálculo do perímetro de uma circunferência ou parte dela. Além disso, esperamos que o aluno saiba distinguir, com clareza, ângulos inscritos de ângulos centrais e identificá-los no dia a dia, e que sejam capazes de efetuar cálculos matemáticos para determinar suas medidas e relações.

As escolhas das habilidades foram feitas por meio de análises dos resultados de avaliações internas e externas (diagnóstico de entrada e SARESP), que revelaram fragilidades dos estudantes com relação a: **(EF07MA33) Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica; e (EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.**

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	**De onde veio o número π?**
3ª e 4ª/ 90 min	**Construindo ângulos inscritos e ângulos centrais**
5ª e 6ª/ 90 min	**Circunferência e suas partes**
7ª e 8ª/ 90 min	**Teoria e prática**

AULAS 1 E 2 - DE ONDE VEIO O NÚMERO π?

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

No primeiro momento, cada estudante deverá realizar sua atividade sozinho. Portanto, deixe as fileiras da sala em disposição tradicional.

MATERIAL NECESSÁRIO

Para o estudante: Caderno de Atividades impresso, barbante, tampas circulares (de embalagens de achocolatado, refrigerante, etc.), CD/DVD e régua graduada.

Para o professor: Trazer alguns objetos circulares para ceder a algum estudante que não conseguir trazer de casa.

INICIANDO

Caro professor, as atividades desta Sequência propõem uma contextualização histórica do surgimento do número π. Nas as aulas 1 e 2, serão tratados a compreensão e a construção do número π por meio de razões, o cálculo de perímetro e de arcos. Sugerimos, para começar, que o **Caderno do Estudante** seja apresentado e que seja lida a contextualização histórica do surgimento do número π. É indispensável que se atente para fazer um diagnóstico do conhecimento dos estudantes sobre esse tema. Ressalte que não existia representação decimal dos números como temos hoje. As frações foram geradas por razões, as quais surgiram comparando-se uma grandeza com outra. Lembrando ainda que não havia unidades de medidas bem definidas.

Comente sobre polegada, pés e jarda. Mostre aos estudantes que pessoas diferentes têm tamanhos de mãos diferentes, e terão, consequentemente, polegadas, pés e jardas diferentes.

Cite ainda as razões trigonométricas do triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente. Tratam-se de razões comparativas dos lados do triângulo e cada uma tem o seu objetivo. Nesses casos, não há unidade de medida definida. A tangente, por exemplo, mostra a taxa de variação de subida de uma rampa. Outra forma de apresentar essa ideia seria assim: posicione-se a uma distância de um estudante qualquer e estime a distância entre vocês dois. Questione aos alunos sobre quantos iguais a você seriam necessários para medir a distância entre você e o estudante. Nesse caso, você seria a unidade de medida.

DESENVOLVENDO

Professor, estimule os estudantes para participarem da construção do significado matemático do número π, do cálculo de perímetro e de arcos. O uso de objetos circulares diversos é fundamental, então distribua-os a fim de representar situações diversas. Para a realização, cada estudante ou dupla deve receber vários desses objetos. É importante incentivar que alguns estudantes se voluntariem para apresentar os resultados obtidos. Definindo-se quem vai iniciar, este deverá compartilhar em voz alta suas conclusões, enquanto os demais comparam com suas próprias anotações. Essas ações devem ser repetidas até que todos participem. Professor, se achar necessário, pode registrar na lousa os resultados lidos. Ao final, os estudantes, organizados em duplas produtivas, devem realizar as atividades 2, 3 e 4 do Caderno do Estudante, as quais abordam cálculo de perímetro e medidas de arcos.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

AULAS 1 E 2 - DE ONDE VEIO O NÚMERO π?

OBJETIVOS:
- Relacionar o comprimento da circunferência à medida de π;
- Comparar o comprimento de circunferências com seus diferentes diâmetros;
- Resolver situações-problema que envolvam comprimento de uma circunferência;
- Resolver situações-problema que envolvam comprimento de uma circunferência e ângulos.

1. Usem os objetos circulares que trouxeram de casa para preencher a tabela abaixo:

Objeto	Comprimento da Circunferência	Diâmetro	Razão entre Comprimento e Diâmetro
Tampa de Achocolatado	32,6	10,2	3,19

a. Escreva a forma decimal de cada razão que obteve.

Resposta pessoal. $\left(\frac{32{,}6}{10{,}2} = 3{,}19\right)$

b. Compare os resultados com a razão 22/7.

Resposta pessoal. Resposta esperada: Todos os resultados se aproximam da fração $\frac{22}{7}$, cuja aproximação decimal é 3,14.

c. A partir do item b elabore um parágrafo explicando que regularidade você percebeu.

Resposta pessoal. Resposta esperada:Não importa se a circunferência é grande, média ou pequena, a razão entre perímetro e diâmetro, respectivamente, sempre tende a, aproximadamente, 3,1.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, diga aos estudantes que um grego (que a história infelizmente não guardou o nome) calculou a razão entre o comprimento e o diâmetro de circunferências variadas – grandes, médias ou pequenas.

O resultado era sempre o mesmo: $\frac{22}{7}$, aproximadamente 3,14 na escrita numérica atual.

É preciso orientar os estudantes sobre como obter a medida do perímetro da circunferência usando o barbante e a régua. Depois de concluir o preenchimento da tabela, é importante interpretar os dados registrados, fazendo uma observação cuidadosa, antes de começar a responder os comandos.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, o objetivo da atividade 2 é mostrar que, a partir da razão $\pi = \frac{Perímetro}{Diâmetro}$, podemos montar uma fórmula para calcular o perímetro de qualquer circunferência, desde que saibamos previamente a medida de seu raio. Na letra b, use a divisão euclidiana para falar do resto. Por que o resto é zero? E se o resto não fosse igual a 0? Mostre que o quociente indica a quantidade de voltas dadas pela roda da moto e que o resto equivale a quantos metros a roda andou da 4ª volta. Mude o valor do raio da praça caso queira provocar uma discussão sobre isso.

FINALIZANDO

Consideramos importante a correção coletiva das atividades, com o envolvimento ativo dos estudantes. Esse momento será fundamental para a identificação de possíveis dúvidas e dificuldades percebidas durante a realização, no intuito de esclarecê-las. Professor, nessa etapa cabe destacar que, inicialmente, calcularemos o número π por meio de uma razão, mas que ele não é uma razão, pois se trata de um número irracional. Refletir sobre a concepção de que as unidades temáticas não são independentes nem excludentes e que, por essa razão, é possível lidar com situações em que estão interconectadas, pode enriquecer significativamente as discussões.

Para finalizar, faça as seguintes perguntas para estudantes escolhidos aleatoriamente:

1) Como surgiu o π?
2) Como podemos calcular o comprimento de uma circunferência?
3) É possível calcular o comprimento de parte dela?

A partir das respostas dadas pelos estudantes, você poderá avaliar, de forma simples, se os objetivos foram alcançados.

d. Qual é o valor de π?

O valor de π é a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. Esse número é, aproximadamente, 3,14.

e. Troque a sua tabela com a de um colega ao lado e analise os resultados obtidos por ele. Escreva um parágrafo explicando o que você percebeu observando as duas tabelas, a sua e a do seu colega.

Resposta pessoal.

2. Um motociclista começa a girar em torno de uma praça, observando a bela estátua do patrono de uma cidadezinha do interior de Goiás, que está no centro da praça. Anestesiado com a sua beleza, dá exatamente três voltas completas. Supondo que a praça tenha o desenho de uma circunferência perfeita, com raio de 14 m, e que o pneu da moto tenha 70 cm de diâmetro, responda: (Utilize $\pi \cong \frac{22}{7}$.)

a. Quantos metros esse motociclista andou enquanto admirava a bela estátua?

Resolução: Uma volta tem comprimento $2.\pi.r=2.\frac{22}{7}$ =88. Logo, 3 voltas totalizam 88.3 = 264 m.

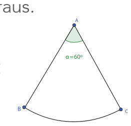
b. Quantas voltas, aproximadamente, a roda dianteira da moto fez durante o trajeto?

Resolução: Uma volta da roda dianteira da motocicleta tem perímetro $2.\pi.r$=2.22/7.70=440cm=4,4m. Logo, o número de voltas será $\frac{264}{4,4}$=60.

3. Vitor encontrou, no porão de sua casa, um relógio de pêndulo que foi do seu avô, Miguel. Nunca tinha visto um pessoalmente. Usando uma régua, concluiu que o comprimento do pêndulo era de 30 cm. Em seguida, puxou o pêndulo e, durante o seu movimento, verificou que suas posições extremas formavam um ângulo de 60°.

a. Faça um esboço da situação e determine, na figura, o ângulo entre suas posições extremas em graus.

Resolução:



b. Determine o comprimento do arco que a extremidade do pêndulo descreve. Use π=3,1.

Resolução: Vamos fazer uma regra de 3 simples.

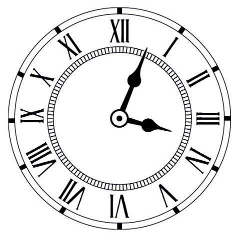
$$\frac{360°}{60°} = \frac{2.\pi.30}{x} \Rightarrow 360°x = 3600°.\pi \Rightarrow x = \frac{3600}{360}.\pi \Rightarrow x = 10.3,1 \Rightarrow x = 31\ cm.$$

Portanto, o comprimento do arco será de 31 cm.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, veja a atividade 3. Nela vamos mostrar aos estudantes que é possível determinar perímetro de arcos de circunferência. Ajude os estudantes a concluírem que, se o pêndulo desse uma volta completa em torno de seu eixo, descreveria uma circunferência completa. Mostre que a caixa impede que isso aconteça. Desta forma, é possível observar apenas o comprimento do arco, e não do perímetro completo da circunferência.

4. Considere um relógio de ponteiros como o da figura ao lado. Esse tipo de relógio é dividido em doze partes congruentes, logo, cada parte equivale a um ângulo de $\frac{360°}{12} = 30°$. O ponteiro dos minutos (o maior) anda 30° a cada 5 minutos, enquanto o ponteiro das horas (o menor) anda 30° em uma hora. Considere que o ponteiro maior meça 10 cm, e que o ponteiro menor tenha 6 cm. Determine:



a. A distância percorrida pela extremidade do ponteiro maior depois de se passarem 60 minutos. (Use $\pi \cong 3$.)

