SÃO PAULO
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria de Educação

APRENDER SEMPRE

VOLUME 3

1ª À 3ª SÉRIE - ENSINO MÉDIO

MATEMÁTICA
2021

PROFESSOR

APRESENTAÇÃO

Estas sequências didáticas/de atividades foram elaboradas com o intuito de oferecer um suporte adicional aos estudantes, auxiliando-os no processo de recuperação e aprofundamento de aprendizagens essenciais para seu percurso educacional.

Com o intuito de favorecer a aprendizagem de todos os estudantes, não deixando ninguém para trás, serão oferecidas, além das sequências de atividades, avaliações diagnósticas e formativas para acompanhar a evolução da aprendizagem dos estudantes e direcionar o ensino às suas necessidades; e formações, com foco no uso do resultado das avaliações e no desenvolvimento das atividades presentes neste material.

Os materiais, as avaliações e as formações do Programa de Recuperação e Aprofundamento estão articulados entre si, fortalecendo o desenvolvimento das habilidades essenciais para o percurso educacional dos estudantes.

Essas habilidades essenciais foram selecionadas a partir de análises do Currículo Paulista no Ensino Fundamental e na 1ª série do Ensino Médio, e do Currículo Oficial vigente na 2ª e 3ª séries do Ensino Médio, dos resultados do SARESP 2019 e da Avaliação Diagnóstica de Entrada (ADE), de 2020, em um trabalho conjunto entre a equipes curriculares da Coordenadoria Pedagógica (COPED), PCNP e professores da rede. Considerando a importância da continuidade do trabalho de recuperação iniciado em 2020, a matriz de habilidades do Programa de Recuperação e Aprofundamento, que serviu de base a este material, foi elaborado tendo em conta um ciclo de progressão das aprendizagens de 2020 a 2021.

As sequências didáticas/de atividades de Língua Portuguesa e Matemática contam com orientações didáticas que auxiliarão no trabalho para o desenvolvimento das habilidades essenciais de cada ano/série, de forma articulada aos demais materiais disponibilizados pela SEDUC.

Para favorecer esse entrelaçamento, há indicações de como utilizar as sequências didáticas/de atividades juntamente com o Ler e Escrever, o EMAI e o São Paulo Faz Escola.

Cada professor, a partir de seu contexto, poderá utilizar essas sequências didáticas/de atividades para promover o desenvolvimento dos estudantes, de acordo com as necessidades de cada um, com o objetivo de oferecer a todos oportunidades de aprendizagem, não deixando ninguém para trás.

Desejamos a todos um excelente trabalho!

Coordenadoria Pedagógica - Coped

ANOTAÇÕES

1ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

Olá, Professor(A),

Sugerimos que, após a aplicação destas Sequência de Atividades, você trabalhe também com o material São Paulo Faz Escola, atualmente denominado Currículo em Ação. As habilidades trabalhadas nesta Sequência do Aprender Sempre podem ser aprofundadas nas atividades propostas nos diversos volumes dos anos/séries listados no quadro abaixo.

1ª Série do Ensino Médio - Matemática			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAIS**
1	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis; Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	(**EF09MA09**) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do SP Faz Escola do 9º ano:** **Vol.2, Situação de Aprendizagem 2** ATIVIDADE 1 – PRODUTOS NOTÁVEIS ATIVIDADE 2 – FATORAÇÃO ATIVIDADE 3 – PRODUTOS NOTÁVEIS: QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS ATIVIDADE 4 – PRODUTOS NOTÁVEIS: QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS ATIVIDADE 5 – PRODUTOS NOTÁVEIS: PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS ATIVIDADE 6 – EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU POR MEIO DE FATORAÇÕES ATIVIDADE 7 – EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 2º GRAU: COMPLETANDO QUADRADOS
2	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	(**EF09MA06**) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 9º ano:** **Vol. 2, Situação de Aprendizagem 3** ATIVIDADE 1 – FUNÇÃO: NOÇÃO E LEI DE FORMAÇÃO ATIVIDADE 2 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO ATIVIDADE 3 – OLHANDO AS FUNÇÕES EM DIFERENTES PERSPECTIVAS
3	Planejamento e execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório	(**EF09MA23**) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 9º ano:** **Vol.3, Situação de Aprendizagem 6** ATIVIDADE 1 – PESQUISA AMOSTRAL ATIVIDADE 2 – PESQUISAS E GRÁFICO ATIVIDADE 3 – MÉDIA E MEDIANA: MEDIDAS DE TENDÊNCIAL CENTRAL

1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO – SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

OLÁ, PROFESSOR!

Professor, os estudantes deverão chegar ao final desta Sequência de Atividades com habilidades desenvolvidas para fatorarem expressões algébricas, desenvolverem produtos notáveis e resolverem equações polinomial utilizando estratégias de fatoração. Espera-se também que os estudantes aprofundem o significado das operações aditivas e multiplicativas envolvendo monômios e polinômios. Neste sentido, o estudante deve, ao final desta Sequência de Atividades, potencializar os significados desenvolvidos sobre estes objetos matemáticos, aplicando-os dentro de contextos da própria matemática, em áreas interligadas a ela e na resolução de problemas do cotidiano.

HABILIDADE: (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO PARA FATORAR POLINÔMIOS
3ª e 4ª/ 90 min	DESENVOLVENDO PRODUTOS NOTÁVEIS
5ª e 6ª/ 90 min	COMPREENDENDO O SIGNIFICADO DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU
7ª e 8ª/ 90 min	RESOLUCAO DE EQUAÇÕES UTILIZANDO FATORAÇÃO

Professor, para ajudá-lo nessa ação, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenal acerca das Sequências de Atividades, nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPCs). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

ANOTAÇÕES

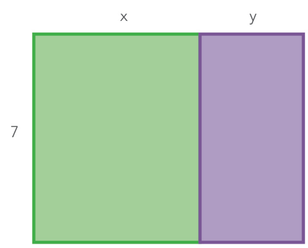
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

AULAS 1 E 2 - PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO PARA FATORAR POLINÔMIOS

Objetivos das aulas:
- Utilizar as propriedades da multiplicação para fatorar polinômios;
- Compreender significado de produtos notáveis;
- Determinar o quadrado da soma e diferença de dois termos.

Caro estudante, para fatorar polinômios são utilizadas algumas estratégias de cálculos que em algum momento você talvez já tenha estudado. Elas são chamadas de casos de fatoração, as quais são baseadas nas propriedades da multiplicação. A seguir, vocês aprofundarão seus conhecimentos sobre fatoração de polinômios utilizando as estratégias do fator comum em evidência, do agrupamento, do trinômio do quadrado perfeito, da diferença de dois quadrados, da diferença de dois cubos ou da soma de dois cubos. Para o desenvolvimento das atividades, será necessário relembrar os significados dos objetivos escritos acima. Sendo assim, fique atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará no decorrer das aulas para superar possíveis dúvidas.

1. Observe a figura:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. Qual é a expressão algébrica que representa a área total do retângulo?

Considerando a fórmula para calcular a área de um retângulo, $A = b \cdot h$, fazemos:
$A = 7 \cdot x$ e $A = 7 \cdot y$.
A resposta esperada é $7x + 7y$.

b. Qual é a forma fatorada dessa expressão?

A resposta esperada é $7(x + y)$.

AULAS 1 E 2 – PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO PARA FATORAR POLINÔMIOS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Professor, em função das medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da covid-19, organize a turma respeitando os protocolos de higiene e distanciamento seguro entre os estudantes.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

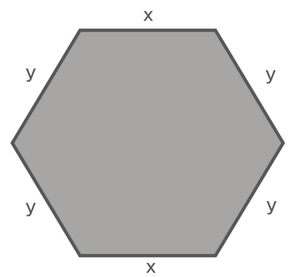
Para os estudantes: Caderno de Atividades impresso.

Para o professor: Caderno de Atividades impresso, pincel piloto, lápis para colorir ou gizes coloridos.

INICIANDO

Professor, para as aulas 1 e 2 dessa Sequência de Atividades, primeiramente converse com os estudantes no sentido de diagnosticar o que eles reconhecem ou lembram sobre as operações aditivas e multiplicativas envolvendo monômios, polinômios e suas respectivas regras quando tratar de potências, raízes e as operações com números inteiros. Utilizando a lousa, verifique se os estudantes reconhecem regras básicas de multiplicação ou divisão de monômios e estenda o diagnóstico até os polinômios. No decorrer das sequências de atividades você terá atividades nas quais os estudantes colocarão em prática as dicas dadas por você no início das aulas. Reforce para os estudantes sobre a importância de eles relembra-

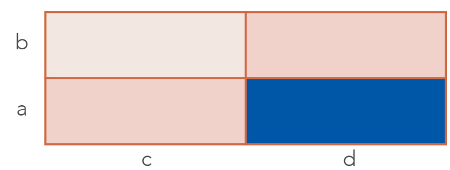
2. Indique uma expressão algébrica fatorada que representa o perímetro do hexágono da figura a seguir.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

A resposta esperada é $x + x + y + y + y + y = 2x + 4y = 2(x + 2y)$.

3. A figura a seguir é composta por quatro retângulos.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. Qual é a expressão algébrica que representa a área total dos quatro retângulos? Apresente também a sua forma fatorada.

A resposta esperada é $ac + bc + ad + bd = (a + b)(c + d)$.

4. Nos polinômios a seguir coloque o fator comum em evidência.

i. $ax + bx$

ii. $8x^2 + 4x^3$

i) $ax + bx = x(a + b)$. A forma fatorada é $x(a + b)$.
ii) $8x^2 + 4x^3 = 2x^2(2x + 4)$. A forma fatorada é $2x^2(2x + 4)$.

rem as propriedades da multiplicação para fatorar polinômios, resolverem equações e utilizá-las também para resolverem problemas. Após essa breve conversa introdutória, os estudantes poderão receber o Caderno do Estudante impresso e realizar as atividades propostas.

DESENVOLVENDO

Prossiga com o caderno do estudante atentando-se para os objetivos das atividades e, se necessário, abra parêntese nas aulas para reforçar significados ou tirar possíveis dúvidas da turma. Nas atividades 1, 2 e 3 o objetivo das atividades é iniciar por meio de situações de aprendizagens práticas sobre fatoração de polinômios utilizando as estratégias do fator comum em evidência, do agrupamento. As atividades que seguem da 4 a 9, são exercícios para aprofundar fatoração de polinômios utilizando as estratégias do fator comum em evidência, do agrupamento, do trinômio do quadrado perfeito, da diferença de dois quadrados, da diferença de dois cubos ou da soma de dois cubos. Por fim, a atividades 10 é uma aplicação prática de produtos notáveis para resolver problemas. Mantenha a sala organizada, solicite aos estudantes que analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. Se for seguro, devido as medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, circule pela sala enquanto eles discutem e resolvem as atividades. Observe os pontos de vistas da turma sobre as propriedades da multiplicação para fatorar polinômios, se necessário, oriente-os sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: “como vocês estão resolvendo?”, “por que dessa forma?”, “o que vocês acham se...” e outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

FINALIZANDO

Avalie as resoluções das atividades, identifique se houve dúvidas nas resoluções, analise bem as estratégias e as corrija, complementando com o que você, profes-

5. Em alguns casos a fatoração por agrupamento é uma dupla fatoração por fator comum. Nos itens a seguir, fatore os polinômios utilizando a estratégia de fatoração por agrupamento.

i. $xz + xw + yz + yw$

ii. $mn + 8n + 3m + 24$

i) $xz + xw + yz + yw = x(z + w) + y(z + w) = (x + y)(z + w)$. A forma fatorada é $(x + y)(z + w)$.
ii) $mn + 8n + 3m + 24 = n(m + 8) + 3(m + 8) = (n + 3)(m + 8)$.
A forma fatorada é $(n + 3)(m + 8)$.

6. O trinômio é um polinômio que possui três termos não semelhantes. A seguir, utilize a estratégia do trinômio do quadrado perfeito e fatore os polinômios.

i. $p^2 + 2pq + q^2$

ii. $y^2 + 6y + 9$

i) $p^2 + 2pq + q^2 = p^2 + pq + pq + q^2 = p(p + q) + q(p + q) = (p + q)(p + q) = (p + q)^2$. A forma fatorada é $(p + q)^2$.
ii) $y^2 + 6y + 9 = y^2 + 3y + 3y + 9 = y(y + 3) + 3(y + 3) = (y + 3)(y + 3) = (y + 3)^2$. A forma fatorada é $(y + 3)^2$

7. Utilizando a estratégia da diferença de dois quadrados, fatore os polinômios a seguir.

i. $m^2 – n^2$

ii. $9x^2 – 4z^2$

i) $m^2 - n^2 = m^2 - mn + mn - n^2 = \sqrt{m^2} - \sqrt{n^2} = m - n$. A forma fatorada é $(m + n)(m - n)$.
ii) $9x^2 - 4z^2 = 9x^2 - 6xz + 6xz - 4z^2 = \sqrt{9x^2} - \sqrt{4z^2} = 3x - 2z$. A forma fatorada é $(3x + 2z)(3x - 2z)$.

8. Utilizando a estratégia diferença ou soma de dois cubos, fatore os polinômios a seguir.

i. $u^3 – v^3$

ii. $n^3 + 8$

i) $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$. A forma fatorada é $(u - v)(u^2 + uv + v^2)$.
No intuito de facilitar o entendimento dos estudantes acerca da fatoração em questão, o professor pode fazer uma demonstração aplicando a propriedade distributiva no segundo membro da equação. Você professor pode mostrar que, ao aplicar a propriedade distributiva, pode-se encontrar o primeiro membro. Fazendo $(u - v)(u^2 + uv + v^2) = u^3 + u^2v + uv^2 - u^2v - uv^2 - v^3$.
ii) $n^3 - 8 = n^3 + 2^3 = n^3 + 2^3 (n + 2)(n^2 - n \cdot 2 + 2^2) = n^3 + 2^3 = (n + 2)(n^2 - 2n + 4)$

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 7
Professor, é importante alertar os estudantes que a fatoração pela diferença de dois quadrados só é possível quando a expressão algébrica estiver escrita com dois monômios, os dois monômios sejam quadrados e a operação entre eles seja de subtração.

sor, achar pertinente. Um outro ponto a ser observado é que a habilidade que está sendo trabalhada nesta sequência é repleta de cálculos e operações algébricas, avalie e diagnostique bem a aprendizagem dos seus estudantes, se achar necessário complete as atividades com outros exercícios, pois esta habilidade (Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau) é ponto de partida para o desenvolvimento de outras habilidades ao decorrer do Ensino Médio, como por exemplo, o estudo das funções, sistema linear, geometria plana, etc.

9. Qualquer expressão algébrica formada pela adição de monômios é denominada de polinômio, já os produtos notáveis são multiplicações em que os fatores são polinômios. Sendo assim, os itens a seguir são produtos notáveis e em cada item, por meio das estratégias de fatoração utilizadas nas atividades anteriores, desenvolva o quadrado da soma ou diferença de dois termos.

a. $(u + 2)^2$

b. $(x + 3y)^2$

c. $(3p - 4q)^2$

d. $(7v - x)^2$

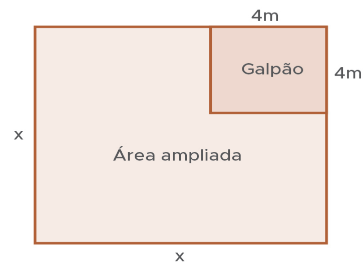
a) $(u + 2)^2 = (u + 2)(u + 2) = u^2 + 2u + 2u + 4 = u^2 + 4u + 4$.

b) $(x + 3y)^2 = (x + 3y)(x + 3y) = x^2 + 3xy + 3xy + 9y^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$.

c) $(3p - 4q)^2 = (3p - 4q)(3p - 4q) = 9p^2 - 12pq - 12pq + 16q^2 = 9p^2 - 24pq + 16q^2$.

d) $(7v - x)^2 = (7v - x)(7v - x) = 49v^2 - 7vx - 7vx + x^2 = 49v^2 - 14vx + x^2$.

10. Elena é artesã, tem um galpão onde trabalha e armazena os artesanatos que produz. Elena pretende ampliar o seu galpão triplicando as dimensões do atual, que possui medida dos lados igual a 4m de comprimento. A figura a seguir ilustra o formato do novo galpão da Elena.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

De acordo com os dados do problema em questão, determine a expressão algébrica que representa a área ampliada do galpão.

Espera-se que o estudante utilize o significado da fórmula para calcular a área do quadrado $A = l^2$ e chegue à forma fatorada do polinômio que representa a área do galpão.

Área do galpão menor

$A = 4m \cdot 4m \longrightarrow A = 16m^2$

Área ampliada

$A = x \cdot x \longrightarrow A = x^2$

Expressão algébrica esperada: $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$.

AULAS 3 E 4 - DESENVOLVENDO PRODUTOS NOTÁVEIS

Objetivos das aulas:
- Determinar o produto da soma pela diferença de dois termos;
- Determinar o cubo da soma e diferença de dois termos.

Caro estudante, os objetivos propostos para estas aulas são: determinar o produto da soma pela diferença de dois termos, determinar o cubo da soma de dois termos, determinar o cubo da diferença de dois termos. Observe que os objetivos destas aulas é uma extensão das aulas anterior e requer atenção nos processos de desenvolvimento ou fatoração dos produtos notáveis. Sendo assim, você deve ficar atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará ao decorrer das aulas. Se restaram dúvidas das aulas anterior, aproveite e tire-as com o professor antes de iniciar a resolução das novas atividades.

1. Observe as expressões algébricas a seguir.

I) $x^2 - y^2$ (Lê-se produto da soma pela diferença de dois termos)

II) $(m + n)^3$ (Lê-se cubo da soma de dois termos)

III) $(m - n)^3$ (Lê-se cubo da diferença de dois termos)

IV) $(m + n)^2$ (Lê-se quadrado da soma de dois termos)

V) $(m - n)^2$ (Lê-se quadrado da diferença de dois termos)

Tem-se que as expressões algébricas acima são denominadas de produtos notáveis e para cada uma delas existe uma regra prática que pode ser adotada para desenvolve-las. Sendo assim, associe cada expressão algébrica a sua respectiva descrição.

(II) O cubo do primeiro termo, mais três vezes o quadrado do primeiro termo vezes o segundo termo, mais três vezes o primeiro termo vezes o quadrado do segundo termo, mais o cubo do segundo termo.

(IV) O quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

(III) O cubo do primeiro termo, menos três vezes o quadrado do primeiro termo vezes o segundo termo, mais três vezes o primeiro termo vezes o quadrado do segundo termo, menos o cubo do segundo termo.

(I) O primeiro termo elevado ao quadrado, menos o segundo termo elevado ao quadrado.

(V) O quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

AULAS 3 E 4 – DESENVOLVENDO PRODUTOS NOTÁVEIS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Professor, em função das medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, organize a turma respeitando os protocolos de higiene e distanciamento seguro entre os estudantes.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Para os estudantes: Caderno de Atividades impresso.

Para o professor: Caderno de Atividades, canetões coloridos ou gizes coloridos.

INICIANDO

Estão programadas para estas aulas atividades de cunho exploratório sobre o desenvolvimento de operações envolvendo produtos notáveis. Nestas aulas trataremos do produto da soma pela diferença de dois termos, do cubo da soma de dois termos e do cubo da diferença de dois termos. Discuta com os estudantes o conceito, fale sobre as regras práticas, para evitar o uso apenas da operação distributiva, que é muito comum ser adotada pelos estudantes para desenvolverem produtos notáveis. É importante o professor dar atenção a leitura correta que deve ser feita dos produtos notáveis, por exemplo, $a^2 - b^2$, “lê-se produto da soma pela diferença de dois termos”. Após essa breve conversa introdutória, os estudantes poderão receber o Caderno do Estudante impresso e realizar as atividades propostas.

DESENVOLVENDO

Mantenha a sala organizada, solicite aos estudantes que analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. As atividades 1 e 2 tratam da leitura dos produtos notáveis e das regras práticas para o desenvolvimento dos produtos notáveis. Recomenda-se que você, professor, incentive os estudantes a utilizarem as regras práticas, pois talvez a estratégia utilizando a distributiva dos termos

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 2

Professor, insista para que os estudantes adotem as regras práticas e as utilizem para resolverem os exercícios desta atividade 2. Evite que eles utilizem apenas a estratégia da operação distributiva.

seja a mais comum adotada por eles, incentive-os a adotarem em seus cálculos as regras práticas, pois assim podem efetuar os cálculos com mais praticidade. Para finalizar as atividades destas aulas, as atividades 3, 4, 5 e 6 trabalham aplicações práticas de alguns produtos notáveis em resolução de problemas. Se for seguro, devido as medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da covid-19, circule pela sala enquanto eles efetuam os cálculos e resolvem as atividades. Observe os pontos de vistas da turma sobre os produtos notáveis em questão, se necessário, oriente-os sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: “como vocês estão resolvendo?”, “por que dessa forma?”, “o que vocês acham se...” e outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

2. Utilizando os significados escritos na atividade anterior sobre as regras práticas para desenvolver um produto notável, coloque-os em prática desenvolvendo os produtos notáveis a seguir.

a. $(x + 8)\ (x - 8)$

O quadrado do primeiro termo, menos o quadrado do segundo termo.
$(x + 8)(x - 8) = (x)^2 - (8)^2 = x^2 - 64$.

b. $(4x^2 + 7y)\ (4x^2 - 7y)$

O quadrado do primeiro termo, menos o quadrado do segundo termo.
$(4x^2 + 7y)(4x^2 - 7y) = (4x^2)^2 - (7y)^2 = 16x^4 - 49y^2$.

c. $(4m + 3)^3$

O cubo do primeiro termo, mais três vezes o quadrado do primeiro termo vezes o segundo termo, mais três vezes o primeiro termo vezes o quadrado do segundo termo, mais o cubo do segundo termo.
$(4m + 3)^3 = (4m)^3 + 3(4m)^2(3) + 3(4m)(3)^2 + 3^3 = 64m^3 + 144m^2 + 108m + 27$.

d. $(x - 2)^3$

O cubo do primeiro termo, menos três vezes o quadrado do primeiro termo vezes o segundo termo, mais três vezes o primeiro termo vezes o quadrado do segundo termo, menos o cubo do segundo termo.
$(x - 2)^3 = (x)^3 - 3(x)^2(2) + 3(x)(2)^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

e. $(2b + 3c)^2$

O quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.
$(2b + 3c)^2 = (2b)^2 + 2(2b)(3c) + (3c)^2 = 4b^2 + 12bc + 9c^2$.

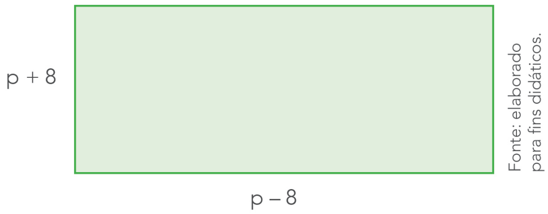
f. $(h - 3)^2$

O quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o primeiro termo pelo segundo, menos o quadrado do segundo termo.
$(h - 3)^2 = (h)^2 - 2(h)(3) + (3)^2 = h^2 - 6h + 9$.

FINALIZANDO

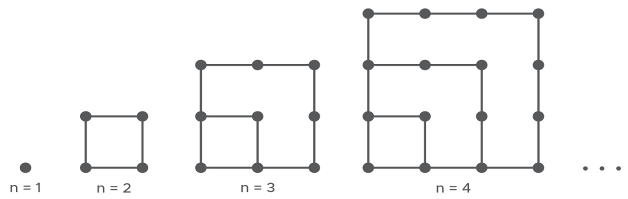
Avalie as resoluções das atividades, identifique se houve dúvidas nas resoluções, analise bem as estratégias e as corrija, complementando com o que você, professor, achar pertinente. Atente-se as habilidades dos estudantes para com as operações aditivas e multiplicativas dos polinômios e, também, com as operações envolvendo números inteiros (regras de sinais).

3. Escreva uma expressão algébrica que represente a medida da área.



O quadrado do primeiro termo, menos o quadrado do segundo termo.
$(p + 8)(p - 8) = p^2 - 64$.

4. (SAESP, 2019 - Adaptado) Os conjuntos de pontos abaixo estão organizados obedecendo a um padrão.



Considerando n a posição que o desenho ocupa nessa sequência e P o número de bolinhas de cada desenho ocupa nessa sequência e P o número de bolinhas de cada desenho, qual é a expressão que permite obter o número de bolinhas para um desenho qualquer dessa sequência?

$P = n^2$.
Um possível raciocínio é $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ e $4^2 = 16$.

5. (SARESP, 2010 – Adaptado) Observe as duas listas de expressões:

A) $(x - 3)^2$	I) $x^2 - 9$
B) $(x + 3)(x - 3)$	II) $x^2 + 4x + 3$
C) $(x + 3)^2$	III) $x^2 + 6x + 9$
D) $(x + 3)(x + 1)$	IV) $x^2 - 6x + 9$

As expressões equivalentes são:

a. A – I; B – II; C – IV; D – III.
b. A – II; B – III; C – IV; D – I.
c. A – IV; B – II; C – III; D – I.
d. A – IV; B – I; C – III; D – II.

Espera-se que o estudante desenvolva os produtos e fatore os polinômios para efetuar as respectivas associações.

a. $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

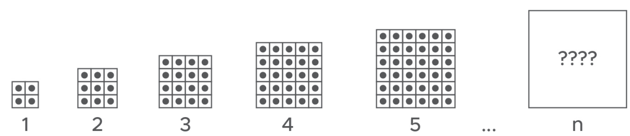
b. $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3x + 3x - 9 = x^2 - 9$

c. $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

d. $(x + 3)(x + 1) = x^2 + x + 3x + 3 = x^2 + 4x + 3$

Logo, a alternativa correta é a letra d.

6. (SARESP, 2012) As figuras abaixo representam caixas numeradas de 1 a *n*, contendo bolinhas. A quantidade de bolinhas varia em função do número de cada caixa.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

A expressão que representa a "caixa n" é

a. n^2.
b. $(n - 1)^2$.
c. $(n + 1)^2$.
d. $n + 1$.

Espera-se que o estudante faça algumas análises até chegar a uma expressão algébrica. Você, professor, observe e oriente os estudantes com dicas que possam conduzir os estudantes a determinarem a expressão.

Uma possível análise é:

$(1 + 1)^2 = 4$

$(2 + 1)^2 = 9$

$(3 + 1)^2 = 16$

$(n + 1)^2 = ?$

A alternativa correta é a letra c.

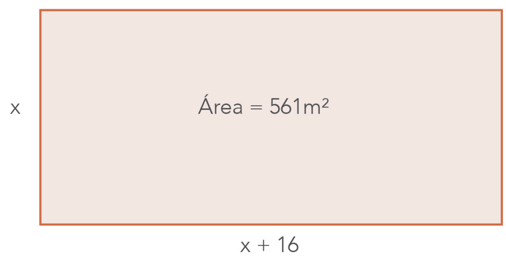
AULAS 5 E 6 - COMPREENDENDO O SIGNIFICADO DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Objetivos das aulas:
- Compreender o conceito de equação polinomial do 2º grau;
- Identificar equações polinomial do 2º grau completa e incompleta.

Caro estudante, para o desenvolvimento das atividades a seguir, será necessário relembrar alguns significados sobre equações do 1º e 2º graus. Os objetivos destas aulas é trabalhar o conceito de equação polinomial do 2º grau e identificar os coeficientes numérico de uma equação completa e incompleta. Sendo assim, fique atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará ao decorrer das aulas.

1. **A quadra esportiva da escola que a Helena estuda tem formato retangular, possui 561 m² de área e tem um lado 16 metros maior que o outro. Determine a medida do comprimento e da largura da quadra.**

Um dos primeiros passos para resolver este problema seria escrevê-lo de modo geométrico.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Utilizando a fórmula para calcular a área do retângulo, $A = b \times h$, temos $x\,(x + 16) = 561 = x^2 + 16x = 561 = x^2 + 16x - 561 = 0$.

Observe que essa é uma equação polinomial do 2º grau, porque a variável **x** está elevada ao expoente **2**. Temos que toda equação no formato $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0$, com $\mathbf{a} \neq 0$, é uma equação polinomial do 2º grau. As letras **a**, **b** e **c** são denominados coeficientes numéricos da equação. Vale lembrar que uma equação é considerada completa quando encontramos nela todos os coeficientes numéricos.

Exemplos:

$x^2 + 2x - 7 = 0$, coeficientes numéricos **a** = 1, **b** = 2 e **c** = - 7.

$3x^2 - 5x + 1 = 0$, coeficientes numéricos **a** = 3, **b** = -5 e **c** = 1.

$x^2 + 7 = 0$, coeficientes numéricos **a** = 1, **b** = 0 e **c** = 7.

$4x^2 - 9x = 0$, coeficientes numéricos **a** = 4, **b** = -9 e **c** = 0.

Vimos até aqui alguns significados da equação polinomial do 2º grau, agora vamos resolver a equação $x^2 + 16x - 561 = 0$ utilizando a estratégia da fatoração.

AULAS 5 E 6 – COMPREENDENDO O SIGNIFICADO DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Professor, em função das medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, organize a turma respeitando os protocolos de higiene e distanciamento seguro entre os estudantes.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Para os estudantes: Caderno de Atividades impresso.

Para o professor: Caderno de Atividades, canetões coloridos ou gizes coloridos.

INICIANDO

Nestas aulas retomaremos o conceito de equação polinomial do 2º grau, a identificação dos coeficientes numéricos, equações completa e incompleta. O foco neste momento é explorar os elementos que constituem uma equação polinomial do 2º grau. A dica neste momento é explorar na lousa, a partir de um exemplo, o que você, professor, achar pertinente. Após essa breve conversa introdutória, os estudantes poderão receber o Caderno do Estudante impresso e realizar as atividades propostas.

DESENVOLVENDO

Mantenha a sala organizada, solicite aos estudantes que analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. As atividades 1, 2, 3, 4 e 5 apresentam o significado de equação polinomial do 2º grau e os elementos que constituem o seu conceito, exploram o significado de coeficiente numérico, incógnitas, quando é completa ou incompleta. Nas atividades 6 e 7 apresenta-se aplicações por meio da resolução de problemas, da utilização de equação polinomial do 2º grau, para encontrar valores desconhecidos. Se for seguro, devido as medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, circule pela sala enquanto eles efetuam os cálculos e resolvem as atividades. Observe os pontos de vistas da turma sobre os elementos que constituem uma equação do 2º grau, se necessário, oriente-os sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: "como vocês estão resolvendo?", "por que dessa forma?", "o que vocês acham se ..." e outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

FINALIZANDO

Avalie as resoluções das atividades, identifique se houve dúvidas nas resoluções, analise bem as estratégias e as corrija, complementando com o que você, professor, achar pertinente. Talvez os estudantes já tenham estudado equação polinomial do 2º grau adotando a fatoração ou a fórmula de Bhaskara para resolvê-la. Reforce que o objetivo desta Sequência de Atividades é aprofundar a aprendizagem utilizando apenas as estratégias de fatoração para resolver equação polinomial do 2º grau.

Resolução:

$x^2 + 16x - 561 = 0 \rightarrow x^2 + \mathbf{16x} = 561$

$\downarrow$

$\mathbf{16} \div 2 = 8 \rightarrow \mathbf{8^2} = 64$

Completando o trinômio quadrado perfeito do primeiro termo somando o mesmo número aos dois membros da equação $\rightarrow x^2 + 16x + \mathbf{8^2} = 561 + \mathbf{8^2}$.

$\downarrow$

$(x + 8)^2 = 625$

Resolvemos $(x + 8)^2 = 625 \;=\; x + 8 = \pm\sqrt{625} \;=\; x + 8 = \pm 25 \;=\;$ i) $x + 8 = 25 \;=\; x = 17$

ii) $x + 8 = -25 \;=\; x = -33$

Logo, as raízes da equação são $S = \{-33, 17\}$.

Para resolver o problema consideramos o valor de $x = 17$. Substituindo o valor de x, temos que a largura da quadra é 17m e o comprimento 33m.

Para continuarmos aprofundando o significado de equação polinomial do 2º grau, nos itens a seguir, reduza os termos semelhantes das equações e identifique os valores dos coeficientes numéricos a, b e c:

a. $5x^2 + 2x - 3 + 9x = 0$

$5x^2 + 2x - 3 + 9x = 0 \;=\; 5x^2 + 11x - 3 = 0.$

$a = 5, b = 11, c = -3.$

b. $(x - 2)(x + 4) = 5x + 41$

$(x - 2)(x + 4) = 5x + 41 \;=\; x^2 + 4x - 2x - 8 = 5x + 41 \rightarrow x^2 - 3x - 49 = 0$

$a = 1, b = -3, c = -49.$

c. $5w - w^2 + 3w = 8$

$5w - w^2 + 3w = 8 \;=\; -w^2 + 8w - 8 = 0$

$a = -1, b = 8, c = -8.$

d. $9p + 5p^2 - 15 = p^2 + 5p$

$9p + 5p^2 - 15 = p^2 + 5p \;=\; 4p^2 + 4p - 15 = 0.$

$a = 4, b = 4, c = -15.$

e. $n - 5n + 12 = 3n^2$

$n - 5n + 12 = 3n^2 = -3n^2 - 4n + 12 = 0.$
$a = -3, b = -4, c = 12.$

f. $x^2 + 3x = 3x + 10$

$x^2 + 3x = 3x + 10 = x^2 - 10 = 0.$
$a = 1, b = 0, c = -10.$

g. $(m - 3)^2 = 2m + 6$

$(m - 3)^2 = 2m + 6 = m^2 - 6m + 9 = 2m + 6 = m^2 - 8m + 3 = 0.$
$a = 1, b = -8, c = 3.$

2. Classifique as equações a seguir em completa ou incompleta.

a. $x^2 + 2x - 7 = 0.$
b. $3x^2 - 5x + 1 = 0.$
c. $x^2 + 7 = 0.$
d. $4x^2 - 9x = 0.$
e. $x^2 = 0.$

a) $x^2 + 2x - 7$ completa
b) $3x^2 - 5x + 1 = 0$ completa
c) $x^2 + 7 = 0$ incompleta
d) $4x^2 - 9x = 0$ incompleta
e) $x^2 = 0$ incompleta

3. Dada a equação $z^2 - 5z + 6 = 0$ verifique o que acontece quando você substitui a incógnita z pelos valores 1, 2, 3 e 4.

i) $z^2 - 5z + 6 = 0 = (1)^2 - 5(1) + 6 = 0 = 1 - 5 + 6 = 0 = 2 = 0$, falso.
ii) $z^2 - 5z + 6 = 0 = (2)^2 - 5(2) + 6 = 0 = 4 - 10 + 6 = 0 = 0 = 0$, verdadeiro.
iii) $z^2 - 5z + 6 = 0 = (3)^2 - 5(3) + 6 = 0 = 9 - 15 + 6 = 0 = 0 = 0$, verdadeiro.
iv) $z^2 - 5z + 6 = 0 = (4)^2 + 5(4) + 6 = 0 = 16 - 20 + 6 = 0 = 2 = 0$, falso.

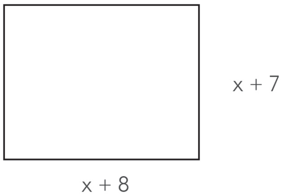
4. Com base nos resultados que você obteve substituindo os valores 1, 2, 3 e 4 na incógnita z da equação $z^2 - 5z + 6 = 0$, todos os valores resultaram em igualdades verdadeiras?

Não, apenas os valores 2 e 3.

5. Sabendo que os valores que tornam uma equação verdadeira são denominados raízes, quais são as raízes da equação $z^2 - 5z + 6 = 0$?

As raízes são 2 e 3.

6. Considerando que a área do retângulo a seguir seja 86 m², qual das expressões algébricas a seguir representa a equação para determinar o valor de x?



Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. $x^2 + 15x + 136 = 0$.

b. $x^2 + 15x - 136 = 0$.

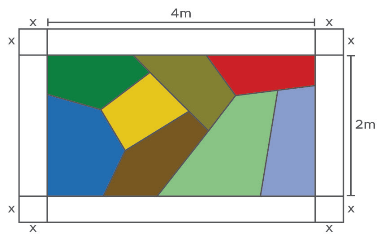
c. $x^2 + 15x + 30 = 0$.

d. $x^2 + 15x - 30 = 0$.

Uma possível estratégia é o estudante adotar a ideia de cálculo de área de figuras planas fazendo $(x + 7) \cdot (x + 8) = 86 \; = \; x^2 + 7x + 8x + 56 - 86 = 0 \; = \; x^2 + 15x - 30 = 0$

A alternativa correta é a letra d.

7. (AAP, 2016 – Adaptado) Um vitral retangular colorido de dimensões 2m por 4m será emoldurado conforme indica a figura a seguir.



Sabendo que a área total da moldura é de 7m², determine a equação que deve ser utilizada para obter a medida de x.

> Tem-se inicialmente que, a área do vitral (4m · 2m) é 8m².
> A dimensão dos lados da figura retangular com a moldura ficará acrescida de 2x.
> Sendo (4 + 2x) e (2 + 2x). A outra informação é que a área da moldura é 7m².
> Ao subtrair a área do vitral (8m²) da área total da figura (4 + 2x) · (2 + 2x), tem-se a área da moldura que é 7m².
>
> Assim:
> $(4 + 2x) \cdot (2 + 2x) - 8 = 7$ (aplicando a propriedade distributiva)
> $(8 + 8x + 4x + 4x^2) - 15 = 0$ (agrupando os termos comuns)
> $4x^2 + 12x - 7 = 0$

AULAS 7 E 8 - RESOLUCAO DE EQUAÇÕES UTILIZANDO FATORAÇÃO

Objetivos das aulas:
- Resolver equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações;
- Elaborar e resolver problemas envolvendo o significado de equação polinomial do 2º grau.

Para o desenvolvimento das atividades, será necessário relembrar alguns conceitos estudados anteriormente sobre fatoração de polinômios e produtos notáveis. Logo, fique atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará ao decorrer das aulas.

1. Utilizando estratégias de fatoração, determine as raízes das equações:

a. $3x^2 + 15x = 0$

> $3x^2 + 15x = 0$ = colando o fator comum em evidência $x(3x + 15) = 0$ = fazemos $x = 0$ e $3x + 15 = 0$ = $3x = -15$ = $x = -5$. Logo, as raízes da equação são $S = \{0, -5\}$.

AULAS 7 E 8 – RESOLUÇAO DE EQUAÇÕES UTILIZANDO FATORAÇÃO

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Professor, em função das medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, organize a turma respeitando os protocolos de higiene e distanciamento seguro entre os estudantes.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Para os estudantes: Caderno de Atividades impresso.

Para o professor: Caderno de Atividades, canetões coloridos ou gizes coloridos.

INICIANDO

Nestas aulas retomaremos a resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações. Para início de conversa com a turma, revise o significado e resolução de equações do 1º grau. Se diagnosticar necessário, retome as estratégias de fatoração estudadas nas aulas anteriores. O objetivo central destas aulas é apresentar possibilidades para os estudantes resolverem equação polinomial do 2º grau sem o uso da fórmula de Bhaskara. Explore na lousa, a partir de exemplos, a resolução de equações por meio de fatoração do tipo $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$ e $ax^2 + bx + c = 0$. Após essa breve conversa introdutória, os estudantes poderão receber o Caderno do Estudante impresso e realizar as atividades propostas.

DESENVOLVENDO

Mantenha a sala organizada, solicite aos estudantes que analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. A atividade 1, explora as estratégias de resolução de equação polinomial do 2º grau utilizando-se apenas a fatoração. Reitera-se que não deve ser apresentado para os estudantes a fórmula de Bhaskara neste momento. Todas as equações propostas devem e podem ser resolvidas apenas por meio da fatoração. Por fim, as atividades 2, 3, 4, 5 e 6 são problemas que tratam da aplicação prática das equações. Se for seguro, devido as medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, circule pela sala enquanto eles efetuam os cálculos e resolvem as atividades. Observe os pontos de vistas da turma sobre a resolução de equação do 2º grau por meio de fatoração, se necessário, oriente-os sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: "como vocês estão resolvendo?", "por que dessa forma?", "o que vocês acham se..." e outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

FINALIZANDO

Avalie as resoluções das atividades, identifique se houve dúvidas nas resoluções, analise bem as estratégias e as corrija, complementando com o que você, professor, achar pertinente. Esclareça para os estudantes que nem todo o tipo de equações polinomial do 2º grau pode ser resolvidas utilizando-se apenas a fatoração, se possível, apresente um caso para eles.

70 | MATEMÁTICA

b. $x^2 + 16x = 0$

$x^2 + 16x = 0$ = colando o fator comum em evidência $x(x + 16) = 0$ = fazemos $x = 0$ e $x + 16 = 0$ = $x = -16$. Logo, as raízes da equação são $S = \{0, -16\}$.

c. $(x - 3)(x + 6) = 0$

Considerando que a equação $(x - 3)(x + 6) = 0$ já esta fatorada, podemos seguir utilizando a estratégia:

i) $x - 3 = 0$ = $x = 3$

ii) $x + 6 = 0$ = $x = -6$

Logo, as raízes da equação são $S = \{3, -6\}$.

d. $x^2 + 2x - 35 = 0$

$x^2 + 2x - 35 = 0 \longrightarrow x^2 + 2x = 35$

$2 \div 2 = 1 \longrightarrow 1^2 = 1$

Completando o trinômio quadrado perfeito do primeiro termo somando o mesmo número aos dois membros da equação = $x^2 + 2x + 1^2 = 35 + 1^2$.

$(x + 1)^2 = 36$

Resolvemos $(x + 1)^2 = 36$ = $x + 1 = \pm\sqrt{36}$ = $x + 1 = \pm 6$ = i) $x + 1 = 6$ = $x = 5$

ii) $x + 1 = -6 \longrightarrow x = -7$

Logo, as raízes da equação são $S = \{-7, 5\}$.

e. $x^2 - 6x + 5 = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \longrightarrow x^2 - 6x = -5$

$6 \div 2 = 3 \longrightarrow 3^2 = 9$

Completando o trinômio quadrado perfeito do primeiro termo somando o mesmo número aos dois membros da equação = $x^2 - 6x + 3^2 = -5 + 3^2$.

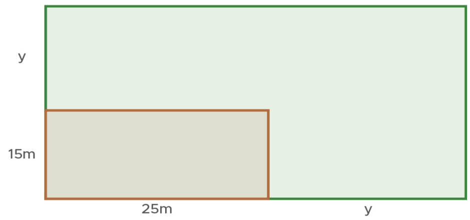
$(x + 3)^2 = 4$

Resolvemos $(x + 3)^2 = 4$ = $x + 3 = \pm\sqrt{4}$ = $x + 3 = \pm 2$ = i) $x + 3 = 2$ = $x = -1$

ii) $x + 3 = -2$ = $x = -5$

Logo, as raízes da equação são $S = \{-1, -5\}$.

2. O estacionamento da empresa do Walter possui uma área de 375 m² e ele pretende aumentar a área para 600 m². A medida dos lados do atual terreno é de 15 m por 25 m, conforme mostra a imagem abaixo.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Em quantos metros Walter deve aumentar nas dimensões do estacionamento para que a nova área seja 600 m², ou seja, qual o valor de **y**?

a. 5m.
b. 7m.
c. 9m.
d. 11m.

O esperado é que o estudante utilize o significado da fórmula para calcular a área de um retângulo, $A = b \times h$.

$(15 + y)(25 + y) - 375 = 600$

$375 + 15y + 25y + y^2 = 600$

$375 + 40y + y^2 = 600$

$y^2 + 40y + 375 - 600 = 0$

$y^2 + 40y - 225 = 0$

$y^2 + 40y - 225 = 0 \rightarrow y^2 + 40y = 225$

$40 \div 2 = 20 \rightarrow 20^2 = 400$

Completando o trinômio quadrado perfeito do primeiro termo somando o mesmo número aos dois membros da equação $= y^2 + 40y + 20^2 = 225 + 20^2$.

$(y + 20)^2 = 625$

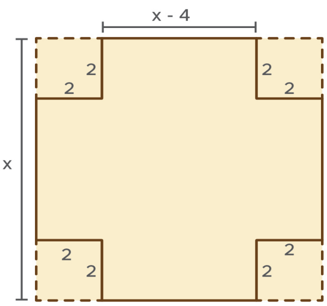
Resolvemos $(y + 20)^2 = 625 = y + 20 = \pm\sqrt{625} = y + 20 = \pm 25$

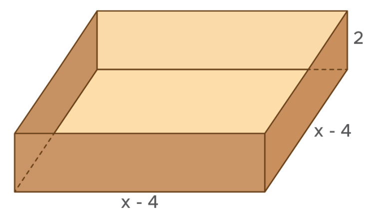
$= $ i) $y + 20 = 25 = y = 5$

ii) $y + 20 = -25 = y = -45$

Logo, considerando que $y = 5$, soma-se $15 + y = 15 + 5 = 20$ e $25 + y = 25 + 5 = 30$. Para validar a resposta e verificar a área total do novo estacionamento espera-se que o estudante faça $A_{Total} = 20m \times 30m = 600m^2$.

3. (SARESP, 2012) Cortando quadradinhos de 4 cm² nos cantos de uma folha de cartolina quadrada e dobrando os lados, obtemos uma caixa com 128 m³ de volume.





Determine as dimensões dessa caixa.

- a. 12m, 12m e 2m.
- b. 10m, 10m e 2m.
- c. 6m, 6m e 2m.
- d. 8m, 8m e 2m.

O esperado é que o estudante utilize o significado da fórmula para calcular a área de um retângulo, $A = b \times h$.

$(x - 4)^2 \cdot 2 = 128$

$(x^2 - 8x + 16) \cdot 2 = 128$

$2x^2 - 16x + 32 = 128$

$2x^2 - 16x + 32 - 128 = 0$

$2x^2 - 16x - 96 = 0 \quad \div 2$

$x^2 - 8x - 48 = 0 \longrightarrow x^2 - 8x = 48$

$8 \div 2 = 4 \longrightarrow 4^2 = 16$

Completando o trinômio quadrado perfeito do primeiro termo somando o mesmo número aos dois membros da equação $= x^2 - 8x + 4^2 = 48 + 4^2$.

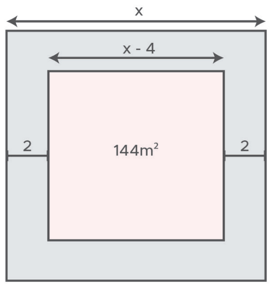
$(x - 4)^2 = 64$

Resolvemos $(x - 4)^2 = 64 \;=\; x - 4 = \pm\sqrt{64} \;=\; x - 4 = \pm 8 \;=\;$ i) $x - 4 = 8 \;=\; x = 12$

ii) $x - 4 = -8 \;=\; x = -4$

Logo, considerando que $x = 12$, podemos achar a medida dos lados fazendo $x - 4 = 12 - 4 = 8$. Logo, as dimensões da caixa é 8m, 8m e 2m.

4. (AAP, 2017 – Adaptado) Um canteiro na forma de um quadrado foi reduzido de modo a ser contornado por uma calçada com 2m de largura, conforme a figura. Com isso, sua área passou a ser de 144 m².



A medida do lado que corresponde ao canteiro menor é:

a. 6m.
b. 8m.
c. 12m.
d. 16 m.

Espera-se que o estudante inicialmente considere a fórmula da área do quadrado $A = l^2$ temos que $(x - 4)(x - 4) = 144 \rightarrow (x - 4)^2 = 144$. A partir deste ponto é esperado que o estudante utilize a técnica da fatoração do trinômio quadrado perfeito e resolva a equação.

$(x - 4)^2 = 144 \rightarrow x - 4 = \pm\sqrt{144} \rightarrow x - 4 = \pm 12$ portanto $x = 16$. Substituindo em $x - 4$, que é a expressão algébrica que representa a medida do lado, $16 - 4 = 12$. Logo, a medida do lado do canteiro menor é 12 m.

A alternativa correta é a letra c.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Caro professor, os problemas das atividades 3 e 4 devem ser resolvidos utilizando a estratégia de complementação do trinômio quadrado perfeito. Por serem alunos do Ensino Médio, é possível que queiram resolver utilizando outras estratégias, mas o objetivo desta habilidade é que resolvam equação polinomial do 2º grau utilizando apenas as técnicas de fatoração.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 5

Caro professor, embora tenhamos exposto uma resolução para esta atividade, é possível que os alunos apresentem estratégias diferentes incluindo o cálculo mental ou a substituição por tentativa de valores. Neste momento, é importante valorizar as hipóteses de resolução dos alunos.

5. (AAP, 2017) Se o produto de dois fatores é zero, necessariamente um deles é igual a zero. Assim, as raízes reais da equação $(x + 2) \cdot (x - 6) = 0$ são

a. 2 e −6.
b. −2 e 6.
c. 2 e −2.
d. 2 e 6.

Dada a equação: $(x + 2) \cdot (x - 6) = 0$. Considerando a afirmação do enunciado têm-se que: $(x + 2) = 0$ ou $(x - 6) = 0$

i) $x = -2$

ii) $x = 6$

Logo, as raízes da equação estão no conjunto solução $S = \{-2,6\}$.

A alternativa correta é a letra B.

6. Caro estudante, utilizando os significados que você desenvolveu até aqui sobre resolução de equações polinomial do 2º grau por meio de fatoração, elabore e apresente para o professor uma situação-problema cuja solução também seja por meio da fatoração de polinômios.

Professor, acompanhe o estudante no processo de construção e sugira possíveis caminhos que você achar pertinente para o estudante.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

1ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

ANOTAÇÕES

1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO – SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

OLÁ, PROFESSOR! OLÁ, PROFESSORA!

Os estudantes deverão chegar ao final desta Sequência de Atividades com habilidades desenvolvidas para aplicar os significados das funções afim e quadrática em resolução de problemas. O objetivo central dessa Sequência de Atividades é aprofundar a aprendizagem dos estudantes sobre as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar estes conceitos para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis. Sendo assim, o conjunto de atividades vai além dos objetivos de aprendizagem da habilidade em questão. Isso deve-se ao fato de considerarmos que, no ano anterior, os estudantes já tenham estudado conceitos básicos sobre as funções afim e quadrática e, se não estudaram, as atividades dessa sequência também oferecem subsídios didáticos para que você, professor, possa trabalhar todos os conceitos introdutórios sobre as funções. Neste sentido, o estudante deve, ao final dessa sequência, recuperar e potencializar os significados sobre as funções afim e quadrática, resolverem problemas envolvendo significado de otimização de funções quadráticas para que consigam aplicá-los dentro de contextos da própria Matemática, em áreas interligadas a ela e ao cotidiano.

HABILIDADE: (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	Compreendendo o significado de função
3ª e 4ª/ 90 min	Calculando o valor numérico de uma função
5ª e 6ª/ 90 min	Esboçando gráficos de funções afim e quadrática
7ª e 8ª/ 90 min	Resolução de problemas utilizando o significado de funções

Professor, para ajudá-lo nesta ação, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenal acerca das Sequências de Atividades. Tais formações acontecerão nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPCs). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

AULAS 1 E 2 - COMPREENDENDO O SIGNIFICADO DE FUNÇÃO

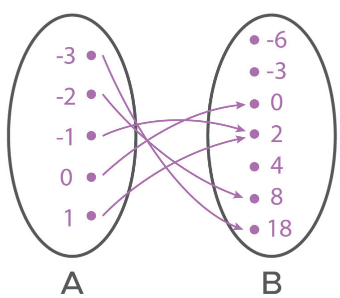
Objetivos das aulas:

- Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis;
- Compreender o significado de variável dependente e independente a partir de contextos do cotidiano.

Caro estudante, para o desenvolvimento das atividades a seguir, será necessário relembrar alguns significados de função. Para início de conversa, lembre-se que "estar em função", na Matemática, significa que dois conjuntos estão relacionados a partir de uma lei estabelecida, e que cada elemento do primeiro conjunto se relaciona unicamente com um elemento do segundo conjunto. É a partir desse significado de função que as atividades a seguir iniciam-se. Sendo assim, fique atento aos comentários e possíveis complementos, que o professor fará no decorrer das aulas, para superar possíveis dúvidas e prosseguir com os estudos sobre funções.

1. Dados os conjuntos A = { -3, -2, -1, 0, 1} e B = {-6, -3, 0, 2, 4, 8, 18}, considere a lei de formação, a seguir, para fazer a relação de A em B e verifique se é uma função.

a. $f_1 = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = 2x^2\}$



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Espera-se que os estudantes efetuem as seguintes substituições e calculem:

$y = 2(-3)^2 = 18$

$y = 2(-2)^2 = 8$

$y = 2(-1)^2 = 2$

$y = 2(0)^2 = 0$

$y = 2(1)^2 = 2$

f_1 **é função, pois todo elemento de A está associado, por meio de , a um único elemento de B.**

AULAS 1 E 2 - COMPREENDENDO O SIGNIFICADO DE FUNÇÃO

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Professor, em função das medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, organize a turma respeitando os protocolos de higiene e distanciamento seguro entre os estudantes.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Para os estudantes: Caderno de Atividades impresso.

Para o professor: Caderno de Atividades impresso, pincel piloto, lápis para colorir ou gizes coloridos.

INICIANDO

Professor, para as aulas 1 e 2 dessa Sequência de Atividades, primeiramente converse com os estudantes no sentido de diagnosticar o que eles reconhecem ou lembram sobre função. Questione a turma sobre o conceito de função: Qual o significado de estar em função de algo? Anote os exemplos indicados no quadro e, em seguida, crie com os estudantes uma definição coletiva, resumida em uma frase. No decorrer das sequências de atividades, você terá exercícios nos quais os estudantes colocarão em prática as discussões levantadas no início das aulas. É importante, nesse momento, retomar com os estudantes o significado de variável, usando o contexto das atividades para explorar esse significado. Após essa breve conversa introdutória, os estudantes poderão receber o Caderno do Estudante impresso e realizar as atividades propostas.

DESENVOLVENDO

Mantenha a sala organizada, solicite aos estudantes que analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. Nas atividades 1, 2 e 3, o professor deve explorar o significado da relação para chegar na definição de função. Já as atividades 4 e 5, o objetivo é trabalhar o significado de variável dependente e independente, lei de formação de uma função e aprofundar o conceito de função. Se for seguro, devido às medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, circule pela sala, enquanto eles discutem e resolvem as atividades. Observe os pontos de vista da turma sobre o conceito de função. Se necessário, oriente-a sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: "como vocês estão resolvendo?", "por que dessa forma?", "o que vocês acham se..." e outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

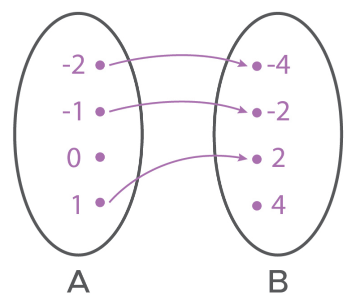
FINALIZANDO

Avalie as resoluções das atividades, identifique se houve dúvidas nas resoluções, analise bem as respostas dos estudantes e as corrija, complementando com o que você, professor, achar pertinente. Professor, veja como seus alunos resolveram os problemas e os exercícios e analise, com eles, os diferentes registros que fizeram. É importante orientar os estudantes a corrigirem suas respostas ou a acrescentarem dicas dadas após as correções.

76 | MATEMÁTICA

2. Dados os conjuntos A = { -2, -1, 0, 1} e B = {, -4, - 2, 2, 4}, considere a lei de formação, a seguir, para fazer a relação de A em B e verifique se é uma função.

a. $f_1 = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Espera-se que os estudantes efetuem as seguintes substituições e calculem:

$y = 2(-2) = -4$

$y = 2(-1) = -2$

$y = 2(0) = 0$

$y = 2(1) = 2$

f_1 não é função, pois existe elemento de A que não está associado, por meio de , a um único elemento de B.

3. Uma motocicleta percorre uma rodovia com velocidade constante de 100 km/h, durante 15 minutos, a partir das 20 horas. O quadro a seguir descreve a correspondência entre o tempo e a velocidade.

Tempo	Velocidade (km/h)
20h00min	100
20h04min	100
20h08min	100
20h12min	100
20h16min	100

Fonte: elaborado para fins didáticos.

A relação entre a velocidade e o tempo mostrada na tabela é ou não é uma função? Justifique sua resposta.

Não é uma função, pois à mesma velocidade, correspondem vários tempos.

4. O quadro a seguir estabelece a relação do preço dos quilogramas do álcool em gel comprados com o preço a pagar por eles.

Quantidade de quilogramas (kg)	Preço a pagar (R$)
1	22,80
2	45,60
3	68,40
4	91,20

Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. A relação entre o preço dos quilogramas do álcool em gel comprados com o preço a pagar é ou não é uma função? Justifique sua resposta.

Sim, é uma função. Observa-se uma relação unívoca entre a quantidade de quilogramas de álcool em gel e o preço a pagar.

b. O que é dado em função do quê?

O preço a pagar é dado em função da quantidade de quilogramas de álcool em gel comprado.

c. Qual é a variável dependente?

O preço a pagar.

d. Qual é a variável independente?

A quantidade de quilogramas de álcool em gel.

e. Qual é a expressão matemática da função que associa o preço do quilograma do álcool em gel ao preço a pagar?

Preço $f(x) = f(x) = 22{,}80x$.

f. Uma caixa contém 8 kg de álcool em gel. Qual o valor a pagar por uma caixa?

$P = 22{,}80\,(8)$ $P = 182{,}40$ R\$.

g. Quantas caixas de álcool em gel podem ser compradas com R$ 547,20?

$547{,}20 = 22{,}80x$ $22{,}80x = 547{,}20$ $x = \dfrac{547{,}20}{22{,}80} \longrightarrow x = 24$. Logo, podem ser comprados com 547,20 reais três caixas de álcool em gel.

5. Dado o quadrilátero a seguir, responda às questões seguintes.

Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. Qual a lei de formação que expressa o perímetro desse retângulo?

Espera-se que o estudante utilize o significado de que o perímetro é a medida dos lados e efetue a operação $6 + 6 + x + x = P$ $P = 2x + 12$ $f(x) = 2x + 12$.

b. Sobre o significado do perímetro, o que é dado em função do quê?

O perímetro é dado em função da medida dos lados do quadrilátero.

c. Qual é a variável dependente?

O perímetro.

d. Qual é a variável independente?

A medida dos lados.

AULAS 3 E 4 - CALCULANDO O VALOR NUMÉRICO DE UMA FUNÇÃO

Objetivos das aulas:
- Expressar a lei de formação de uma função, a partir de um problema;
- Calcular o valor numérico de uma função polinomial do 1º ou 2º grau, a partir de uma lei de formação.

Estão programadas, para essas aulas, atividades para aprofundar o conceito de função, a partir de situações-problema nas quais é possível explorar o significado de uma lei de formação da função. Em seguida, as atividades tratam do cálculo do valor numérico de uma função polinomial do 1º ou 2º grau, a partir de uma lei de formação. Talvez, alguns destes significados você já tenha desenvolvido, se não, fique atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará no decorrer das aulas e, se alguma dúvida persistir, peça para o professor repetir a explicação ou resolução.

1. A distância entre as cidades do Rio de Janeiro e São Paulo é de 432 km. Um grupo de motociclistas percorreu essa distância em 6 horas. Considerando a velocidade média do grupo nessa viagem, indique a representação algébrica que representa o deslocamento desse grupo (em km) em função do tempo (em horas).

Espera-se que o aluno encontre, primeiramente, a velocidade média do grupo de motociclismo

$\rightarrow$ Vm = $\frac{432\ km}{6h}$ = 72 km/h . Significa que o grupo percorreu 72 km em 1 hora.

Após essa constatação, basta expressar, por meio de uma função, esse deslocamento em relação ao tempo: Considerando o tempo x em horas, tendo a constante k = 72km, pois eles percorrem 72km a cada hora, podemos escrever a relação da distância f(x), em km, em função de x.

$f(x) = 72x$

AULAS 3 E 4 - CALCULANDO O VALOR NUMÉRICO DE UMA FUNÇÃO

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Professor, em função das medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, organize a turma, respeitando os protocolos de higiene e distanciamento seguro entre os estudantes.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Para os estudantes: Caderno de Atividades impresso.
Para o professor: Caderno de Atividades, canetões coloridos ou gizes coloridos.

INICIANDO

Estão programadas, para essas aulas, atividades para aprofundar o significado de função, a partir de situações-problema nas quais é possível explorar o significado de uma lei de formação da função. Em seguida, as atividades tratam do cálculo do valor numérico de uma função polinomial do 1º ou 2º grau, a partir de uma lei de formação. Professor, você deve explorar, nos problemas propostos, as relações funcionais entre duas variáveis. Neste sentido, é oportuno dar ênfase à importância do estudo das funções e à sua utilidade prática para resolver problemas do cotidiano. Abra um parêntese, nesse momento inicial das aulas, para discutir com os estudantes sobre o que é uma lei de formação ou regra de uma função, pois os problemas apresentados, para essas aulas e as próximas, são desenvolvidos a partir de uma lei de formação da função. Após essa breve conversa introdutória, os estudantes poderão receber o Caderno do Estudante impresso e realizar as atividades propostas.

DESENVOLVENDO

Mantenha a sala organizada, solicite aos estudantes que analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. Estão previstas, para estas aulas 3 e 4, cinco atividades: as três primeiras são situações-problema que exploram o significado de lei de formação de uma função. Vale lembrar que é você, professor, que deve dar ênfase, dialogar com os estudantes, mostrando onde os significados aparecem no contexto dos problemas e apresentar possíveis estratégias para desenvolver uma expressão matemática que represente uma lei de formação. Os problemas são fáceis de interpretar, mas talvez os estudantes apresentem dificuldades em relação ao desenvolvimento da lei de formação, devido à probabilidade dos estudantes ainda, neste ponto, apresentarem dificuldades em relação ao significado das variáveis dependente e independente envolvidas nos problemas. Sendo assim, se necessário, retome esses pontos. As atividades 3 e 4 são exercícios para explorar o significado de valor numérico de uma função polinomial de R em R, a partir de uma lei de formação dada. Se for seguro, devido às medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, circule pela sala, enquanto eles efetuam os cálculos e resolvem as atividades. Se necessário, oriente-os sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: "como vocês estão resolvendo?", "por que dessa forma?", "o que vocês acham se..." e outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

2. (AAP, 2019 - Adaptado) Uma torneira comum de banheiro consome muitos litros de água por hora, conforme podemos observar na tabela abaixo:

Tempo (x)	10	20	30	60
Consumo (y)	20	40	60	120

Obs.: tempo em minutos e o consumo em litros.

Fonte: elaborado para fins didáticos.

A expressão que representa o consumo de água (em litros) em função do tempo (em horas) é:

a. $f(x) = 2x$

b. $f(x) = 10x$

c. $f(x) = 120x$

d. $f(x) = \frac{x}{120}$

Na questão apresentada, a função que expressa o consumo de água pela torneira do banheiro é a alternativa a. O solicitado no problema era o consumo de água por hora, tornando necessária a transformação do consumo em minutos para o consumo por hora, pois a última coluna traz o consumo de água em 60 minutos, ou seja, em uma hora. Se a torneira consome 120 litros de água em uma hora, a função que descreve esse consumo é: $f(x) = 2x$.

A alternativa correta é a letra A.

3. (AAP, 2018 – Adaptado) A tabela abaixo traz a proporcionalidade direta entre a grandeza Y e o quadrado de X.

X	1	2	3	4
Y	5	20	45	80

Fonte: elaborado para fins didáticos.

A função que pode ser escrita a partir dos dados dessa tabela é:

a. $f(x) = x + 15$.

b. $f(x) = x^2 + 15$.

c. $f(x) = x^2 + 5x$.

d. $f(x) = 5x^2$.

FINALIZANDO

Avalie as resoluções das atividades, identifique se houve dúvidas nas resoluções, analise bem as estratégias e as corrija, complementando com o que você, professor, achar pertinente. Veja como seus alunos resolveram os problemas e os exercícios e analise com eles os diferentes registros que fizeram. É importante orientar os estudantes a corrigirem suas respostas ou acrescentarem dicas dadas após as correções.

A alternativa correta é a letra d. O esperado é que estudante identifique que existe proporcionalidade na relação entre X e Y na tabela, reconhecendo a expressão algébrica correspondente $f(x) = 5x^2$. O estudante pode, também, efetuar alguns cálculos para validar a sua escolha, como $f(1) = 5(1)^2 = 5$, $f(2) = 5(2)^2 = 20$.

4. Determine o valor numérico da função afim $f(x) = 3x + 7$ ($f: R \to R$) para:

a. f(0)
b. f(1)
c. f(2)
d. f(3)
e. f(-1)
f. f(5)

Substituindo os valores de f(x) na função $f(x) = 3x + 7$

a) $f(0) = 3 \cdot 0 + 7 \quad f(0) = 7$
b) $f(1) = 3 \cdot 1 + 7 \quad f(1) = 10$
c) $f(2) = 3 \cdot 2 + 7 \quad f(2) = 13$
d) $f(3) = 3 \cdot 3 + 7 \quad f(3) = 16$
e) $f(-1) = 3 \cdot (-1) + 7 \quad f(-1) = 4$
f) $f(5) = 3 \cdot 5 + 7 \quad f(5) = 22$

5. Determine o valor numérico da função quadrática $f(x) = 2x^2 - 3$ ($f: R \to R$) para:

a. f(0)
b. f(1)
c. f(2)
d. f(-1)
e. f(-2)
f. f(3)

Substituindo os valores de f(x) na função $f(x) = 2x^2 - 3$

a) $f(0) = 2(0)^2 - 3 \quad f(0) = -3$
b) $f(1) = 2(1)^2 - 3 \quad f(1) = -1$
c) $f(2) = 2(2)^2 - 3 \quad f(2) = 5$
d) $f(-1) = 2(-1)^2 - 3 \quad f(3) = -1$
e) $f(-2) = 2(-2)^2 - 3 \quad f(-2) = 5$
f) $f(3) = 2(3)^2 - 3 \quad f(3) = 15$

AULAS 5 E 6: ESBOÇANDO GRÁFICOS DE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Professor, em função das medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, organize a turma, respeitando os protocolos de higiene e distanciamento seguro entre os estudantes.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Para o estudante: Caderno de Atividades impresso, papel quadriculado e régua.

Para o professor: Caderno de Atividades, canetões coloridos ou gizes coloridos.

INICIANDO

Caro professor, nessas aulas, retomaremos o conceito de função polinomial do 1º e 2º graus e suas respectivas representações numérica, algébrica e gráfica. Também, será explorado o esboço de gráficos de funções polinomial do 1º e 2º graus, seguido de análises das características numéricas, algébricas e gráficas das funções. Se a escola dispuser de sala de informática ou outros recursos tecnológicos, utilize um software livre para apresentar os gráficos das funções e efetuar estudos analíticos sobre os comportamentos das funções. O foco, nesse momento, é explorar os elementos que constituem os significados das funções afim e quadrática. A ideia de trabalhar as funções afim e quadrática juntas justifica-se pelo fato de serem habilidades já estudadas no 9º ano do Ensino Fundamental e, desta forma, o professor avaliará com mais consistência os significados desenvolvidos e aqueles que não, o professor poderá complementar e aprofundar. Após essa breve conversa introdutória, os estudantes poderão receber o Caderno do Estudante impresso e realizar as atividades propostas.

DESENVOLVENDO

Mantenha a sala organizada, solicite aos estudantes que analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. As atividades dessas aulas trabalham o conceito de

AULAS 5 E 6 - ESBOÇANDO GRÁFICOS DE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA

Objetivos das aulas:
- Compreender o significado de função polinomial do 1º e 2º graus;
- Identificar as representações numérica, algébrica e gráfica de funções polinomial do 1º e 2º graus;
- Esboçar gráfico de funções polinomial do 1º e 2º graus;
- Analisar as características numéricas, algébricas e gráficas das funções.

Estão programadas, para essas aulas, atividades para você, estudante, aprofundar o conceito de função, a partir do esboço de gráficos e o estudo do comportamento dos mesmos quando se muda um dos coeficientes numéricos. Talvez, alguns destes significados você já tenha desenvolvido. Se não, fique atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará no decorrer das aulas e, se alguma dúvida persistir, peça para o professor repetir a explicação ou resolução.

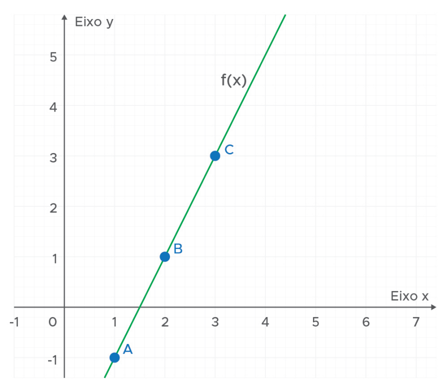
1. Uma função do tipo $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, definida de R em R, é chamada função polinomial do 1º grau ou função afim. A representação gráfica de uma função polinomial do 1º grau é uma reta. Para construí-la, utilizando lápis, papel e régua, basta atribuir valores reais para a variável x, obtendo-se os valores correspondentes de y e, a partir das coordenadas (x, y), no plano cartesiano, é possível esboçar o gráfico. Veja o exemplo a seguir:

Dada a função $f(x) = 2x - 3$.

x	f(x) = 2x - 3	y	P (x, y)
1	$f(x) = 2(1) - 3 \quad y = 2 - 3 \quad y = -1$	-1	A (1, -1)
2	$f(x) = 2(2) - 3 \quad y = 4 - 3 \quad y = 1$	1	B (2, 1)
3	$f(x) = 2(3) - 3 \quad y = 6 - 3 \quad y = 3$	3	C (3, 3)

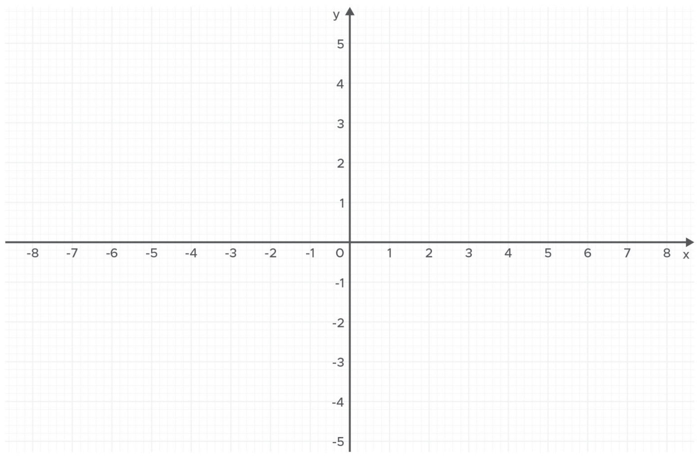
Fonte: elaborado para fins didáticos.

Representação gráfica da função $f(x) = 2x - 3$



Fonte: elaborado para fins didáticos.

2. A partir do exemplo dado na atividade 1, esboce o gráfico da função $f(x) = -x - 4$



Fonte: elaborado para fins didáticos.

x	f(x) = -x – 4	y	P (x, y)
0	$f(x) = -(0) - 4 \quad y = -4$	-4	A (0, -4)
-2	$f(x) = -(-2) - 4 \quad y = 2 - 4 \quad y = -2$	-2	B (-2, -2)
-4	$f(x) = -(-4) - 4 \quad y = 4 - 4 \quad y = 0$	0	C (-4, 0)

função polinomial do 1º e 2º graus, do esboço dos seus respectivos gráficos e aprofundamento sobre o desenvolvimento de uma expressão algébrica que represente uma função. Incentive os estudantes a calcularem os valores numéricos e construírem todos os gráficos propostos. Se for seguro, devido às medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, circule pela sala, enquanto eles efetuam os cálculos e resolvem as atividades. Observe os pontos de vista da turma sobre os elementos que constituem uma equação do 2º grau. Se necessário, oriente-a sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: "como vocês estão resolvendo?", "por que dessa forma?", "o que vocês acham se..." e outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

FINALIZANDO

Avalie as resoluções das atividades, identifique se houve dúvidas nas resoluções, analise bem as estratégias e as corrija, complementando com o que você, professor, achar pertinente. Professor, veja como seus alunos resolveram as atividades e analise, com eles, os diferentes registros que fizeram.

3. (AAP, 2016 – Adaptado) As variáveis x e y assumem valores conforme a tabela a seguir:

x	y
2	5
6	13
10	21
14	29
18	37

A relação entre x e y é dada pela expressão:

a. $f(x) = x + 2$
b. $f(x) = 2x + 1$
c. $f(x) = 2x$
d. $f(x) = x + 3$

A resposta esperada é $f(x) = 2x+1$, letra b. Ao verificar as alternativas, constata-se que: Nas alternativas a) e c), nenhum valor de x resulta em y. A alternativa d), atende apenas ao primeiro par ordenado. Para a alternativa b), y atende a todos os valores de x, segundo a equação $y = 2x + 1$

4. (AAP, 2019) Para construir o gráfico de uma função do segundo grau, Ana preencheu a seguinte tabela:

x	y
-2	8
-1	2
0	0
1	2
2	8
3	18
4	32
5	50

Analisando os resultados escritos na tabela, Ana percebeu que havia uma relação de proporcionalidade direta entre a grandeza x e seu quadrado. Qual é a função que representa a variação das grandezas estudadas por Ana?

a. $f(x) = 4x^2$
b. $f(x) = 2x^2$
c. $f(x) = 1\ 2\ x^2$
d. $f(x) = -2x^2$

Nesta questão, o que se quer determinar é a função que representa a variação das grandezas estudadas por Ana, mas, também, é pertinente explorarmos a lei de formação de uma função a partir do seu valor numérico.