Resolução: Analisando o que foi dito no texto concluímos que o ponteiro maior dará uma volta completa em uma circunferência de raio 10 cm, no período de 60 minutos.

Logo, a extremidade do ponteiro maior irá deslocar $2.\pi.r=2.3.10=60$ cm.

b. A distância percorrida pela extremidade do ponteiro menor depois de se passarem 120 minutos. (Use $\pi \cong 3$.)

Resolução: Em 120 minutos, ou seja, uma hora, o ponteiro menor irá deslocar 30° + 30° = 60°.

Como 60° representa $\frac{1}{6}$ de uma volta completa então a extremidade do ponteiro irá deslocar $\frac{1}{6}$ do comprimento de uma circunferência de raio 6 cm.

Logo, o ponteiro irá percorrer $\frac{1}{6}.2.3.6=6$ cm.

AULAS 3 E 4 - CONSTRUINDO ÂNGULOS INSCRITOS E ÂNGULOS CENTRAIS

OBJETIVOS:
- Identificar ângulos na circunferência: inscritos e centrais;
- Diferenciar circunferência e círculo;
- Compreender a diferença entre circunferência e círculo, estabelecendo os ângulos centrais e inscritos na circunferência;
- Discutir as relações de um polígono inscrito na circunferência e as medidas de seus ângulos;
- Diferenciar ângulo inscrito de ângulo central;
- Estabelecer relações entre as medidas dos ângulos central e inscrito estabelecidos no mesmo arco da circunferência;
- Determinar medidas de ângulos por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.

1. Com o uso do GeoGebra, podemos construir circunferências de forma muito simples.

1. Abra o Aplicativo;
2. Clique sobre o botão ;
3. No menu que irá surgir, escolha Círculo: Centro & Raio;
4. Escolha uma posição para o centro e digite 5 para o raio, quando for pedido;
5. Clique no botão de pontos A do menu e, em seguida, marque dois pontos B e C sobre a circunferência;
6. Agora, vamos medir o ângulo central BÂC com o GeoGebra, clicando no botão e selecionando os pontos C, A e B, nesta ordem. Anote o ângulo central exibido em um papel;

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Na atividade 4, vamos verificar se o estudante compreendeu os conceitos de comprimento de uma circunferência e de um arco. Dê um tempinho para os alunos tentarem sozinhos, sem orientação sua. Ao final, se eles não conseguirem acertar o gabarito, faça a conclusão do exercício no quadro, tirando todas as dúvidas.

AULAS 3 E 4 - CONSTRUINDO ÂNGULOS INSCRITOS E ÂNGULOS CENTRAIS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Nessa aula, faremos uso de um *software* de geometria chamado GeoGebra. Caso a escola tenha um laboratório de informática, verifique, com o responsável pelo laboratório, se o aplicativo está disponível nas máquinas. Caso não esteja, peça, com antecedência, que a instalação seja providenciada, a partir do site Geogebra.org, disponível em: <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>. Professor, se a opção anterior não for possível, você pode instalar o programa em seu computador pessoal e, com o uso de *datashow*, executar a atividade com os estudantes. Se não for viável nenhuma das possibilidades anteriores, podemos tentar o método tradicional: régua, compasso e transferidor.

INICIANDO

Caro professor, dando sequência ao que fizemos nas aulas 1 e 2, você deve iniciar a aula relembrando o que é ângulo central e o que é ângulo inscrito (ETIM lat. *inscrīptus*, a, *um* 'escrito em ou sobre'). Falar sobre a origem desta palavra pode ser útil na compreensão do conceito matemático. Nas aulas

3 e 4, iremos diferenciar ângulos centrais de ângulos inscritos. É de suma importância mostrar que existe uma relação entre esses dois ângulos. Sugerimos, para começar, que o **Caderno do Estudante** seja apresentado. É indispensável que se atente para fazer um diagnóstico do conhecimento dos estudantes sobre o tema.

DESENVOLVENDO

Professor, na atividade 1, trabalharemos, de forma experimental, os conceitos e propriedades de ângulos inscritos e centrais. O estudante terá a oportunidade de ver, na prática, o que os livros ilustram. A ideia é fazer com que a circunferência ganhe vida com o uso do GeoGebra. Devemos explorar a concretização do abstrato via software.

Na atividade 2 questione os estudantes quanto à diferença do ângulo inscrito e do ângulo central. Faça perguntas como: “Quando fazemos o giro sugerido na atividade, criamos um ângulo central ou um ângulo inscrito?”; “Teria como esse giro criar um ângulo inscrito?”.

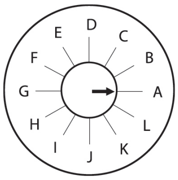
O objetivo da atividade 3 é mostrar ao estudante que o ângulo central é sempre maior que o ângulo inscrito de um mesmo arco.

7. Selecione agora um ponto D da circunferência que não esteja no arco $\widehat{BC}$. Note que o ângulo $C\hat{D}B$ é inscrito referente ao arco $\widehat{BC}$;
8. Meça o ângulo $C\hat{D}B$ como foi descrito no passo 6 e anote no papel. Existe relação entre as medidas de $C\hat{D}B$ e de $B\hat{A}C$?
9. Selecione um outro ponto na circunferência com as mesmas condições do ponto D. O GeoGebra automaticamente o chamará de ponto E. Como no paço 6, determine a medida do ângulo $B\hat{E}C$. O que você descobriu?
10. Escolha um novo ponto F, com as mesmas condições de D. O que você descobriu?
11. Por fim, clique no botão . Mova o ponto B para uma nova posição na circunferência, de modo que os pontos D, E e F não pertençam ao arco $C\hat{D}B$. O que aconteceu?

Redija um parágrafo contando as conclusões você obteve.

Resolução: Resposta pessoal. Esperamos que ao final dessa atividade o estudante possa concluir que ângulos inscritos têm medida igual metade do ângulo central referente ao mesmo arco e que ângulos inscritos diferentes são congruentes.

2. **O dispositivo de segurança de um cofre tem o formato da figura ao lado, onde as 12 letras A, B, ..., L estão igualmente espaçadas, ou seja, o ângulo central entre duas letras vizinhas é o mesmo. A posição inicial da seta, quando o cofre se encontra fechado, é a indicada.**



Fonte: O autor.

Para abrir o cofre, são necessárias três operações (o segredo), girando o disco menor a partir da posição indicada pela seta, de acordo com as seguintes instruções:

1) 120° no sentido anti-horário;
2) 270° no sentido horário;
3) 135° no sentido anti-horário.

Pode-se, então, afirmar corretamente que o cofre será aberto quando a seta estiver

a. no ponto médio entre L e A.

b. na posição B.

c. na posição K.

d. em algum ponto entre J e K.

e. na posição H.

Resolução: Depois do primeiro movimento o ponteiro irá parar alinhado com a letra E. Após o segundo movimento o ponteiro irá estar alinhado com a letra H. Finalmente, após o último movimento, o ponteiro irá parar entre as letras L e A, exatamente no meio, entre as duas.

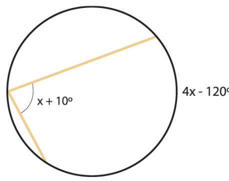
CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, na atividade 2, questione os alunos quanto ao giro citado. Quando fazemos o giro sugerido na atividade, criamos um ângulo central ou um ângulo inscrito? Teria como esse giro criar um ângulo inscrito?

FINALIZANDO

Durante a aula, circule pela sala para atender dúvidas pontuais, caso surjam. Esta é uma forma de avaliar se tudo correu bem e se os objetivos foram alcançados, já que, na maior parte da atividade, os estudantes estarão construindo os conceitos com o uso de software.

3. Em uma circunferência, um ângulo inscrito de medida x + 10° determina um arco de medida 4x – 120°. Calcule, em graus, o valor da incógnita x.



Resolução: Sabendo que o ângulo inscrito tem medida igual a metade da medida do ângulo central referente ao mesmo arco, temos:

$$x + 10° = \frac{1}{2}(4x - 120°)$$
$$x + 10° = 2x - 60°$$
$$x = 70°$$

4. Vamos construir um hexágono regular usando o GeoGebra? Vamos lá!

Siga as instruções:

1. Clique no botão e, no menu suspenso, selecione Polígono Regular;
2. Selecione dois pontos próximos, A e B. Em seguida, determine a quantidade de lados do polígono regular, digitando 6 para o hexágono.

Agora, vamos construir a circunferência circunscrita nesse hexágono:

1. Clique no botão A e selecione o menu suspenso Ponto Médio ou Centro;
2. Clique no interior do hexágono para que apareça o seu centro;
3. Clique no botão e selecione o menu suspenso Círculo dados Centro e Um de seus Pontos;
4. Selecione o ponto G (centro) e qualquer vértice do hexágono.

Pronto! Temos uma circunferência circunscrita em um hexágono regular.

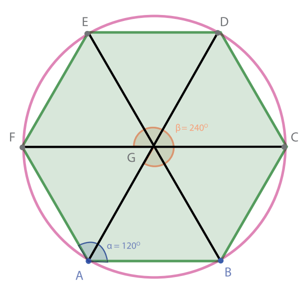
Agora, responda:

a. Qual é o valor do ângulo central referente a cada arco determinado por vértices consecutivos?

Resolução: $\frac{360°}{6} = 60°.$

b. Elabore um plano utilizando os conhecimentos de ângulo central e ângulo inscrito, para determinar a medida de cada ângulo interno do hexágono regular.

Resolução: Resposta Pessoal. Uma possível estratégia seria a seguinte: Para calcular a medida do ângulo interno FÂB, que ao mesmo tempo é inscrito na circunferência, podemos observar que ele é inscrito referente ao arco FÊB que contém 4 ângulos adjacentes de medida 60°, totalizando 240°. Logo, o inscrito FÊB terá medida 120°.



CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Caso não esteja disponível o software livre Geogebra, esta atividade pode ser feita de forma manual, com régua, compasso e transferidor.

AULAS 5 E 6 - CIRCUNFERÊNCIA E SUAS PARTES

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno de Atividades do Estudante impresso.