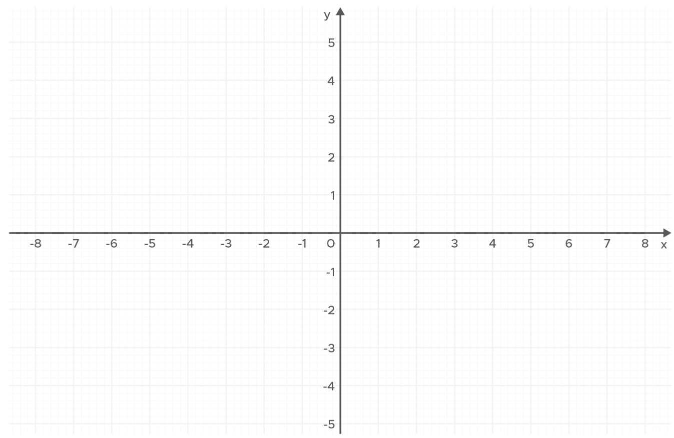
O enunciado do problema indica que há uma relação de proporcionalidade direta entre a grandeza x e o seu quadrado, o que pode ser verificado pelos resultados escritos na tabela. Isso nos leva a concluir que a função que representa a variação entre as grandezas x e y é do tipo $y = k \cdot x^2$, onde k é a constante de proporcionalidade que precisa ser calculada para a correta identificação da função. Como $k = y \cdot x^2$, para $x \neq 0$, podemos obter k a partir de qualquer linha da tabela, exceto a linha que envolve o valor 0 e, ainda, o valor de 0 deve ser sempre o mesmo:

$$k = \frac{8}{(-2)^2} = \frac{2}{(-1)^2} = \cdots = \frac{50}{(5)^2} = 2$$

Assim, concluímos que a função é $f(x) = 2x^2$. A alternativa correta é a letra b.

5. A função polinomial do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com os coeficientes numéricos a, b e c reais e $a \neq 0$, definida de R em R, é chamada de função polinomial do 2º grau ou função quadrática. O gráfico é uma curva, chamada de parábola. Os processos para esboçar o gráfico são os mesmos utilizados para construir o gráfico da função polinomial do 1º grau. No caso dos valores que você, estudante, vai atribuir para a variável x, uma dica é utilizar valores como -3, -2, -1, 0 e 1. Atribuindo valores crescentes negativos e valores crescentes positivos, você consegue esboçar a parábola com mais facilidade. Assim, utilizando os significados descritos anteriormente, esboce o gráfico das funções:

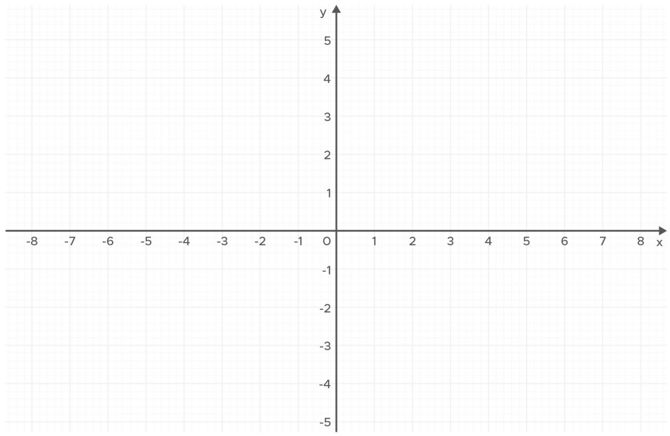
a. $f(x) = x^2 + 2x - 3$



Fonte: elaborado para fins didáticos.

x	f(x) = x² + 2x - 3	y	P (x, y)
-3	$f(x) = (-3)^2 + 2(-3) - 3 \quad y = 0$	0	A (-3, 0)
-2	$f(x) = (-2)^2 + 2(-2) - 3 \quad y = -3$	-3	B (-2, -3)
-1	$f(x) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 \quad y = -4$	-4	C (-1, -4)
0	$f(x) = (0)^2 + 2(0) - 3 \quad y = -3$	-3	D (0, -3)
1	$f(x) = (1)^2 + 2(1) - 3 \quad y = 0$	0	E (1, 0)

b. $f(x) = x^2 + 2x$



Fonte: elaborado para fins didáticos.

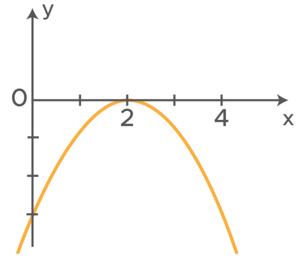
x	$f(x) = -x^2 + 2x$	y	P (x, y)
-3	$f(x) = -(-3)^2 + 2(-3)$ $y = -15$	-15	A (-3, -15)
-2	$f(x) = -(-2)^2 + 2(-2)$ $y = -8$	-8	B (-2, -8)
-1	$f(x) = -(-1)^2 + 2(-1)$ $y = -3$	-3	C (-1, -3)
0	$f(x) = -(0)^2 + 2(0)$ $y = 0$	0	D (0, 0)
1	$f(x) = -(1)^2 + 2(1)$ $y = 1$	1	E (1, 1)
2	$f(x) = -(2)^2 + 2(2)$ $y = 0$	0	F (2, 0)
3	$f(x) = -(3)^2 + 2(3)$ $y = -3$	-3	G (3, -3)

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

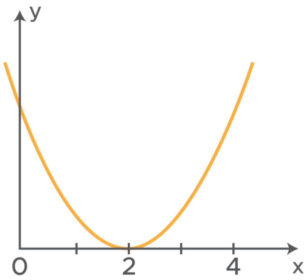
Professor, utilize essa função $f(x) = -x^2 + 2x$ e o gráfico e faça um estudo das características numéricas, algébricas e gráficas desta função. De acordo com a aprendizagem da turma, e se você achar pertinente, explore o significado de domínio, imagem, posições; caso fosse alterando o sinal do coeficiente a qual seria o comportamento do gráfico; explore os coeficientes b, c e o comportamento no gráfico quando se altera seus valores ou sinais. Se possível, utilize algum *software* e faça essas manipulações na tela para dar mais significado lúdico às análises.

6. (AAP, 2018 - Adaptado) A trajetória de uma pedra lançada ao ar é dada por $f(x) = -5x^2 + 20x$, com x e y em metros. O gráfico da trajetória da pedra é dado por:

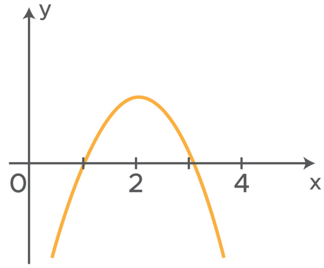
a.



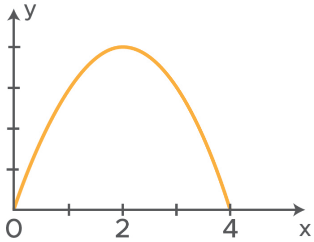
b.



c.



d.



A resposta correta é o gráfico da letra d. O aluno que optou por esta resposta mostra ter identificado as características do gráfico da função quadrática apresentada e pode ter resolvido a questão construindo uma tabela como:

x	0	1	2	3	4
y	0	15	20	15	0

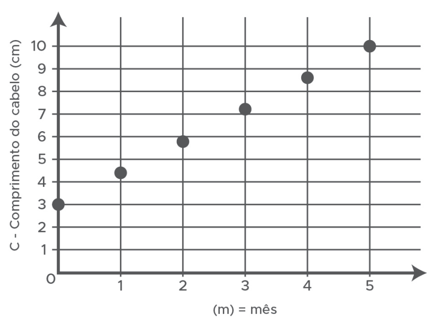
ou resolveu a equação $-5x^2 + 20x = 0$.

AULAS 7 E 8 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS UTILIZANDO O SIGNIFICADO DE FUNÇÕES

Objetivos das aulas:
- Interpretar situações-problema descritas por funções apresentadas, por meio dos seus diferentes registros de representações;
- Analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis;
- Resolver problemas envolvendo o significado de dependência entre duas grandezas.

Estão programadas, para essas aulas, atividades para você, estudante, aprofundar o conceito de função a partir do esboço de gráficos e o estudo do comportamento dos mesmos quando se muda um dos coeficientes numéricos. Talvez, alguns destes significados você já tenha desenvolvido. Se não, fique atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará no decorrer das aulas e, se alguma dúvida persistir, peça para o professor repetir a explicação ou resolução.

1. (AAP, 2017) O cabelo humano cresce num padrão contínuo de crescimento conhecido como ciclo de crescimento. Sabendo disso, Nair, em janeiro após ter cortado o cabelo, resolveu acompanhar o seu crescimento, e assim registrou todo mês em um gráfico, suas medidas.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

A representação algébrica do comprimento do cabelo de Nair registrada no gráfico pode ser expressa por

a. $C = 1{,}4 \cdot m$.
b. $C = 1{,}4 + 3 \cdot m$.
c. $C = 3 + 1{,}4 \cdot m$.
d. $C = 3 \cdot m$.

Em janeiro, Nair registrou o comprimento de 3 cm após o corte. Notou que seu cabelo cresceu 7 cm em 5 meses, logo 1,4 cm por mês. Assim a expressão algébrica que representa esse crescimento é $C = 3 + 1{,}4 \cdot m$. Portanto, c é a alternativa correta.

AULAS 7 E 8 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS UTILIZANDO O SIGNIFICADO DE FUNÇÕES

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Professor, em função das medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, organize a turma, respeitando os protocolos de higiene e distanciamento seguro entre os estudantes.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Para o estudante: Caderno de Atividades impresso.

Para o professor: Caderno de Atividades, canetões coloridos ou gizes coloridos.

INICIANDO

Professor, é recorrente, nas avaliações de larga escala, a dificuldade dos estudantes para aplicarem o conceito de funções na resolução de problemas. Os problemas que envolvem otimização da função quadrática são os que mais aparecem pontuados nos relatórios do SARESP como habilidade deficitária. Nesse sentido, essas últimas aulas tratarão da interpretação e da

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 1

Professor, neste problema e nos demais que seguem, veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros que fizeram.

resolução de problemas envolvendo os significados das funções afim e quadrática. Se achar necessário, retome alguns significados das funções quadráticas, por exemplo, o significado de valor máximo e mínimo da função quadrática. Após essa breve conversa introdutória, os estudantes poderão receber o Caderno do Estudante impresso e realizar as atividades propostas.

DESENVOLVENDO

Mantenha a sala organizada, solicite aos estudantes que analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. As atividades 1, 2, 3 e 4 abordam o significado da função afim, exploram a habilidade do estudante para interpretar o problema e apresentar uma estratégia de resolução. Nesses problemas, o esperado é que o estudante apresente uma lei de formação para, a partir daí, resolver o problema. Já os problemas 5 e 6 tratam da otimização da função quadrática. Para resolver o problema, o estudante deve apresentar estratégias, utilizando o significado do valor máximo ou mínimo da função. Se for seguro, devido às medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, circule pela sala, enquanto eles efetuam os cálculos e resolvem as atividades. Se necessário, oriente-os sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: "como vocês estão resolvendo?", "por que dessa forma?", "o que vocês acham se..." e outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

2. Um estacionamento cobra R$12,40 por duas horas e mais R$3,50 por cada hora que ultrapassar as duas primeiras horas.

a. Qual a expressão algébrica que representa a situação?

$y = 12,40 + 3,50x$

y = preço a pagar do estacionamento

12,40 = valor fixo por duas horas no estacionamento

x = tempo a mais.

b. Qual o custo por 6 horas de permanência nesse estacionamento?

$y = 12,40 + 3,50 .(6) \quad y = 12,40 + 21 \quad y = 33,40.$

O custo por 8 horas de permanência, nesse estacionamento, é de R$ 33,40.

3. Uma empresa de aplicativo de transporte utiliza as seguintes regras matemáticas para calcular o valor a ser cobrado do cliente ao final da corrida:

- R$ 8,90 pelo preço de partida (bandeira).
- R$ 1,90 por quilômetro rodado.

Christiana quer ir do seu apartamento até o seu local de trabalho. A distância do percurso é de 31 km. Qual é o valor que Christiana vai ter que pagar pelo serviço de transporte ao aplicativo?

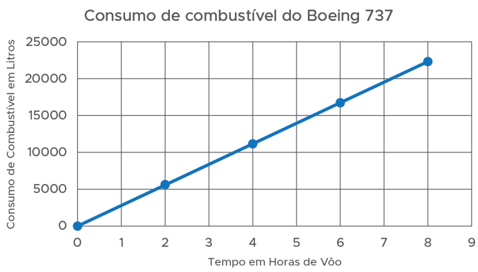
Espera-se que o estudante desenvolva a lei de formação da função $y = 8,90 + 1,90x$.
Em seguida, calcule o valor final da corrida $y = 8,90 + 1,90x \quad y = 8,90 + 1,90(31)$
$y = 8,90 + 58,90 \quad y = 67,80$

Logo, Christiana vai ter que pagar pelo serviço de transporte ao aplicativo R$ 67,80.

FINALIZANDO

Avalie as resoluções das atividades, identifique se houve dúvidas nas resoluções, analise bem as estratégias e as corrija, complementando com o que você, professor, achar pertinente. Professor, veja como seus alunos resolveram as atividades e analise, com eles, os diferentes registros que fizeram. É importante orientar os estudantes a corrigirem suas respostas ou acrescentarem dicas dadas após as correções.

4. (AAP, 2019 – Adaptado) O meio de transporte aéreo tem aumentado a cada ano e, nas linhas de transporte aéreo, o avião mais utilizado é o Boeing 737 que, desde seu primeiro voo em 9 de abril de 1967, já transportou mais de 7 bilhões de pessoas. Essa aeronave possui motores movidos à querosene de aviação que consomem 2800 litros de combustível por hora de voo. Observe o gráfico do consumo de combustível de um Boeing 737 durante o voo:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

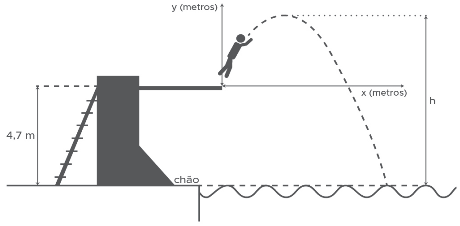
Considerando o preço do litro do querosene a R$ 3,30, qual o valor gasto, em combustível, em um voo com duração de 3 horas.

Espera-se que o estudante desenvolva a lei de formação da função f(x)= 2.800(x), que representa o consumo e valor a ser pago por uma hora de voo.

Em seguida, calcule f(x)= 2.800x f(x)= 2.800(3,30) f(x)= 9.240. Como o problema quer saber o valor gasto em combustível em um voo com duração de 3 horas, multiplica-se 9.240 × 3 = 27.720.

Logo, o valor gasto em combustível em um voo com duração de 3 horas é de R$ 27.720,00.

5. (SARESP 2019 - adaptado) Um atleta saltou de um trampolim posicionado a uma altura de 4,7 metros em relação ao chão. Esse salto descreveu uma trajetória parabólica, como apresentado no desenho abaixo.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

A equação que descreve a trajetória desse salto em relação ao sistema de coordenadas apresentado nessa figura é dada por $y = -0{,}5x^2 + 2{,}5x$.

A altura máxima h, aproximada, que o atleta alcançou em relação ao chão foi

$y = -0{,}5x^2 + 2{,}5x$

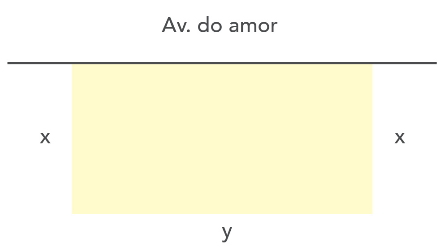
Observando o gráfico, nos interessa a altura do eixo x ao vértice da parábola. Nesse caso, podemos achar o valor do y_v a partir da fórmula

$$y_v = \frac{-\Delta}{4\,.\,(a)} \rightarrow \frac{-\,(2{,}5)^2 - 4(-0{,}5)(0)}{4\,.\,(-0{,}5)} \rightarrow \frac{-6{,}25}{-2} \rightarrow$$

$y_v = 3{,}125$. Somando $3{,}125 + 4{,}7 = 7{,}825$.

A altura máxima h aproximada que o atleta alcançou em relação ao chão foi 7,8 m.

6. A professora Aline possui um terreno no bairro Morro Doce, em São Paulo, e quer construir um estacionamento. A frente do terreno já está murada. Aline vai construir apenas três muros e o total da área do terreno é 1. 500 m². Aline fez um orçamento e possui recursos para construir apenas 100 m de muro, conforme mostra a figura.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Qual será a área máxima do terreno que a professora Aline vai conseguir cercar?

Calculando o perímetro do terreno

$x + x + y = 100m \quad y = -2x + 100$

Calculando a área do terreno

$A = (-2x + 100)x \quad A = -2x^2 + 100x$ Função do 2º grau.

Como se trata do valor máximo do terreno, nesse caso, devemos recorrer à fórmula

$$x_v = \frac{-b}{2\,.(a)} \rightarrow x_v = \frac{-(100)}{2\,.(-2)} \rightarrow x_v = \frac{-100}{-4} \rightarrow x_v = 25 \rightarrow x = 25$$

Retornamos à expressão algébrica do perímetro $y = -2x + 100$ e substituímos $x = 25$ para encontrar o valor de y

$y = -2(25) + 100 \quad y = 50$

Temos que $x = 25$ e $y = 50$. Logo, $A = 25 \times 50 \quad A_{\text{Máxima do terreno}} = 1.250m^2$.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

1ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

ANOTAÇÕES

1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO – SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

OLÁ, PROFESSOR! OLÁ, PROFESSORA!

Os estudantes deverão chegar ao final desta Sequência de Atividades com habilidades desenvolvidas para ler e interpretar gráficos e tabelas desenvolvidas a partir de uma pesquisa amostral, assim como efetuar cálculos das medidas de tendência central. Sendo assim, o conjunto de atividades dessa sequência aprofundarão os objetivos de aprendizagem da habilidade em questão. Isso deve-se ao fato de considerarmos que no ano anterior os estudantes já tenham estudado conceitos básicos sobre Estatística. Se não estudaram, as atividades dessa sequência também oferecem subsídios didáticos para que você, professor, possa trabalhar todos os conceitos introdutórios sobre Estatística. Neste sentido, o estudante deve, ao final dessa Sequência, recuperar e potencializar os significados sobre pesquisa, população, amostra, médias aritmética e ponderada, mediana e moda para resolverem problemas dentro de contextos da própria Matemática, em áreas interligadas a ela e no cotidiano.

HABILIDADE: (EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª / 90 min	LENDO E INTERPRETANDO GRÁFICOS
3ª e 4ª / 90 min	ORGANIZANDO DADOS DE UMA PESQUISA AMOSTRAL EM TABELAS
5ª e 6ª / 90 min	REPRESENTANDO OS DADOS DE UMA PESQUISA POR MEIO DE GRÁFICOS.
7ª e 8ª / 90 min	CALCULANDO MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Professor, para ajudá-lo nessa ação, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenal acerca das Sequências de Atividades. Tais formações acontecerão nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPC). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

ANOTAÇÕES

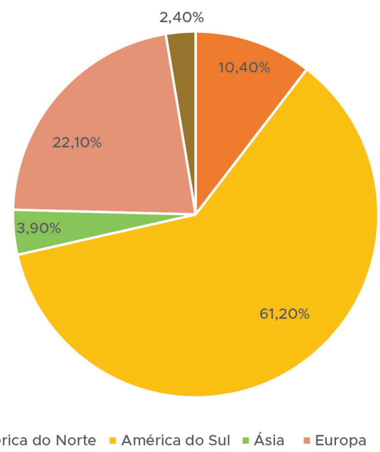
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

AULAS 1 E 2 - LENDO E INTERPRETANDO GRÁFICOS

Objetivos da aula:
- Ler e interpretar diferentes tipos de gráficos e tabelas;
- Perceber a importância de pesquisas estatísticas envolvendo situações reais.

Caro estudante, para o desenvolvimento das atividades a seguir, será necessário relembrar alguns significados que talvez você já tenha estudado no ano anterior: leitura e interpretação de gráficos e tabelas que representam o resultado de uma pesquisa amostral. Sendo assim, fique atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará, no decorrer das aulas, para superar possíveis dúvidas e prosseguir com os estudos sobre tratamento da informação.

1. O gráfico, a seguir, representa a chegada de turistas no Brasil, por continente, em 2018.



Fonte: IBGE. Anuário estatístico de turismo 2019. Ano base 2018. Brasília, DF: Ministério do Turismo. Anuário estatístico 2019, v. 79, p. 323, 2019. Ano base 2018. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/20/aeb_2019.pdf>. Acesso em: 8 de janeiro 2021.

Quais são os dois continentes dos quais o Brasil recebe mais turistas?

O continente da América do Sul, com 61,20% e o continente Europeu, com 22,1%.

AULAS 1 E 2 - LENDO E INTERPRETANDO GRÁFICOS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Professor, em função das medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, organize a turma, respeitando os protocolos de higiene e distanciamento seguro entre os estudantes.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Para os estudantes: Caderno de Atividades impresso.

Para o professor: Caderno de Atividades impresso, pincel piloto, lápis para colorir ou gizes coloridos.

INICIANDO

Professor, para as Aulas 1 e 2 dessa Sequência de Atividades, primeiramente, converse com os estudantes no sentido de diagnosticar o que eles reconhecem ou lembram sobre tratamento da informação, especificamente sobre a leitura de gráficos e tabelas que representem situações do cotidiano. A partir do diagnóstico oral, utilizando a lousa, apresente uma situação-problema que contenha um gráfico e mostre, para os estudantes, a importância da leitura das informações postas horizontalmente e verticalmente nos gráficos, assim como a leitura das legendas. No decorrer dessa Sequência de Atividades, você terá atividades nas quais os estudantes colocarão em prática as dicas dadas por você no início das aulas. Após essa breve conversa introdutória, os estudantes poderão receber o Caderno do Estudante impresso e realizar as atividades propostas.

DESENVOLVENDO

Nas Atividades 1 e 3, o professor precisa explorar a leitura e interpretação de gráficos. É oportuno falar dos tipos de gráficos mais comuns utilizados para representar informações: gráfico de barras, setor, linhas, histograma, dentre outros. As Atividades 2 e 4 tratam da organização de dados em tabelas. O objetivo é demonstrar, aos estudantes, que as tabelas de dupla entrada são um recurso muito utilizado na estatística para organizar dados de uma pesquisa amostral. Se for seguro, devido às medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, circule pela sala, enquanto eles discutem e resolvem as atividades. Observe os pontos de vistas da turma sobre as interpretações dos gráficos e tabelas e, se necessário, oriente-a sobre possíveis dúvidas que surgirem. Mantenha a sala organizada, solicitando aos estudantes que analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

2. De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o Produto Interno Bruto (PIB) é a soma de todos os bens e serviços finais (riqueza, demanda e renda) produzidos por um país, estado ou cidade, geralmente em um ano. Todos os países calculam o seu PIB nas suas respectivas moedas. O crescimento do PIB está relacionado com o crescimento da economia. Quanto maior o PIB, maior é a renda de um determinado lugar, portanto, o PIB está associado, também, à qualidade de vida. E se uma economia cresce, cresce também a oferta de trabalho, visto que houve aumento da demanda a ser atendida. O PIB do Brasil em 2019, por exemplo, foi de R$ 7,4 trilhões. No último trimestre divulgado (3º trimestre de 2020), o valor foi de R$ 1.891,7 bilhões. Veja, abaixo, uma tabela com o PIB das Unidades da Federação brasileiras:

Unidades da Federação	PIB em 2018 (1000000 R$)
Acre	15.331
Alagoas	54.413
Amapá	16.795
Amazonas	100.109
Bahia	286.240
Ceará	155.904
Distrito Federal	254.817
Espírito Santo	137.020
Goiás	195.682
Maranhão	98.179
Mato Grosso	137.443
Mato Grosso do Sul	106.969
Minas Gerais	614.876
Paraná	440.029
Paraíba	64.374
Pará	161.350
Pernambuco	186.352
Piauí	50.378
Rio de Janeiro	758.859
Rio Grande do Norte	66.970
Rio Grande do Sul	457.294
Rondônia	44.914
Roraima	13.370
Santa Catarina	298.227
Sergipe	42.018
São Paulo	2.210.562
Tocantins	35.666

Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Contas Nacionais. Ano base 2018. Brasília, DF: Ministério do Turismo. Anuário Estatístico 2019. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/explica/pib.php>. Acesso em: 8 de janeiro de 2021.

FINALIZANDO

Avalie as resoluções das atividades, identifique se houve dúvidas nas respostas, analise bem as respostas dos estudantes e as corrija, complementando com o que você, professor, achar pertinente. Veja como seus estudantes resolveram os problemas e os exercícios e analise, com eles, os diferentes registros que fizeram. É importante orientar os estudantes a corrigirem suas respostas ou acrescentarem informações dadas por você durante as correções.

A partir dos dados explícitos na tabela, responda:

a. Agrupe por região, e em ordem crescente, o PIB de cada estado. Para facilitar a organização dos dados, tome como exemplo a tabela a seguir:

Região Sul	
Nome do Estado	PIB
Rio Grande do Sul	457.294
Paraná	440.029
Santa Catarina	298.227
	1.195.550

Região Nordeste	
Nome do Estado	PIB
Bahia	286.240
Pernambuco	186.352
Ceará	155.904
Maranhão	98.179
Rio Grande do Norte	66.970
Paraíba	64.374
Alagoas	54.413
Piauí	50.378
Sergipe	42.018
	1.004.828

Região Norte	
Nome do Estado	PIB
Pará	161.350
Amazonas	100.109
Rondônia	44.914
Tocantins	35.666
Amapá	16.795
Acre	15.331
Roraima	13.370
	387.535

Região Sudeste	
Nome do Estado	PIB
São Paulo	2.210.562
Rio de Janeiro	758.859
Minas Gerais	614.876
Espírito Santo	137.020
	3.721.317

Região Centro-Oeste	
Nome do Estado	PIB
Distrito Federal	254.817
Goiás	195.682
Mato Grosso	137.443
Mato Grosso do Sul	106.969
	694.911

b. Qual é o Estado que possui o maior PIB? E o menor?

O Estado que possui o maior PIB é o de São Paulo.
O Estado que possui o menor PIB é o de Roraima.

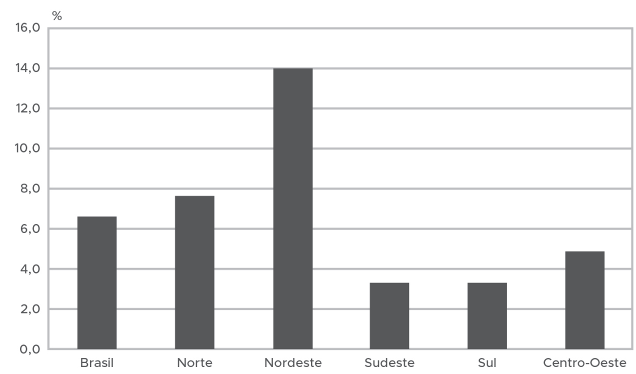
c. Qual é a região brasileira que possui o maior PIB? E o menor?

A região brasileira que possui o maior PIB é a Sudeste.
A região brasileira que possui o menor PIB é a Norte.

d. O Estado que tem o maior PIB, você concorda que é o mais rico da nação? Justifique sua resposta.

Professor, chame a atenção, neste ponto, para discutir os possíveis pontos de vista dos estudantes sobre este item e questão. É importante ouvir a todos e, quando necessário, complementar ou reformular os pontos de vistas dos estudantes que você, professor, não achar coerentes.

3. O gráfico a seguir é um histograma ou gráfico de coluna e representa a taxa de analfabetismo das pessoas de 15 anos de idade ou mais, segundo as regiões do Brasil, no segundo trimestre de 2019.



Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua. Anuário estatístico 2019 v. 79, p. 122, 2019. Ano base 2018. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/20/aeb_2019.pdf>. Acesso em: 8 de janeiro de 2021.

a. Considerando o índice de pessoas de 15 anos de idade ou mais, qual é a região que possui a maior porcentagem de pessoas analfabetas?

Região Nordeste.

b. Considerando o índice de pessoas de 15 anos idade ou mais, qual é a região do Brasil que possui, aproximadamente, 5% de analfabetos?

Região Centro-Oeste.

c. Considerando o índice de pessoas de 15 anos de idade ou mais, qual é a porcentagem aproximada de analfabetos das regiões Sudeste e Sul?

Aproximadamente 3,8%.

d. Como você interpreta esse gráfico em relação ao analfabetismo no Brasil, das pessoas de 15 anos de idade ou mais? Ou seja, fazendo uma comparação entre as regiões, justifique, com suas palavras, explicitando os prováveis motivos destas desigualdades.

Professor, chame a atenção, neste ponto, para discutir os possíveis pontos de vista dos estudantes sobre este item e questão. É importante ouvir a todos e, quando necessário, complementar ou reformular os pontos de vistas dos estudantes que você, professor, não achar coerentes.

4. **Natália trabalha na secretaria de uma academia de dança e, a pedido da gerência, fez o levantamento da quantidade de estudantes matriculados em cada modalidade e turno oferecidos. Os resultados desse levantamento estão expressos na tabela abaixo:**

Quantidade de Estudantes			
Modalidade	Manhã	Tarde	Noite
Ballet	45	50	70
Dança de rua	15	15	75
Dança de salão	12	16	120
Sapateado	38	35	80
Jazz	39	40	50

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

AULAS 3 E 4 - ORGANIZANDO DADOS DE UMA PESQUISA AMOSTRAL EM TABELAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Professor, em função das medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, organize a turma, respeitando os protocolos de higiene e distanciamento seguro entre os estudantes.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Para o estudante: Caderno de Atividades impresso.

Para o professor: Caderno de Atividades, canetões coloridos ou gizes coloridos.

INICIANDO

Caro professor, nessas aulas, será trabalhado o significado de pesquisa amostral. Portanto, as atividades apresentadas para as Aulas 3 e 4 exploram a definição de população, amostra, variável qualitativa e quantitativa, frequência absoluta, frequência relativa, amplitude e, principalmente, a partir deste universo estatístico, trabalhar, de maneira prática, a organização de dados numa tabela e gráfico. Assim, utilizando a lousa, apresente uma situação-problema na qual seja possível explorar e apresentar, para os estudantes, o que é população, amostra, variável qualitativa e quantitativa, frequência absoluta, frequência relativa e agrupamentos de dados. Após essa breve conversa introdutória, os estudantes poderão receber o Caderno do Estudante impresso e realizar as atividades propostas.

DESENVOLVENDO

O objetivo da Atividade 1 é apresentar, para o estudante, uma situação de aprendizagem envolvendo planejamento de uma pesquisa utilizando amostras. As demais atividades trabalham a definição de população, amostra, variável qualitativa e quantitativa, frequência absoluta, frequência relativa e amplitude. Se for seguro, devido às medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, circule pela sala enquanto eles analisam os dados, verificam os cálculos e observam a or-

a. Qual é o turno que tem maior número de estudantes matriculados?

O turno da noite, com 395 estudantes matriculados.

b. Nos turnos da manhã e tarde qual é a modalidade de dança que tem maior número de estudantes matriculados?

Ballet, com 95 estudantes matriculados.

c. Quais são as duas modalidades de dança, dessa academia, que possuem as maiores quantidades de estudantes matriculados no total?

Ballet, com 165 estudantes matriculados e sapateado, com 153 estudantes matriculados.

AULAS 3 E 4 - ORGANIZANDO DADOS DE UMA PESQUISA AMOSTRAL EM TABELAS

Objetivos da aula:
- Compreender o significado de população e amostra em uma pesquisa estatística;
- Planejar pesquisa utilizando amostra.

Estão programadas, para estas aulas, atividades para você, estudante, aprofundar a definição de população, amostra, variável qualitativa e quantitativa, frequência absoluta, frequência relativa, amplitude e, principalmente, a partir deste universo estatístico, trabalhar, de maneira prática, a organização de dados numa tabela e gráfico. Talvez, alguns destes significados você já tenha desenvolvido. Se não, fique atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará ao decorrer das aulas e, se alguma dúvida persistir, peça para o professor repetir a explicação ou resolução.

1. A escola Canto Feliz, para cada dia da semana, serve um tipo de proteína no almoço:

Segunda-feira: Frango

Terça-feira: Omelete

Quarta-feira: Carne bovina

Quinta-feira: Peixe

Sexta-feira: Carne moída

A diretora da escola percebeu que os estudantes não gostam igualmente das proteínas e que, em alguns dias da semana, a sobra de proteínas é maior. Para evitar desperdícios, a diretora da escola encomendou uma pesquisa ao professor de Matemática para que, assim, ela pudesse reduzir o preparo dessas proteínas e evitar desperdícios. A escola possui 830 estudantes e o professor realizou a pesquisa com uma amostra de 30 estudantes. O quadro, a seguir, apresenta o resultado da pesquisa.

Tipo de proteínas	Frequência Absoluta (FA)	Fração e decimal	FR (%)
Frango	5	$\frac{5}{30} = 0{,}17$	17%
Omelete	4	$\frac{4}{30} = 0{,}13$	13%
Carne bovina	8	$\frac{8}{30} = 0{,}27$	27%
Peixe	6	$\frac{6}{30} = 0{,}20$	20%
Carne moída	7	$\frac{7}{30} = 0{,}23$	23%
total	30	1,00	100%

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

De acordo com os dados da pesquisa, responda os itens a seguir:

a. Qual foi a população pesquisada?

A população foi de 830 estudantes.

b. A pesquisa foi realizada com toda a população ou com uma amostra?

Apenas com uma amostra de 30 estudantes.

c. Qual foi a variável dessa pesquisa?

A variável foi a quantidade de estudantes que indicou sua preferência.

d. Qual a proteína que os estudantes consomem mais no almoço?

A proteína que os estudantes mais consomem no almoço é a carne bovina.

e. Qual a proteína que os estudantes consomem menos no almoço?

A proteína que os estudantes menos consomem é a Omelete.

ganização das tabelas. Mantenha a sala organizada, solicitando aos estudantes que analisem e resolvam as atividades das respectivas aulas. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

FINALIZANDO

Avalie as resoluções das atividades, a organização das tabelas, identifique se houve dúvidas nas resoluções, analise bem as estratégias e as corrija, complementando com o que você, professor, achar pertinente. Veja como seus estudantes resolveram as atividades e analise, com eles, os diferentes registros que fizeram.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 2

Professor, chame a atenção, neste ponto, para discutir com os estudantes sobre amplitude total, número de intervalos e amplitude relativa. Deixe claro, para os estudantes, que na pesquisa amostral é comum utilizar técnica para agrupar dados.

2. A professora de Educação Física resolveu pesquisar o peso dos estudantes do 6° Ano do Ensino Fundamental para desenvolver um projeto sobre alimentação saudável. O quadro, a seguir mostra, os dados e resultados da pesquisa.

Peso (kg)	Frequência Absoluta (FA)	Fração e decimal	FR (%)
35 ⊢ 38	20	$\frac{20}{67} \cong 0{,}30$	30%
38 ⊢ 41	18	$\frac{18}{67} \cong 0{,}27$	27%
41 ⊢ 44	15	$\frac{15}{67} \cong 0{,}22$	22%
44 ⊢ 47	8	$\frac{8}{67} \cong 0{,}12$	12%
47 ⊢ 50	6	$\frac{6}{67} \cong 0{,}09$	9%
total	67	1,00	100%

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

De acordo com os dados da pesquisa, responda os itens a seguir:

a. Qual foi a população pesquisada?

A população foi os 67 estudantes do 6º ano.

b. A pesquisa foi realizada com toda a população ou com uma amostra?

A pesquisa foi realizada com toda a população de estudantes dos 6º anos.

c. Qual foi a variável dessa pesquisa?

A variável foi o peso dos estudantes, ou seja, quantitativa.

d. Qual a sua interpretação sobre a representação do intervalo numérico 35 ⊢ 38 que a professora de Educação Física utilizou?

A professora organizou os dados de modo que não ficasse um quadro muito grande. Ou seja, ela construiu uma tabela de frequência em que os dados estão agrupados em classes (ou intervalos) de valores. Significa que os estudantes que pesam 35 quilos e inferior a 38 quilos estão agrupados nesse intervalo 35 ⊢ 38, que, na pesquisa da professora, significa que são 20 estudantes que podem possuir esses pesos.

e. Qual a sua interpretação em relação à maior frequência relativa?

De acordo com a tabela, a maior frequência relativa é 30%, representado no intervalo 35 ⊢ 38

3. (DANTE, 2016 - Adaptado) Em uma escola com 5 classes de 1ª série do Ensino Médio, cada uma com 45 estudantes, foi feita uma pesquisa para traçar o perfil da 1ª série. Para tanto, foram selecionados 5 estudantes de cada classe, que responderam a um questionário.

Nome	Sexo	Idade (anos/meses)	Altura (cm)	Peso (kg)	Número de irmãos	Cor do cabelo	Hobby	Número do sapato	Manequim	Desempenho em Matemática
Antônio	M	15 a 4 m	156	49	2	castanho	esporte	36	38	ótimo
Artur	M	14 a 7m	166	48	0	castanho	esporte	39	38	bom
Áurea	F	15 a 2 m	165	66	1	castanho	música	36	42	insuficiente
Bruno	M	14 a 8 m	175	63	0	castanho	patinação	40	42	regular
Carla	F	14 a 5 m	165	57	2	loiro	música	36	40	regular
Cláudia	F	15 a 3 m	164	50	2	loiro	dança	36	38	bom
Domingos	M	14 a 6 m	163	51	1	castanho	esporte	36	38	bom
Edite	F	14 a 7 m	160	60	3	castanho	música	36	40	ótimo
Flávia	F	14 a 7 m	175	65	1	castanho	esporte	37	42	bom
Fúlvio	M	14 a 5 m	150	38	1	ruivo	esporte	34	36	insuficiente
Geraldo	M	15 a 11 m	146	38	0	castanho	aeromodelismo	34	36	regular
José	M	14 a 10 m	165	52	1	castanho	dança	38	38	regular
Laura	F	14 a 0 m	165	53	2	castanho	dança	36	38	bom
Lúcia	F	14 a 8 m	167	65	2	castanho	música	37	42	bom
Mário	M	15 a 4 m	165	50	3	loiro	patinação	36	38	insuficiente
Mauro	M	14 a 11 m	163	54	4	castanho	esporte	38	40	ótimo
Nívea	F	15 a 2 m	164	63	1	loiro	esporte	38	42	bom
Orlando	M	14 a 8 m	159	64	2	castanho	música	37	42	regular
Patrícia	F	15 a 1 m	158	43	1	loiro	dança	36	36	insuficiente
Paula	F	14 a 11 m	163	53	1	castanho	dança	36	38	bom
Renata	F	14 a 3 m	162	52	1	castanho	dança	36	38	ótimo
Roberto	M	14 a 2 m	167	53	0	castanho	esporte	40	38	ótimo
Sandra	F	14 a 10 m	167	58	1	loiro	dança	40	40	ótimo
Teresa	F	15 a 9 m	155	49	0	castanho	patinação	35	36	ótimo
Vânia	F	15 a 2 m	152	41	3	castanho	música	34	36	bom

AULAS 5 E 6 - REPRESENTANDO OS DADOS DE UMA PESQUISA POR MEIO DE GRÁFICOS.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Professor, em função das medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, organize a turma, respeitando os protocolos de higiene e distanciamento seguro entre os estudantes.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Para os estudantes: Caderno de Atividades impresso, calculadora, régua e transferidor.

Para o professor: Caderno de Atividades, canetões coloridos ou gizes coloridos.

INICIANDO

Nestas aulas, chamamos a atenção para que os estudantes explorem softwares gratuitos ou aplicativos para organizarem dados de uma pesquisa e construir gráficos. Recomendamos que, se a escola dispuser de sala de informática ou outros recursos tecnológicos, utilize-os nessas aulas. Cabe a você, professor, verificar as ferramentas tecnológicas disponíveis na escola e, se não possuir, todas as atividades podem ser desenvolvidas sem o uso da tecnologia.

DESENVOLVENDO

As atividades a seguir são uma continuidade dos significados de população, amostra e cálculos das frequências. Assim, a Atividade 1 é um recorte de uma atividade já realizada nas Aulas 3 e 4 e o objetivo é incentivar os estudantes a adotarem algum software ou aplicativo para organizarem dados e esboçarem um gráfico de setor para representar a pesquisa. As demais atividades seguem trabalhando o significado de gráficos de setor e histograma, de modo que os resultados das pesquisas sejam representados graficamente, com ou sem o uso de recursos de aplicativos eletrônicos.

FINALIZANDO

Avalie as construções gráficas dos estudantes, identifique se houve dúvidas no desenvolvimento e complemente com o que você, professor, achar pertinente.

A partir dos dados explícitos no quadro acima, responda:

a. Qual foi a população-alvo da pesquisa?

A população-alvo da pesquisa foi de 225 estudantes, da 1ª série Ensino Médio.

b. A pesquisa foi desenvolvida com toda a população ou com uma amostra?

Com uma amostra de 25 estudantes.

c. Que tipo de variável é "cor do cabelo"?

Qualitativa nominal.

d. Que tipo de variável é "número de irmãos"?

Quantitativa discreta.

e. Que tipo de variável é "desempenho em Matemática"?

Quantitativa ordinal.

f. Que tipo de variável é "altura"?

Quantitativa contínua.

AULAS 5 E 6 - REPRESENTANDO OS DADOS DE UMA PESQUISA POR MEIO DE GRÁFICOS

Objetivos da aula:
- Construir gráficos para representar determinados conjuntos de dados;
- Elaborar instrumentos de coleta de dados, utilizando planilhas eletrônicas;
- Apresentar os resultados de pesquisas representadas por meio de gráficos, com ou sem o uso de recursos de aplicativos eletrônicos.

Caros estudantes, nestas aulas vocês podem explorar softwares gratuitos ou aplicativos para organizarem dados de uma pesquisa e construir gráficos. Não esqueçam de salvar suas produções para apresentar ao professor.

1. A seguir, a tabela representa os dados da pesquisa realizada com os estudantes da escola Canto Feliz (Atividade 1 das Aulas 3 e 4), sobre a preferência da proteína no horário de almoço.

Tipo de proteínas	Frequência Absoluta (FA)	Fração e decimal	FR (%)
Frango	5	$\frac{5}{30} \cong 0{,}17$	$0{,}17 \times 100 = 17\%$
Omelete	4	$\frac{4}{30} \cong 0{,}13$	$0{,}13 \times 100 = 13\%$
Carne bovina	8	$\frac{8}{30} \cong 0{,}27$	$0{,}27 \times 100 = 27\%$
Peixe	6	$\frac{6}{30} \cong 0{,}20$	$0{,}20 \times 100 = 20\%$
Carne moída	7	$\frac{7}{30} \cong 0{,}23$	$0{,}23 \times 100 = 23\%$
total	30	1,00	100%

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

A partir dos dados apresentados na tabela, represente, por meio de um gráfico de setor, os dados dessa pesquisa:

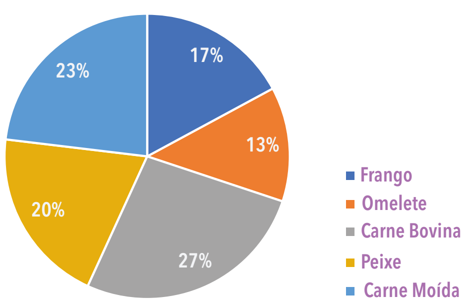
Dica: Caro estudante, você pode construir o gráfico de setor com o auxílio de um transferidor e compasso. Para isso, basta utilizar o significado de proporção, convertendo a frequência relativa em graus. Veja como:

Vamos converter a FR = 17%, em graus, fazendo:

$$\frac{100}{17} = \frac{360}{x} \longrightarrow 100x = 6.120 \longrightarrow x = \frac{6\,120}{100} \longrightarrow x = 61{,}2°.$$

Após efetuar as demais conversões, verifique se o valor da soma de todos os resultados será igual a 360°. A partir dos resultados em graus, utilize o transferidor para esboçar o gráfico de setor.

O gráfico esperado é:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, sugira que seus estudantes utilizem aplicativos ou as ferramentas do Word para organizarem os dados em planilhas e esboçarem os gráficos propostos para essas aulas. Indique recursos gratuitos e de fácil manipulação para os estudantes. O ideal é que inicie as aulas, apresentando possibilidades para os estudantes esboçarem os gráficos utilizando régua, transferidor, compasso, lápis e papel. Nossa sugestão é que você, professor, priorize a construção dos gráficos manualmente e ofereça opções para que os estudantes respondam às atividades propostas.

2. (DANTE, 2016 - Adaptado) Dada as tabelas a seguir, preencha-as utilizando os dados da pesquisa da Atividade 3 apresentada nas Aulas 3 e 4 e, em seguida, esboce um gráfico de colunas (Histograma) e outro de setor para representar a pesquisa.

a. Frequência da variável "número de irmãos".

Nº de Irmãos	Frequência acumulada	Fração e decimal	FR (%)
0	5	$\frac{5}{25} = 0{,}20$	20%
1	10	$\frac{10}{25} = 0{,}40$	40%
2	6	$\frac{6}{25} = 0{,}24$	24%
3	3	$\frac{3}{25} = 0{,}12$	12%
4	1	$\frac{1}{25} = 0{,}04$	4%
total	25	1,00	100%

Gráfico de setor

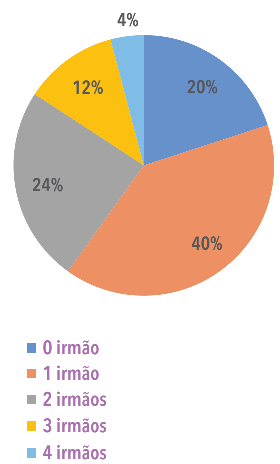
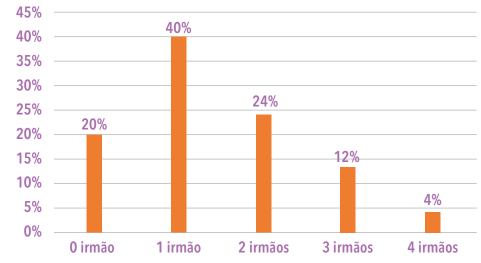


Gráfico de Colunas (Histograma)



Fonte: elaborado para fins didáticos.

b. Frequência da variável "peso".

Grupo	Peso (kg)	Frequência Absoluta (FA)	Fração e decimal	FR (%)
A	38 ⊢ 44	4	$\frac{4}{25} = 0{,}16$	16%
B	44 ⊢ 50	3	$\frac{3}{25} = 0{,}12$	12%
C	50 ⊢ 56	9	$\frac{9}{25} = 0{,}36$	36%
D	56 ⊢ 62	3	$\frac{3}{25} = 0{,}12$	12%
E	62 ⊢ 68	6	$\frac{6}{25} = 0{,}24$	24%
total		25	1,00	100%

Gráfico de setor

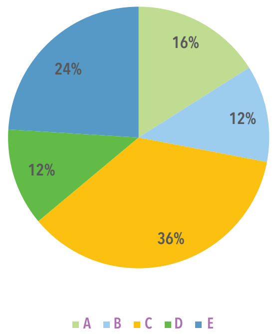
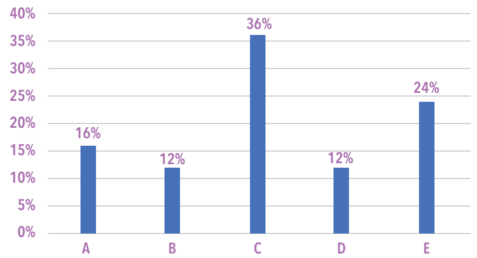


Gráfico de Colunas (Histograma)



Fonte: elaborado para fins didáticos.

AULAS 7 E 8 - CALCULANDO MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Professor, em função das medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, organize a turma respeitando os protocolos de higiene e distanciamento seguro entre os estudantes.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Para o estudante: Caderno de Atividades impresso e calculadora simples.

Para o professor: Caderno de Atividades, canetões coloridos ou gizes coloridos.

INICIANDO

Para estas aulas, foram planejadas atividades para aprofundar os significados das medidas de tendências central. As atividades exploram a definição de média aritmética, média ponderada, moda e mediana. A partir de um exemplo anotado na lousa, pergunte aos estudantes o que eles recordam sobre média aritmética, média ponderada, moda e mediana. Complemente os significados, já desenvolvidos pelos estudantes, com o que você, professor, achar necessário. Em seguida, apresente as fórmulas e conceitos dos objetos estatísticos em questão. Após essa breve conversa introdutória, os estudantes poderão receber o Caderno do Estudante impresso e realizar as atividades propostas.

AULAS 7 E 8 - CALCULANDO MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Objetivos da aula:
- Calcular as medidas de tendência central de um conjunto de dados;
- Resolver situações-problema, utilizando a definição de média aritmética, mediana, moda e medida de tendência central.

Estão programadas, para estas aulas, atividades para você, estudante, aprofundar a definição de média aritmética, média ponderada, moda e mediana. Talvez, algumas destas definições você já tenha desenvolvido. Se não, fique atento aos comentários e possíveis complementos que o professor fará ao decorrer das aulas e, se alguma dúvida persistir, peça para o professor repetir a explicação ou resolução.

1. Caro estudante, você percebeu, nas aulas anteriores, que na Estatística trabalhamos com diversas informações. Estas, normalmente, são apresentadas por meio de tabelas e gráficos. Você percebeu, também, que de acordo com o tamanho da população ou amostra, utilizamos diversos números para contar e representar os dados. Sendo assim, em alguns casos, dentre o universo de informações, podemos retirar valores que representem todo o conjunto. Esses valores são denominados Medidas de Tendência Central, as quais são denominadas de Média Aritmética, Média Ponderada, Moda e a Mediana.

Veja, no exemplo a seguir, como efetuar cálculos utilizando estas medidas.

Considere os números 8, 12, 9, 7, 3, 14 e 9, para calcular a:

1) Média Aritmética (MA), é uma medida de tendência central, que é obtida a partir da soma de todos os valores do conjunto de dados, seguido da divisão do valor encontrado pelo número de dados do conjunto, veja a resolução a seguir:

$$MA = \frac{8+12+9+7+3+14+9}{7} = \frac{62}{7} = 8{,}9$$

2) Média Ponderada (MP), é uma medida de tendência central, que é obtida a partir da multiplicação de cada valor do conjunto de dados pelo seu peso, seguido da soma dos resultados da multiplicação e da divisão do valor encontrado pela soma dos pesos. Para reforçar estes significados, considerando os pesos 3, 4, 1, 5, 4, 6 e 2, respectivamente, veja a resolução a seguir:

$$MP = \frac{(8\times3)+(12\times4)+(9\times1)+(7\times5)+(3\times4)+(14\times6)+(9\times2)}{3+4+1+5+4+6+2 \rightarrow \textit{soma dos pesos}} = \frac{24+48+9+35+12+84+18}{25} = \frac{230}{25} = 9{,}2$$

3) A Mediana (Me), é o valor central de um conjunto de dados, mas fique atento, pois existem alguns passos para determinar a mediana de um conjunto de dados. O primeiro passo é colocar os valores em ordem crescente: 3, 7, 8, 9, 9, 12, 14. Adotamos o número central, neste caso o 9, é a Mediana. Me = 9.

4) A Moda (Mo), é o valor mais frequente de um conjunto de dados. Considerando os números 8, 12, 9, 7, 3, 14 e 9, o número que se repete duas vezes é o 9. Logo, é a moda. Mo = 9.

DESENVOLVENDO

A Atividade 1 é um exemplo contemplando cálculos da média aritmética, média ponderada, moda e mediana. As Atividades 2 e 3 são situações-problema que exploram o significado da média aritmética, moda e mediana e, também, os cálculos. A Atividade 4 trabalha, a partir de um problema, o significado de média ponderada. É importante que o professor observe possíveis dúvidas dos estudantes, em relação à mediana, quando a relação dos números for par ou ímpar, por exemplo, quando temos 7 números, a mediana é o 4º número, já quando temos 8 números, a mediana são o 4º e 5º números. Mantenha a sala organizada, solicitando aos estudantes que analisem

2. João estuda na escola Mundo Feliz e, ao ter acesso ao seu boletim de notas, viu que a média final não foi calculada. João sabe que para ser aprovado, sem ter que fazer provas de recuperação final, é necessário que a sua média final seja igual ou superior a 7,0 pontos. E você, sabe como calcular a média final do João? Se for possível, converse com os seus colegas e discuta esta situação, calcule a média final e finalize o preenchimento do boletim do João. Em seguida, responda os itens que segue.

Atenção, estudante! Em função das medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, respeite os protocolos de higiene e distanciamento seguro entre os seus colegas de sala.

Disciplinas	I BIM	II BIM	III BIM	IV BIM	Média Final
Português	8	7	9	6	7,5
Matemática	7	6	9	8	7,5
Geografia	5	4	6	3	4,5
História	10	8	9	10	9,25
Ciências	8	10	8	7	8,25
Arte	10	10	10	9	9,7
Ed. Física	10	10	10	10	10
Inglês	3	5	2	6	4,0

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Espera-se que, para cada disciplina, os estudantes efetuem os cálculos:

Português $\longrightarrow MA = \frac{8+7+9+6}{4} = \frac{30}{4} = 7{,}5$

Matemática $\longrightarrow MA = \frac{7+6+9+8}{4} = \frac{30}{4} = 7{,}5$

Geografia $\longrightarrow MA = \frac{5+4+6+3}{4} = \frac{18}{4} = 4{,}5$

História $\longrightarrow MA = \frac{10+8+9+10}{4} = \frac{37}{4} = 9{,}2$

Ciências $\longrightarrow MA = \frac{8+10+8+7}{4} = \frac{33}{4} = 8{,}2$

Arte $\longrightarrow MA = \frac{10+10+10+9}{4} = \frac{39}{4} = 9{,}7$

Ed. Física $\longrightarrow MA = \frac{10+10+10+10}{4} = \frac{40}{4} = 10{,}0$

Inglês $\longrightarrow MA = \frac{3+5+2+6}{4} = \frac{16}{4} = 4{,}0$

Após o cálculo das médias, espera-se que os estudantes finalizem o preenchimento da tabela.

FINALIZANDO

Avalie as resoluções das atividades, identifique se houve dúvidas nas resoluções, analise bem as estratégias e as corrija, complementando com o que você, professor, achar pertinente. Veja como seus estudantes resolveram as atividades e analise com eles os diferentes registros que fizeram. É importante orientar os estudantes a corrigirem suas respostas ou acrescentarem dicas dadas após as correções.

e resolvam as atividades das respectivas aulas. Se for seguro, devido às medidas de segurança por conta dos riscos de contaminação da Covid-19, circule pela sala enquanto eles efetuam os cálculos e resolvem as atividades. Observe os pontos de vista da turma sobre as resoluções. Se necessário, oriente-a sobre possíveis dúvidas que surgirem. Pergunte: "como vocês estão resolvendo?", "por que dessa forma?", "o que vocês acham se..." e outros questionamentos que achar pertinente. É sempre bom desafiar a turma a investigar, levantar hipóteses e trocar estratégias para solucionar as situações propostas.

a. O João vai precisar fazer recuperação final de alguma disciplina?

Sim, nas disciplinas de Geografia e Inglês.

b. Considerando as notas dos quatro bimestres, qual é a mediana das notas de Matemática? Faça uma comparação com a média aritmética.

Espera-se que os estudantes coloquem as notas de Matemática em ordem crescente e, em seguida, inicie os cálculos:

Matemática $\longrightarrow ME = \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$

Observa-se que, neste caso, a mediana é igual a média aritmética.

c. Considerando as notas dos quatro bimestres, qual é a moda em relação às notas de Ciências?

Observando as notas 8, 10, 8 e 7 a nota que se repete é 8. Logo, a moda é 8.

$Mo = 8$.

3. Dada a tabela

Nº de Irmãos	FA
0	5
1	10
2	6
3	3
4	1
total	**25**

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Determine:

a. A média aritmética ponderada

$$MA = \frac{(0 \times 5) + (1 \times 10) + (2 \times 6) + (3 \times 3) + (4 \times 1)}{25} = \frac{35}{25} = 1{,}4$$

b. A moda

A maior frequência é 10, que corresponde ao valor de 1 irmão. Logo, a moda é 1.

Mo = 1.

c. A mediana

Como o total de frequência absoluta é 25 (número ímpar), o valor central é o 13º. Colocando em ordem crescente, temos 5 valores correspondentes a 0 irmãos, seguido de 10 valores correspondentes a 1 irmão. Então, o 13º valor é 1 irmão. Logo, *Me* = 1.

4. Damião inscreveu-se no vestibular de uma certa universidade para concorrer a uma vaga no curso de Licenciatura em Ciências Biológicas. Ao ler o edital do vestibular, ele percebeu que o critério de avaliação era a média ponderada das provas objetivas mais a nota da dissertação. Após realizar as provas objetivas, Damião obteve os seguintes acertos:

PROVAS	QUESTÕES	ACERTOS	PESO
Língua Portuguesa – Literatura Brasileira	15	10	4,0
Língua Estrangeira – Inglês/Espanhol/Francês	10	8	2,0
Ciências Humanas – História, Atualidades e Geografia	20	15	2,0
Matemática	15	12	3,0
Ciências da Natureza – Física, Química e Biologia	25	23	3,0

A partir dos dados explícitos na tabela, qual foi a nota final do Damião nas provas objetivas?

$$MP = \frac{(10\times4)+(8\times2)+(15\times2)+(12\times3)+(23\times3)}{4+2+2+3+3} = \frac{40+16+30+36+69}{14} = \frac{191}{14} \cong 13{,}6.$$

Logo, $MP \cong 13{,}6$.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

2ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

Olá, Professor(A),

Sugerimos que, após a aplicação destas Sequência de Atividades, você trabalhe também com o material São Paulo Faz Escola, atualmente denominado Currículo em Ação. As habilidades trabalhadas nesta Sequência do Aprender Sempre podem ser aprofundadas nas atividades propostas nos diversos volumes dos anos/séries listados no quadro abaixo.

2ª Série do Ensino Médio - Matemática			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAIS**
1	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	(**EF09MA06**) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 9º ano:** Vol. 2, Situação de Aprendizagem 3 ATIVIDADE 1 – FUNÇÃO: NOÇÃO E LEI DE FORMAÇÃO ATIVIDADE 2 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO ATIVIDADE 3 – OLHANDO AS FUNÇÕES EM DIFERENTES PERSPECTIVAS
2	Funções: Relações entre duas grandezas; Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado; Funções de 1º grau; Funções de 2º grau	Compreender a construção do gráfico de funções de 1º grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decrescimento e a taxa de variação. Compreender a construção do gráfico de funções de 2º grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento e decrescimento, os sinais da função e os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo. (Currículo Vigente 2020)	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno da 1ªsérie:** Vol.2 - 2020 Tema 2: Funções
3	Geometria - Trigonometria: Razões trigonométricas nos triângulos retângulos; Resolução de triângulos não retângulo: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos	Saber usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos. Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. (Currículo Vigente 2020)	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno da 1ªsérie:** Vol.4 – 2020 Tema 1: Razões trigonométricas no triângulo retângulo Tema 2: Razões trigonométricas em triângulos não retângulos

2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

OLÁ, PROFESSOR! OLÁ, PROFESSORA!

Nessa Sequência de Atividades, falamos diretamente com você, que está aí, na sala de aula, no convívio direto com os estudantes, os quais terão oportunidade, nesse momento, de se envolverem com atividades que possibilitam a retomada de conceitos, propriedades e procedimentos essenciais para o desenvolvimento de seus conhecimentos e capacidades em matemática.

A Sequência de Atividades deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração. Além disso, as socializações das atividades, por parte dos estudantes, são percebidas aqui como oportunidades de serem desenvolvidas habilidades e competências que dizem respeito à cooperação, à empatia, à argumentação e à comunicação, entre outras.

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam funções: representações numérica, algébrica e gráfica.

As escolhas das habilidades foram feitas por meio das análises realizadas dos resultados de avaliações internas e externas (diagnóstico de entrada e SARESP), que revelaram fragilidades dos estudantes, com relação à habilidade:

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Aula/Tempo	Atividade
1ª e 2ª/ 90 min	Viver em função de...
3ª e 4ª/ 90 min	Um pouco de história sobre o conceito de função
5ª e 6ª/ 90 min	Diferentes representações para uma mesma função
7ª e 8ª/ 90 min	Resolvendo problemas com funções

Sabemos que as atividades por si só não ensinam. Por isso, professor, a sua atuação é tão importante em cada uma das situações propostas aqui, cujo objetivo é recuperar as aprendizagens e desenvolver as habilidades esperadas para a 2ª série do Ensino Médio. Para isso, esse caderno deverá servir como mais uma ferramenta que o auxiliará no processo de ensino, sendo necessário, portanto, que você considere, em seu replanejamento, outras possibilidades de discussão e recursos para além daqueles sugeridos nessa Sequência de Atividades. Para ajudá-lo nessa ação, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenal acerca das Sequências de Atividades, nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPCs). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

ANOTAÇÕES

2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

AULAS 1 E 2 – VIVER EM FUNÇÃO DE...

Objetivos das aulas:
- Reconhecer uma relação entre duas grandezas como uma função;
- Identificar uma função a partir da relação entre duas grandezas escrita por meio de sua representação numérica.

Bodas de Ouro

Em uma conversa entre familiares, algumas pessoas falavam sobre a comemoração das bodas de ouro dos patriarcas. Pensaram em organizar um grande evento para se confraternizarem e comemorarem os 50 anos de casamento dos chefes da família. Vejamos um trecho do bate papo:

Miriam: Acho que devemos mesmo pensar na comemoração das bodas de ouro de papai e mamãe.

Ítalo: É uma ótima ideia. Acho também que devemos reunir o máximo de familiares que conseguirmos.

Ana Lúcia: Vamos fazer a lista do pessoal que mora mais longe para entrarmos em contato com cada um e fazer o convite.

Ítalo: Joana e Mário sempre participam...esses aí não perdem um evento em família.

Paulo: Margarete não deve vir, ela está sempre muito atarefada. Essa vida de microempresária tem sido muito corrida para ela. Definitivamente, Margarete vive em função do trabalho.

Miriam: Vocês acham que Edson consegue vir? E Lidiane e Roberto, será que vão aceitar o convite?

Ana Lúcia: Sem dúvida Edson deve vir, ele vive em função da família e, embora more um pouco distante daqui os encontros familiares são sempre sua prioridade. Já Lidiane e Roberto eu acho muito difícil que estejam presentes. Eles estão com netinhos recém-nascidos e já que estão vivendo em função desses netos, é provável que levem falta dessa vez...

A partir da leitura do texto Bodas de Ouro, responda:

1. Vocês notaram que a expressão viver em função de... apareceu algumas vezes nesse diálogo? Qual é o significado de tal expressão nesse contexto, ou seja, o que significa, por exemplo, a fala: "Definitivamente, Margarete vive em função do trabalho"?

Dizer que alguém vive em função de alguma coisa significa dizer que ele(a) depende disso para viver, que se dedica muito a isso. No caso de Margarete, a fala indica que ela se dedica bastante ao trabalho.

2. Em um trecho da conversa, Ana Lúcia diz que é provável que Lidiane e Roberto não participem da comemoração porque eles "...estão vivendo em função" dos netos recém-nascidos. Que sentido pode ser atribuído a essa fala, isto é, de acordo com o contexto, o que esse trecho significa?

Nesse contexto, o trecho citado informa que Lidiane e Roberto podem não ter tempo para outras atividades porque estão se dedicando demais aos netos recém-nascidos, isto é, que estão dependendo deles.

AULAS 1 E 2 – VIVER EM FUNÇÃO DE...

OBJETIVO DAS AULAS

Reconhecer uma relação entre duas grandezas como uma função;

Identificar uma função a partir da relação entre duas grandezas escrita por meio de sua representação numérica.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

Professor, para as Aulas 1 e 2 as atividades têm foco no reconhecimento de uma função, sobretudo a partir de contextos e dados numéricos. Desse modo, sugerimos que o início aconteça por meio do diálogo sobre a ideia de funcionalidade, em particular apresentando exemplos de situações reais que contemplem relação de dependência entre duas grandezas. Podem ser inseridos, nesse momento, questionamentos como: "sabendo o preço cobrado pela unidade de um produto, é possível saber o preço de qualquer quantidade desse mesmo produto?", "A quantidade de internet disponibilizada nos planos de telefonia é suficiente para todos?". A proposta é que sejam problematizadas ideias nesse sentido para levar os estudantes a perceberem a relação de dependência entre as variáveis consideradas nos exemplos. Após a conversa inicial, é interessante retomar o termo função e questionar os estudantes sobre o que lembram a respeito de uma função. Nessa conversa, eles devem recordar que esse é um objeto de conhecimento que já foi estudado em anos anteriores. Destaque, professor, que é um conceito relevante da Matemática, com muitas aplicações em outras áreas e frequentemente disponível em questões de exames em larga escala.

DESENVOLVENDO

Após essas discussões introdutórias, proponha a realização das **Atividades 1 e 2** da Sequência de Atividades. A leitura do texto Bodas de Ouro pode ser realizada de maneira coletiva entre todos da turma. Para garantir o enriquecimento das atividades, promova discussões sobre o contexto relatado e disponibilize tempo para as respostas de tais atividades, incentivando que os estudantes escrevam os seus argumentos sobre a expressão "viver em função de..." e, se considerar pertinente, possibilitando que eles apresentem outros exemplos em que a expressão seja adequada. A leitura do texto introdutório da **Atividade 3** também foi pensada para acontecer coletivamente. Este traz interpretações sobre a ideia de "viver em função de..." e avança até o conceito matemático de

Observe as falas seguintes:

Juliana vive em função do trabalho.

Igor vive em função da academia.

Meus avós vivem em função dos netos.

Frases como essas aparecem em variados contextos e podem ser usadas em atividades corriqueiras. Expressões que envolvem a ideia de "viver em função de" sinalizam uma relação de dependência, de modo que:

- Juliana depende do trabalho para viver, ela se dedica muito ao trabalho.
- Igor está constantemente na academia, ele se esforça bastante na academia.
- Meus avós se dedicam muito aos netos, que fazem muito para agradá-los.

Em Matemática, o termo função também tem ligação com a noção de dependência. Contudo, a dependência a que nos referimos agora é a dependência entre duas grandezas. Vejamos o seguinte exemplo:

É possível saber exatamente quanto você irá gastar com compras no supermercado antes mesmo de chegar ao local?

Nesse contexto, percebemos que as grandezas itens a comprar e preço a pagar são variáveis e dependentes entre si. Para saber exatamente o valor que você irá gastar é necessário saber quais itens você vai comprar, quantos deles e o preço por cada unidade. Esses aspectos, de fato, podem variar porque o supermercado pode oferecer alguma promoção, pode ainda ter aumentado o valor do item que você deseja comprar ou ainda você pode optar por adquirir outros produtos além dos que havia pensado inicialmente.

Esse é um exemplo de senso comum, no entanto, pensando de modo um tanto quanto mais formal, em Matemática, uma função é uma relação unívoca entre duas grandezas. Temos, então, que dados dois conjuntos não vazios A e B, contidos em $\mathbb{R}$, uma relação f de A em B é chamada de função de A em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$.

3. A partir desse texto introdutório, vejamos o que ocorre com os dados seguintes.

LINHA	ELEMENTOS					
L_1	- 2	- 1	0	1	2	3
L_2	3	4	5	6	7	8

a. O primeiro elemento da L_1 está associado a que elemento da L_2? E o segundo elemento da L_1 está associado a que elemento da L_2?

O primeiro elemento da L_1 está associado ao elemento 3 de L_2, enquanto o segundo elemento da L_1 está associado ao elemento 4 de L_2.

uma função. As demais atividades propostas também têm cunho teórico. Elas podem ser realizadas pelos estudantes em duplas, para favorecer as discussões e a troca de experiências. As **Atividades 3, 4 e 5** voltam-se para a verificação de que certas relações representadas por dados numéricos correspondem a funções. As **Atividades 6, 7** e **8** apresentam conjuntos cujos elementos estão explicitados entre chaves então, no momento de correção, ressalte a linguagem matemática utilizada. A resolução com registro na lousa é uma boa ideia. Tenha em mente que o foco é verificar se as situações representam funções. A última atividade prevista para essas aulas, a de número **9**, requer a real ização de alguns cálculos básicos. Imagina-se que os estudantes, nas nente, possibilite diálogo entre os estudantes para que um indique se o exemplo do outro, de fato, contempla uma função.

b. Note que todos os elementos de L_1 têm o seu correspondente em L_2. É possível garantir que, nesse caso, cada elemento da L_1 está associado a um único elemento da L_2?

Sim, o quadro mostra que cada elemento da L_1 está associado a um único elemento da L_2.

c. Qual é o padrão de associação entre os elementos de L_1 e L_2?

Cada elemento de L_2 é obtido acrescentando-se 5 unidades ao seu correspondente em L_1.

d. Se acrescentarmos um próximo elemento de L_1, o número 4, qual seria o seu correspondente em L_2? Justifique a sua resposta.

O correspondente seria 9, pois: $L_2 = L_1 + 5 = 4 + 5 = 9$.

e. Nessas condições, podemos concluir que a relação entre os elementos de L_1 e L_2 é uma função?

A relação exemplificada nessa atividade é uma função de L_1 para L_2 porque cada elemento da L_1 está associado a um único elemento da L_2.

4. A vazão de uma torneira aberta em relação ao tempo está indicada no quadro seguinte.

Tempo (min)	Vazão (L)
1	2
5	10
10	20
20	40

Fonte: elaborado para fins didáticos

A partir da observação dos dados numéricos disponibilizados no quadro, é possível concluir se a relação entre eles é uma função? Justifique.

Analisando os dados numéricos apresentados no quadro, podemos verificar que a relação entre as variáveis Tempo e Vazão é uma função, já que a cada medida de tempo há apenas uma vazão possível para a torneira.

duplas, terão oportunidade de aumentar o seu repertório de argumentos quanto à identificação se o contexto corresponde a uma função por meio da análise de dados numéricos.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula retome a ideia de função como relação unívoca entre grandezas e solicite que os estudantes sinalizem outros exemplos de contextos reais que apresentem uma função. Ressalte a importância desse conceito tanto para a Matemática quanto para outras áreas de conhecimento. A participação dos estudantes pode indicar possíveis dúvidas e dificuldades que tenham enfrentado. Caso considere perti-

5. O quadro seguinte traz informações numéricas apresentadas em um item do SARESP-2014. Observe:

x	2	4	6	8	10
n	4	8	12	16	20

a. Cada elemento de x tem quantos correspondentes em n? A partir dessa informação, a que conclusão podemos chegar quanto à relação entre os valores de x e de n?

Cada elemento de x tem apenas um correspondente em n, isso significa que a relação entre x e n é uma função.

b. Qual é o padrão de associação entre os elementos de x e de n?

Cada elemento de x está associado a um elemento em n que corresponde ao seu dobro.

6. Dados os conjuntos A = {-3, -1, 0, 1, 3} e B = {-4, -2, 0, 1, 2, 8}, se pensarmos na associação de A para B de modo que cada elemento de A se relaciona com um elemento em B que é o seu dobro, teremos uma função? Justifique.

Nessas condições, a relação do conjunto A para o conjunto B não é uma função porque existem elementos em A que não têm elementos correspondentes em B, a saber: -3 e 3.

7. O conjunto f = {(1, 5), (x, 3), (5, 8), (6, 4)} é uma função de A = {1, 5, 6, 9} num conjunto B. Nestas condições, qual é o valor de x? Justifique.

Para ser função, x deve ser igual a 9 de forma que cada elemento de A tenha um único correspondente em B.

8. Dados os conjuntos A = {0, 2, 4} e B = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} e a relação {(x, y), x ∈ A e y ∈ B / x > y}, faça o que se pede:

a. Escreva todos os elementos da relação.

{(0, -3); (0, -2); (0, -1); (2, -3); (2, -2); (2, -1); (2, 0); (2, 1); (4, -3); (4, -2); (4, -1); (4, 0); (4, 1); (4, 2); (4, 3)}.

b. Essa relação corresponde a uma função de A em B? Justifique a sua resposta.

Observando os elementos da relação de A em B concluímos que ela não é uma função, já que cada elemento de A tem mais de um correspondente em B.

9. A maioria dos vendedores têm o seu salário que varia de acordo com o índice de vendas por mês. Rodrigo é vendedor e o seu rendimento mensal é a soma de uma parcela fixa de R$ 1.000,00 com 10% do total vendido por ele. Nessas condições,

a. Preencha a tabela com o salário mensal de Rodrigo considerando o total de vendas indicado para cada mês.

Total de vendas por mês (R$)	Salário mensal (R$)
1.500,00	1.000,00 + 150,00 = 1.150,00
4.700,00	1.000,00 + 470,00 = 1.470,00
2.800,00	1.000,00 + 280,00 = 1.280,00
3.700,00	1.000,00 + 370,00 = 1.370,00
6.200,00	1.000,00 + 620,00 = 1.620,00

Fonte: elaborado para fins didáticos

b. Esse contexto representa uma função? Justifique a sua resposta.

Sim, afinal a cada valor de total de vendas há apenas um único valor de salário correspondente.