INICIANDO

Professor, chegou a hora de verificar se os conceitos que foram aprendidos nas aulas anteriores podem ser levados para o campo da abstração e auxiliarem o estudante a resolver problemas de geometria, até mesmo de situações de um cotidiano não muito distante de nossa realidade. A ideia é unir os aprendizados e aplicá-los na resolução de problemas.

AULAS 5 E 6 - CIRCUNFERÊNCIA E SUAS PARTES

OBJETIVOS:
- Compreender o conceito de arco de circunferência;
- Compreender a relação entre as medidas do ângulo central e ângulo inscrito em uma mesma circunferência e no mesmo arco;
- Reconhecer ângulos centrais em uma circunferência e aplicar em situações cotidianas;
- Reconhecer a amplitude de uma circunferência completa e de uma semicircunferência;
- Comparar as relações de ângulos inscritos e centrais na circunferência para a solução de situações-problemas.

1. Seja a o menor ângulo formado pelos ponteiros da hora e dos minutos às 8h 20min. Podemos afirmar que a

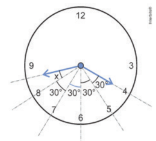
a. está entre *80°* e *90°*.

b. $\boxed{\text{é maior que } 120°.}$

c. está entre *100°* e *120°*.

d. é menor que *90°*.

e. está entre *90°* e *100°*.



Resolução: O menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio será $4 \cdot 30° + x$, portanto, maior que 120°.

2. Determine a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando ele marca:

a. 3 horas.

b. 7 horas e 20 minutos.

c. 8 horas e 50 minutos.

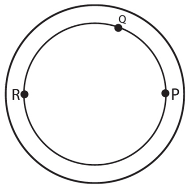
Resolução:

a. $x = 30°.3 = 90°$

b. $x = 30°.3 + 20.0,5° = 100°$

c. $x = 30° + 10.0,5° = 35°$

3. (ENEM – PPL-2019) Uma pista circular delimitada por duas circunferências concêntricas foi construída. Na circunferência interna dessa pista, de raio *0,3 km*, serão colocados aparelhos de ginástica localizados nos pontos *P*, *Q* e *R*, conforme a figura.



Fonte: O autor.

O segmento RP é um diâmetro dessa circunferência interna, e o ângulo $P\hat{R}Q$ tem medida igual a $\frac{\pi}{5}$ radianos. Para uma pessoa ir do ponto *P* ao ponto *Q* andando pela circunferência interna no sentido anti-horário, ela percorrerá uma distância, em quilômetro, igual a

a. $0{,}009\pi$. b. $0{,}03\pi$. c. $0{,}06\pi$. d. $\boxed{0{,}12\pi.}$ e. $0{,}18\pi$.

Resolução:

Desde que $P\hat{R}Q$ é inscrito, podemos concluir que o menor arco $\widehat{PQ}$ corresponde a $\frac{2\pi}{5} rad$. Portanto, a resposta é igual a $\frac{2\pi}{5} \cdot 0{,}3 = 0{,}12\pi km$.

4. (ENEM-2004) Na competição de *skate*, a rampa em forma de U tem o nome de *vert*, onde os atletas fazem diversas manobras radicais. Cada uma dessas manobras recebe um nome distinto, de acordo com o total de giros realizados pelo skatista e pelo *skate*. Uma delas é a "180 *allie frontside*", que consiste num giro de meia volta. Sabendo-se que *540°* e *900°* são côngruos a *180°*, um atleta que faz as manobras 540 *Mc Tuist* e 900 realizou giros completos de

a. 1,5 e 2,5 voltas respectivamente.

b. 0,5 e 2,5 voltas respectivamente.

c. 1,5 e 3,0 voltas respectivamente.

d. 3,0 e 5,0 voltas respectivamente.

e. 1,5 e 4,0 voltas respectivamente.

Resolução: *540°:360°=1,5 voltas 900°:360°=2,5 voltas*

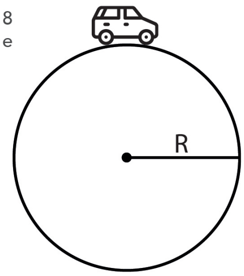
DESENVOLVENDO

Professor, a ideia é dar dinâmica para os estudantes para participarem da construção do significado matemático da medida dos ângulos central e inscrito, do cálculo de perímetro e de arcos. É interessante incentivar que alguns estudantes se voluntariem para apresentar os resultados obtidos. Definindo-se quem vai iniciar, este deverá compartilhar em voz alta suas conclusões, enquanto os demais comparam com suas próprias anotações. Essas ações devem ser repetidas até que todos participem. Professor, se achar interessante, pode registrar na lousa os resultados lidos. Ao final, os estudantes, organizados em duplas produtivas, devem realizar as atividades 2, 3 e 4 do Caderno do Estudante, as quais abordam cálculo do perímetro e medidas de arcos. Conduza a resolução de cada atividade por meio de perguntas e respostas.

FINALIZANDO

Durante a aula, circule pela sala para atender dúvidas pontuais, caso surjam. Esta é uma forma de avaliar se tudo ocorreu bem e se os objetivos foram alcançados, já que, na maior parte da atividade, os estudantes estarão construindo os conceitos com o uso de *software*.

5. Um carrinho de brinquedo, que corre em uma pista circular, completa 8 voltas, percorrendo um total de 48 m. Desprezando a largura da pista e considerando $\pi = 3$, o seu raio é, em metros, igual a



a. 0,8. $\boxed{\text{b. } 1{,}0.}$ c. 1,2. d. 2,0.

Resolução: [B]

$8.(2.\pi.r)=48$
$8.2.3.r=48$
$48.r=48$
$r=1$

6. Uma mangueira de jardim enrolada forma uma pilha circular, medindo cerca de 100 cm de um lado a outro. Se há seis voltas completas, o comprimento da mangueira é de, aproximadamente

a. 9m. b. 15m. $\boxed{\text{c. } 19\text{m.}}$ d. 35m. e. 39m.

Resolução: [C]

Note que o diâmetro é $2r=100\ cm$. **Logo, a mangueira completa terá um comprimento de:** $6.2r.\pi=6.100.3{,}14=1884\ cm=18{,}84m$

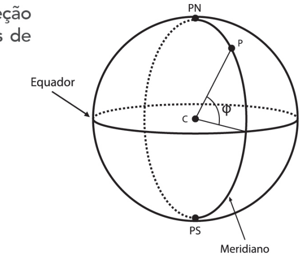
7. (ENEM-PPL-2019) As coordenadas usualmente utilizadas na localização de um ponto sobre a superfície terrestre são a latitude e a longitude. Para tal, considera-se que a Terra tem a forma de uma esfera.

Um meridiano é uma circunferência sobre a superfície da Terra que passa pelos polos Norte e Sul, representados na figura por *PN* e *PS*. O comprimento da semicircunferência que une os pontos *PN* e *PS* tem comprimento igual a 20.016*km*. A linha do Equador também é uma circunferência sobre a superfície da Terra, com raio igual ao da Terra, sendo que o plano que a contém é perpendicular ao que contém qualquer meridiano.

Seja *P* um ponto na superfície da Terra, *C* o centro da Terra e o segmento $\overline{PC}$ um raio, conforme mostra a figura. Seja φ o ângulo que o segmento $\overline{PC}$ faz com o plano que contém a linha do Equador. A medida em graus de φ é a medida da latitude de *P*.

Suponha que, a partir da linha do Equador, um navio viaja subindo em direção ao Polo Norte, percorrendo um meridiano até um ponto *P*, com 30 graus de latitude.

Quantos quilômetros são percorridos pelo navio?



Fonte: O autor.

a. 1.668 $\boxed{\text{b. } 3.336}$ c. 5.004 d. 6.672 e. 10.008

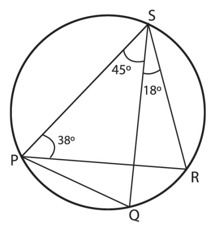
Resolução:

Sendo $\frac{30°}{180°}=\frac{1}{6}$ **, podemos concluir que a resposta é** $\frac{20016}{6}=3336\ km.$

AULAS 7 E 8 - TEORIA E PRÁTICA

OBJETIVOS:
- Aplicar a relação de ângulos inscritos e centrais para solucionar uma situação-problema de Geometria;
- Resolver uma situação-problema utilizando as relações de ângulos centrais e inscritos na circunferência.

1. Observe a figura. Suponha que as medidas dos ângulos PŜQ, QŜR e SP̂R, assinalados na figura, sejam 45°, 18° e 38°, respectivamente. Determine a medida do ângulo PQS, em graus.



Fonte: O autor.

Resolução:

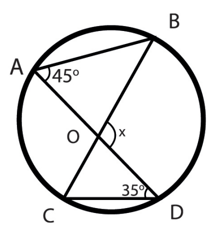
No Δ*PRS* temos: $38° + 63° + m(P\hat{R}S) = 180°$

$m(P\hat{R}S) = 79°$

Como os ângulos $P\hat{R}S$ e $P\hat{Q}S$ são inscritos, referentes ao mesmo arco, portanto congruentes.

Logo: $m(P\hat{Q}S) = 79°$

2. Determine a medida do ângulo x, em graus, na figura a seguir.



Fonte: O autor.

Resolução:

Como os ângulos $B\hat{C}D$ e $A\hat{B}D$ são inscritos, referentes ao mesmo arco, portanto congruentes, ou seja $m(B\hat{C}D) = m(A\hat{B}D) = 45°$.

No ΔOCD temos: $m(C\hat{O}D) + 45° + 35° = 180°$

$m(C\hat{O}D) = 100°$

Portanto, *x=80°*.

AULAS 7 E 8 - TEORIA E PRÁTICA

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno de Atividades do Estudante impresso.

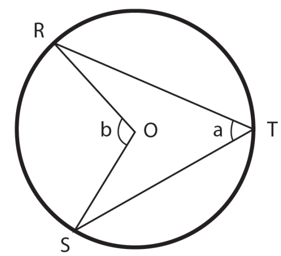
INICIANDO

Caro professor, as atividades desta Sequência propõem uma abordagem mais técnica do círculo e suas partes. Para as aulas 7 e 8, serão tratadas a compreensão e construção de todos os conceitos de círculo em atividades mais complexas, que exploram a criatividade. Sugerimos, para começar, que o **Caderno do Estudante** seja apresentado e lido com os estudantes. Reforce sobre a importância de ter persistência no processo de investigação do exercício de geometria. Tudo que precisamos para resolver as atividades estará descrito na figura ou no enunciado.

DESENVOLVENDO

Professor, a ideia é motivar os estudantes a participarem da construção do significado matemático da medida dos ângulos central e inscrito, do cálculo de perímetro e de arcos. É importante incentivar que alguns estudantes se voluntariem para apresentar os resultados obtidos. Definindo-se quem vai iniciar, este deverá compartilhar em voz alta suas conclusões, enquanto os demais comparam com suas próprias anotações. Essas ações devem ser repetidas até que todos participem. Professor, se achar necessário, pode registrar na lousa os resultados lidos. Ao final, os estudantes, organizados em duplas produtivas, devem realizar as atividades 2, 3 e 4 do **Caderno do Estudante**, as quais abordam cálculo do perímetro e medidas de arcos. Conduza a resolução de cada atividade por meio de perguntas e respostas.

3. (IFCE – 2012) Na figura abaixo, **R**, **S** e **T** são pontos sobre a circunferência de centro **O**. Se ***x*** é o número real, tal que **a = 5x** e ***b* = 3x + 42°** são as medidas dos ângulos **R$\hat{T}$S** e **R$\hat{O}$S**, respectivamente, pode-se dizer que:



Fonte: O autor.

a. a = 30° e b = 60°.

b. a = 80° e b = 40°.

c. a = 60° e b = 30°.

d. a = 40° e b = 80°.

e. a = 30° e b = 80°.

Resolução: [A]

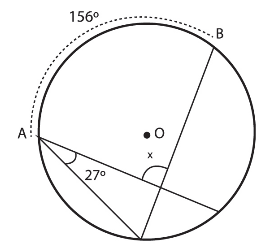
De acordo com as propriedades do ângulo inscrito, pode-se escrever que:

$$b = 2.a$$
$$3x + 42° = 2.5x$$
$$7x = 42°$$
$$x = 6°$$

Logo, $a = 5.6° = 30°$

$b = 3.6° + 42° = 60°.$

4. Na figura da circunferência de centro O, se o ângulo agudo $\hat{A}$ mede *27°* e o arco $\widehat{AB}$ mede *156°*, então qual será a medida do ângulo indicado por x?

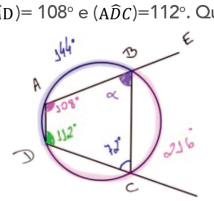


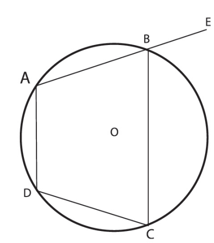
Fonte: O autor.

Resolução:

Se o arco $\widehat{AB}$ mede *156°*, então o ângulo inscrito a este mede *78°*. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é *180°*, pode-se concluir que o ângulo complementar a *x*, que pertencente ao triângulo formado pelas retas com vértice em A, vale *75°*. Logo, *x=105°*.

5. Na figura, tem–se $(B\hat{A}D)$= 108° e $(A\hat{D}C)$=112°. Qual é a medida de $E\hat{B}C$?



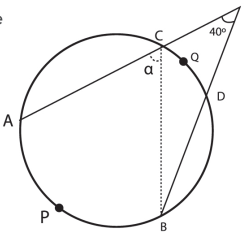


Fonte: O autor.

Observe a figura acima.

Sabendo que o ângulo central é o dobro do ângulo inscrito referente ao mesmo arco, podemos concluir que, como $(D\hat{A}B) = 108°$ seu respectivo ângulo central terá medida de 216°. Sendo assim, o replemento vale 144° e, portanto, $m(D\hat{C}B) = 72°$. Como no quadrilátero a soma dos ângulos internos é sempre 360° concluímos que $m(C\hat{B}A) = 68°$. Finalmente, temos que $m(E\hat{B}C) = 112°$, pois $E\hat{B}C$ e $C\hat{B}A$ são suplementares.

6. Se a soma das medidas dos arcos **$\widehat{APB}$** e **$\widehat{CQD}$** é **160°**, então o ângulo a mede



Fonte: O autor.

a. 60°. **b.** 65°. **c.** 70°. **d.** 75°. **e.** 80°.

Resolução:

Por hipótese, $m(\widehat{CQD}) + m(\widehat{APB}) = 160°$.

Logo: $2\alpha + m(\widehat{CQD}) = 160°$

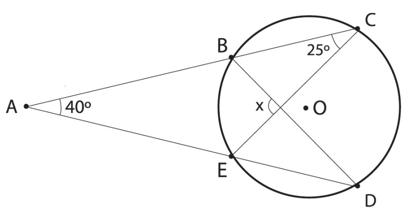
Isto implica que: $m(\widehat{CQD}) = 160° - 2\alpha$

Como $C\hat{B}D$ **é inscrito, temos** $m(C\hat{B}D) = \dfrac{160° - 2\alpha}{2}$.

Pelo teorema do ângulo externo, temos:

$$\frac{160° - 2\alpha}{2} + 40° = \alpha$$
$$160° - 2\alpha + 80° = 2\alpha$$
$$4\alpha = 240°$$
$$\alpha = 60°$$

7. Considere a figura abaixo.



Fonte: O autor.

A medida x do ângulo assinalado é:

a. 90°. **b.** 85°. **c.** 80°. **d.** 75°. **e.** 70°.

Resolução: [A]

Note que $m(B\hat{D}A) = m(E\hat{C}A) = 25°$. **Deste modo, como a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre é 180°, no ΔABD teremos** $m(A\hat{B}D) = 115°$. **No Δ*AEC* teremos *m(AÊC)=115°*.**

Finalmente, num quadrilátero a soma dos ângulos internos é sempre 360°. Sendo assim:

115°+115°+40°+x=360°

x=90°

ANOTAÇÕES

FINALIZANDO

Durante a aula, circule pela sala para atender dúvidas pontuais, caso surjam. Esta é uma forma de avaliar se os objetivos foram alcançados já que, na maior parte da atividade, os estudantes estarão construindo os conceitos com o uso de *software*.

ANOTAÇÕES

3ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 04

3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAIS**
4	Distância entre pontos no plano cartesiano.	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 9º ano:** Vol. 3, na Situação de Aprendizagem 3; Atividade 1: Ponto médio; Atividade 2: Ponto médio aplicações.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

Olá, Professor! Nesta Sequência de Atividades, falamos diretamente com você que está aí, na sala de aula, no convívio direto com os estudantes. Estes terão oportunidade, nesse momento, de se envolver com atividades que possibilitam a retomada de conceitos, propriedades e procedimentos essenciais para o desenvolvimento de seus conhecimentos e capacidades em Matemática.

A Sequência de Atividades deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração. Além disso, as socializações das atividades, por parte dos estudantes, são percebidas como oportunidades de serem desenvolvidas habilidades e competências que dizem respeito à cooperação, à empatia, à argumentação e à comunicação, entre outras.

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de representar pontos no plano cartesiano e, também, identificá-los, associando aos respectivos pares ordenados de números. Além disso, o estudante deve conseguir calcular as coordenadas de pontos médicos, compreender, em situações-problema de um sistema de orientação cartesiana, a necessidade desse cálculo e entender que podemos aplicar esse conhecimento em situações corriqueiras do dia-a-dia. Por fim, o aluno deve conseguir calcular analiticamente o perímetro e a área de figuras planas dispostas em um sistema de coordenadas ortogonal qualquer.

As escolhas das habilidades foram feitas por meio das análises realizadas dos resultados de avaliações internas e externas (diagnóstico de entrada e SARESP) que revelaram fragilidades dos estudantes com relação à habilidade: (EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	**Distâncias.**
3ª e 4ª/ 90 min	**No meio do caminho tem um ponto médio.**
5ª e 6ª/ 90 min	**Perímetro de figuras planas.**
7ª e 8ª/ 90 min	**Área de figuras planas.**

Caríssimo, os exercícios, que aqui apresentamos, trazem um pedacinho da realidade do aluno, através de situações-problema, sem deixar de lado a necessidade de uma pitadinha de ciência. Vale ressaltar que a Geometria Analítica também é responsável por resolver problemas do cotidiano e muito eficiente para resolver problemas da própria Matemática, como dentro da Geometria Plana. Trazemos problemas que inspiram aventuras de piratas que você, professor, pode fantasiá-las junto com seus alunos, tornando, assim, a aula mais lúdica e apaixonante. Teremos exercícios técnicos? Também! O objetivo deles é exercitar as habilidades e ferramentas analíticas que foram trabalhadas na teoria. Que sua aula seja maravilhosa, professor!

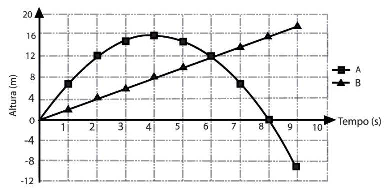
ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 4

AULAS 1 E 2 – DISTÂNCIAS

OBJETIVOS:
- Representar pontos no plano cartesiano.
- Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano.
- Calcular a distância entre dois pontos.
- Analisar as coordenadas dos pontos em um plano cartesiano e determinar a distância entre eles.

1. (ENEM-2016-Adaptado) Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea.



Fonte: O autor.

O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis, em função do tempo, nas simulações realizadas.

A partir do que foi dito e da análise do gráfico, determine:

a. Os pares ordenados com coordenadas inteiras do foguete A que representam sua altura de acordo com o tempo. A seguir, interprete o significado de cada ponto.

Resolução:
(2,12) – em dois segundos o foguete alcançou 12 metros de altura.
(4,16) – em 4 segundos o foguete alcançou 16 metros de altura.
(6,12) – em 6 segundos o foguete alcançou 12 metros de altura, outra vez.
(8,0) – o foguete atinge o solo em 8 segundos.

b. Os pares ordenados com coordenadas inteiras do foguete B que representam sua altura de acordo com o tempo. A seguir, interprete o significado de cada ponto.

Resolução:
(2,4) – em dois segundos o foguete alcançou 4 metros de altura.
(4,8) – em 4 segundos o foguete alcançou 8 metros de altura.
(6,12) – em 6 segundos o foguete alcançou 12 metros de altura.
(8,16) – em 8 segundos o foguete alcançou 16 metros de altura.