AULAS 3 E 4 – UM POUCO DE HISTÓRIA SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO

Objetivos das aulas:
- Identificar uma função a partir da relação entre duas grandezas escrita por meio de sua representação algébrica;
- Compreender uma função a partir da relação entre duas grandezas escrita por meio de sua representação gráfica.

1. Um olhar histórico sobre o conceito de função

O texto seguinte apresenta informações sobre a história do conceito de função. Nele, há elucidações alcançadas a partir de pesquisas acadêmicas na área da Educação Matemática que revelam alguns conhecimentos referentes à noção de funcionalidade considerada na Antiguidade, na Idade Média e na Idade Moderna.

Para as próximas atividades, comece pela leitura detalhada desse texto.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Caso seja necessário retome com os estudantes os cálculos dos 10% de 1.000. Sugerimos indicar que 10% de uma quantidade corresponde à décima parte (1/10) desse valor e, portanto, basta dividi-lo por 10 ou ainda realizar o cálculo com regra de três.

AULAS 3 E 4 – UM POUCO DE HISTÓRIA SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO

OBJETIVO DAS AULAS

Identificar uma função a partir da relação entre duas grandezas escrita por meio de sua representação algébrica;
Compreender uma função a partir da relação entre duas grandezas escrita por meio de sua representação gráfica.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

As Aulas 3 e 4 têm atenções voltadas para a identificação de função a partir de suas representações algébrica e gráfica. Para tanto, inicia-se com um texto que traz informações históricas quanto ao desenvolvimento do conceito de função. Então, indicamos que o ponto de partida pode ser uma fala contemplando o tipo de atividade que os estudantes irão resolver.

DESENVOLVENDO

A princípio, propomos a resolução da **Atividade 1**. Para tanto, a leitura do texto sobre as alterações no conceito de função no decorrer do tempo pode acontecer com a participação dos estudantes. Leitura compartilhada entre todos da turma é um bom começo. Incentive, professor, a concentração dos estudantes para que compreendam as informações abordadas no texto. Provoque a turma sobre esse conceito ter sido identificado desde a Antiguidade, contudo, só se foi alcançada a definição usada hoje em dia na Idade Moderna. Esse ponto pode propiciar discussões quanto ao entendimento da Matemática como ciência humana, desenvolvida à muitas mãos e que acompanha os avanços históricos e sociais. Reforce os conceitos de conjunto domínio, contradomínio e imagem ainda no momento da correção da **Atividade 1**. Para a **Atividade 2,** cabe discutir o uso das funções matemáticas em outras áreas do conhecimento. Nesse momento, é interesse questionar a turma sobre aplicações das funções para além da Matemática, como por exemplo na biologia, ao se controlar o avanço de pragas e vírus; na física, quando se resolve problemas envolvendo velocidade ou energia. Após a correção da **Atividade 2**, instigue os estudantes a observarem se o gráfico apresentado indica uma relação entre variáveis que pode ser considerada uma função. A **Atividade 3** aborda um contexto a partir do qual os estudantes devem explicitar uma expressão algébrica que o represente. Novamente, indicamos a importância do incentivo quanto à verificação de se a relação descrita é ou não

Diversas são as pesquisas acadêmicas que defendem que a noção de funcionalidade aparece nos registros históricos desde a Idade Antiga. Contudo, o conceito aceito e utilizado na Matemática atualmente é resultado de alterações sofridas no decorrer de diversas eras.

Na **Antiguidade** a principal ideia relativa à função se referia à correspondência entre grandezas, sobretudo nos processos de contagem quando o homem fazia associar nó em corda, marcação em pedra ou argila ou dobra em dedo a cada um de seus animais. Com isso, nota-se que a ideia de função estava associada a representações numéricas.

Na **Idade Média**, o conceito de função ganha um novo elemento que é a possibilidade de indicar correspondências entre grandezas por meio de uma figura. Os gráficos aparecem como recurso para representar tais correspondências.

Já na **Idade Moderna**, o que surge de alteração diz respeito à representação de função por meio de elementos algébricos. Nessa era alcançou-se o conceito de função como conhecemos hoje e representá-la através de expressões algébricas passou a ser recorrente até os dias atuais.

Fonte: Andrade (2017) (adaptado)

O texto nos indica que, historicamente, a ideia de função já aparece no mundo há muito tempo, desde os primeiros processos de contagem. As alterações nesse conceito aconteceram no decorrer do tempo de modo que as representações numéricas, algébricas e gráficas foram fazendo cada vez mais parte dos estudos matemáticos. Desde a Idade Moderna, função é a relação entre dois conjuntos em que cada elemento do primeiro conjunto se associa a um único elemento do segundo conjunto. O conjunto inicial recebe o nome de Domínio e o segundo conjunto é o Contradomínio. Há ainda um subconjunto do Contradomínio formado apenas pelos elementos que estão associados aos elementos do Domínio e recebe o nome de conjunto Imagem.

Como formas de representação, uma função pode ser indicada por meio de números, de um gráfico ou ainda através de uma expressão algébrica.

Considere, então, a função de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ representada por: $f(x) = x^2$.

a. Nesse caso, que conjuntos representam o domínio e o contradomínio dessa função?

Tanto o domínio quanto o contradomínio dessa função são o conjunto dos números reais: D(f)=R e CD(f)=R.

b. Qual é o conjunto Imagem de f(x)?

O conjunto imagem dessa função é o conjunto dos números reais não negativos, já que cada valor de x se associa ao seu quadrado.

c. A expressão $f(x) = x^2$ é denominada lei de associação ou lei de formação da função considerada. Os elementos do Domínio se associam aos elementos do Contradomínio por meio dessa lei. Sendo assim, determine a imagem de cada valor do Domínio indicado a seguir:

x	f(x)
- 2	$f(-2)=(-2)^2=4$
0	$f(0)=0^2=0$
3	$f(3)=3^2=9$

uma função. As **Atividades 4 e 5** contemplam representações gráficas de funções. Encaminhe a realização delas em duplas para favorecer as discussões.

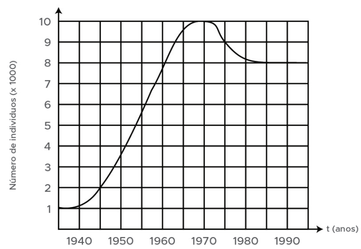
FINALIZANDO

O encerramento da aula pode acontecer com a fala de cada dupla apresentando uma síntese sobre o desenvolvimento histórico do conceito de função e, em particular, o conceito atual. Durante essas falas, os estudantes podem exemplificar situações envolvendo função. Além disso, é indispensável que indiquem as dificuldades enfrentadas e esclareçam possíveis dúvidas.

2. Aplicação em situações reais

Diversas são as possibilidades de aplicação do conceito de função em situações reais. Por meio da relação entre grandezas, uma função pode representar índices e variações nos mais diversificados contextos. Por exemplo, o valor que pagamos pela conta mensal de energia depende do nosso consumo; a quantidade de calorias consumida por alguém depende da quantidade de alimentos que ela ingerir. Alguns fenômenos naturais também podem ser representados por meio de uma função e, por essa razão, ciências como a Física, a Química e a Biologia utilizam frequentemente funções matemáticas e suas propriedades na ocorrência de certos fenômenos. Vejamos essa situação:

» (ENEM - 1999) O número de indivíduos de certa população é representado pelo gráfico abaixo.



Em 1975, a população tinha um tamanho aproximadamente igual ao de:

a. 1960

b. 1963

c. 1967

d. 1970

e. 1980

RESPOSTA: B

O gráfico mostra que tanto em 1975 quanto em 1963 a população era de aproximadamente 9.000 habitantes.

3. (ENEM - 2008) A figura abaixo representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008. Se M(x) é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então:

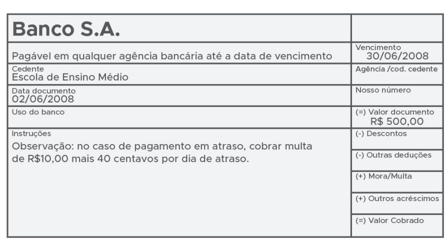
a. $M(x) = 500 + 0,4x$.

b. $M(x) = 500 + 10x$.

c. $M(x) = 510 + 0,4x$.

d. $M(x) = 510 + 40x$.

e. $M(x) = 500 + 10,4x$.



Banco S.A.

Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	Vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência /cod. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos
	(-) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor Cobrado

Fonte: elaborado para fins didáticos

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

ATIVIDADE 2

Após responder à essa atividade, sugerimos que problematize: esse gráfico corresponde a uma função? Por quê? Instigue os estudantes a observarem que cada ano se relaciona a apenas um número de indivíduos e, por essa razão, a relação entre tempo e número de indivíduos é uma função. Questione também sobre os conjuntos domínio, contradomínio e imagem.

ATIVIDADE 3

Provoque a turma sobre pensar a respeito das variáveis envolvidas nesse contexto, da relação entre elas a fim de que notem que é uma função.

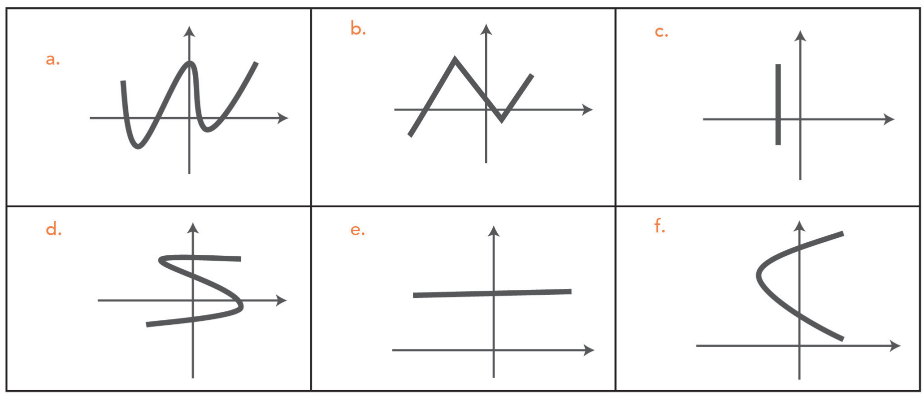
CONVERSANDO COM O PROFESSOR

ATIVIDADE 4

É interessante que os estudantes tenham espaço para socializar com a turma as estratégias que utilizaram para fazer as verificações solicitadas. Caso não apresentem, mostre que, na prática, uma maneira possível de conferir se um gráfico corresponde a uma função é traçar retas verticais sobre o gráfico e observar se a cada valor do eixo horizontal há apenas um valor correspondente no eixo vertical.

RESPOSTA: C. Esse contexto descreve uma função porque para cada dia de atraso há apenas um valor a ser pago por tal atraso. Caso não haja atraso, o valor a ser pago será de R$ 500,00, contudo, a solicitação é que se escreva uma lei de formação que represente um caso em que houve atraso. Dessa forma, temos que a cobrança terá um total composto por três partes: R$ 500,00 fixos da conta; R$ 10,00 de multa e um valor que varia de acordo com a quantidade de dias desse atraso (x) e que pode ser representado por 0,4x. Portanto, temos que a lei de formação que descreve esse caso é: M(x)=510+0,4x.

4. Uma função também pode ser representada por meio de um gráfico. Para confirmar se uma representação gráfica, de fato, corresponde a uma função é necessário garantir que cada valor indicado no eixo horizontal se associa a um único valor correspondente no eixo vertical. Dessa forma, observe os gráficos seguintes atentamente e destaque apenas aqueles que representam funções.



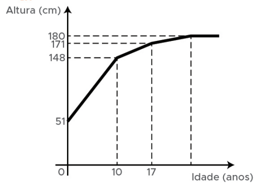
Fonte: elaborado para fins didáticos

RESPOSTA: As alternativas a, b, e trazem gráficos de funções já que a cada valor da coordenada do eixo horizontal se associa apenas um valor da coordenada marcada no eixo vertical.

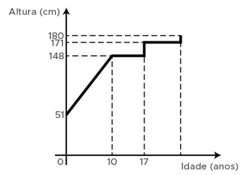
Nas alternativas c, d, f não temos funções. Nesses casos, existem valores do eixo horizontal associados a mais de um valor do eixo vertical.

5. (ENEM – 2010) Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura se dava de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico relacionando as alturas do filho nas idades consideradas. Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?

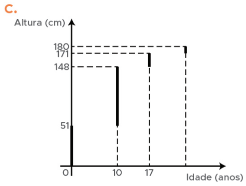
a.



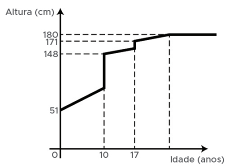
b.



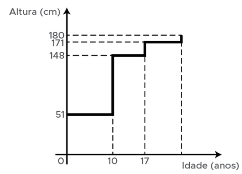
c.



d.



e.



RESPOSTA: A. De acordo com as informações apresentadas pelo enunciado, o gráfico que melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade é o da alternativa A. Ele é o único que representa uma função que é crescente em todo o seu domínio, além de indicar um crescimento acontecendo de maneira contínua, maior entre 0 e 10 anos do que entre 10 e 17 anos e sendo cada vez menor a partir dos 17 anos.

AULAS 5 E 6 – DIFERENTES REPRESENTAÇÕES PARA UMA MESMA FUNÇÃO

Objetivos das aulas:

- Identificar a representação algébrica de uma função a partir de informações numéricas;
- Compreender a representação gráfica de uma função a partir de informações numéricas;
- Reconhecer a representação gráfica de uma função a partir de informações algébricas.

1. (AAP – 2016) A tabela a seguir informa a vazão de uma torneira aberta em relação ao tempo:

Tempo (x)	1	5	10	20
Vazão (y)	20	100	200	400

Fonte: elaborado para fins didáticos

A expressão que representa a vazão em função do tempo é

a. $y = x \cdot 20$

AULAS 5 E 6 – DIFERENTES REPRESENTAÇÕES PARA UMA MESMA FUNÇÃO

OBJETIVO DAS AULAS

Identificar a representação algébrica de uma função a partir de informações numéricas;Compreender a representação gráfica de uma função a partir de informações numéricas; Reconhecer a representação gráfica de uma função a partir de informações algébricas.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

Para essas aulas o estudo das funções contempla, particularmente, suas representações numérica, algébrica e geométrica. Desse modo, o início pode ser com o resgate sobre o conceito de função já discutido nas aulas anteriores, a retomada do desenvolvimento histórico de tal conceito bem como a importância das funções matemáticas em contextos diversificados.

DESENVOLVENDO

As **Atividades 1 e** 2 são itens em que a representação algébrica é solicitada a partir de conhecimentos numéricos relativos às relações entre grandezas. Promova o momento de resolução e correção coletiva de maneira que seja possível a socialização dos caminhos usados por cada dupla. Disponibilize tempo para a resolução da **Atividade 3** em que os estudantes irão analisar uma situação em contexto. Para solucionar todos os questionamentos, alguns cálculos são necessários. Incentive que voluntários mostrem os cálculos na lousa e expliquem a sua resolução. Ao encaminhar a **Atividade 4**, questione os estudantes sobre as representações da função que eles percebem no enunciado. As discussões aqui devem girar em torno das associações entre representação gráfica e aritmética de uma mesma função. Nas **Atividades 5 e 6** há a solicitação de construção de gráfico. Oriente os estudantes quanto à marcação de pontos no plano cartesiano. Fazer tais construções na lousa é uma boa alternativa para melhorar a visualização. As últimas atividades previstas para esse dia, as de número 7 e 8, também relacionam gráficos, contudo esses já são disponibilizados no enunciado.

FINALIZANDO

Para finalizar, promova um diálogo com a participação de todos os estudantes da turma em que verbalizem possíveis dúvidas que tenham ficado e oportunize o esclarecimento. Oriente que as atividades realizadas nas aulas anteriores podem ser retomadas em momentos de estudo sobre a ideia de função.

b. $y = x + 100$

c. $y = x - 200$

d. $y = 5x \cdot 400$

RESPOSTA: A

Cada unidade de tempo (x) corresponde a vazão (y) da torneira igual a 20. Assim, quando x é igual a 1, y é igual a vinte ($y = 1 \cdot 20$); quando $x = 5$, $y = 5 \cdot 20$ e assim sucessivamente ($y = 20 \cdot x$ ou $y = x \cdot 20$). Dessa forma, a vazão se mantém proporcionalmente crescente de 20 unidades à medida que o tempo passa. Logo, a expressão que representa a vazão em função do tempo é $y = x \cdot 20$.

2. (SARESP - 2014) As variáveis x e n assumem valores conforme quadro abaixo.

x	2	4	6	8	10
n	4	8	12	16	20

Fonte: elaborado para fins didáticos

A relação entre x e n é dada pela expressão

a. $n = x + 2$.

b. $n = 2x$.

c. $n = 2x + 2$.

d. $n = x + 4$

RESPOSTA: B

Os valores de n sempre são o dobro do valor correspondente x que matematicamente é descrito por $n = 2x$.

3. As corridas de táxi são tarifadas a partir de duas partes, a bandeirada que é um valor fixo e uma segunda parte que depende da distância percorrida pelo taxista para levar o usuário até o destino. Suponha um local cuja bandeirada custa R$ 6,00 e que, por cada quilômetro rodado, o usuário pague R$ 2,60. Para essas condições:

a. Expresse o valor total da tarifa (**T**) em função da distância (**d**) percorrida.

$T = 6 + 2{,}6d$.

b. Essa expressão que relaciona o valor total da tarifa (**T**) e a distância (**d**) percorrida é uma função? Por quê?

Sim, porque cada distância se relaciona com um único valor total de tarifa.

c. Determine o valor a ser pago por uma corrida em que o táxi rodou 12 km.

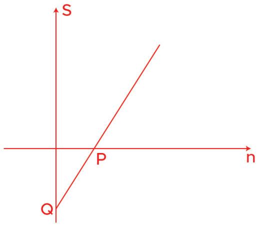
$T = 6 + 2{,}6d = 6 + 2{,}6 \cdot 12 = 6 + 31{,}2 = 37{,}20$.

d. Qual a distância percorrida pelo táxi numa corrida em que o usuário pagou R$ 35,00?

$35 = 6 + 2{,}6d \Rightarrow 2{,}6d = 35 - 6 \Rightarrow d = \frac{29}{2{,}6} \Rightarrow d = 11{,}15$ km.

4. (SARESP – 2010) Os alunos da escola de Fábio estão organizando uma festa. Já foram gastos R$ 1.500,00 na decoração e nos equipamentos de som e iluminação. Decidiram vender cada ingresso por R$ 5,00.

A expressão S = 5n - 1500 permite calcular o saldo monetário da festa (S) em função do número de ingressos vendidos (n). Essa situação está expressa no gráfico. Assinale a alternativa que mostra as coordenadas dos pontos P e Q.



a. (1, 1499) (-2, 0)

b. (1500, 5) (1, 1500)

c. (300, 0) (0, -1500)

d. (5, 300) (300, 1500)

e. (91498, 2) (1500, 2)

RESPOSTA: C

Q é um ponto em que n = 0, então: $S = 5 \cdot 0 - 1500 \Rightarrow S = -1500$.

No ponto P, S é nulo e, portanto: $0 = 5n - 1500 \Rightarrow n = \frac{1500}{5} \Rightarrow n = 300$.

Logo, as coordenadas são: (300, 0) e (0, -1500).

5. Observe alguns valores do domínio de uma função e suas respectivas imagens:

x	- 2	- 1	0	1	2
n	- 5	- 3	- 1	1	3

Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. Com essas informações, é possível identificar onde o gráfico intercepta o eixo y. Então, informe: em que altura isso acontece?

Os dados numéricos indicam que o gráfico intercepta o eixo y no – 1, ou seja, para x = 0, y = - 1.

b. Qual é o valor da função quando x é igual a 2?

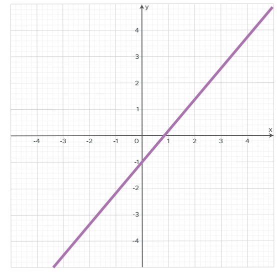
Para x igual a 2 a função assume o valor 3.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor(a), caso julgue necessário, discuta com os estudantes que a função tratada nessa atividade tem como lei de associação a expressão: $y = 2x - 1$.

c. Construa o gráfico dessa função.

(-2, -5)
(-1, -3)
(0, - 1)
(1, 1)
(2, 3)



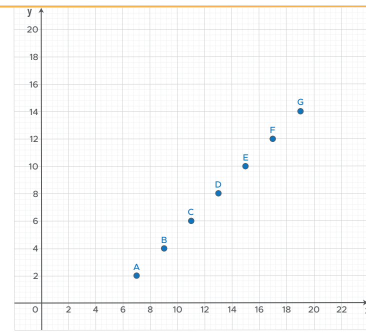
Fonte: elaborado para fins didáticos

6. Observe a situação e represente R no plano cartesiano.

Seja A={x ∈ ℕ/x é ímpar maior que 5 e menor que 20}, com R: y = x - 5 uma relação de A para B onde B é o conjunto dos números inteiros.

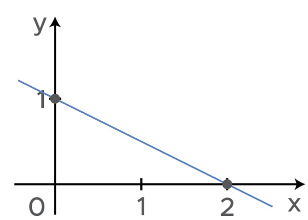
RESPOSTA. A = {7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}

A(7, 2)
B(9, 4)
C(11, 6)
D(13, 8)
E(15, 10)
F(17, 12)
G(19, 14)



Fonte: elaborado para fins didáticos

7. O gráfico seguinte representa uma função. Observe a imagem e informe se as sentenças são VERDADEIRAS (V) ou FALSAS (F):



Fonte: elaborado para fins didáticos

a. (F) O ponto (0, 2) pertence à função.

b. (V) O domínio dessa função é conjunto dos números reais.

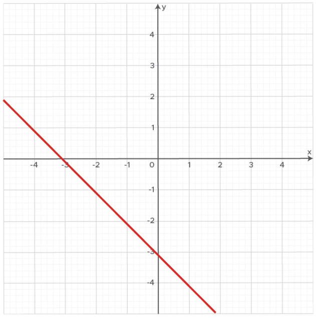
c. (V) Se $x > 2$, então $f(x) < 0$.

d. (V) Quando y é zero, x é igual 2.

e. (F) Sempre que $x \leq 2$, temos que $f(x) > 0$.

(F) Na função quando x é 0, y vale 1, logo o ponto correto seria (0, 1).
(V) A função está definida para todo o conjunto dos números reais.
(V) Para valores de x maiores do que 2, a função (y) assume apenas valores negativos.
(V) Quando y é zero, x é igual 2.
(F) Para $x \leq 2$ há um ponto em que $y = 0$.

8. Qual é a representação algébrica da reta cujo gráfico está indicado no plano cartesiano seguinte?



a. $x - y = 3$

b. $-x - y = 3$

c. $x + y = 3$

d. $3x + 3y = 0$

RESPOSTA: B. De acordo com o gráfico, os pontos (0, - 3) e (- 3, 0) pertencem à função. Assim, temos que, das funções indicadas nas alternativas disponíveis como resposta, a única que contém esses dois pontos é $-x - y = 3$. Para conferir, temos que:

Para $x = 0$: $0 - y = 3 \Rightarrow y = -3$ Para $y = 0$: $-x - 0 = 3 \Rightarrow x = -3$

AULAS 7 E 8 – RESOLVENDO PROBLEMAS COM FUNÇÕES

Objetivo das aulas:
- Resolver situações-problema envolvendo funções escritas em sua representação numérica, algébrica ou gráfica.

1. Suponha que uma empresa venda seus produtos de modo que o preço unitário dependa da quantidade de unidades adquiridas pelo comprador. A **receita** (total bruto recebido pela venda) pode ser calculada de acordo com a função: $\mathbf{R(x) = 200x - x^2}$, onde **x** representa a quantidade de unidades vendidas. Calcule a receita obtida a partir da venda de 30 produtos.

$R(30) = 200 \cdot 30 - 30^2 = 6000 - 900 = 5100$

2. O número de diagonais de um polígono pode ser obtido usando: $d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$, em que n é quantidade de lados desse polígono. Com isso, pergunta-se: qual é o polígono que tem 5 diagonais?

$$5 = \frac{n \cdot (n-3)}{2} \Rightarrow n^2 - 3n - 10 = 0$$

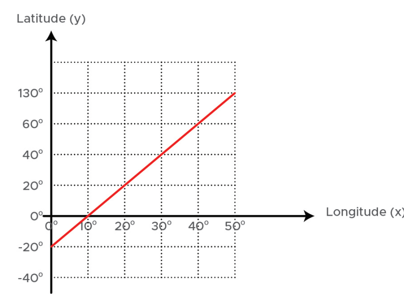
$$n = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$$

$$n' = \frac{3+7}{2} = 5$$

$$n'' = \frac{3-7}{2} = -2$$

Como os valores de n representam quantidade de lados de um polígono, o resultado negativo não é adequado, portanto, o polígono que tem 5 diagonais é o que tem 5 lados, ou seja, o pentágono.

3. (SARESP – 2011) A linha representada no sistema de eixos abaixo descreve a rota de um avião no radar. Como o avião voa em linha reta (entre as longitudes 0° e 60°), a cada grau de longitude é possível se prever a latitude em que o avião estará. Se chamarmos de x a longitude e de y a latitude, a equação que descreve a rota do avião no radar é dada por:



AULAS 7 E 8 – RESOLVENDO PROBLEMAS COM FUNÇÕES

OBJETIVO DAS AULAS

Resolver situações-problema envolvendo funções escritas em sua representação numérica, algébrica ou gráfica.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

Professor, para as últimas aulas dessa Sequência ainda estudaremos sobre função. Nas Aulas 7 e 8, os estudantes serão orientados a solucionar problemas envolvendo representações aritmética, algébrica e geométrica de funções. Então, converse com a turma sobre essas informações e recomende que se organizem em duplas para resolução, destacando que no tempo de correção, haverá participação deles na lousa.

DESENVOLVENDO

Professor, enquanto os estudantes, nas duplas, solucionam os problemas, é importante que circule pela sala no sentido de acompanhá-los, mas sem antecipar informações. O desenvolvimento da autonomia aqui está em questão. Além disso, é indispensável que os estudantes se esforcem na busca por estratégias de resolução e, nesse contexto, cabe ressaltar que não existe apenas uma maneira de alcançar a resposta certa nem que uma estratégia é melhor do que outra. As **Atividades 1 e 2** trazem representações algébricas de funções a partir das quais são necessários cálculos para alcançar o resultado. A **Atividade 3** parte do gráfico da função para a sua lei de associação. Para as **Atividades 4 e 5** os estudantes irão se deparar com contextos diferentes que relacionam grandezas dependentes entre si. As funções nessas atividades aparecem descritas em cada contexto cuja representação por meio de uma expressão algébrica é solicitada. Os gráficos são a marca registrada das **Atividades 6 e 7**. Para elas, é indispensável estudar cada figura detalhadamente para buscar a resolução correta. Por fim, a **Atividade 8** traz um

a. y = 2x + 10

b. y = x – 20

c. y = 2x – 20

d. y = 2x + 20

RESPOSTA: C. Como o gráfico é uma reta, sua representação algébrica é do tipo y = ax + b. Assim, utilizando dois dos pontos que pertencem ao gráfico, temos: (0,-20) : -20 = a · 0 + b ⇒ b = -20

(10,0): 0 = a · 10 - 20⇒ 20 = 10a ⇒ a = 2

Portanto, a lei de associação que descreve esse gráfico é: y = 2x - 20.

4. (SARESP) Uma piscina de 30 mil litros, totalmente cheia, precisa ser esvaziada para limpeza e para isso uma bomba que retira água à razão de 100 litros por minuto foi acionada. Baseado nessas informações, pede-se:

a. A expressão que fornece o volume (V) de água na piscina em função do tempo (t) que a bomba fica ligada.

De acordo com o enunciado, a piscina está cheia, ou seja, está com 30.000 L de água. Além disso, a bomba retira 100 L de água a cada minuto, logo 100t representa a quantidade de água que sai da piscina a cada instante de tempo, no caso, indicado em minutos. Portanto a expressão que indica o volume de água é: V = 30.000 - 100t.

b. A expressão que fornece o volume de água que sai da piscina (V_S) em função do tempo (t) que a bomba fica ligada.

Como a bomba retira 100 L de água a cada minuto, podemos representar a quantidade de água que sai da piscina a cada instante de tempo, em minutos, por: V_S=100t.

c. O tempo necessário para que a piscina seja esvaziada.

Utilizando a expressão que informa o volume de água da piscina e fazendo V=0 (piscina vazia), ocorre: $V = 30.000 - 100t \Rightarrow 0 = 30.000 - 100t \Rightarrow 30.000 = 100t \Rightarrow$ $t = \frac{30.000}{100} \Rightarrow t = 300 \text{ min.}$

d. Quanto de água ainda terá na piscina após 3 horas de funcionamento da bomba?

A partir da expressão que representa o volume de água da piscina, para t = 3h = 3 . 60 = 180 min, temos que:

V= 30.000 - 100 · 180 = 30.000 - 18.000 = 12.000L

aumentar o repertório matemático dos estudantes.

item do ENEM abordando função.

FINALIZANDO

Para finalizar, promova um momento de socialização. Esse deve acontecer com discussões sobre as questões elaboradas pelas duplas e suas respectivas resoluções. Ouvir os argumentos com atenção é muito importante. É uma interessante oportunidade dos estudantes explicitarem a organização de seus pensamentos frente à cada problema. Além disso, falar sobre como articularam o trabalho colaborativo na dupla é válido. Caso sejam indicadas dúvidas busque esclarecê-las. A socialização dos caminhos usados para resolver os problemas é uma importante ferramenta para

5. (SARESP - 2015) Uma empresa de entregas em domicílio cobra, na grande São Paulo, R$ 5,00 fixos por cada entrega, mais R$ 0,03 por cada 1 grama. No interior do Estado, ela cobra o preço da grande São Paulo acrescido de 10%. O preço de entrega de uma encomenda de x gramas para o interior de São Paulo, em R$, é igual a:

a. $5{,}03x + \dfrac{5{,}03x}{10}$

b. $5 + 0{,}03x + \dfrac{5 + 0{,}03x}{10}$

c. $(5x + 0{,}03x) \cdot 1{,}1$

d. $\dfrac{5 + 0{,}03x}{9}$

RESPOSTA: B. O preço de entrega na grande São Paulo será dado por 5 + 0,03x. Para a entrega no interior deve-se aumentar 10%, que são calculados pela divisão do valor da entrega (5 + 0,03x) por 10, o que leva à alternativa B.

6. (ENEM - 2010) Certo município brasileiro cobra a conta de água de seus habitantes de acordo com o gráfico. O valor a ser pago depende do consumo mensal em m³. Se um morador pagar uma conta de R$ 19,00, isso significa que ele consumiu:

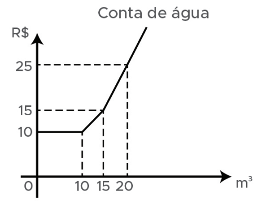
a. 16 m³ de água.

b. 17 m³ de água.

c. 18 m³ de água.

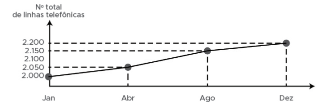
d. 19 m³ de água.

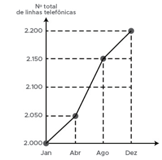
e. 20 m³ de água



RESPOSTA: B. Os pontos (15,15) e (20,25) pertencem à função, então teremos: 15 = 15a + b e 25 = 20a + b. Resolvendo esse sistema, chegamos que y = 2x – 15. Igualando y a 19, temos: 19 = 2x – 15, de onde concluímos que x = 17.

7. (ENEM – 1999) Para convencer a população local da ineficiência da Companhia Telefônica Vilatel na expansão da oferta de linhas, um político publicou no jornal local o gráfico I, abaixo representado. A Companhia Vilatel respondeu publicando dias depois o gráfico II, onde pretende justificar um grande aumento na oferta de linhas. O fato é que, no período considerado, foram instaladas, efetivamente, 200 novas linhas telefônicas.





Analisando os gráficos, pode-se concluir que

a. O gráfico II representa um crescimento real maior do que o do gráfico I.

b. O gráfico I apresenta o crescimento real, sendo o II incorreto.

c. O gráfico II apresenta o crescimento real, sendo o gráfico I incorreto.

d. A aparente diferença de crescimento nos dois gráficos decorre da escolha das diferentes escalas.

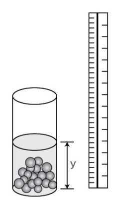
e. Os dois gráficos são incomparáveis, pois usam escalas diferentes.

RESPOSTA: D. Observando os eixos coordenados, notamos que as escalas utilizadas nos gráficos não são iguais e esse é o fator que leva o observador a imaginar que eles mostram diferentes informações quanto ao crescimento da oferta de linhas telefônicas, contudo, tal diferença é apenas aparente.

8. (ENEM - 2009) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo. O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

Número de bolas (x)	Nível de água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br. Acesso em: 13 de jan. 2009 (Adaptado)



Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a. $y = 30x$

b. $y = 25x + 20{,}2$

c. $y = 1{,}27x$.

d. $y = 0{,}7x$.

e. $y = 0{,}07x + 6$.

RESPOSTA: E. A função linear pode ser escrita da forma $y = ax + b$, onde temos que:

$a = \frac{\Delta x}{\Delta y} \Rightarrow a = \frac{6{,}70-6{,}35}{10-5} \Rightarrow a = 0{,}07$, **logo a única alternativa possível é a E.**

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

2ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

ANOTAÇÕES

2º ANO ENSINO MÉDIO - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

OLÁ, PROFESSOR! OLÁ, PROFESSORA!

Os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam: Relações entre duas grandezas; Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado; Funções de 1º grau; Funções de 2º grau.

As escolhas das habilidades foram feitas por meio das análises realizadas dos resultados de avaliações internas e externas (diagnóstico de entrada e SARESP) que revelaram fragilidades dos estudantes em relação às habilidades:

- Compreender a construção de gráficos de funções do 1º grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decrescimento e a taxa de variação;

- Compreender a construção de gráficos de funções do 2º grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento e decrescimento, os sinais da função e os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo). (Currículo Vigente 2020)

Aula/tempo	Atividade
1ª e 2ª/ 90 min	De que gráfico e coeficientes estamos falando?
3ª e 4ª/ 90 min	Uma função para direitos do consumidor.
5ª e 6ª/ 90 min	Uma curva muito importante.
7ª e 8ª/ 90 min	Máximos e mínimos em contextos de função quadrática.

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

AULAS 1 E 2 – DE QUE GRÁFICO E COEFICIENTES ESTAMOS FALANDO?

Objetivos das aulas:

- Representar graficamente uma função polinomial do 1º grau a partir de informações numéricas;
- Construir o gráfico de uma função polinomial do 1º grau a partir de sua representação algébrica;
- Reconhecer os coeficientes linear e angular de uma função polinomial do 1º grau.

Uma definição importante

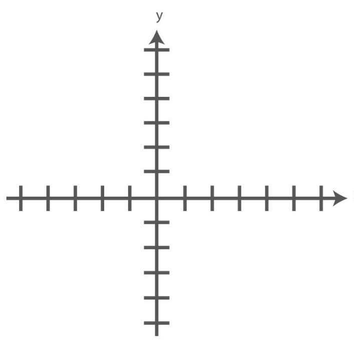
Recebe o nome de função polinomial do 1º grau ou função afim, toda função de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que a lei de associação pode ser escrita sob a forma: f (x) = ax + b, isto é, y = ax + b onde $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ e a ≠ 0.

A partir dessa definição, você irá resolver as próximas atividades.

1. O quadro a seguir mostra pares ordenados de pontos pertencentes à curva que corresponde a uma função polinomial do 1º grau de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Marque todos eles, no plano cartesiano, para representar graficamente essa função.

x	y
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

Fonte: Elaborado para fins didáticos



a. Que ente geométrico você obteve como representação gráfica da função cujo enunciado informa que os pontos pertencem?

Uma reta.

b. O gráfico de f intercepta o eixo Y quantas vezes? Em que ponto(s)?

Apenas uma vez, no ponto (0, 1).

c. É possível identificar quantas vezes e onde o gráfico intercepta o eixo X? Como?

Sim, basta observar o gráfico e perceber que a reta intercepta o eixo X, uma única vez, entre – 1 e 0.

AULAS 1 E 2 - DE QUE GRÁFICO E COEFICIENTES ESTAMOS FALANDO?

OBJETIVOS DAS AULAS

Representar graficamente uma função polinomial do 1º grau a partir de informações numéricas;
Construir o gráfico de uma função polinomial do 1º grau a partir de sua representação algébrica;
Reconhecer os coeficientes linear e angular de uma função polinomial do 1º grau.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso, régua, recursos para exibição de vídeo e internet.

INICIANDO

As atividades previstas para as Aulas 1 e 2 têm as atenções voltadas para o estudo de gráficos de funções polinomiais do 1º grau. Sugerimos, então, que a conversa inicial retome as diferentes formas de representar uma função, visto que partiremos de representações numéricas e algébricas para a construção dos gráficos.