AULAS 1 E 2 – DISTÂNCIAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Cada aluno deverá, no primeiro momento, realizar sua atividade sozinho. Portanto, deixe a sala em disposição tradicional.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno de Atividades do Estudante impresso.

INICIANDO

Caro professor, para as Aulas 1 e 2, dessa Sequência de Atividades, sugerimos que, em uma conversa inicial, retome os conhecimentos dos estudantes sobre a importância de se estabelecer um sistema de coordenadas. Consideramos que esse é um objeto de conhecimento que eles já estudaram, contudo, é sempre válido revisitar. Essa pode ser uma breve introdução para relembrar aos estudantes a definição e o uso do sistema de coordenadas na geometria analítica.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Na atividade 1, temos a representação do espaço tempo do lançamento de dois foguetes. É hora de explorar o significado de cada eixo e compreender o par ordenado retirado desse sistema de orientação. O par ordenado (t,d) indica que, após t segundos, o foguete A ou B encontra-se a d metros de altura com relação ao solo. Não deixe de citar Pitágoras como ferramenta auxiliar para o cálculo de distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Comente o significado da intersecção das duas trajetórias: O ponto de intersecção seria o instante t em que os dois foguetes estão a uma mesma altura d. Professor, a conclusão da atividade 01 deve ser conduzida, por você, com cuidado para que os estudantes internalizem, de uma vez por todas, o conceito de localização e a compreensão do ponto na Geometria Analítica.

DESENVOLVENDO

Feita a retomada sobre sistemas de coordenadas e a entrega do Caderno do Estudante impresso, é o momento de fazer questionamentos, para os estudantes, sobre o sistema de coordenadas que eles têm em mente. Professor, aproveite esse momento para falar da necessidade de duas referências: uma horizontal e uma vertical, e o quanto isso é importante para nos localizarmos. Caso considere pertinente, recomende que os estudantes registrem partes importantes da conversa. Após o diálogo inicial, disponibilize tempo para resolução das questões. Consideramos indispensável o acompanhamento da resolução por parte dos estudantes, de modo a garantir que se envolvam efetivamente. Lembre-se, professor, de incentivar a participação de todos durante a realização das atividades. Ao final da resolução de todas as questões, proponha o momento de correção coletiva com discussão dos caminhos que os estudantes usaram para resolver cada situação.

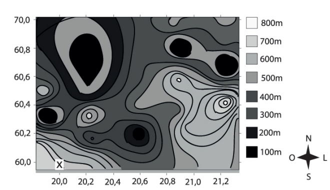
c. Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado. Por qual ponto a trajetória do projétil B deveria passar, com certeza?

Resolução: Para que a trajetória do foguete B encontre o foguete A em seu ponto máximo, o foguete B certamente, deve passar pelo ponto (4,16).

d. Sabendo o que o objetivo proposto foi alcançado, qual é a distância entre a origem do sistema cartesiano e o ponto de máximo atingido pelos foguetes A e B.

Resolução: $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (16-0)^2} = \sqrt{16+256} = \sqrt{272}$

2. (ENEM-2010) A figura a seguir é a representação de uma região por meio de curvas de nível, que são curvas fechadas representando a altitude da região com relação ao nível do mar. As coordenadas estão expressas em graus, de acordo com a longitude, no eixo horizontal e, a latitude, no eixo vertical. A escala em tons de cinza, desenhada à direita, está associada à altitude da região.



Fonte: O autor.

Um pequeno helicóptero, usado para reconhecimento, sobrevoa a região a partir do ponto X=(20; 60). O helicóptero segue o percurso:

0,8°L → 0,5°N → 0,2°O → 0,1°S → 0,4°N → 0,3°L

De acordo com as orientações, o helicóptero pousou em um local cuja altitude é

a. menor ou igual a 200*m*.

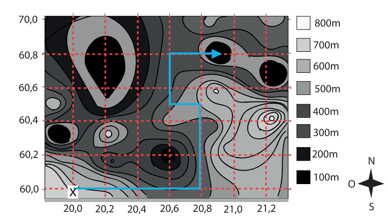
b. maior que 200*m* e menor ou igual a 400*m*.

c. maior que 400*m* e menor ou igual a 600*m*.

d. maior que 600*m* e menor ou igual a 800*m*.

e. maior que 800*m*.

Resolução: Esboço do trajeto descrito pelo avião

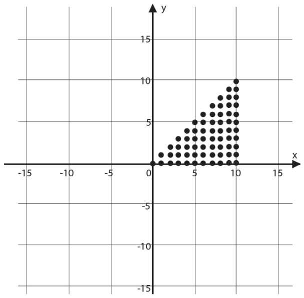


CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, já na atividade 02, propomos um sistema de localização baseado na rosa dos ventos. Quantos desenhos animados nossos estudantes assistiram, falando de um mapa de tesouro? Comente, aqui, que o mapa é uma cópia reduzida e fiel do território original. Mostre aos estudantes que o mapa é um exemplo de solução para o problema de localização, um dos mais antigos resolvido pelo homem, há milhares de anos.

3. (ENEM-2018) Para criar um logotipo, um profissional da área de design gráfico deseja construí-lo utilizando o conjunto de pontos do plano na forma de um triângulo, exatamente como mostra a imagem.

Para construir tal imagem utilizando uma ferramenta gráfica, será necessário escrever algebricamente o conjunto que representa os pontos desse gráfico.



Fonte: O autor.

Esse conjunto é dado pelos pares ordenados $(x;\ y) \in N x N$, tais que:

a. $0 \leq x \leq y \leq 10$

b. $0 \leq y \leq x \leq 10$

c. $0 \leq x \leq 10,\ 0 \leq y \leq 10$

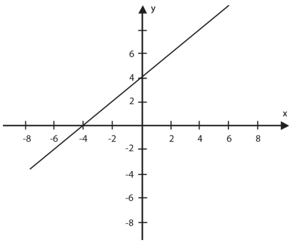
d. $0 \leq x+y \leq 10$

e. $0 \leq x+y \leq 20$

Gabarito: [B]

Resolução: Os pares ordenados satisfazem as condições $0 \leq x \leq 10$, $y \geq 0$ e $y \leq x$, ou seja, $0 \leq y \leq x \leq 10$.

4. (ENEM – 2011 – Adaptado) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros. A reta de equação, descrita no gráfico, representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto P=(-5,5), localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou, ao comitê de planejamento, que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.



Fonte: O autor.

Desejando atender ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso poderia ser satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação em algum dos pontos (0,4), (-3,1) e (2,6). Qual desses pontos seria o mais conveniente para ser instalada a estação do metrô? Justifique sua resposta.

Resolução:

Considere os pontos B (-3,1), D (0,4) e E (2,6);

Calculando agora a distância de P a cada um deles, temos:

$$d_{P,B} = \sqrt{(-5-(-3))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20} < 5$$

$$d_{P,D} = \sqrt{(-5-0))^2 + (5-4)^2} = \sqrt{26} > 5$$

$$d_{P,E} = \sqrt{(-5-2))^2 + (5-6)^2} = \sqrt{50} > 5$$

Logo, o ponto (-3,1) atende às condições do problema.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, olha que legal a atividade 03. Nela, vamos mostrar, aos estudantes, que é possível criar uma marca para sua empresa, usando o plano cartesiano. Nesse momento, vale ressaltar, ainda, a precisão da geometria analítica, por exemplo, na indústria metalúrgica. As peças são criadas baseadas em roteiros analíticos de largura, comprimento e altura.

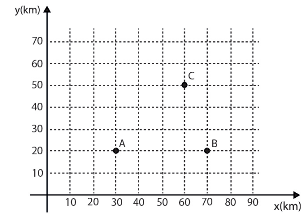
CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, chegou a hora de fazer umas continhas, que tal? É hora de trabalhar a ferramenta distância entre dois pontos. O estudante pode usar a fórmula aqui, caso lembre-se dela. Caso contrário, você pode deixar a fórmula anotada no quadro. A proposta da atividade 4 é resolver um problema comunitário. Onde seria conveniente colocar a estação do trem? Quanto mais perto do hospital, melhor.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, sugerimos que as questões 6 e 7 sejam concluídas com um painel de soluções. A proposta é que cada aluno registre, em uma folha separada, o detalhamento de sua resolução e exponha à turma, com a explicação da estratégia que usou para solucionar o problema, aumentando o repertório matemático dos estudantes. Nesse momento, habilidades que dizem respeito à argumentação e comunicação, por meio de conhecimentos matemáticos, estão em destaque. Além disso, valores ligados à ética e respeito com a voz do próximo, também, são trabalhados.

5. (ENEM – 2013 – Adaptado) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



Fonte: O autor.

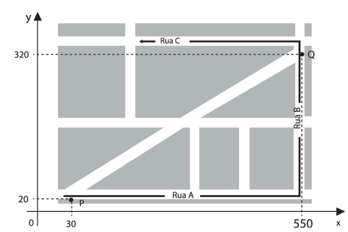
A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

Elabore uma estratégia eficiente para determinar as coordenadas do local adequado para a construção dessa torre. Tente fazer isso sem fazer uso de nenhuma fórmula.

Resolução: Resposta pessoal. Esperamos que o estudante encontre, pela análise do plano cartesiano, o ponto (50,30). De fato, partindo do ponto (50,30) e deslocando pelos traços pontilhados do plano cartesiano, sempre andaremos 3 unidades de 10 km para alcançar quaisquer um dos pontos A, B e C.

6. (ENEM – 2015) Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por *P* e *Q*.

Os estudos indicam que o novo ponto *T* deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes *P* e *Q*, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus, entre os pontos *P* e *T* e entre os pontos *T* e *Q*, sejam iguais.



Fonte: O autor.

De acordo com os dados, determine as coordenadas do novo ponto de parada. Justifique sua resposta.

Resolução: A distância entre os pontos P e Q no percurso indicado é igual a

$$(550-30)+(320-20)=820.$$

Logo, a distância entre *T* e os pontos *P* e *Q* deverá ser de $\frac{820}{2}=410.$ **Portanto, como** $30+410=440<550$, **segue-se que** $T=(440, 20)$.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, a ideia da atividade 5 é resolver um problema de distância entre dois pontos, usando a criatividade e não a fórmula. Será que o conceito de distância está bem definido na cabecinha do nosso estudante? Vamos descobrir isso na atividade. É hora de corrigir alguma falha, caso ela apareça.

AULAS 3 E 4 – NO MEIO DO CAMINHO TEM UM PONTO MÉDIO.

OBJETIVO:
- Calcular o ponto médio em um segmento de reta no plano cartesiano.

1. Observe o mapa da região Sudeste.

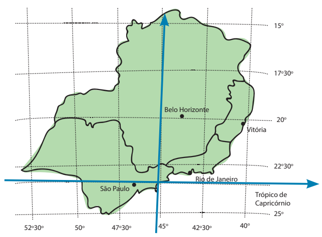


Imagem adaptada para fins didático.

Considere o Trópico de Capricórnio como o eixo das abscissas e o meridiano de 45° como o eixo das ordenadas. Neste sistema cartesiano, as coordenadas das cidades de São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte e Vitória são, respectivamente, $S\left(-\frac{3}{2},0\right), R\left(2,\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{3}{2},4\right)$ e $V\left(5,\frac{7}{2}\right)$. Todas as medidas estão em centímetros. Determine o ponto médio entre as cidades:

a. São Paulo e Belo Horizonte.

Resolução: $\left(\frac{X_S+X_B}{2},\frac{Y_S+Y_B}{2}\right)=\left(\frac{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{2},\frac{0+4}{2}\right)=(0,2)$

b. Rio de Janeiro e Vitória.

Resolução: $\left(\frac{X_R+X_V}{2},\frac{Y_R+Y_V}{2}\right)=\left(\frac{2+5}{2},\frac{\frac{1}{2}+\frac{7}{2}}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},2\right)$

AULAS 3 E 4 – NO MEIO DO CAMINHO TEM UM PONTO MÉDIO.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno de Atividades do Estudante impresso.

INICIANDO

Professor, dando sequência ao que fizemos nas Aulas 1 e 2, você deve iniciar a aula relembrando o conceito de ponto médio. O uso da fórmula para determinar esse ponto é muito útil e prático. Mas não deixe o conceito ser menos importante para os estudantes.

Sugiro deixar um tempo de aproximadamente 3 minutos para cada exercício. Assim, as duplas poderão interagir e discutir o que fazer em cada exercício.

DESENVOLVENDO

Feita a retomada sobre sistemas de coordenadas e a entrega do **Caderno do Estudante** impresso, vamos retomar o conceito de ponto médio e, além disso, os conceitos que podem ser construídos usando o ponto médio como matéria prima. Um exemplo disso seria a ceviana mediana. Professor, ressalte a necessidade de determinação do ponto médio e os conceitos que o seguem num sistema de localização. A Geometria Analítica não está presente apenas nos livros, ela atua no nosso dia-a-dia, mesmo quando não percebemos. Ela é responsável pela elucidação de problemas, tanto do nosso cotidiano quanto da própria Matemática. Após o diálogo inicial, disponibilize tempo para que as duplas resolvam as questões. Consideramos indispensável o acompanhamento da resolução por parte dos estudantes, de modo a garantir que se envolvam efetivamente. Lembre-se, professor, de incentivar a participação de todos durante a realização das atividades. Ao final da resolução de todas as questões, proponha o momento de correção coletiva com discussão dos caminhos que os estudantes usaram para resolver cada situação. Não esqueça de aguçar o instinto investigativo no estudante durante as atividades dessa aula.

c. São Paulo e Vitória.

Resolução: $\left(\frac{X_S+X_V}{2}, \frac{Y_S+Y_V}{2}\right) = \left(\frac{-\frac{3}{2}+5}{2}, \frac{0+\frac{7}{2}}{2}\right) = \left(\frac{\frac{7}{2}}{2}, \frac{\frac{7}{2}}{2}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\right)$

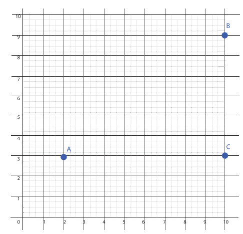
d. Rio de Janeiro e Belo Horizonte.

Resolução: $\left(\frac{X_R+X_B}{2}, \frac{Y_R+Y_B}{2}\right) = \left(\frac{2+\frac{3}{2}}{2}, \frac{\frac{1}{2}+4}{2}\right) = \left(\frac{\frac{7}{2}}{2}, \frac{\frac{9}{2}}{2}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right).$

2. Considere o triângulo ABC, onde A (2, 3), B (10, 9) e C (10, 3) representam as coordenadas dos seus vértices no plano cartesiano.

a. Esboce um plano cartesiano com esses pontos, com o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas.

Resolução:



b. Determine as coordenadas do ponto M, que é o ponto médio do lado AB.

Resolução: $M = \left(\frac{2+10}{2}, \frac{3+9}{2}\right) = (6{,}6).$

c. Calcule a medida do segmento cujos extremos são os pontos M e C.

Resolução: $d(M, C) = \sqrt{(10-6)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

d. Calcule a medida do segmento cujos extremos são os pontos A e M.

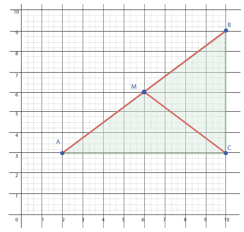
Resolução: $d(M, A) = \sqrt{(2-6)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

e. Calcule a medida do segmento cujos extremos são os pontos B e M.

Resolução: $d(M, B) = \sqrt{(10-6)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = 5$

f. Que propriedade do triângulo retângulo podemos observar ao concluir os itens anteriores? Faça o esboço de tudo que você encontrou em um plano cartesiano para entender melhor.

Resolução: O triângulo ABC é retângulo em C. O ponto M é equidistante dos três vértices. Note ainda que a mediana relativa a hipotenusa tem comprimento igual a metade do comprimento da hipotenusa.



3. Foi utilizado o plano cartesiano para a representação de um pavimento de lojas. A loja A está localizada no ponto *A(1;2)*. No ponto médio, entre a loja A e a loja B, está o sanitário *S*, localizado no ponto *S(5;10)*.

Determine as coordenadas do ponto de localização da loja B.

Resolução: Tem-se que $\left(\frac{1+x_B}{2}, \frac{2+y_B}{2}\right) = (5,\ 10) \Leftrightarrow x_B = 9 \ \text{ e } \ y_B = 18$

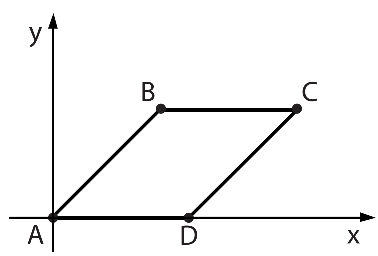
Portanto, podemos concluir que *B=(9, 18).*

4. O método analítico em Geometria é uma ferramenta muito utilizada em estudo de coordenadas. Para fazer uma aplicação desse método, um professor lançou o seguinte desafio aos seus alunos: Teriam de construir, em sistema de coordenadas, a figura de um paralelogramo ABCD, cujo ponto A está na origem; o ponto D(5,0) e a diagonal maior com extremidade estão no ponto C(9,4).

Com base nas informações, faça o esboço, em sistema de coordenadas, da figura que representa o paralelogramo. Em seguida, determine as coordenadas do ponto B.

Resolução:

Note que o lado AD do paralelogramo tem 5 unidades. Como os lados opostos do paralelogramo são paralelos e congruentes, o ponto B terá mesma ordenada de C e sua abscissa é 5 unidades menor que a abscissa de C. Deste modo, temos que B(4,4).



Fonte: o Autor

FINALIZANDO

Professor, sugiro que, durante a aula, você circule pela sala para atender dúvidas pontuais, caso surjam. Essa é uma forma de avaliar a interação dos estudantes, bem como se os objetivos foram alcançados. Isso porque, na maior parte da atividade, os estudantes estarão construindo os conceitos e fazendo cálculos e podem precisar da sua ajuda. Conceda um tempo maior para que os estudantes trabalhem a atividade 03.

AULAS 5 E 6 – PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno de Atividades do Estudante impresso.

INICIANDO

Professor, chegou a hora de colocar em prática o cálculo do perímetro de figuras planas, a partir das coordenadas de seus vértices em um sistema de localização. Reforce com os estudantes que, com essa técnica, podemos calcular o perímetro de uma chácara, lote, fazenda, etc. Para isso, basta ter um GPS, papel e caneta. Mão-na-massa!

5. Em um paralelogramo, as coordenadas de três vértices consecutivos são, respectivamente, (1, 4), (–2, 6) e (0, 8). Faça um esboço dessa situação e determine as coordenadas do quarto vértice deste paralelogramo. (Dica: As diagonais de um paralelogramo se encontram no ponto médio.)

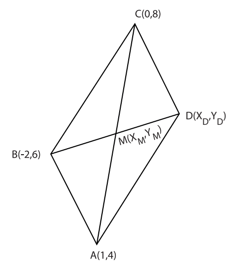
M é o ponto médio das diagonais do paralelogramo da figura.
Na diagonal AC, temos

$$x_M = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \quad y_M = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Logo, M($\frac{1}{2}$, 6)
Na diagonal BD, temos:

$$\frac{x_D - 2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_D = 3 \qquad 6 = \frac{y_D + 6}{2} \Rightarrow y_D = 6$$

Logo, temos D(3, 6) e 3 + 6 = 9.



Fonte: o Autor

AULAS 5 E 6 – PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS

OBJETIVO:
- Calcular o perímetro de figuras planas com o auxílio do plano cartesiano.

1. A palavra "perímetro" vem da combinação de dois elementos gregos: o primeiro, *perí*, significa "em torno de", e o segundo, *metron*, significa "medida".

Determine o perímetro do trapézio cujos vértices consecutivos têm coordenadas A (–1, 0), B (9, 0), C (8, 5) e D (1, 5).

Resolução: $d(A,B) = \sqrt{(9-(-1))^2 + (0-0)^2} = 10$

$$d(B,C) = \sqrt{(9-8)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{26}$$

$$d(C,D) = \sqrt{(8-1)^2 + (5-5)^2} = 7$$

$$d(D,A) = \sqrt{(1-(-1))^2 + (5-0)^2} = \sqrt{29}$$

Logo, o perímetro do trapézio será de

$$17 + \sqrt{26} + \sqrt{29}\, u.c..$$

2. Dicionário:

- O triângulo equilátero possui **todos os lados congruentes**, isto é, todos os lados do triângulo possuem a mesma medida.
- O triângulo isósceles possui, pelo menos, **dois lados congruentes**, ou seja, possui dois lados iguais e um diferente.
- O triângulo escaleno possui **todos os seus lados diferentes**, ou seja, cada lado tem uma medida diferente.