DESENVOLVENDO

Feita essa retomada, promova uma discussão sobre a função afim. O ponto de partida pode ser o texto introdutório da atividade 1. As **atividades 1 e 2** possibilitam a associação entre a representação numérica e a representação gráfica de uma mesma função, enquanto as **atividades 3 e 4** relacionam a lei de associação de funções a seus respectivos gráficos. É importante que os estudantes compreendam que, embora sejam formas distintas, as representações numéricas, algébricas ou gráficas de uma função ilustram a mesma situação de dependência entre variáveis. Os questionamentos das atividades encaminham investigações sobre os gráficos construídos. Para as **atividades 5 e 6**, as discussões trazem elementos sobre os coeficientes angular e linear da função afim a partir da observação dos gráficos de funções polinomiais do 1º grau.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, encaminhe o vídeo Carro Flex, disponível no site da UNICAMP, no endereço https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1063 e proponha um momento de diálogo em que os estudantes possam revelar, oralmente, seu entendimento sobre a função afim, bem como possíveis dúvidas que tenham ficado.

2. Em uma padaria, um forno elétrico desligado apresenta a temperatura de 30°C. Ao ser ligado, a temperatura aumenta 60°C por minuto. Nessas condições, o forno alcança a máxima temperatura possível em um dado tempo. A tabela a seguir apresenta os valores que correspondem à relação entre a temperatura interna do forno y (em graus celsius) em função do tempo x (em minutos), a partir do momento em que o forno foi ligado (x = 0), ou seja, à temperatura interna de 30°C.

Tempo (min)	0	1	2	3	4
Temperatura (°C)	30	90	150	210	270

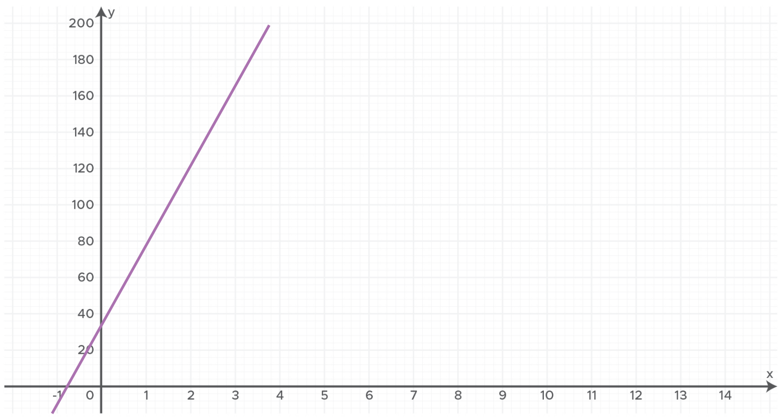
Fonte: Elaborado para fins didáticos

A partir do contexto descrito, responda:

a. Essa situação pode ser representada por uma função de que tipo? Qual é a lei de associação dessa função? Justifique.

O contexto envolve uma função afim. Como a temperatura inicial do forno é de 30°C e aumenta 60°C por minuto, é possível escrever: $y = 60x + 30$.

b. Represente esse contexto por meio de um gráfico, utilizando o plano cartesiano indicado no espaço a seguir.



Fonte: Elaborado para fins didáticos

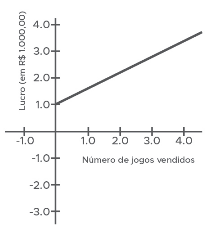
E o gráfico da função afim?

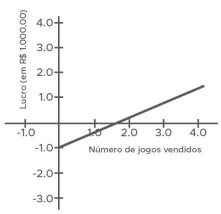
Nas atividades 1 e 2, há situações envolvendo funções polinomiais do 1º grau, também chamadas de funções afins. O gráfico de toda função polinomial do 1º grau é uma reta.

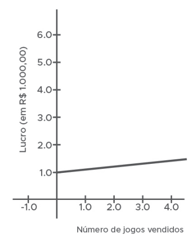
CONVERSANDO COM O PROFESSOR

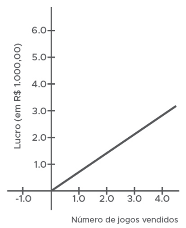
É interessante destacar que, nessa situação, foi necessário utilizar escalas diferentes para os eixos, no sentido de facilitar a construção e a visualização do gráfico.

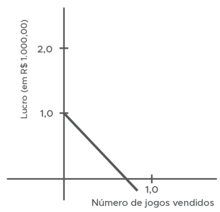
3. (ENEM - 2009) Uma empresa produz jogos pedagógicos para computadores com custos fixos de R$ 1.000,00 e custos variáveis de R$ 100,00 por unidade de jogo produzida. Desse modo, o custo total para x jogos produzidos é dado por C(x)= 1 + 0,1x (em R$ 1.000,00). A gerência da empresa determina que o preço de venda do produto seja de R$ 700,00. Com isso, a receita bruta para x jogos produzidos é dada por R(x)= 0,7x (em R$ 1.000,00). O lucro líquido, obtido pela venda de x unidades de jogos, é calculado pela diferença entre a receita bruta e os custos totais. O gráfico que modela corretamente o lucro líquido dessa empresa, quando são produzidos x jogos, é:

a.


b.


c.


d.


e.


Fonte: Elaborado para fins didáticos

RESPOSTA: B

O lucro é calculado pela diferença entre a receita e o custo, então, temos que:

L(x) = R(x) - C(x) = 0,7x - (1+0,1x) = 0,7x - 1 - 0,1x = 0,6x - 1.

Portanto, o lucro é escrito por: L(x)= 0,6x - 1. A exemplo de pontos que pertencem ao gráfico dessa função lucro, podemos pensar em:

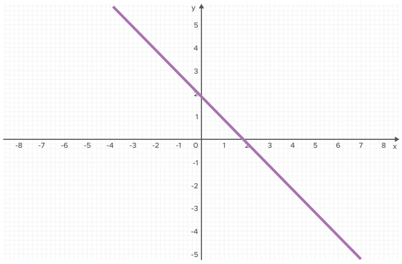
Para x = 0 → y = -1, logo temos o ponto (0, - 1)

Para y = 0 → $x = \frac{1}{0,6} = \frac{1}{\frac{6}{10}} = 1 \cdot \frac{10}{6} = \frac{10}{6} \cong 1,6666\ldots$ **, logo temos o ponto (1,666..., 0)**

Portanto, das alternativas apresentadas, o gráfico que contém esses pontos é o da letra B.

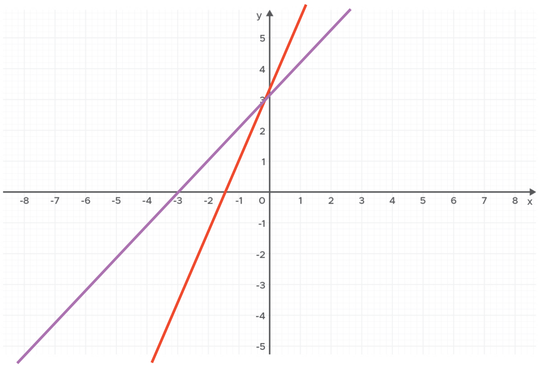
4. Numa função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ do tipo: f(x) = ax + b, ocorrem: f(-1) = 3 e f(1) = 1. Nessas condições, temos um desafio para você: represente graficamente essa função e utilize esse gráfico para descobrir quanto vale f(3).

RESPOSTA: Pelas informações que o enunciado fornece, temos que os pontos com coordenadas (- 1, 3) e (1, 1) pertencem ao gráfico dessa função. Dessa forma, podemos construir a seguinte figura no plano cartesiano:



Pelo gráfico, notamos que quando x é igual a 3, y vale – 1.

5. Represente, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções f e g: f(x)= x + 3 e g(x)= 2x + 3.



Fonte: Elaborados para fins didáticos

Agora, responda:

a. Essas retas são paralelas? Em que pontos tais retas interceptam o eixo Y?

As retas não são paralelas, são concorrentes, pois têm um ponto em comum, que é o ponto em que ambas interceptam o eixo Y: (0, 3).

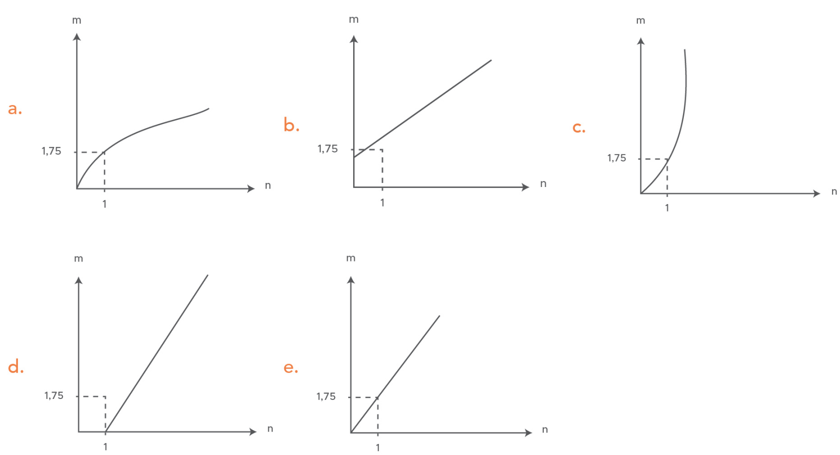
b. Utilize as leis de associação das duas funções para conferir que as respostas do item "a" poderiam ter sido dadas antes mesmo dos gráficos.

Utilizando a lei de associação de cada função, temos que:

FUNÇÃO	COEFICIENTE ANGULAR	COEFICIENTE LINEAR
f	1	3
g	2	3

Os coeficientes angulares distintos garantem que as retas têm inclinações diferentes em relação ao eixo X e, portanto, não são paralelas. Coeficientes lineares iguais mostram que as retas interceptam o eixo Y no mesmo ponto: (0, 3).

6.(ENEM – 2011) As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma. Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é:



Fonte: Elaborado para fins didáticos

RESPOSTA: E. Considerando Q como a quantidade de quilogramas de frutas e P o preço, podemos escrever: P = 1,75·Q de modo que acontece:

Para Q = 0, o preço será: P = 0; para Q = 1, o preço será: P = 1,75; para Q = 2, o preço será: P = 3,5;

Tais informações revelam que o preço cresce proporcionalmente à quantidade de quilos de frutas, por isso, o tipo de função mais adequado para indicar tal situação é a função do 1º grau, cujo gráfico é uma reta. Nesse caso particular, a reta passa pelo ponto de coordenadas (0,0), logo, a alternativa que mostra a resposta correta é a letra E.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Converse com os estudantes sobre o caso particular da função: f(x)= ax, isto é, y= ax onde $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, a ≠ 0 e b = 0 em f(x) = ax + b. Referimo-nos à função linear que se apresenta quando b = 0. Discuta com os estudantes as particularidades do gráfico desse tipo de função. É interessante que os estudantes percebam que, para funções do tipo f(x)= ax, o gráfico é uma reta que passa pela origem do plano cartesiano e isso porque quando x= 0, temos que y= 0, ou seja, o ponto (0,0) pertence ao gráfico, como acontece na atividade 6.

Caso considere interessante, sugerimos que indique, como atividade complementar, o vídeo Carro Flex, disponível no site da UNICAMP, no endereço https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1063. É um vídeo com cerca de 9 minutos com objetivos de recordar conceitos básicos relacionados a funções e exemplificar o uso de funções no cotidiano em que são abordadas ideias relativas a: coeficiente angular; domínio de uma função; funções; função inversa; função do 1º grau / função linear / função afim.

AULAS 3 E 4 – UMA FUNÇÃO PARA DIREITOS DO CONSUMIDOR.

OBJETIVO DAS AULAS

Compreender o significado dos coeficientes angular e linear da função polinomial do 1º grau.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso, régua, recursos para exibição de vídeo e internet.

INICIANDO

As Aulas 3 e 4 preveem o estudo dos coeficientes angular e linear da função afim. Podem ser iniciadas observando a atividade 6, das Aulas 1 e 2, que trazem algumas ideias referentes ao reconhecimento de tais coeficientes.

DESENVOLVENDO

Para a **atividade 1**, propomos a exibição do vídeo Direitos do consumidor, disponível na plataforma Matemática Multimídia da UNICAMP (https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1091). O vídeo tem duração de 10 min e dispõe de reflexões envolvendo a função afim, contemplando gráfico e os coeficientes angular e linear. Oriente os estudantes a registrarem pontos que consideram importantes no vídeo. Os demais questionamentos a respeito são reflexões sobre os conceitos discutidos na película. A **atividade 2** também dispõe de perguntas sobre os coeficientes da função afim. Após essas duas atividades, ressalte as informações contidas na caixa de texto que falam sobre crescimento e decrescimento da função afim. As **atividades 3 e 4** apontam para observação dos coeficientes, partindo-se do gráfico de funções afins. Para todos os momentos, professor, a ideia é incentivar os estudantes a se envolverem em processos de investigação matemática. A última atividade, para essas aulas, apresenta um item do ENEM, contudo, a proposição é que reflitam e respondam a alguns questionamentos a respeito desse enunciado em particular.

AULAS 3 E 4 – UMA FUNÇÃO PARA DIREITOS DO CONSUMIDOR

Objetivo das aulas:
- Compreender o significado dos coeficientes angular e linear da função polinomial do 1º grau.

1. Você irá assistir ao vídeo intitulado Direitos do consumidor, no endereço https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1091, que apresenta um contexto em que o conceito de função polinomial do 1º grau é abordado. Esteja atento, utilize o espaço indicado para anotar informações que considerar importantes e, depois, responda aos questionamentos que seguem:

a. Anote as informações, que considerar importantes, do vídeo.

RESPOSTA PESSOAL: Embora a resposta seja pessoal, é importante que o estudante atente para informações que dizem respeito a: conceito de função, característica, gráfico e coeficientes angular e linear da função afim.

b. Explique por que a personagem sugere o uso de uma função afim para representar o contexto.

A função afim é indicada porque variações iguais entre a quantidade de minutos de uso do celular correspondem a variações iguais do valor da conta do telefone. Isso faz com que a razão entre essas variações seja uma constante.

c. Como a personagem define o coeficiente angular de uma função afim?

O coeficiente angular da função afim é definido como sendo o valor constante obtido pela razão entre as variações das grandezas envolvidas na função.

d. Que outras informações são apresentadas a respeito do coeficiente angular?

São apresentadas informações como: o coeficiente angular é o coeficiente “a” na expressão $f(x) = ax + b$. Além disso, indicam que quando “a” é positivo, a função é crescente e se “a” é negativo, a função é decrescente.

e. O que é dito sobre o termo b?

A personagem explica que esse valor fixo é chamado de coeficiente linear da reta e indica a ordenada no ponto em que a reta intercepta o eixo Y.

Sobre os coeficientes da função afim

O gráfico da função afim é uma reta em que a, que é o coeficiente de x, é chamado de coeficiente angular e b é o coeficiente linear. O coeficiente angular indica a inclinação da reta em relação ao eixo horizontal. O coeficiente linear, representado pela constante b, informa onde a reta intercepta o eixo Y, mais precisamente, b é a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo vertical.

2. Diante disso, vamos estudar duas funções, dos reais nos reais, indicadas por:

FUNÇÃO 1: $y = 2x - 1$

FUNÇÃO 2: $y = -2x - 1$

a. Sobre os coeficientes informe:

FUNÇÃO	COEFICIENTE ANGULAR	COEFICIENTE LINEAR
FUNÇÃO 1	2	-1
FUNÇÃO 2	-2	-1

Fonte: Elaborado para fins didáticos

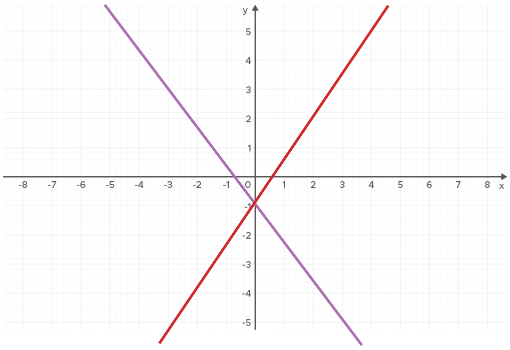
b. As funções têm o mesmo coeficiente linear. O que isso informa?

Informa que as retas, que são os gráficos das funções, interceptam o eixo Y no mesmo ponto, no ponto de ordenada – 1, ou seja, em (0, - 1).

c. Compare o coeficiente angular da FUNÇÃO 1 com o da FUNÇÃO 2 e escreva um comentário argumentando sobre as informações que estes coeficientes representam.

As funções indicadas têm coeficiente angulares diferentes, isso significa que as retas, que representam graficamente tais funções, têm inclinações diferentes. Em particular, a FUNÇÃO 1, cujo coeficiente angular é positivo, é crescente, enquanto a FUNÇÃO 2, com coeficiente angular negativo, é decrescente.

d. Construa o gráfico da FUNÇÃO 1 e da FUNÇÃO 2 usando um único plano cartesiano disponível a seguir.



Fonte: Elaborado para fins didáticos

FINALIZANDO

O encerramento das aulas pode acontecer com a fala dos estudantes sintetizando informações contidas no vídeo. É indispensável que, nesse momento, indiquem o que realmente aprenderam e as dificuldades enfrentadas para a realização das atividades.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Sugerimos que reforce, com os estudantes, que quando a > 0, a função é crescente. Para a = 0, temos uma função constante que não é polinomial do 1º grau. E que, quando a < 0, a função é decrescente. Consideramos que indicar gráficos com esses casos pode enriquecer a discussão.

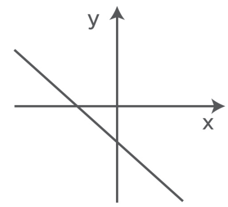
e. Observe atentamente os gráficos e comente sobre o significado dos coeficientes em cada reta.

Os gráficos confirmaram que ambas as retas interceptam o eixo Y no ponto (0, -1) e que têm inclinações diferentes em relação ao eixo X.

Crescimento e decrescimento da função afim

O coeficiente a da função afim revela a inclinação da reta em relação ao eixo horizontal e, nesse sentido, informa se a função é crescente, decrescente ou constante.

3. (SARESP - 2015) Dado o gráfico da função f(x)= ax + b, em que a e b são constantes reais, é correto concluir que:



Fonte: Elaborado para fins didáticos

a. a > 0 e b > 0

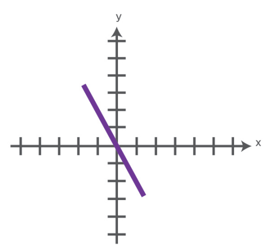
b. a > 0 e b < 0

c. a < 0 e b > 0

d. a < 0 e b < 0

RESPOSTA: D. A função é decrescente, logo, a < 0. Além disso, intercepta o eixo Y na parte negativa, então, b < 0, o que nos leva para a alternativa D.

4. O plano cartesiano a seguir apresenta o gráfico de uma função. Esteja atento aos detalhes desse gráfico e responda ao que se pede:



Fonte: Elaborado para fins didáticos

a. O coeficiente angular dessa função é um número positivo ou negativo? Por quê?

O gráfico nos indica que a função tem coeficiente angular negativo, já que a reta corresponde a uma função decrescente.

b. O que você pode afirmar sobre o coeficiente linear da função? Explique.

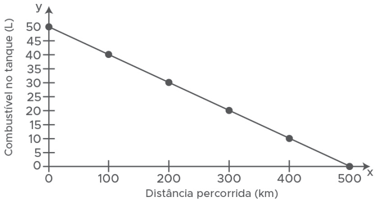
Notamos, no gráfico, que a reta intercepta a origem dos eixos, ou seja, passa pelo ponto de coordenadas (0, 0). Isso informa que o coeficiente linear dessa função é igual a 0.

c. Escreva uma possível representação algébrica para essa função. O que levou você a pensar nessa possibilidade?

Uma possível lei de associação para essa função é: y=ax, sendo a, que é o coeficiente angular da reta, um número negativo por ser uma função decrescente. Além disso, b=0 porque a reta intercepta o eixo Y em um ponto de ordenada nula.

5. Vejamos um problema que apareceu no ENEM – 2018.

(ENEM – 2018) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).



A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é:

a. y = -10x + 500

b. $y=\frac{-x}{10}+50$

c. $y=\frac{-x}{10}+500$

d. $y=\frac{x}{10}+50$

e. $y=\frac{x}{10}+500$

RESPOSTA B

Com a leitura do enunciado, responda:

a. As alternativas possíveis para a resposta da questão são funções de que tipo?

Em todas as alternativas temos funções polinomiais do 1º grau.

b. A resposta correta está indicada na letra B das alternativas. Qual é o coeficiente angular da função? Por que esse valor está adequado com o que o gráfico informa?

A alternativa B mostra que o coeficiente angular da função é $-\frac{1}{10}$. É um valor adequado por ser negativo, já que a reta representa uma função decrescente.

c. De acordo com a alternativa correta, o coeficiente linear da função é igual a 50. De fato, é isso que o gráfico mostra?

É isso que o gráfico mostra, ou seja, que a reta intercepta o eixo Y no ponto de ordenada igual a 50 e, portanto, com coordenadas (0, 50).

d. O gráfico representa o contexto descrito no enunciado e mostra claramente que os pontos (0, 50) e (500, 0) pertencem à reta que representa a função. Observando a situação considerada, explique o significado desses dois pontos em tal contexto.

O ponto (0, 50) indica que, na distância 0, o tanque tem 50 litros de combustível, isto é, informa que, no início do trajeto, o carro estava com 50 litros de combustível em seu tanque, como está informado no enunciado. Com relação ao ponto (500, 0), temos que o tanque chegou a 0 litros de combustível quando o carro percorreu 500 quilômetros de distância, ou seja, no experimento, o tanque esvaziou quando o automóvel percorreu exatamente 500 km.

AULAS 5 E 6 – UMA CURVA MUITO IMPORTANTE

Objetivos das aulas:

- Representar graficamente uma função polinomial do 2º grau a partir de sua representação numérica;
- Construir o gráfico de uma função polinomial do 2º grau a partir de sua representação algébrica;
- Compreender o significado dos coeficientes a, b e c, no gráfico de funções polinomiais do 2º grau ($f(x) = ax^2 + bx + c$).

Uma definição importante

Uma função de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função polinomial do 2º grau ou função quadrática se a lei de associação pode ser escrita na forma de: $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

O gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada de parábola.

AULAS 5 E 6 – UMA CURVA MUITO IMPORTANTE.

OBJETIVOS DAS AULAS

Representar graficamente uma função polinomial do 2º grau a partir de sua representação numérica;

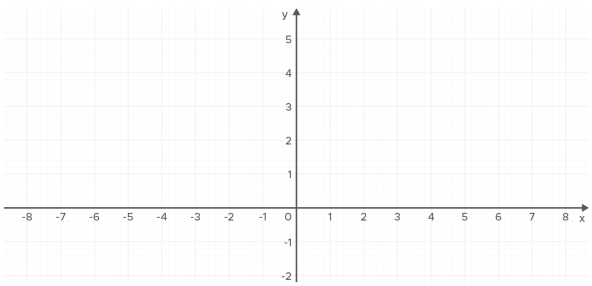
Construir o gráfico de uma função polinomial do 2º grau a partir de sua representação algébrica;

Compreender o significado dos coeficientes a, b e c, no gráfico de funções polinomiais do 2º grau ($f(x) = ax^2 + bx + c$).

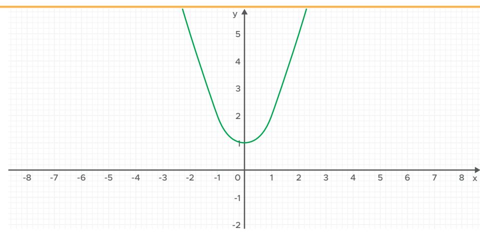
As próximas atividades envolvem essa definição. Leia com atenção e resolva cada uma.

1. Para uma função quadrática de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, indicamos alguns pares ordenados. Marque-os no plano cartesiano para representar graficamente tal função.

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	1	2	5



Fonte: Elaborado para fins didáticos



a. Qual é o nome da curva esboçada a partir das coordenadas indicadas?

A curva é chamada de parábola.

b. O gráfico de f intercepta o eixo Y quantas vezes? Indique as coordenadas desse(s) ponto(s).

Apenas uma vez, no ponto (0, 1).

c. É possível identificar se e onde o gráfico intercepta o eixo X? Explique.

Sim. Foi possível notar, no gráfico, que a parábola não intercepta o eixo X.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Realização das atividades de forma individual.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

Nesse momento, começamos o estudo da função polinomial do 2º grau. O início pode acontecer com a leitura coletiva do texto introdutório apresentado antes da atividade

1.

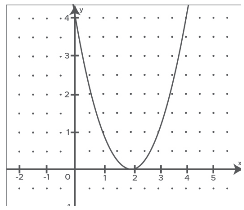
DESENVOLVENDO

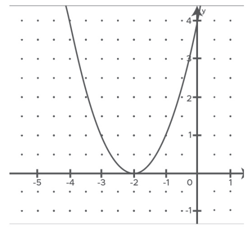
As atividades favorecem, em particular, o estudo da função quadrática por meio do seu gráfico. Há atividades de construção de gráfico e outras de observação, no entanto, todas envolvem propostas de análise desse tipo de função. Dessa forma, propomos a realização das atividades de maneira individual, mas a correção poderá ser realizada por meio de conversa entre toda a turma. As atividades de 1 a 5 tratam principalmente da representação gráfica da função quadrática, com questionamentos que levam ao estudo das características gerais desse tipo de função. A atividade 6 relaciona a noção de proporcionalidade de uma grandeza com o quadrado de outra, fazendo essa indicação através de elementos algébricos escritos em forma de função quadrática. É interessante discutir sobre essa temática, ressaltando-se que a proporcionalidade já tem sido estudada no decorrer da Educação Básica em alguns anos escolares.

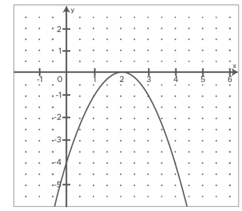
FINALIZANDO

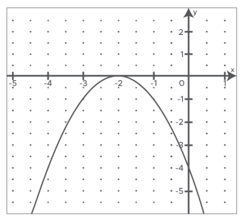
Para finalizar, converse com a turma e permita que eles sinalizem o aprendizado construído, até agora, sobre as funções polinomiais de 1º e de 2º graus. Se julgar conveniente, professor, promova a leitura coletiva das atividades já realizadas, no sentido de retomar os conceitos tratados.

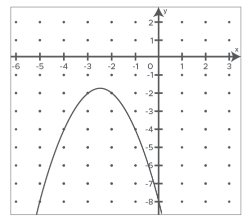
2. (SARESP) Dada a função $f(x) = x^2 - 4x + 4$, o gráfico que melhor a representa no plano cartesiano é:

a. 

b. 

c. 

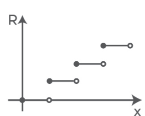
d. 

e. 

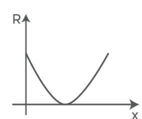
Fonte: Elaborado para fins didáticos

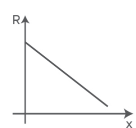
RESPOSTA: A. Pela representação algébrica, temos que, quando $x = 0$, $y = 4$ e quando $y = 0$, $x = 2$. Dessa forma, a curva passa pelos pontos (0, 4) e (2, 0). A única alternativa que contempla essa informação é a letra A.

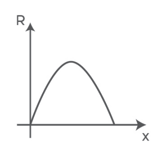
3. (ENEM - 2000) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se: $R(x) = K \cdot x\,(P - x)$, onde k é uma constante positiva característica do boato. O gráfico cartesiano que melhor representa a função R(x), para x real, é:

a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

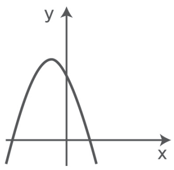
Fonte: Elaborado para fins didáticos

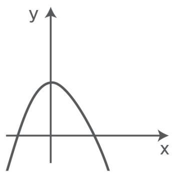
RESPOSTA: E. Reescrevendo a representação algébrica da função, temos:

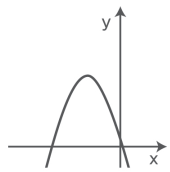
$R(x) = K \cdot x\,(P - x) = K \cdot x \cdot P - K \cdot x \cdot x = -Kx^2 + KPx$

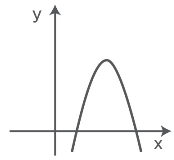
Como o coeficiente de x^2 é negativo, a parábola tem concavidade para baixo. Logo, a única alternativa que atende à essa condição é a letra E.

4. (SARESP) Se uma função do 2º grau tem o coeficiente "a" negativo, "b" negativo e "c" nulo, então, o gráfico que melhor a representa é o da alternativa:

a.


b.


c.


d.


Fonte: Elaborado para fins didáticos

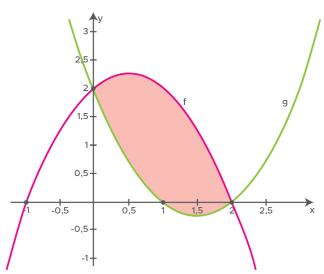
RESPOSTA: C. Como c é igual a zero, a parábola passa pela origem, portanto, a resposta correta é a letra C.

Sobre os coeficientes a e c da função quadrática

O coeficiente a da função quadrática indica a posição da concavidade. Quando $a > 0$, a parábola é voltada para cima e quando $a < 0$, a parábola é voltada para baixo.

Na função quadrática, o coeficiente c indica onde a parábola intercepta o eixo Y. O valor de c corresponde à ordenada do ponto em que a curva intercepta o eixo vertical.

5. Observe os gráficos das funções f e g e responda ao que se pede:



Fonte: Elaborado para fins didáticos

a. Os gráficos revelam que as curvas correspondem a que tipo de função? Por quê?

São funções quadráticas, pois os gráficos são parábolas.

b. O que podemos garantir sobre o coeficiente a da função f? E da função g? Explique as suas respostas.

Na função f, o coeficiente a é negativo porque a parábola está com a concavidade voltada para baixo. Em g, temos que a é um número positivo, pois a parábola tem a concavidade voltada para cima.

c. Quais pontos essas funções têm em comum?

Essas funções se interceptam nos pontos: (0, 2) e (2, 0).

d. A lei de associação de f e de g tem, pelo menos, um coeficiente em comum. Qual? Justifique.

Essas duas funções têm em comum o coeficiente c, que vale 2, já que é onde as duas parábolas interceptam o eixo Y.

6. (AAP- 2018) A tabela traz a proporcionalidade direta entre a grandeza Y e o quadrado de X. A função que pode ser escrita a partir dos dados dessa tabela é:

x	1	2	3	4
y	5	20	45	80

Fonte: Elaborado para fins didáticos

a. Y = X + 15

b. $Y = X^2 + 15$

c. $Y = X^2 + 5X$

d. Y = 5X

e. $Y = 5X^2$

RESPOSTA: E

A única alternativa que indica corretamente a proporcionalidade direta entre a grandeza Y e o quadrado de X, nas condições que relacionam os valores informados no enunciado, é a letra E.

AULAS 7 E 8 – MÁXIMOS E MÍNIMOS EM CONTEXTOS DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

Objetivos das aulas:
- Analisar situações envolvendo ideia de máximo e mínimo em contexto;
- Identificar os intervalos de crescimento e decrescimento de funções polinomiais do 2º grau;
- Estudar o sinal da função polinomial do 2º grau.

O vértice da parábola

Uma função polinomial do 2º grau tem intervalo crescente e intervalo decrescente. O ponto em que a concavidade muda de sentido e, portanto, a função deixa de crescer e passa a decrescer, ou vice-versa, é o vértice da parábola. Ele é a extremidade dessa curva, ou seja, é o ponto em que a função assume o seu máximo ou mínimo valor.

Para determinar as coordenadas do vértice da parábola, podemos utilizar:

$$x_V = \frac{-b}{2a} \qquad y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$

AULAS 7 E 8 – MÁXIMOS E MÍNIMOS EM CONTEXTOS DE FUNÇÃO QUADRÁTICA.

OBJETIVOS DAS AULAS

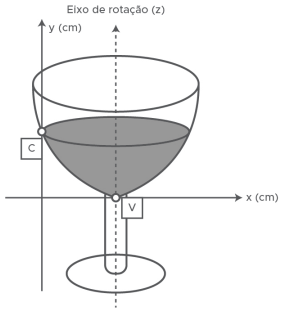
Analisar situações envolvendo ideia de máximo e mínimo em contexto;
Identificar os intervalos de crescimento e decrescimento de funções polinomiais do 2º grau;
Estudar o sinal da função polinomial do 2º grau.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

1. (ENEM – 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura. A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros.

Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é:



Fonte: Elaborado para fins didáticos

a. 1.

b. 2.

c. 4.

d. 5.

e. 6.

RESPOSTA: E. A função quadrática, indicada no enunciado, tem duas raízes reais iguais, já que seu gráfico toca o eixo X em um único ponto. Isso ocorre quando o discriminante (Δ = b^2 - 4ac) dessa função é igual à zero. Logo,

$$\Delta = 0 \Longrightarrow (-6)^2 - 4\cdot\frac{3}{2}\cdot C = 0 \Longrightarrow 6C = 36 \Longrightarrow C = 6$$

2. (AAP – 2018) Uma bola é arremessada para o alto. A altura "a", em metros, atingida pela bola a partir do ponto de lançamento, depois de t segundos, é dada pela expressão $a(t)= 20t - 5t^2$. Qual a altura máxima que essa bola atingirá?

a. 2

b. 4

c. 25

d. 20

e. 40

RESPOSTA: D. A altura máxima da bola é definida pela ordenada do vértice, então:

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(20^2-4\cdot(-5)\cdot 0)}{4\cdot(-5)} = \frac{-400}{-20} = 20$$

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

Ainda sobre o estudo da função polinomial do 2º grau, o início da aula pode acontecer com diálogo sobre as atividades realizadas nas aulas anteriores, retomando-se as características desse tipo de função, seja na representação algébrica ou gráfica.

DESENVOLVENDO

Após revisar o que já foi estudado sobre a função quadrática, promova a leitura do texto introdutório apresentado na atividade 1 e discuta, com a turma, o significado do vértice da parábola. Disponibilize tempo para a realização das atividades 1, 2, 3 e 4 que são itens do ENEM, da AAP e do SARESP que contemplam ideias de máximo e mínimo.

Professor, enquanto os estudantes, nas duplas, solucionam os problemas, é importante que circule pela sala no sentido de acompanhá-los, mas sem antecipar informações. Essas atividades devem ser corrigidas com a participação ativa dos estudantes, disponibilizando como pensaram para solucionar cada uma. A atividade 5 propõe o preenchimento de um quadro resumo que mostra as possibilidades de posicionamentos das parábolas a partir do estudo do coeficiente a e do Δ da função. Para as atividades 6 e 7, continuamos estudando o gráfico da função quadrática. Promova a correção por meio de um debate em que as atividades são detalhadas, tanto com o olhar nos gráficos quanto nas informações numéricas e algébricas. A atividade 8 finaliza a proposta para essas aulas, solicitando que o estudante pense e exemplifique uma função quadrática, a partir de características descritas para o seu gráfico.

FINALIZANDO

Para finalizar, promova um momento de socialização.

Cada dupla pode informar oralmente o que aprendeu sobre a função quadrática e as dificuldades ou dúvidas que tenham ficado no decorrer da realização das atividades. Esse é um rico momento de resumir os principais conceitos tratados, bem como de esclarecer possíveis dúvidas.

3. (AAP – 2018) Uma empresa produz certo tipo de peça que tem seu custo definido pela função $C(x) = 2x^2 - 40x + 2000$. A quantidade de peças que deve produzir para que o custo seja mínimo é:

a. 10

b. 20

c. 30

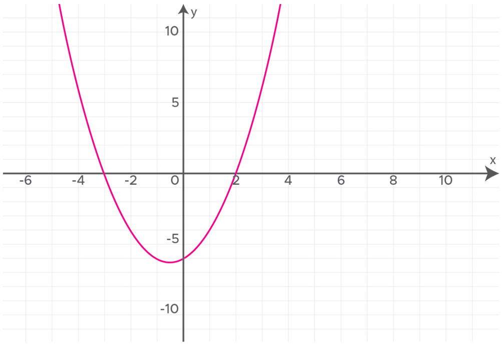
d. 40

e. 80

RESPOSTA: A. O custo mínimo representa o valor de x do vértice, logo, temos:

$$x_V = \frac{-(-40)}{2 \cdot 2} = \frac{40}{4} = 10$$

4. (SARESP) Observe a representação gráfica da função f(x). Em relação à f(x), pode-se afirmar que



a. O seu valor é negativo para todo $x \in [-\infty, -3]$

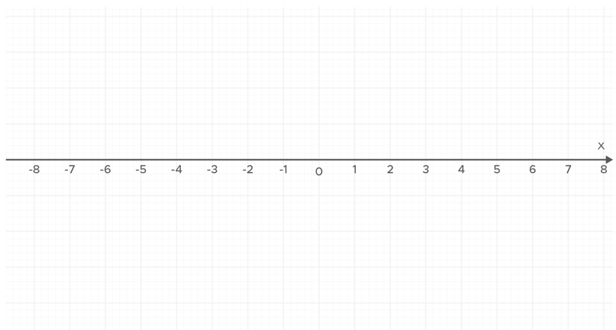
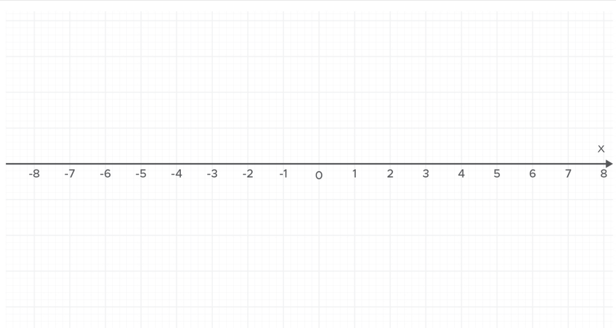
b. As duas raízes não são números reais.