Considere o triângulo de vértices A (7,3), B (-4,3) e C (-4,-2).

a. Classifique-o quanto aos lados.

Resolução:

$$d(A,B) = \sqrt{(-4-7)^2 + (3-3)^2} = 11$$

$$d(B,C) = \sqrt{(-4+4)^2 + (-2-3)^2} = 5$$

$$d(A,C) = \sqrt{(7+4)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{11^2 + 5^2} = \sqrt{121+25} = \sqrt{146}$$

Logo, o triângulo é escaleno.

b. O ΔABC é retângulo?

Resolução:

$$d(A,B)=\sqrt{(-4-7)^2+(3-3)^2}=11$$
$$d(B,C)=\sqrt{(-4+4)^2+(-2-3)^2}=5$$
$$d(A,C)=\sqrt{(7+4)^2+(3+2)^2}=\sqrt{11^2+5^2}=\sqrt{121+25}=\sqrt{146}$$ **; é o maior lado do triângulo.**

Vamos verificar o teorema de Pitágoras.

$$\left(\sqrt{146}\right)^2=11^2+5^2$$
$$146=121+25$$
$$146=146$$

Portanto, o triângulo é retângulo.

3. Considere o triângulo cujos vértices são $A\,(2{,}0), B\left(-1,\sqrt{3}\right)$ e $C\left(-1,-\sqrt{3}\right)$.

a. O Δ*ABC* é equilátero? Justifique sua resposta.

Resolução:

$$d(A,B)=\sqrt{(2+1)^2+\left(0-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12}$$
$$d(B,C)=\sqrt{(-1+1)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12}$$
$$d(A,C)=\sqrt{(2+1)^2+\left(0+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}$$

Portanto, o triângulo é equilátero.

b. Determine a medida de uma mediana qualquer do triângulo ABC.

Resolução:
Determinando as coordenadas do ponto médio de BC:

$$M=\left(\frac{-1+(-1)}{2},\frac{\sqrt{3}+\left(-\sqrt{3}\right)}{2}\right)=(-1{,}0)$$

Logo:

$$d(A,M)=\sqrt{(2+1)^2+(0-0)^2}=3$$

DESENVOLVENDO

Nessa aula, sugiro que o professor deixe que os estudantes pensem 5 minutos (use o cronômetro do celular para não perder o tempo) na atividade 01 e discutam entre si (dupla). O objetivo é chegar em um acordo. Nesses 5 minutos, você não deve auxiliar, de forma alguma, nem responder perguntas teóricas. Passado o tempo estipulado, resolva o exercício, para todos os estudantes, no quadro, pedindo dicas do que fazer. Como assim? Pergunte: qual dupla conseguiu responder corretamente? O que vocês fizeram? Deixe que compartilhem as ideias com a turma toda. Em seguida, siga o mesmo roteiro com as atividades posteriores. Mantenha o padrão em todas as atividades:

- 5 minutos para pensarem sozinhos;
- Perguntas para identificar quem conseguiu fazer;
- Compartilhar entre os estudantes as respostas bem sucedidas;
- Finalizar, no quadro, a resolução do exercício.

Procedendo dessa forma, você já será capaz de identificar falhas e corrigi-las.

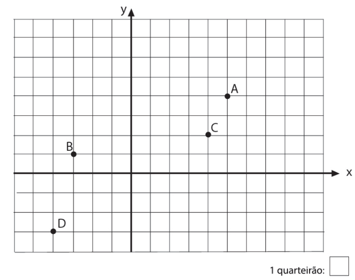
FINALIZANDO

Professor, sugerimos que, durante a aula, você circule pela sala para atender dúvidas pontuais, caso surjam. Essa é uma forma de avaliar a interação dos estudantes, bem como se os objetivos foram alcançados. Para finalizar a aula, sugerimos que cada dupla registre, em uma folha separada, o detalhamento de sua resolução e troque-a com alguma dupla vizinha, com a explicação da estratégia que usou para solucionar os problemas, aumentando o repertório matemático dos estudantes. Nesse momento, contrastar estratégias pode organizar conceitos que ainda estejam difusos.

4. Considere que os quarteirões de um bairro tenham sido desenhados no sistema cartesiano sendo, a origem, o cruzamento das duas ruas mais movimentadas desse bairro. Nesse desenho, as ruas têm suas larguras desconsideradas, todos os quarteirões são quadrados de mesma área e a medida de seu lado é a unidade do sistema.

A seguir, há uma representação dessa situação, em que os pontos A, B, C e D representam estabelecimentos comerciais desse bairro.

Suponha que Vitor tenha saído do estabelecimento A para o estabelecimento B. Quando estava no estabelecimento B, lembrou que devia comprar um presente para sua mãe no estabelecimento C. De C, foi para D e, finalmente, lembrou que tinha esquecido o celular no estabelecimento A e voltou para buscá-lo.



Fonte: O autor.

a. Qual é a distância total percorrida por Vitor?

Resolução:
Anotando as coordenadas dos estabelecimentos temos: A(5,4); B(-3,1); C(4,2) e D(-4,-3).

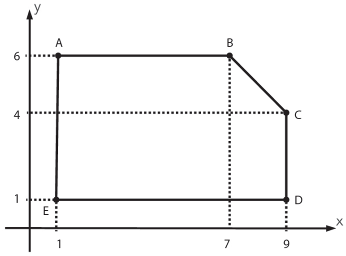
Sendo assim, a distância percorrida será:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$$
$$= \sqrt{8^2 + 3^2} + \sqrt{7^2 + 1^2} + \sqrt{8^2 + 5^2} + \sqrt{9^2 + 7^2}$$
$$= \sqrt{64 + 9} + \sqrt{49 + 1} + \sqrt{64 + 25} + \sqrt{81 + 49}$$
$$= \sqrt{73} + \sqrt{50} + \sqrt{89} + \sqrt{130}$$
$$\cong 8{,}5 + 7{,}1 + 9{,}4 + 11{,}4 = 36{,}4$$

b. Qual seria o caminho mais curto que Vitor deveria percorrer para visitar todas as lojas?

Resolução:
Observando os pontos no gráfico conclui-se que:
Vitor deveria ir de A para C, de C para B e depois de B para D.

5. (ENEM – 2014 – 2º Aplicação) Um construtor pretende murar um terreno e, para isso, precisa calcular o seu perímetro. O terreno está representado no plano cartesiano, conforme a figura, no qual foi usada a escala 1:500. Use 2,8 como aproximação para $\sqrt{8}$.



Fonte: O autor.

De acordo com essas informações, o perímetro do terreno, em metros, é:

a. 110.

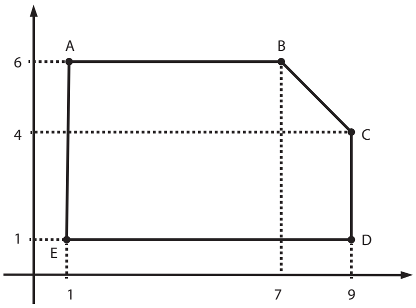
b. 120.

c. $\boxed{124.}$

d. 130.

e. 144.

Resolução:
Considere a figura.



Fonte: o Autor

Dada a escala de 1:500 e sendo as coordenadas em centímetros, podemos concluir que cada centímetro na figura corresponde a 5 metros. Assim, queremos calcular o valor de

$$5 \cdot (d(A,\ B) + d(B,\ C) + d(C,\ D) + d(D,\ E) + d(E,\ A)).$$

É fácil ver que $d(A,\ B)=6cm$, $d(C,\ D)=3cm$, $d(D,\ E)=8cm$ e $d(E,\ A)=5cm$. **Além disso, temos**

$$d(B,\ C) = \sqrt{(9-7)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{8} \cong 2{,}8cm.$$

Portanto, o resultado é

$5 \cdot (6+2{,}8+3+8+5)=124\ m.$

AULAS 7 E 8 – ÁREA DE FIGURAS PLANAS.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno de Atividades do Estudante impresso.

INICIANDO

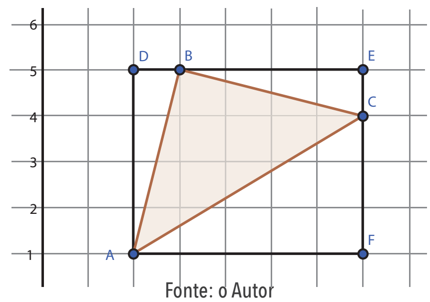
Essa aula tem uma dinâmica muito parecida com a da aula anterior. O cálculo de área e de perímetro de figuras planas andam juntas. São assuntos bem técnicos e são dependentes das coordenadas dos pontos no sistema de localização. Na prática, são bem úteis com o uso de um GPS, papel e caneta. Nessa aula, cobraremos atividades que exigem um pouco de criatividade associada a conceitos que foram trabalhados nas aulas anteriores. Enfatize o processo de investigação. Não adianta saber um monte de fórmulas, se não soubermos onde e quando usá-las. Tudo que precisamos para resolver as atividades está descrito na figura ou no enunciado. Incentive seu estudante a ser persistente, essa não é uma qualidade útil apenas para matemática, ela é importante para a vida.

AULAS 7 E 8 – ÁREA DE FIGURAS PLANAS

OBJETIVO:
- Calcular a área de figuras planas com o auxílio do plano cartesiano.

1. Para medir a área de uma fazenda de forma triangular, um agrimensor, utilizando um sistema de localização por satélite, encontrou como vértices, desse triângulo, os pontos A (2,1), B (3,5) e C (7,4) do plano cartesiano, com as medidas em km. Determine a área dessa fazenda, em km^2.

Resolução: Observe os pontos colocados no plano cartesiano.



Fonte: o Autor

A área do triângulo será calculada fazendo a área do retângulo menos a área dos triângulos ABD, AFC e BCE:

$$A = 5.4 - \frac{1.4}{2} - \frac{4.1}{2} - \frac{5.3}{2} = \frac{17}{2}\,u.a.$$

2. Em um sistema de coordenadas polares, P = *(6,6)* e Q = (12, 0) são dois vértices adjacentes de um quadrado. Com apenas essas informações, é possível calcular a área desse quadrado? Se for possível, determine essa área. (Justifique sua resposta.)