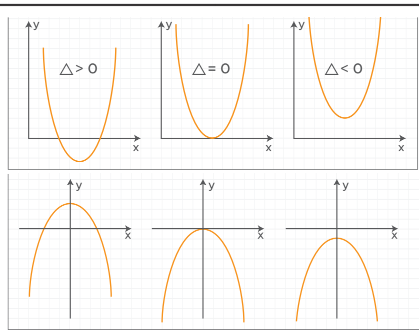
c. O seu valor mínimo é positivo.

d. O seu valor é negativo para todo $x \in [-3, 2]$

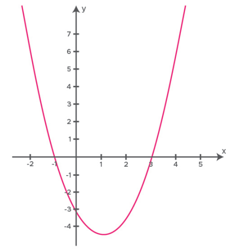
RESPOSTA: D. A função tem duas raízes reais e distintas, pois intercepta o eixo X em dois lugares diferentes. Além disso, todos os pontos pertencentes ao intervalo entre essas raízes têm ordenadas negativas, isso significa que o valor da função é negativo para todo x ∈ [-3,2].

5. A seguir há um quadro resumo com informações quanto ao coeficiente a e o valor de Δ da função quadrática. Utilize os planos cartesianos para esboçar gráficos que atendam às condições indicadas nas linhas e nas colunas.

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$
$a > 0$			
$a < 0$			



6. Sobre a função $f(x)= x^2 - 2x - 3$, é correto afirmar que:



Fonte: Elaborado para fins didáticos

a. seus valores são negativos para qualquer valor de x.

b. é crescente para $x > 1$.

c. tem somente valores positivos para $x > 0$.

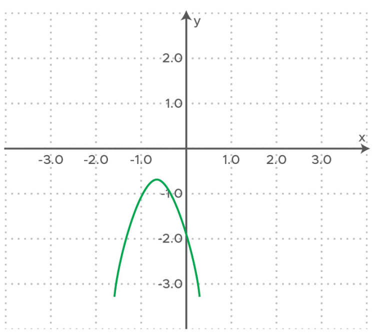
d. é decrescente para $-1 < x < 3$.

e. seu menor valor ocorre quando $x = -1$.

RESPOSTA: B

Seu vértice tem x = 1. Antes dele, a função é decrescente e após o vértice, ou seja, para x > 1, os valores de y crescem e, portanto, a função é crescente.

7. A função $y = f(x)$, dos reais nos reais, está representada graficamente. Pode-se afirmar que a função f:



Fonte: Elaborado para fins didáticos

a. tem raízes reais negativas.

b. possui valor mínimo.

c. tem raízes reais positivas.

d. tem valor máximo igual a -1.

e. não possui raízes reais.

RESPOSTA: E

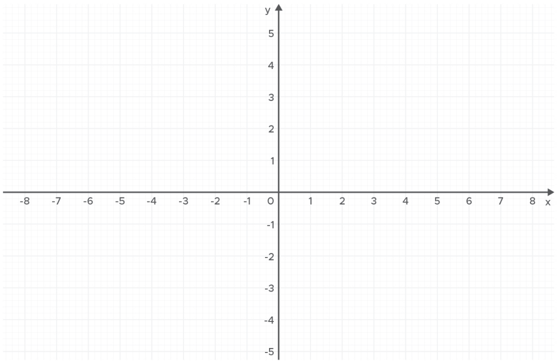
A parábola não intercepta o eixo X, logo, a função não possui raízes reais.

8. Pense em uma função cujo gráfico seja uma parábola que atenda às seguintes condições: tenha concavidade voltada para cima; intercepte o eixo Y na origem e intercepte o eixo X em dois pontos distintos.

a. Esboce o gráfico dessa função que você pensou.

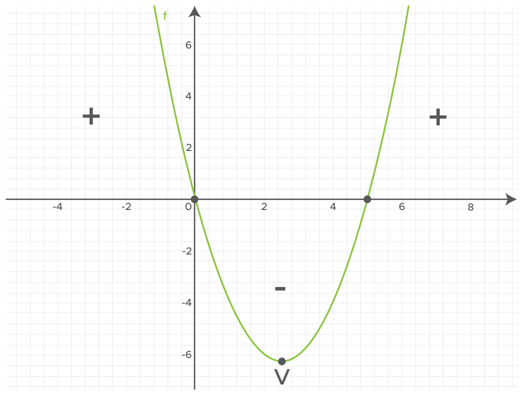
b. Marque, no gráfico, onde a função é positiva, negativa e nula.

c. Informe se há máximo ou mínimo.



Fonte: Elaborado para fins didáticos

RESPOSTA PESSOAL: Embora seja uma resposta pessoal, uma opção adequada pode ser vista na figura abaixo. A respeito dessa função, ainda informamos que admite valor mínimo que é indicado pelo vértice da parábola (ponto V).



ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

2ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

ANOTAÇÕES

2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

OLÁ, PROFESSOR! OLÁ, PROFESSORA!

Os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam Geometria - Trigonometria: razões trigonométricas nos triângulos retângulos; e resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.

As escolhas das habilidades foram feitas por meio das análises realizadas dos resultados de avaliações internas e externas (diagnóstico de entrada e SARESP), que revelaram fragilidades dos estudantes com relação às habilidades: saber usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos em diferentes contextos e conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. (Currículo Vigente, 2020)

Aula/Tempo	Atividade
1ª e 2ª/ 90 min	Triângulos para medidas inacessíveis
3ª e 4ª/ 90 min	Uma boa estratégia para a resolução de problemas
5ª e 6ª/ 90 min	Para além dos triângulos retângulos
7ª e 8ª/ 90 min	Ainda sobre triângulos quaisquer

Professor, para ajudá-lo nessa ação, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenal acerca das Sequências de Atividades, nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPCs). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, as atividades pensadas para esse caderno propõem o envolvimento dos estudantes em processos de resolução de problemas. Para todas as aulas, trazemos blocos de atividades abordando alguns conceitos relacionados à trigonometria. Assim, sugerimos que o foco seja a resolução desses problemas de maneira orientada às quais os estudantes podem vivenciar a realização das etapas de resolução de problemas pensadas por Polya (1995), a saber: compreender o problema, planejar sua resolução, executar o plano e examinar a solução.

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

AULAS 1 E 2 – TRIÂNGULOS PARA MEDIDAS INACESSÍVEIS

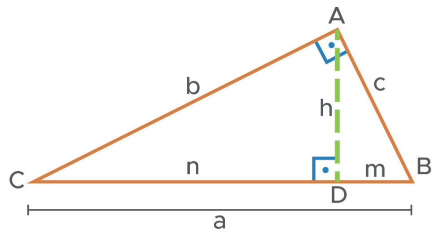
Objetivo das aulas:
- Utilizar as relações métricas do triângulo retângulo na resolução de problemas.

Estudo dos triângulos retângulos

Desde os gregos, cálculos utilizando triângulos retângulos são realizados, em particular, para a determinação de medidas inacessíveis. Raio da terra, distância da terra à lua, largura de rios e altura de árvores, montanhas ou prédios são exemplos de situações em que tais aplicações são possíveis.

Cálculos com triângulos retângulos

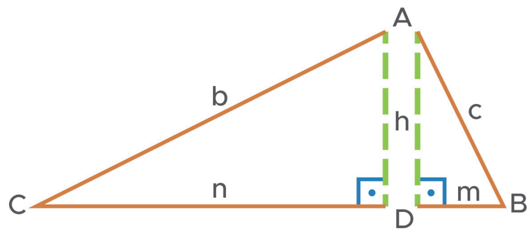
Dentre os cálculos envolvendo triângulos retângulos, existem algumas relações entre as medidas desse polígono que muito podem auxiliar na resolução de problemas. Observe a figura:



Fonte: Elaborado para fins didáticos

Nesse triângulo retângulo, temos que:

- a = hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto);
- b, c = catetos (lados que formam o ângulo reto);
- m, n = projeções dos catetos;
- h = altura do triângulo referente à hipotenusa.



Fonte: Elaborado para fins didáticos

AULAS 1 E 2 – TRIÂNGULOS PARA MEDIDAS INACESSÍVEIS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

Professor, espera-se que os estudantes já tenham estudado sobre triângulos retângulos em ano/série anterior. Assim, sugerimos que, para o início dessas aulas, haja uma conversa de retomada, destacando-se a importância desse polígono para diversos contextos da vida real, sobretudo o seu uso para garantir a rigidez em estruturas de portões, tetos de construções, base para móveis projetados, entre outras tantas. Questione, por exemplo, se eles entendem por que os triângulos são tão usados na construção civil e na produção de móveis por encomenda. Além disso, é pertinente verificar o que os estudantes lembram com relação aos cálculos com triângulos retângulos.

DESENVOLVENDO

Após essas discussões iniciais, promova a leitura coletiva dos textos introdutórios, que trazem informações sobre as relações métricas dos triângulos retângulos. Informe também que as atividades previstas para essas aulas são itens do SARESP e do ENEM que relacionam contextos que envolvem cálculos com triângulos retângulos, em particular, as suas relações métricas. Oriente que a leitura dos enunciados deve ser realizada com atenção para a compreensão do problema e a percepção dos dados referentes ao contexto. Ademais, que atentem para a relação métrica adequada para facilitar a resolução de cada problema. Propomos que as atividades para as aulas 1 e 2 sejam realizadas em dois blocos.

Para o primeiro bloco, os estudantes devem realizar as atividades de 1 a 4. Depois de resolverem o referido bloco, disponibilize o momento para correção com participação dos estudantes, que poderão ir à lousa realizar seus cálculos e explicar seu raciocínio aos demais. Nesse momento, é importante o envolvimento de todos. Após essa etapa, promova a realização do segundo bloco, que consiste em solucionar as atividades de 5 a 7. Nas duplas, os estudantes irão aplicar as relações métricas nos triângulos retângulos para buscar a solução de cada problema. Novamente, sugerimos o tempo para socialização das resoluções na lousa, que favorecerá o aumento do repertório matemático dos estudantes, bem como o desenvolvimento de habilidades de argumentação e comunicação.

A partir dos triângulos retângulos semelhantes ACD e ABD, temos as seguintes relações métricas:

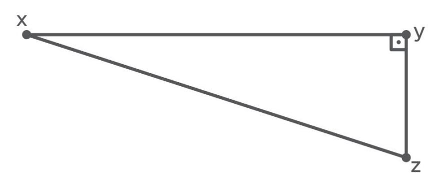
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n \qquad \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c \qquad \frac{n}{h} = \frac{h}{m} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

Além dessas, temos o Teorema de Pitágoras: $b^2 + c^2 = a^2$

1. (SARESP – 2011) Aninha foi visitar suas amigas. Ela dirigiu seu automóvel do ponto x, onde fica sua casa, até a casa de Rosali, no ponto y, percorrendo 12 km. Em seguida, ela dirigiu mais 9 km até a casa de Milena, no ponto z, conforme a figura. Quantos quilômetros Aninha teria percorrido, em linha reta, se fosse direto de sua casa para a casa de Milena?

a. 36 km
b. 24 km
c. 15 km
d. 39 km
e. 21 km

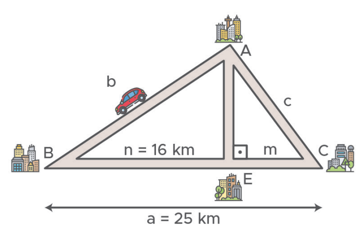


RESPOSTA: C

$$a^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow a^2 = 144 + 81 \Rightarrow a = \sqrt{225} \Rightarrow a = 15$$

Logo, Aninha percorreria 15 km se tivesse ido direto até a casa de Milena.

2. (SARESP) Um motorista vai da cidade A até a cidade E passando pela cidade B, conforme mostra a figura. Quanto ele percorreu?



RESPOSTA:

$$b^2 = a \cdot m \Rightarrow b^2 = 25 \cdot 16 \Rightarrow b = \sqrt{400} \Rightarrow b = 20$$

O motorista percorreu ao todo: 20 km + 16 km = 36 km

FINALIZANDO

Para finalizar, é interessante retomar o uso recorrente dos triângulos retângulos em contextos variados e, nesse sentido, destacar que problemas envolvendo esse tipo de polígono aparece com frequência em avaliações de larga escala. A conversa final pode ressaltar as relações métricas dos triângulos retângulos, com destaque ao Teorema de Pitágoras, já que é uma das mais usuais. Questione sobre tais relações para possibilitar que os estudantes sinalizem aprendizados, dúvidas e dificuldades.

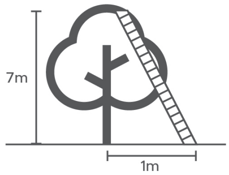
3. (SARESP - 2005) A altura de uma árvore é 7 m. Será fixada uma escada a 1 m de sua base para que um homem possa podar os seus galhos. Qual o menor comprimento que esta escada deverá ter?

a. $2\sqrt{2}$ m

b. $4\sqrt{2}$ m

c. $5\sqrt{2}$ m

d. $7\sqrt{2}$ m



RESPOSTA: C

$$x^2 = 7^2 + 1^2 \Rightarrow x^2 = 49 + 1 \Rightarrow x = \sqrt{50} \Rightarrow x = \sqrt{2 \cdot 25} \Rightarrow x = 5\sqrt{2}$$

O menor comprimento que a escada deverá ter é de $5\sqrt{2}$ m.

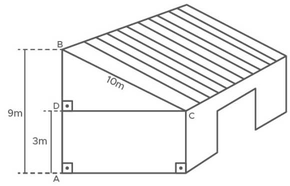
4. (SARESP – 2013) Para sustentar o telhado de um galpão cuja parede tem 3 metros de altura, João colocou um conjunto de vigas, medindo, cada viga, 10 metros de comprimento. Na figura, uma delas aparece apoiada nos pontos B e C. A altura máxima do telhado, isto é, a distância AB é igual a 9 metros. Pode-se concluir que a medida CD da parede do galpão mede, em metros:

a. 6

b. 8

c. 10

d. 12



RESPOSTA: B

$$10^2 = x^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = 100 - 36 \Rightarrow x^2 = \sqrt{64} \Rightarrow x = 8$$

A medida CD da parede do galpão mede 8 m.

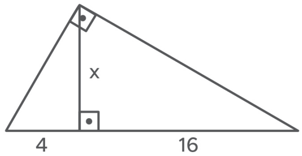
5. A figura seguinte mostra um triângulo retângulo e informa as medidas de alguns de seus elementos. Observando com atenção os valores fornecidos, qual é o valor de x?

a. 10

b. 8

c. 6

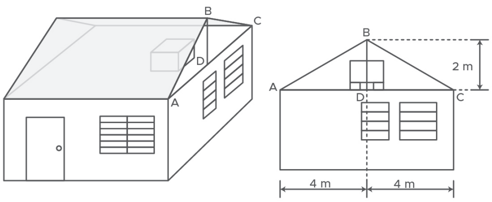
d. 4



RESPOSTA: B $x^2 = n \cdot m \Rightarrow x^2 = 4 \cdot 16 \Rightarrow x = \sqrt{64} \Rightarrow x = 8$

6. (SARESP – 2010) Na casa ilustrada, a estrutura de madeira que sustenta o telhado apoia-se na laje. Devem-se dispor caibros (peças de madeira) na vertical, indo da laje ao ponto mais alto do telhado, como a peça BD da ilustração. Devido à presença da caixa d'água, essas peças são cortadas com dois metros de comprimento e postas a meia distância das extremidades A e C da laje. Assim, ABD é um triângulo retângulo de catetos quatro metros e dois metros.

O comprimento da peça de madeira com extremidades em A e em B é, aproximadamente, de



$\sqrt{2} \cong 1{,}41 \quad \sqrt{3} \cong 1{,}73 \quad \sqrt{5} \cong 2{,}24$

a. 5 metros.

b. 7,05 metros.

c. 5,19 metros.

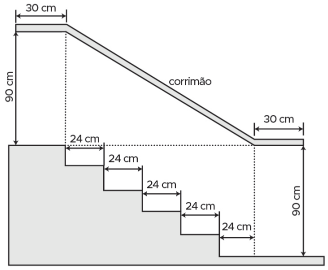
d. 4,48 metros.

RESPOSTA: D

$$x^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 4 + 16 \Rightarrow x = \sqrt{20} \Rightarrow x = \sqrt{4 \cdot 5} \Rightarrow x = 2\sqrt{5} = 4 \cdot 2{,}24 \Rightarrow x = 4{,}48$$

A peça de madeira que vai de A à B tem, aproximadamente, 4,48 m de comprimento.

7. (ENEM – 2006) Na figura que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:



a. 1,8 m

b. 1,9 m

c. 2,0 m

d. 2,1 m

e. 2,2 m

RESPOSTA: D

$$x^2 = 90^2 + 120^2 \Rightarrow x^2 = 8100 + 14400 \Rightarrow x = \sqrt{22500} \Rightarrow x = 150$$

Dessa forma, a medida total do corrimão é: 30 + 150 + 30 = 210 cm = 2,1 m

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

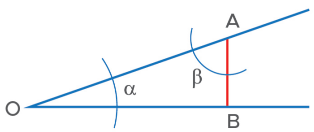
Professor, consideramos interessante o incentivo ao uso da calculadora para as próximas atividades. No entanto, julgamos que esse uso deve ser orientado. Logo, sugerimos que proponha um momento de conversa sobre algumas teclas da calculadora, explicando a utilização adequada para o cálculo de raiz quadrada, potências, seno, cosseno e tangente, por exemplo.

AULAS 3 E 4 – UMA BOA ESTRATÉGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Objetivo das aulas:

- Resolver situações-problema em contextos relacionados às razões trigonométricas nos triângulos retângulos.

Razões trigonométricas no triângulo retângulo



Por exemplo, para os arcos α e β, temos que:

$sen\alpha = \dfrac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa\ do\ triângulo} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$	$sen\beta = \dfrac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{hipotenusa\ do\ triângulo} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$
$cos\alpha = \dfrac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa\ do\ triângulo} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$	$cos\beta = \dfrac{cateto\ adjacente\ a\ \beta}{hipotenusa\ do\ triângulo} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$
$tg\alpha = \dfrac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$	$tg\beta = \dfrac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{cateto\ adjacente\ a\ \beta} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$

Alguns valores aproximados para consulta

α	sen α	cos α	tg α
30°	0,50	0,87	0,58
37°	0,60	0,80	0,75
45°	0,71	0,71	1
60°	0,87	0,5	1,73

1. Pense sobre o problema seguinte:

Uma bolinha é solta no ponto mais alto de uma rampa, que tem inclinação de 30° e cuja distância até o solo é de 0,8 m. Sendo assim, qual é o comprimento que a bolinha percorre para chegar até o solo?

a. Quais são os dados fornecidos pelo enunciado?

RESPOSTA: O enunciado informa que:
- a bolinha sai do ponto mais alto da rampa;
- o ponto mais alto da rampa tem distância de 0,8 m até o solo , logo a bolinha está a uma altura de 0,8 m do chão.
- a rampa tem 30° de inclinação.

AULAS 3 E 4 – UMA BOA ESTRATÉGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso e calculadora.

INICIANDO

Para as aulas 3 e 4, indicamos o início a partir da leitura e observação do texto introdutório que traz, de forma resumida, o conceito de seno, cosseno e tangente, além de alguns valores das razões trigonométricas de arcos que aparecem nas atividades. Além disso, professor, ressaltamos a importância do uso da calculadora para facilitar e tornar mais célere a resolução dos problemas. A ideia é dialogar com os estudantes sobre o uso desse recurso tecnológico e orientar a respeito do cálculo de raízes quadradas, potências, senos, cossenos e tangentes.

DESENVOLVENDO

Com essa introdução, os estudantes estarão cientes de que continuarão estudando sobre triângulos retângulos, especialmente para essas aulas sobre as razões trigonométricas na resolução de problemas. Além disso, poderão fazer uso da calculadora para a realização dos cálculos necessários. A atividade 1 foi pensada para ser realizada coletivamente. Diz respeito à aplicação das etapas sugeridas por Polya para resolver problemas. Propomos a leitura compartilhada do enunciado com ênfase ao problema apresentado e discussão oral sobre os itens a, b e c. Ressalte, professor, que cada item diz respeito a uma etapa pensada por Polya, e recomende que, para a resolução das demais atividades, a proposta é que se esforcem para utilizar essas etapas como método para a resolução de problemas.

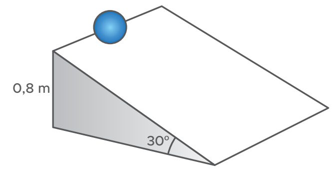
Todas as atividades podem ser resolvidas com o conceito de seno, cosseno ou tangente. Contudo, a leitura e a verificação dos dados são indispensáveis para identificar a que razão se remete o contexto. Além disso, representar cada situação através de uma figura é uma excelente estratégia para facilitar o entendimento do problema. Oriente-os a utilizar adequadamente a calculadora. Consideramos que a resolução de cada atividade e explicação dos cálculos desenvolvidos na lousa são fatores de extrema relevância. À medida que essa prática for sendo realizada, questione os estudantes quanto às etapa: o entendimento do problema, os dados fornecidos pelo enunciado, a elaboração do plano a ser executado, a execução propriamente desse plano e a verificação final quanto ao resultado encontrado.

FINALIZANDO

O encerramento da aula pode acontecer com a fala de cada dupla apresentando uma síntese sobre o desenvolvimento da prática realizada. É interessante que sinalizem se as etapas favoreceram a resolução dos problemas e a organização do pensamento matemático, sobretudo quando se trata de problemas abordando trigonometria. Incentive que tais etapas sejam aplicadas não apenas em situações envolvendo triângulos, mas sim à problemas com os mais variados contextos. Os estudantes podem registrar em seu caderno uma proposta de passo a passo a ser concretizada no momento de resolução de problemas envolvendo as razões trigonométricas.

b. Represente o contexto por meio de uma figura.

RESPOSTA



c. Observe a figura que você fez e os dados percebidos no enunciado. Elabore e execute uma estratégia para solucionar o problema.

RESPOSTA: Para solucionar esse problema, é possível utilizar o conceito de seno de 30°, já que conhecemos o cateto oposto ao ângulo e queremos descobrir a hipotenusa desse triângulo. Assim, teremos:

$$sen30° = \frac{0,8}{x} \Rightarrow x = \frac{0,8}{0,5} \Rightarrow x = 1,6$$

A bolinha irá percorrer 1,6 m para chegar ao solo.

Para resolver as próximas atividades, executar procedimentos semelhantes aos que foram realizados na atividade 1 é uma ótima ideia. Então, a proposta é que você leia cada problema com atenção para entendê-los, identifique os dados fornecidos, represente o contexto por meio de uma figura, planeje um método para resolução e aplique esse método. Para finalizar, verifique se o resultado faz sentido. Caso seja necessário, consulte os valores de seno, cosseno e tangente fornecidos no início das atividades previstas para essa aula.

2. (SARESP – 2012) Um jovem avista o topo de uma torre segundo um ângulo de 45°, conforme a ilustração. Sabe-se que a distância dos seus olhos ao topo da torre é 150 m e, ainda, que a distância dos seus olhos ao solo é 1,50 m. A altura h aproximada da torre é:

Considere: $\sqrt{2} \cong 1,4$.

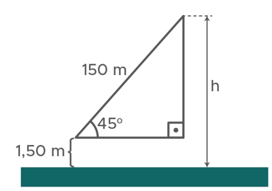
a. 77 m.

b. 100 m.

c. 107 m.

d. 150 m.

e. 157 m.



RESPOSTA: C

$$sen45° = \frac{x}{150} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 150 \Rightarrow x = 75\sqrt{2} \Rightarrow x \cong 75 \cdot 1.4 \Rightarrow x \cong 105$$

A altura total da torre é: 1,50 + 105 = 106,5 ≅ 107 m

3. (AAP – 2016) Se a base de um triângulo retângulo mede 12 cm e o ângulo agudo da base tem 37°, quanto mede sua hipotenusa?

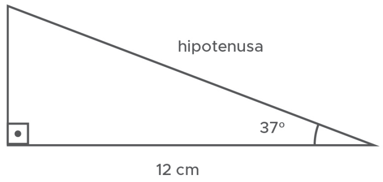
a. 7,2 cm

b. 9,6 cm

c. 15 cm

d. 16 cm

e. 20 cm



RESPOSTA: C

$$cos37° = \frac{12}{x} \Rightarrow x = \frac{12}{0,8} \Rightarrow x = 15$$

O triângulo citado tem hipotenusa medindo 15 cm.

4. (AAP - 2016) Para encontrar o comprimento de uma ponte que seria construída sobre um rio, um engenheiro colocou-se em uma das margens e marcou sobre o solo um ponto de onde avistava uma árvore na outra margem, de forma que a linha de visada ficou perpendicular à margem. Em seguida, caminhou 20 metros pela margem do rio, até parar em outro ponto, onde a linha de visada para a mesma árvore era agora de 30°, conforme se vê na figura a seguir. Qual será, aproximadamente, o comprimento da ponte?

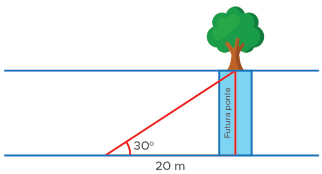
a. 12 m

b. 21 m

c. 23 m

d. 34 m

e. 40 m

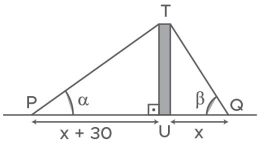


RESPOSTA: A

$$tg30° = \frac{x}{20} \Rightarrow x = 20 \cdot 0,58 \Rightarrow x = 11,6 \Rightarrow x \cong 12$$

A ponte terá, aproximadamente, 12 m.

5. (SARESP) Dois irmãos observam a torre reta TU em um terreno plano, conforme esquematizado na figura. Os seus ângulos de visão medem α e β, sendo tg α =1/3 e tg β =1/2. O irmão localizado no ponto P está 30 metros mais afastado do pé da torre do que o irmão localizado no ponto Q.



Desprezando as alturas dos irmãos, pode-se concluir que a altura da torre, em metros, é igual a:

a. 60

b. 40

c. 30

d. 20

e. 10

RESPOSTA: C

$$tg\alpha = \frac{h}{x+30} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{h}{x+30} \Rightarrow 3h = x + 30 \Rightarrow h = \frac{x+30}{3}$$

$$tg\beta = \frac{h}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{x} \Rightarrow 2h = x \Rightarrow h = \frac{x}{2}$$

Igualando as duas sentenças que representam h em função de x, obtemos:

$$\frac{x+30}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow 3x = 2(x+30) \Rightarrow 3x = 2x + 60 \Rightarrow x = 60$$

Para calcular o valor de h, temos:

$$h = \frac{60}{2} \Rightarrow h = 30$$ **Portanto, a torre tem 30 m de altura.**

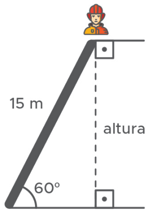
6. (SARESP) Um bombeiro sobe uma escada de 15 m de comprimento, que forma um ângulo de 60° com o solo. Usando 0,87 como valor aproximado de sen 60°, assinale a alternativa que mostra a altura aproximada que o bombeiro está do solo, quando chega ao topo escada.

a. 10,23 m

b. 12,14 m

c. 13,05 m

d. 14,55 m

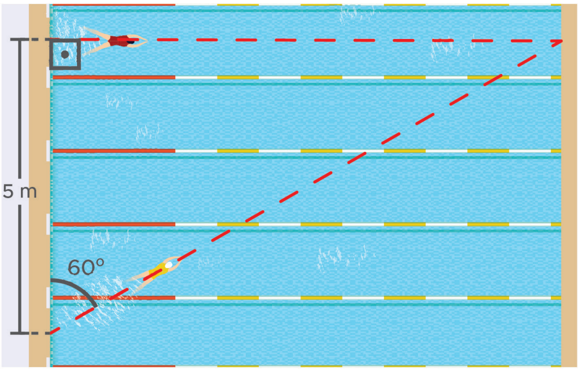


RESPOSTA: C

$$sen60° = \frac{x}{15} \Rightarrow x = 0{,}87 \cdot 15 \Rightarrow x = 13{,}05$$

O bombeiro está a cerca de 13,05 m do solo.

7. Dois nadadores profissionais resolveram fazer uma aposta que consiste em ver quem atinge primeiro o mesmo ponto no lado oposto de uma piscina, ambos saindo do mesmo lado e fazendo o trajeto uma única vez. O desafio é que o nadador A fará a travessia seguindo perpendicularmente, enquanto o atleta B seguirá a partir de um ângulo de 60°, como indicado na figura. Nessas condições, e imaginando que ambos nadam à mesma velocidade, qual dos dois deverá vencer o desafio? Justifique a sua resposta.



RESPOSTA:

$$\text{Nadador A: } tg60° = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 1{,}73 \cdot 5 \Rightarrow x = 8{,}65\ m$$

$$\text{Nadador B: } cos60° = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{5}{0{,}5} \Rightarrow x = 10\ m$$

Os cálculos revelam que o nadador B precisará fazer um trajeto maior, então, se os dois atletas nadam à mesma velocidade, o nadador A vencerá o desafio.

AULAS 5 E 6 – PARA ALÉM DOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso e calculadora.

INICIANDO

Para essas aulas, o estudo da trigonometria contempla triângulos quaisquer, ou seja, vai além do uso de triângulos retângulos. Dessa forma, sugerimos que o início seja com uma conversa com os estudantes sinalizando que, embora os triângulos retângulos de fato apareçam com mais frequência nos problemas, há contextos em que outros tipos de triângulos são utilizados. Informe, professor, que nesses casos, a lei dos senos e a lei dos cossenos serão aplicadas. Relembre que eles poderão usar calculadora para os cálculos das atividades.

DESENVOLVENDO

Após a introdução, proponha a leitura da lei dos senos e converse com os estudantes sobre o exemplo que está apresentado. Ressalte que os valores de senos e cossenos indicados poderão ser consultados caso sejam necessários para a resolução das atividades. A proposta é que a resolução dos problemas aconteça nas duplas, para que seja possível a troca de experiências e o trabalho colaborativo. Aos estudantes, deve ser disponibilizado tempo especificamente para a resolução das questões.

Retome as etapas sugeridas por Polya e utilizadas nas aulas anteriores. Para cada uma das cinco situações encaminhadas, é possível alcançar o resultado utilizando valores fornecidos pelo enunciado na lei dos senos e realizando as operações corretamente. É importante destacar que essa lei estabelece que cada lado é proporcional ao seno do ângulo interno oposto a este lado, então é indispensável ter clareza sobre que lado se está considerando e observar a medida do ângulo interno, que é oposto ao referido lado. Destacamos que, para algumas atividades, pode ser necessário lembrar que a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180°, sendo possível descobrir o valor

AULAS 5 E 6 – PARA ALÉM DOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Objetivo das aulas:

- Conhecer e aplicar a lei dos senos em situações-problemas de diferentes contextos.

Triângulos quaisquer

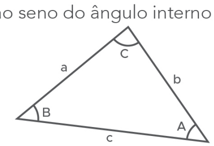
Até aqui, os problemas envolviam triângulos retângulos. Contudo, embora esse seja um triângulo muito usado em situações diversas, há contextos que são descritos por triângulos não retângulos.

Para as próximas atividades, utilizaremos a lei dos senos e a lei dos cossenos para resolver situações com triângulos quaisquer. Se achar necessário, use calculadora.

Lei dos senos

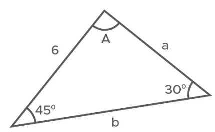
Em todo triângulo, a medida de cada lado é proporcional ao seno do ângulo interno oposto.

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$



Exemplo

Para calcular o valor do lado a do seguinte triângulo, podemos usar a lei dos senos.



$$\frac{a}{sen45°} = \frac{6}{sen30°} \Rightarrow \frac{a}{0{,}71} = \frac{6}{0{,}5} \Rightarrow a = \frac{6 \cdot 0{,}71}{0{,}5} \Rightarrow a = \frac{4{,}26}{0{,}5} \Rightarrow a = 8{,}52$$

Mais alguns valores aproximados para consulta

α	sen α	cos α
15°	0,26	0,97
28°	0,47	0,88
44°	0,69	0,72
57°	0,84	0,54
59°	0,86	0,51
64°	0,90	0,44
74°	0,96	0,28
105°	0,97	- 0,26
120°	0,87	- 0,5

1. (ENEM - 2007) Para se calcular a distância entre duas árvores, representadas pelos pontos A e B, situados em margens opostas de um rio, foi escolhido um ponto C arbitrário, na margem onde se localiza a árvore A. As medidas necessárias foram tomadas, e os resultados obtidos foram os seguintes: $AC = 70$ m, $A\hat{C}B = 74°$ e $B\hat{A}C = 62°$. Sendo cos 28° = 0,88, sen 74° = 0,96 e sen 44° = 0,70, podemos afirmar que a distância entre as árvores é:

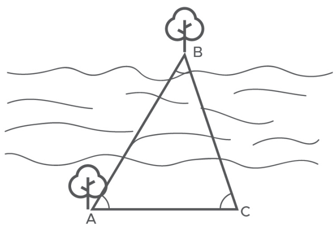
a. 48 metros

b. 78 metros

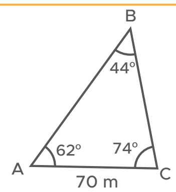
c. 85 metros

d. 96 metros

e. 102 metros



RESPOSTA: D

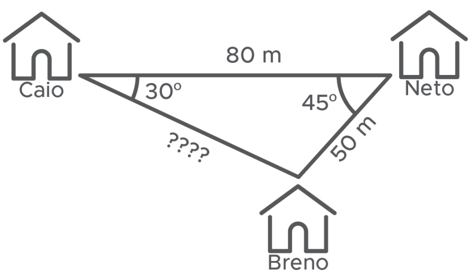


Utilizando a lei dos senos:

$$\frac{70}{sen44°} = \frac{x}{sen74°} \Rightarrow \frac{70}{0,7} = \frac{x}{0,96} \Rightarrow x = \frac{67,2}{0,7} \Rightarrow x = 96$$

A distância entre as árvores é de 96 m.

2. Neto e Caio são melhores amigos e moram na mesma rua. A distância entre as casas deles é de apenas 80 m. Tanto da casa de Neto, quanto da casa de Caio, é possível ver a casa de Breno, que fica em outra rua, numa parte mais alta do bairro. Da casa de Neto, o melhor ângulo para avistar a casa de Breno é de 45°, e da casa de Caio, é melhor vê-la a partir de um ângulo de 30°, como mostra a figura. Se a distância da casa de Neto até a de Breno é de cerca de 50 m, qual é a distância aproximada da casa de Caio até a casa de Breno?



de um desses ângulos internos. A correção pode ser com uma roda de conversa, em que as duplas expliquem o método utilizado para resolução e, caso haja divergências, possibilite que argumentem sobre o seu ponto de vista.

FINALIZANDO

A roda de conversa pode se estender para o momento de avaliação da aula, de modo que os estudantes verbalizem possíveis dúvidas. Oriente que as atividades realizadas nas aulas anteriores podem ser retomadas em momentos de estudo sobre problemas envolvendo medidas de triângulos.

RESPOSTA: Pela lei dos senos, temos que:

$$\frac{x}{sen45°} = \frac{50}{sen30°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}71} \cong \frac{50}{0{,}5} \Rightarrow x \cong \frac{35{,}5}{0{,}5} \Rightarrow x \cong 71$$

A distância da casa de Caio até a casa de Breno é aproximadamente, 71 m.