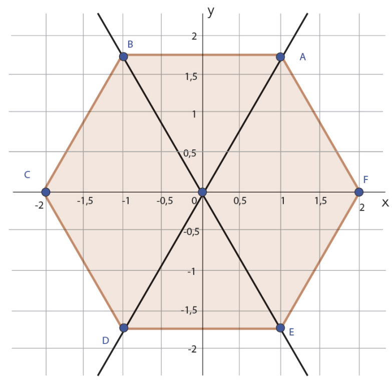
Resolução:

Sim, pois para calcular a área de um quadrado é preciso apenas da medida de seu lado, que neste caso é:

$$l = \sqrt{(12-6)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$$

$$A = l^2 = 72\,u.a.$$

3. A figura representa, em um sistema ortogonal de coordenadas, uma circunferência com centro na origem do sistema e, os pontos A, B, C, D, E e F (2,0), correspondem aos vértices de um hexágono regular inscrito na circunferência.



Fonte: O autor.

Nessas condições, determine:

a. As coordenadas dos vértices A, B, C, D e E.

$A(1;\ \sqrt{3})$, pois a altura do triângulo equilátero será $\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$;

$B(-1, \sqrt{3})$, pois é simétrico ao ponto A em relação ao eixo y;

C(-2,0), analisando o plano cartesiano;

$D(-1, -\sqrt{3})$, pois é simétrico ao ponto B em relação ao eixo x;

$E(1, -\sqrt{3})$, pois é simétrico ao ponto A em relação ao eixo x.

b. Determine a área do hexágono ABCDEF.

Resolução:

O Hexágono Regular é formado por 6 triângulos equiláteros. Precisamos então calcular a área do triângulo OAF e multiplica-la por seis.

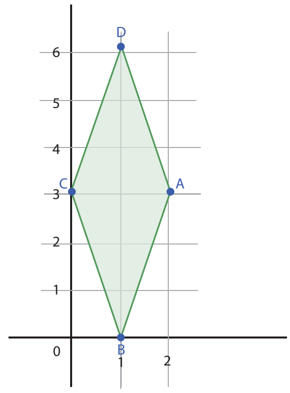
Portanto: $A_{\Delta OAF} = \frac{1}{2}|2\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ u.a..

Finalmente, a área do hexágono ABCDEF será $6\sqrt{3}$ u.a.

4. Qual é a medida da área e do perímetro do losango cujos vértices são: A (2,3); B (1,0); C (0,3) e D (1,6)?

Utilize $\sqrt{10} = 3{,}2$.

Resolução:



Fonte: o Autor

Cálculo da área: $\frac{1}{2}.(2.3.2) = 6\ u.a.$

Cálculo do perímetro:

$$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 4.\overline{AB} = 4.\sqrt{1+9} = 4.\sqrt{10} = 4\ .\ 3{,}2 = 12{,}8\ u.c.$$

DESENVOLVENDO

Nessa aula, vamos continuar com a mesma estratégia das Aulas 5 e 6, devido ao trabalho braçal que as atividades podem exigir. Deixe que os estudantes pensem 5 minutos (use o cronômetro do celular para não perder o tempo) na atividade 01 e discutam entre si (dupla). O objetivo é chegar em um acordo. Nesses 5 minutos, você não deve auxiliar, de forma alguma, nem responder perguntas teóricas. Passado o tempo estipulado, resolva o exercício, para todos os estudantes, no quadro, pedindo dicas do que fazer. Como assim? Pergunte: qual dupla conseguiu responder corretamente? O que vocês fizeram? Deixe que compartilhem as ideias com a turma toda. Em seguida, siga o mesmo roteiro com as atividades posteriores. Mantenha o padrão em todas as atividades:

- 5 minutos para pensarem sozinhos;
- Perguntas para identificar quem conseguiu fazer;
- Compartilhar entre os estudantes as respostas bem sucedidas;
- Finalizar no quadro a resolução do exercício.

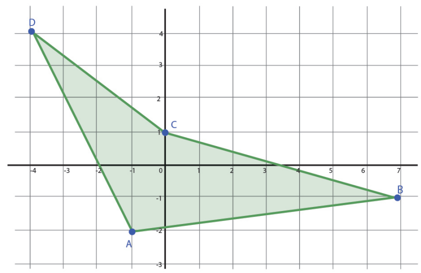
Procedendo dessa forma, você já será capaz de identificar falhas e corrigi-las.

FINALIZANDO

Professor, sugiro que, durante a aula, você circule pela sala para atender dúvidas pontuais, caso surjam. Tendo em vista que essas atividades são mais técnicas, peça aos estudantes para anotarem apenas a resposta de cada atividade, para que sejam comparadas com as respostas dos demais estudantes. Caso haja respostas divergentes, você deve ir ao quadro resolvê-lo. Desse modo, falhas poderão ser detectadas e reparadas.

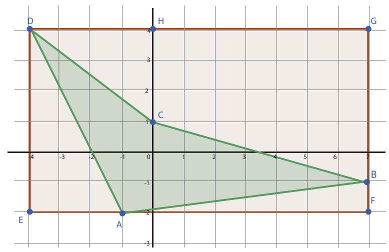
5. João é um professor de Matemática e deseja comprar uma pequena área em frente à sua casa. O preço do m² dessa área é R$ 1.000,00. Para determinar o preço que iria pagar pela área, João projetou-a sobre um plano cartesiano, conforme a figura abaixo.

Sabendo que as medidas em "x" e "y" são dadas em metros, qual será o preço da área?



Fonte: O autor.

Resolução:



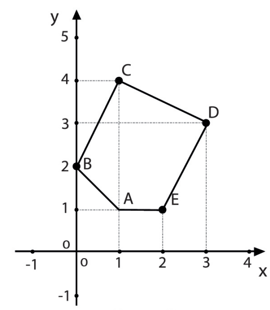
Fonte: o Autor

A área deste quadrilátero pode ser calculada fazendo a área do retângulo EFGD menos os triângulos ADE, CHD, AFB e menos o trapézio CHGB. Assim, teremos:

$$11.6 - \frac{1}{2}3.6 - \frac{1}{2}4.3 - \frac{1}{2}8.1 - \frac{1}{2}(3+5)7 = 19m^2$$

Como cada metro quadrado vale R$ 1.000,00 o valor total da área será R$ 19.000,00.

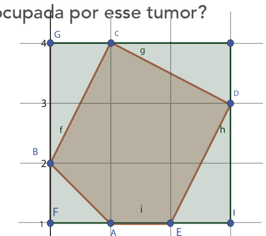
6. (USF – 2015) Por meio de uma radiografia, identificou-se um tumor no pulmão de um paciente. Para estimar o tamanho desse tumor, tomou-se um polígono, de forma aproximada, e calculou-se a área. O polígono está representado no plano cartesiano a seguir.



Fonte: O autor.

Qual é a área ocupada por esse tumor?

Resolução:



Fonte: o Autor

Para calcular a área total do tumor faremos a área do retângulo FGHI menos a área dos triângulos ABF, EID, BGC e CHD. Assim, teremos:

$$3.3 - \frac{1}{2}1.1 - \frac{1}{2}.1.2 - \frac{1}{2}2.1 - \frac{1}{2}.2.1 = \frac{11}{2}u.a.$$

IMAGENS E ILUSTRAÇÕES
pixabay.com - freepik.com

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

COORDENADORIA PEDAGÓGICA
Caetano Pansani Siqueira

DIRETORA DO DEPARTAMENTO DE DESENVOLVIMENTO CURRICULAR E DE GESTÃO PEDAGÓGICA – DECEGEP
Valéria Arcari Muhi

DIRETORA DO CENTRO DE ENSINO MÉDIO – CEM
Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

DIRETORA DO CENTRO DE ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL – CEFAF
Patricia Borges Coutinho da Silva

ASSESSORIA TÉCNICA
Bruno Toshikazu Ikeuti
Isaque Mitsuo Kobayashi
Danielle Christina Bello de Carvalho
Vinícius Bueno

EQUIPE CURRICULAR DE LÍNGUA PORTUGUESA - ANOS FINAIS
Katia Regina Pessoa
Lucifrance Elias Carvalhar
Mara Lucia David
Marcia Aparecida Barbosa Corrales

EQUIPE CURRICULAR DE LÍNGUA PORTUGUESA - ENSINO MÉDIO
Leandro Henrique Mendes
Mary Jacomine da Silva
Marcos Rodrigues Ferreira
Teonia de Abreu Ferreira

EQUIPE CURRICULAR DE MATEMÁTICA - ANOS FINAIS
Isaac Cei Dias
João dos Santos Vitalino
Rafael José Dombrauskas Polonio

EQUIPE CURRICULAR DE MATEMÁTICA - ENSINO MÉDIO
Marcos José Traldi
Otávio Yoshio Yamanaka
Sandra Pereira Lopes
Vanderley Aparecido Cornatione.

EQUIPE DE ELABORAÇÃO
Raph Gomes Alves
Marlene Faria
Vanuse Ribeiro
Camila Naufel
Ana Luísa Rodrigues
Camila Valcanover
Lidemberg Rocha de Oliveira
Aldair Neto
Ábia Felicio
Francisco Clébio de Figueiredo
Julia Lidiane Lima Amorim
Sheilla André
Everton Santos
Francisco de Oliveira
Rosana Magni
Regina Melo
Luciana V. Andrade
Gracivane Pessoa
José Cícero dos Santos
Alexsander Sampaio
Cleo Santos
Evandro Rios
Vitor Braga
Gisele Campos
Paula Carvalho

PROJETO GRÁFICO E DIAGRAMAÇÃO:
André Coruja
Sâmella Arruda
Cristall Hannah Boaventura
Julliana Oliveira
Amanda Pontes
Kamilly Lourdes
Alice Brito
Wellington Costa
Ana Gabriella Carvalho
Perazzo Freire
Rayane Patrício
Emano Luna
Lucas Nóbrega

SUPORTE A IMAGEM:
Lays da Silva Amaro
Wilker Mad

SÃO PAULO
GOVERNO DO ESTADO

Secretaria de Educação