3. Para a viabilização de grandes campeonatos desportivos em algum país, é comum a realização de obras nas cidades, principalmente para facilitar a mobilidade. Imagine que para uma dessas obras estava prevista a construção de uma ponte sobre um rio, interligando pontos em margens diferentes e indicados por R e S na figura. Para a determinação indireta da distância entre esses pontos, demarcou-se um terceiro ponto T, situado na mesma margem de S, a 30 m deste, e verificou-se as medidas dos ângulos $T\hat{S}R = 57°$ e $S\hat{R}T = 64°$. Nessas condições, qual deverá ser o comprimento aproximado dessa ponte, indicada pelo segmento RS?

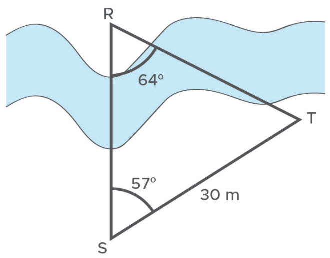
a. 26 m

b. 27 m

c. 28 m

d. 29 m

e. 30 m



Fonte: Elaborado para fins didáticos

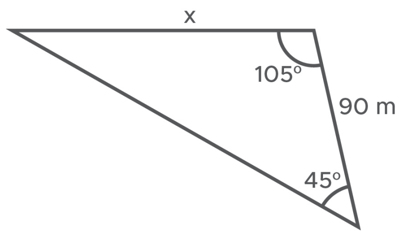
RESPOSTA D.

Pela lei dos senos, temos que:

$$\frac{30}{sen64°} = \frac{x}{sen59°} \Rightarrow \frac{30}{0{,}90} = \frac{x}{0{,}86} \Rightarrow x = \frac{25{,}8}{0{,}90} \Rightarrow x \cong 28{,}67$$

A ponte terá cerca de 28,67 m de comprimento, ou seja, o item “d” é o resultado mais próximo.

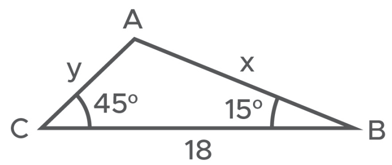
4. Determine o valor de x no triângulo a seguir.



RESPOSTA: Ao utilizar a lei dos senos, ficamos com:

$$\frac{x}{sen45°} = \frac{90}{sen30°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}71} = \frac{90}{0{,}5} \Rightarrow x = \frac{63{,}9}{0{,}5} \Rightarrow x = 127{,}8$$

5. A respeito de um terreno cujo formato é diferente do que costumeiramente se vê, sabe-se que ele tem forma triangular, com base medindo 18 m e os ângulos da base medindo 45° e 15°. Nessas condições, determine as medidas dos outros dois lados do triângulo que representa o terreno.



RESPOSTA: Com a lei dos senos, obtemos:

$$\frac{x}{sen45°} = \frac{18}{sen120°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}71} = \frac{18}{0{,}87} \Rightarrow x = \frac{12{,}78}{0{,}87} \Rightarrow x \cong 14{,}69$$

$$\frac{y}{sen15°} = \frac{18}{sen120°} \Rightarrow \frac{y}{0{,}26} = \frac{18}{0{,}87} \Rightarrow y = \frac{4{,}68}{0{,}87} \Rightarrow y \cong 5{,}38$$

AULAS 7 E 8 – AINDA SOBRE TRIÂNGULOS QUAISQUER

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes dispostos em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante impresso e calculadora.

INICIANDO

Para começar a aula, sugerimos reforçar que continuaremos lidando com situações sobre triângulos não retângulos. É interessante retomar a lei dos senos, estudada na aula anterior e ressaltar que, para as próximas atividades, utilizaremos a lei dos cossenos.

DESENVOLVENDO

Professor, sugerimos a leitura dos textos introdutórios de forma coletiva e a resolução do exemplo na lousa. É importante ressaltar que a calculadora ainda poderá ser utilizada e que há valores de senos e cossenos também disponibilizados para consulta. As cinco atividades podem ser resolvidas em duplas, aplicando-se a lei dos cossenos. Após o tempo para resolução, sugerimos que as duplas troquem os seus registros entre si, a fim de que haja socialização dos caminhos usados por cada uma. Caso sejam percebidas falhas ou diferentes formas de resolução, espera-se que sejam socializadas com toda a turma.

FINALIZANDO

Para finalizar, promova um momento de retomada dos conceitos envolvendo trigonometria que foram tratados durante essas aulas, e enfatize as estratégias para resolução de problemas que foram usadas e inspiradas nas ideias de Polya. Nesses momentos, os estudantes devem socializar os conhecimentos construídos a partir dessas aulas e indicar dúvidas e dificuldades enfrentadas.

AULAS 7 E 8 – AINDA SOBRE TRIÂNGULOS QUAISQUER

Objetivo das aulas:
- Conhecer e aplicar a lei dos cossenos em situações-problemas de diferentes contextos.

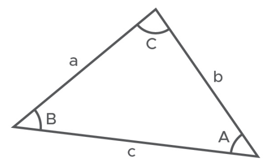
Lei dos cossenos

Num triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo oposto ao primeiro lado.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

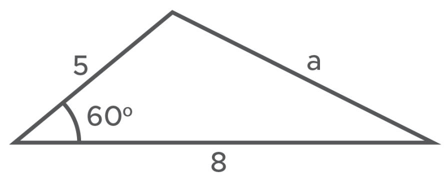
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$



Exemplo

Qual é o valor da medida a no triângulo a seguir?

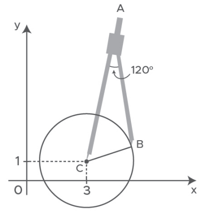


$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60° \rightarrow a^2 = 25 + 64 - 80 \cdot 0{,}5 \rightarrow a = \sqrt{49} \rightarrow a = 7$

1. Um triângulo tem lados com 6 cm e 4 cm. Além disso, o ângulo interno formado por esses lados é de 60°. Qual é, então, a medida do lado desconhecido desse triângulo?

RESPOSTA: $x^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot cos60° \Rightarrow x^2 = 16 + 36 - 48 \cdot 0{,}5$
$\Rightarrow x = \sqrt{28} \Rightarrow x = 2\sqrt{7}$

2. (ENEM – 2017) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso, de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A, conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados. Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$. O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será:

Tipo de material	Intervalo de valores de raio (cm)
15°	$0 < R \leq 5$
28°	$5 < R \leq 10$
44°	$10 < R \leq 15$
57°	$15 < R \leq 21$
59°	$21 < R \leq 40$

a. I.

b. II.

c. III.

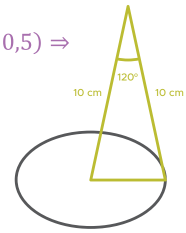
d. IV.

e. V.

RESPOSTA: D

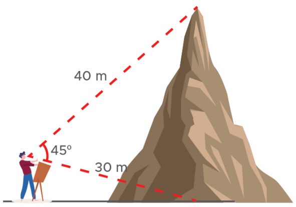
$$R^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot cos120° \Rightarrow R^2 = 200 - 200 \cdot (-0{,}5) \Rightarrow$$

$$R^2 = 200 + 100 \Rightarrow R = \sqrt{300} \Rightarrow R = 10\sqrt{3} = 10 \cdot 1{,}7 = 17$$



O tipo de material a ser utilizado será o IV

3. Observe a figura que mostra um artista posicionado para pintar uma paisagem. Ele pretende destacar uma montanha em sua pintura como o ponto mais alto.



Fonte: Elaborado para fins didáticos

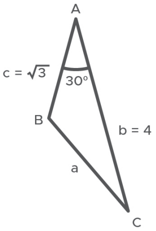
Calcule a altura dessa montanha, considerando as medidas indicadas na imagem fornecida.

RESPOSTA:

$$x^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot cos45° \Rightarrow x^2 = 1600 + 900 - 2400 \cdot (0{,}71) \Rightarrow$$

$$x^2 = 2500 - 1704 \Rightarrow x = \sqrt{796} \Rightarrow x \cong 28{,}21$$

4. Observando as medidas informadas para o seguinte triângulo, calcule o valor de a.



RESPOSTA:

$$a^2 = \sqrt{3}^2 + 4^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot cos30° \Rightarrow a^2 = 3 + 16 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 = 19 - 12 \Rightarrow a = \sqrt{7}$$

5. Quanto mede o lado AB de um triângulo em que $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{BC} = 16$ cm e $A\hat{C}B = 60°$?

RESPOSTA:

$$x^2 = 10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot cos60° \Rightarrow x^2 = 100 + 256 - 320 \cdot 0{,}5$$

$$\Rightarrow x^2 = 356 - 160 \Rightarrow x = \sqrt{196} \Rightarrow x = 14$$

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

3ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

Olá, Professor(A),

Sugerimos que, após a aplicação destas Sequência de Atividades, você trabalhe também com o material São Paulo Faz Escola, atualmente denominado Currículo em Ação. As habilidades trabalhadas nesta Sequência do Aprender Sempre podem ser aprofundadas nas atividades propostas nos diversos volumes dos anos/séries listados no quadro abaixo.

3ª Série do Ensino Médio - Matemática			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAIS**
1	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	(**EF09MA06**) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 9º ano:** Vol. 2, Situação de Aprendizagem 3 ATIVIDADE 1 – FUNÇÃO: NOÇÃO E LEI DE FORMAÇÃO ATIVIDADE 2 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO ATIVIDADE 3 – OLHANDO AS FUNÇÕES EM DIFERENTES PERSPECTIVAS
2	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF09MA08) Resolver e elaborar situações- problema que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 9º ano:** Vol.1, Situação de Aprendizagem 3 ATIVIDADE 4 – A PROPORCIONALIDADE DIRETA: UMA RAZÃO PARA EXISTIR **Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 9º ano:** Vol.1, Situação de Aprendizagem 4 ATIVIDADE 2 – OS MAPAS E AS PLANTAS ARQUITETÔNICAS: ESCALAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS
3	Análise Combinatória e Probabilidade; Princípios Multiplicativo e Aditivo; Probabilidade Simples; Arranjos, Combinações e Permutações	Compreender os raciocínios combinatórios aditivo e multiplicativo na resolução de situações-problema de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento. Saber calcular probabilidades de eventos em diferentes situações-problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas específicas. (Currículo Vigente 2020).	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno da 2ª série:** Vol.3 – 2020 Tema 1: Princípio aditivos e multiplicativos Tema 2: Formação de filas sem e com elementos repetidos Tema 3: Formação de grupos com elementos de uma ou mais categorias Tema 4: Estudando as probabilidades

3ª SÉRIE - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

OLÁ, PROFESSOR!

Olá, Professor! Nesta Sequência de Atividades, falamos diretamente com você, que está aí na sala de aula, no convívio direto com os estudantes, os quais terão oportunidade, nesse momento, de se envolverem em atividades que possibilitam a retomada de conceitos, propriedades e procedimentos essenciais para o desenvolvimento de seus conhecimentos e capacidades em matemática.

A Sequência de Atividades deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração. Além disso, as socializações das atividades por parte dos estudantes são percebidas aqui como oportunidades de desenvolver habilidades e competências que dizem respeito à cooperação, à empatia, à argumentação, à comunicação, entre outras.

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos que envolvam as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações.

HABILIDADE: (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica, e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	Redescobrindo as funções
3ª e 4ª/ 90 min	Como representar uma função?
5ª e 6ª/ 90 min	Os zeros de funções de 1º e 2º graus e sua representação gráfica
7ª e 8ª/ 90 min	As funções exponencial e logarítmica

Sabemos que as atividades por si só não ensinam. Por isso, Professor, a sua atuação é importante em cada uma das situações propostas aqui, cujo objetivo é recuperar as aprendizagens e desenvolver as habilidades esperadas para a 3ª série do Ensino Médio. Para isso, este caderno deverá servir como mais uma ferramenta que o auxiliará no processo de ensino, sendo necessário, portanto, que você considere, em seu replanejamento, outras possibilidades de discussão e recursos, para além daqueles sugeridos nesta Sequência de Atividades. Para ajudá-lo nesta ação, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenal acerca das Sequências de Atividades, nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPCs). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

AULAS 1 E 2 – REDESCOBRINDO AS FUNÇÕES

Nesta atividade, você será convidado a relembrar o conceito de função, bem como sua notação usual, sendo possível reconhecê-la em meio a outras relações entre duas variáveis. Para isso, você deverá também recordar os conceitos de domínio, contradomínio e imagem de uma função. Junte-se com sua dupla e vamos lá!

Objetivos das aulas
- Reconhecer o conceito de função e sua notação usual;
- Reconhecer funções em meio a relações de dependência entre duas variáveis;
- Compreender o conceito de domínio, contradomínio e imagem de uma função.

1. Paulo comprou um carro novo e quer saber quanto gasta de combustível em litros, a depender da distância percorrida em quilômetros. Observe as anotações feitas por ele na tabela abaixo:

Distância percorrida (em quilômetros)	1	2	3	4
Gasto de combustível (em litros)	7	14	21	28

a. Se Paulo percorrer 10 km com seu carro, quantos litros de combustível ele gastará?

Se a cada $1\ km$ ele gasta $7l$ de combustível, ao percorrer $10\ km$ ele gastará $70l$ de combustível.

b. Indique a expressão algébrica que relaciona a distância percorrida (x) e a quantidade de combustível gasto (y).

Para encontrar a quantidade y, é necessário multiplicar x por 7, isto é, $y=7x$.

c. Pode-se afirmar que a quantidade de combustível gasta depende da distância percorrida?

Sim, pois conforme a distância aumenta, a quantidade gasta aumenta também.

AULAS 1 E 2 – REDESCOBRINDO AS FUNÇÕES

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas ou trios.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Para o estudante: Caderno do Estudante, caderno, lápis e borracha.
Para o professor: Giz, lousa e Caderno do Professor.

INICIANDO

Para as aulas 1 e 2 desta Sequência, sugere-se que os estudantes estejam organizados em duplas para que possam discutir entre si e realizar as atividades. Antes de iniciar a Atividade 1, é interessante que seja feita uma discussão para verificar o que eles se lembram sobre o conceito de função, que já foi visto anteriormente. Após essa breve introdução, a Atividade 1 pode ser iniciada.

DESENVOLVENDO

A Atividade 1 se inicia com o item 1, no qual é apresentada uma situação que pode ser representada por uma função para que seja dada uma noção intuitiva inicial, relembrando-os do conceito de função que foi previamente discutido. Pode-se combinar um tempo com as duplas para que observem a tabela e respondam as questões com base nos dados presentes nela, sendo o objetivo encontrar a lei de formação dessa função (item "b") e perceber que há uma relação entre as grandezas envolvidas (item "c"). É interessante que uma correção coletiva seja feita logo após o término deste item para que não restem dúvidas quanto a ele antes de iniciar a leitura do texto, que pode ser feita junto com a turma. Nele, a função é definida como uma relação de dependência entre duas grandezas.

É dado o nome "lei de formação" à equação encontrada no item 1-“b”, e a notação usual de função é introduzida a partir da representação dos dados da tabela como conjuntos numéricos. Em seguida, são definidos os conceitos de domínio e contradomínio de uma função. Após, pode ser dado um tempo novamente para que as duplas resolvam o item 2. O objetivo deste item é formalizar a definição de função e trazer o conceito de conjunto imagem. Em cada item, os estudantes devem relacionar os elementos dos conjuntos de acordo com a equação dada, respondendo às questões que servirão para definir formalmente uma função. Apenas nos itens “a” e “c” estão representadas funções. A relação dada no item “c” é chamada de função g para diferenciá-la da função do item “a”, chamada de f, o que também servirá para mostrar que não é necessário utilizar sempre a letra f. Após definir formalmente o conceito de função, será questionado se é possível que uma relação seja função, mesmo que nem todos os elementos do contradomínio tenham algum correspondente no domínio. É interessante que isso seja discutido com a turma antes da leitura da definição de imagem, com base no que foi dito ser condição necessária e suficiente para que uma relação seja função: que todos os elementos do domínio tenham um, e apenas um correspondente no contradomínio.

Após a discussão, a definição pode ser formalizada, sendo talvez necessário relembrá-los do conceito de subconjunto. Assim, eles poderão fazer o item “d”, dizendo qual é o conjunto imagem das funções f e g. Neste momento, é interessante introduzir a notação Im para o conjunto imagem. No item 3, são apresentados quatro diagramas com relações entre dois conjuntos para que os estudantes digam se são ou não funções e para que identifiquem o domínio, o contradomínio e a imagem daquelas que forem, sendo introduzidas as notações para domínio (D_f) e contradomínio (CD). O objetivo deste item é verificar se os conceitos trazidos até aqui foram compreendidos.

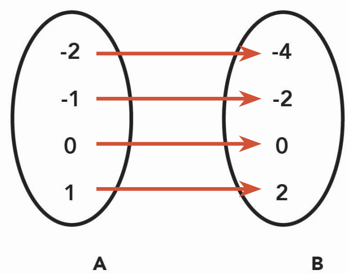
Essa relação de dependência existente entre as duas grandezas envolvidas no problema é chamada **função**, pois y está em função de x, uma vez que depende do valor atribuído a x. Sendo assim, diz-se que x é uma variável independente e y uma variável dependente. Além disso, a equação encontrada no item “b”, que relaciona as duas grandezas, é a **lei de formação** dessa função.

Considerando as distâncias percorridas presentes na tabela como o conjunto A e as quantidades de combustível gastas como conjunto B, podemos dizer que essa relação é uma função de A em B. Isso pode ser denotado por $f: A \to B$ Assim, a lei de formação obtida no item “b”, que é dada pela expressão algébrica $y = 7x$, pode ser reescrita como $f(x) = 7x$. Os conjuntos relacionados por uma função levam alguns nomes especiais:

- O conjunto A, que contém os valores de x, é chamado **domínio** da função.
- O conjunto B, que contém os valores de y, é chamado **contradomínio** da função.

2. **Observe os conjuntos indicados em cada item e faça o que se pede. Em seguida, responda às questões propostas.**

a. Associe a cada elemento x do conjunto A o elemento y do conjunto B, de forma que $y=2x$.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

- Todos os elementos do conjunto A têm algum correspondente no conjunto B? Se não, qual não tem?

Sim.

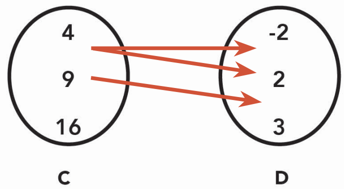
- Algum elemento do conjunto A tem mais de um correspondente no conjunto B? Se sim, qual?

Não.

- Algum elemento do conjunto B não tem correspondente no conjunto A? Se sim, qual?

Não..

b. Associe a cada elemento x pertencente a C o elemento y pertencente a D, de forma que $x = y^2$.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

- Todos os elementos do conjunto C têm algum correspondente no conjunto D? Se não, qual não tem?

Não, o elemento 16 não tem correspondente.

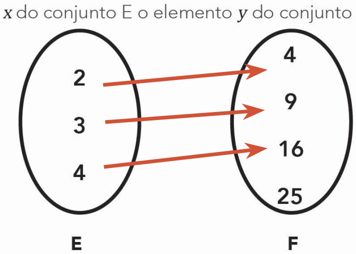
- Algum elemento do conjunto C tem mais de um correspondente no conjunto D? Se sim, qual?

Sim, o elemento 4 tem dois correspondentes em D: -2 e 2.

- Há algum elemento pertencente a D que não possui correspondência no conjunto C? Se sim, qual?

Não.

c. Associe a cada elemento x do conjunto E o elemento y do conjunto F, de forma que $y = x^2$.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

- Todos os elementos do conjunto E têm algum correspondente no conjunto F? Se não, qual não tem?

Sim.

- Algum elemento do conjunto E tem mais de um correspondente no conjunto F? Se sim, qual?

Não.

- Há algum elemento pertencente a F que não possui correspondência no conjunto E? Se sim, qual?

Sim, o elemento 25

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, é interessante discutir estas questões antes de continuar a leitura.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, aqui pode ser introduzida a notação para o conjunto imagem.

Note que nos itens “a” e “c”, todos os elementos x de A e de E tem um y correspondente em B e F, respectivamente. Já no item “b”, o elemento 16 de C não tem nenhum y correspondente em D. Também, nenhum elemento de A e de E tem mais de um correspondente em B e F, enquanto o elemento 4 de C tem dois correspondentes em D. Isso significa que as relações entre conjuntos representadas nos itens “a” e “c” são funções e a relação representada no item “b” não é função. Assim, podemos dizer que no item “a” está representada a função $f: A \rightarrow B$, onde A é o domínio e B é o contradomínio, e no item “c” está representada a função $g: E \rightarrow F$, onde E é o domínio e F o contradomínio.

Resumindo: para que uma relação entre dois conjuntos seja uma função, é necessário que todos os elementos do domínio tenham um, e apenas um, correspondente no contradomínio.

Mas e no caso do item “c”, em que um elemento do contradomínio não corresponde a nenhum elemento do domínio? Mesmo assim, pode-se afirmar que $g: E \rightarrow F$ é função?

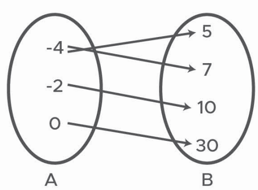
Para ser função, não é necessário que todos os elementos do contradomínio tenham um correspondente no domínio! Sendo assim, existe mais um conjunto importante quando se trata de função: é o conjunto **imagem**. Ele contém todos os elementos do contradomínio que tem um correspondente no domínio, isto é, ele é um subconjunto do contradomínio. Em alguns casos, eles coincidem, o que ocorre no item “a”, mas em outros casos eles são conjuntos diferentes, como no item “c”.

d. Determine o conjunto imagem das funções $f: A \rightarrow B$ e $g: E \rightarrow F$, dadas nos itens “a” e “c”.

O conjunto imagem de f é o próprio conjunto B.
O conjunto imagem de g é $Im = \{4, 9, 16\}$.

3. Decida se as relações entre conjuntos representadas nos diagramas abaixo são ou não funções, justificando a sua resposta. Caso sejam, determine quem são seu domínio (D_f), seu contradomínio (CD) e sua imagem (I_m).

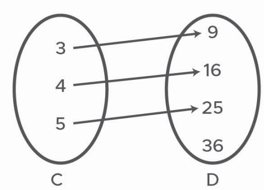
a.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Não é função, pois um elemento do domínio tem mais de um correspondente no contra-domínio.

b.



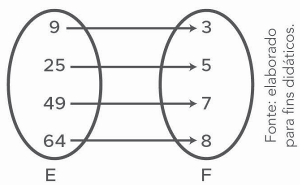
Fonte: elaborado para fins didáticos.

É função. $D_f = C$, $CD = D$ **e** $Im = \{9, 16, 25\}$.

FINALIZANDO

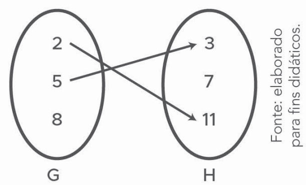
Sugere-se que a aula seja finalizada com a correção do item 3, pois com ele é possível retomar tudo que foi visto. É interessante que a participação dos estudantes seja incentivada neste momento, para que possíveis dúvidas possam ser sanadas.

c.



É função. $D_f = E$, $CD = F$ e $Im = F$.

d.



Não é função. Há um elemento do domínio que não tem correspondente no contradomínio

AULAS 3 E 4 – COMO REPRESENTAR UMA FUNÇÃO?

Objetivos das aulas
- Representar uma função numericamente, algebricamente e graficamente;
- Relacionar as representações numéricas, algébricas e gráficas de uma função.

Nas últimas aulas, o conceito de função e sua notação usual foram relembrados. Agora, serão apresentadas as três formas de representar uma função: numericamente, algebricamente e graficamente.

1. Na aula passada, foi visto que Paulo comprou um carro novo e fez as anotações na tabela a seguir para saber quanto gasta de combustível, em litros, dependendo da distância percorrida, em quilômetros:

Distância percorrida (em quilômetros)	1	2	3	4
Gasto de combustível (em litros)	7	14	21	28

Chegou-se à conclusão que existe uma relação entre a distância percorrida e a quantidade de combustível gasta, e que essa relação é uma função, cuja lei de formação é $f(x) = 7x$, o domínio é $D_f = \{1, 2, 3, 4\}$ e a imagem e o contradomínio são $Im = CD = \{7, 14, 21, 28\}$. A tabela é uma maneira de representar esta função **numericamente**, enquanto a lei de formação é uma maneira de representá-la **algebricamente**.

Paulo resolveu representar também esta função **graficamente**. Para isso, ele reescreveu a tabela, chamando a distância percorrida de x e a quantidade de combustível gasta de y, bem como acrescentando mais uma coluna para representar os pares ordenados $(x\,;y)$, que são as coordenadas de pontos, que ele chamou de A, B, C e D:

x	1	2	3	4
y	7	14	21	28
$(x;y)$	$A(1\,;7)$	$B(\ ;\ )$	$C(\ ;\ )$	$D(\ ;\ )$

INICIANDO

Para continuar o estudo das funções, sugerimos que o que foi discutido na aula anterior seja retomado, relembrando à turma sobre a definição de função e sua notação usual. É interessante também recordar o conceito de par ordenado e como fazer uso de um plano cartesiano, pois são essenciais para obter a representação gráfica de uma função. Além disso, é importante relembrar a notação de ponto, que é dada por uma letra maiúscula. A sugestão de organizar as carteiras em U é para possibilitar a discussão coletiva durante a realização da atividade.

AULAS 3 E 4 – COMO REPRESENTAR UMA FUNÇÃO?

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes com as carteiras organizadas em U.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante, caderno, lápis e borracha.

DESENVOLVENDO

O item 1 relembra a primeira atividade da aula passada, na qual, a partir de dados de uma tabela, foi possível obter a lei de formação da função. Assim, é possível definir tanto a representação numérica quanto a representação algébrica de uma função. Em seguida, introduz-se a representação gráfica através da reescrita da tabela e da visualização dos valores da mesma como pares ordenados, sendo estes coordenados de pontos, denominados A, B, C e D. No item "d", os estudantes são convidados a localizar estes pontos no plano cartesiano, obtendo assim a representação gráfica da função.

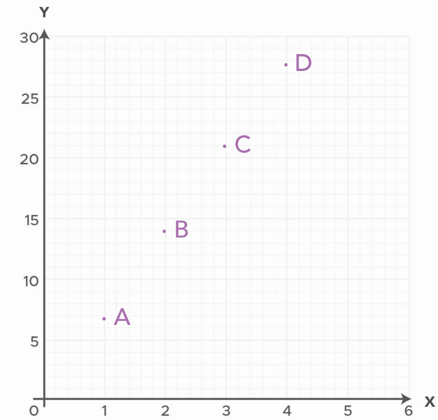
Note que, como o domínio dessa função é $D_f=\{1,2,3,4\}$, a representação é dada apenas pelos quatro pontos, não sendo possível uni-los. No item "c", o domínio da função é modificado para um intervalo fechado, fazendo com que seu gráfico seja agora um segmento de reta. É interessante discutir o motivo de ocorrerem essas diferenças quando se altera o domínio da função. No item "d", essa discussão pode continuar, pois os estudantes devem pensar como seria o gráfico se o domínio da função fosse o conjunto dos reais.

No item 2, é dado o gráfico de uma função de 2º grau para que os estudantes encontrem a representação numérica através do

a. Observe o exemplo na primeira linha da tabela e complete-a com os valores faltantes nos pares ordenados, que são coordenadas dos pontos B, C e D.

As coordenadas são B$(2;14)$ C$(3;21)$ D$(4;28)$.

b. Localize no plano cartesiano os pontos A, B, C e D:



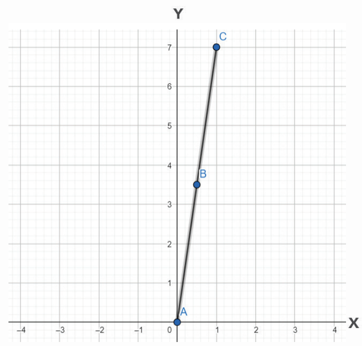
Fonte: elaborado para fins didáticos.

Foi obtido, assim, o gráfico dessa função, que é formado por estes quatro pontos.

c. Vamos agora fazer o mesmo processo de representação gráfica da função $f(x) = 7x$, mudando seu domínio. Suponha que agora $D_f = [0, 1]$. Primeiro, deve-se montar uma tabela com os valores de x do domínio e os valores de y correspondentes, bem como com os pares ordenados formados por eles. Preencha-a com os valores de y para os x dados e com os pares ordenados $(x ; y)$. Note que não é necessário colocar na tabela todos os valores de x pertencentes ao domínio, uma vez que são infinitos.

x	0	0,5	1
y	0	3,5	7
$(x ; y)$	(0 : 0)	(0,5 ; 3,5)	(1,7)

Para obter o gráfico, os pontos da tabela devem ser localizados no plano cartesiano e, em seguida, unidos, do primeiro ao último. Faça isso no plano cartesiano a seguir:

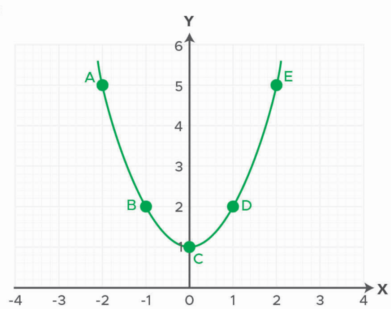


Fonte: elaborado para fins didáticos.

d. Como ficaria o gráfico se o domínio da função fosse o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$?

O gráfico seria uma reta, pois este conjunto contém infinitos números e, sendo assim, o gráfico seria como o que foi formado no item "c", mas com infinitos pontos.

2. Observe o gráfico abaixo:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. Preencha a tabela com as coordenadas dos pontos observados no gráfico:

$(x\,;y)$	A(-2;5)	B(-1;2)	C(0;1)	D(1;2)	E(2;5)
x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

preenchimento da tabela, e a representação algébrica por meio da análise dos valores de x e y. No item 3 "a", a representação gráfica deve ser obtida por meio da localização no plano cartesiano dos pontos dados na tabela. O objetivo é mostrar que existem formatos diferentes para os diversos tipos de funções. No item "b", são dadas alternativas com funções variadas para que estas sejam analisadas e os estudantes possam decidir qual delas é a representação algébrica da função em questão. No item "c", o conceito de domínio deve ser trabalhado para que percebam a importância de sua adequação para que não ocorram indeterminações.

FINALIZANDO

A finalização poderá ser feita explicitando as relações entre as três formas de representar uma função, enfatizando que a partir de uma se obtém as outras, e explicando a importância de saber representá-las, principalmente através de um gráfico.

AULAS 5 E 6 – OS ZEROS DE FUNÇÕES DE 1º E 2º GRAUS E SUA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante, caderno, lápis e borracha.

INICIANDO

Sugere-se que antes de iniciar a resolução da Atividade 1 os estudantes sejam relembrados do que foi estudado nas aulas anteriores, principalmente sobre a representação gráfica de uma função, que dependia da montagem de uma tabela com variados pontos, mostrando que na presente atividade será visto um outro modo de fazê-lo. Também sugere-se que seja feita uma revisão sobre resolução de equações de 1° e 2° graus, pois isso será necessário para determinar raízes ou zeros de funções de 1° e 2° graus. A sugestão de que os estudantes sejam divididos em duplas tem como objetivo fazê-los discutir entre eles para que depois possa ser feita uma correção coletiva.

b. Determine a representação algébrica dessa função.

Observando os valores de x e y elencados na tabela, é possível concluir que $y=x+1$.

AULAS 5 E 6 – OS ZEROS DE FUNÇÕES DE 1º E 2º GRAUS E SUA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Objetivos das aulas
- Determinar raízes ou zeros das funções de 1° e 2° grau;
- Representar graficamente funções polinomiais de 1° e 2° grau;
- Utilizar a resolução de problemas como meio para aplicar os diferentes registros de representação das funções.

Nesta atividade, você será convidado a resolver situações-problema que podem ser representadas por funções de 1° e 2° graus e a representar graficamente esse tipo de função a partir do cálculo de suas raízes e da análise de seus coeficientes. Para isso, será necessário relembrar como resolver equações de 1° e 2° graus. Reúna-se com sua dupla e bom trabalho!

1. Marcela trabalha em uma empresa que paga a ela R$60,00 por dia, mas desconta R$0,75 a cada minuto de atraso.

a. Qual é a função que representa o salário de Marcela por dia?

Representando os minutos de atraso por x e o valor recebido por dia por y, tem-se $y = 60\text{-}0{,}75x$. Logo, a função é $f(x)= \text{-}0{,}75x+60$.

Esta função é chamada **função polinomial de 1° grau**. Funções desse tipo sempre são da forma $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.

b. Quais os valores dos coeficientes **a** e **b** para a função encontrada no item "a"?

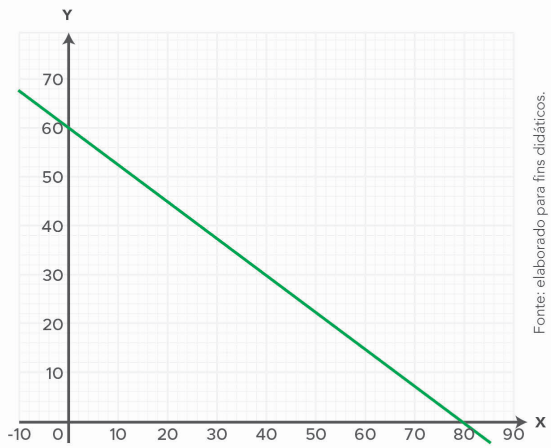
O valor de a é $\text{-}0{,}75$ e de b é 60.

c. Quantos minutos Marcela deve atrasar para que não receba nada naquele dia?

Igualando a zero a função que representa o salário diário de Marcela por dia, tem-se $-0{,}75x + 60 = 0 \Rightarrow -0{,}75x = -60 \Rightarrow x = \frac{-60}{-0{,}75} = \frac{6000}{75} = 80$. Logo, se Marcela chegar 80 minutos atrasada, isto é, 1 hora e 20 minutos, ela não receberá salário naquele dia.

O valor encontrado é chamado **raiz** ou **zero** dessa função. Note que, para obtê-lo, bastou encontrar o valor de x tal que f(x)=0, isto é, bastou resolver uma equação de 1° grau. Como uma equação de 1° grau tem sempre apenas um resultado, uma função de 1° grau sempre terá apenas uma raiz.

Observe agora o gráfico que representa essa função, considerando seu domínio como o conjunto dos números reais:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

d. Qual figura é a representação gráfica dessa função?

Uma reta.

e. Em qual ponto o gráfico cruza o eixo y? O que representa a coordenada y deste ponto?

O gráfico de f cruza o eixo y no ponto (0;60). A coordenada $y = 60$ é o valor do coeficiente b.

f. Em qual ponto o gráfico cruza o eixo x? O que representa a coordenada x deste ponto?

O gráfico de f cruza o eixo x no ponto (80;0). A coordenada $x = 80$ é a raiz dessa função.

Assim como foi observado para este caso, o gráfico de uma função de 1° grau sempre é uma reta que cruza o eixo x no ponto cuja coordenada em x é a raiz da função e cruza o eixo y no ponto cuja coordenada em y é o coeficiente b.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, é interessante explicar que na situação dada o domínio da função não é o conjunto dos números reais, mas para fins de generalização é necessário considerá-lo assim para que o gráfico seja uma reta e não um segmento.

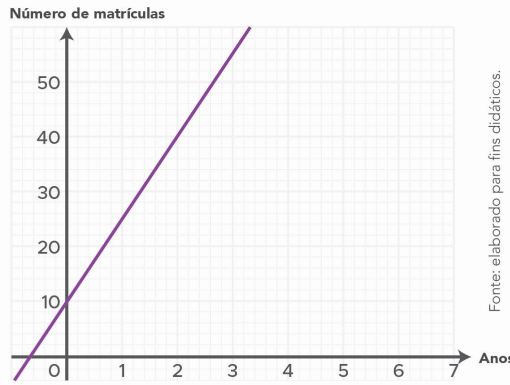
DESENVOLVENDO

Sugere-se que seja combinado um tempo para que as duplas possam ler e responder aos itens "a", "b" e "c" do item 1, para que em seguida seja feita a correção coletiva, enfatizando a definição de função polinomial de 1º grau e de raiz ou zero de uma função. Após a correção, os estudantes devem observar o gráfico da função, considerando o domínio como sendo o conjunto dos números reais, que pode ser projetado em tamanho grande para facilitar a visualização, e depois responder aos itens "d", "e" e "f".

O objetivo é que, juntamente com o item 2, os estudantes percebam o que é necessário para construir o gráfico de uma função de 1º grau sem precisar montar uma tabela de pontos. Por isso, no item 2 eles devem observar o gráfico da função dada, considerando o domínio como o conjunto dos números reais, e responder aos itens "a", "b" e "c" para verificar o que deve acontecer com o coeficiente a p ara que a reta seja crescente ou decrescente, fazendo uma comparação entre os gráficos dados no item 1 e 2.

O item 3 tem por objetivo a construção de um gráfico com base nas conclusões feitas nos itens 1 e 2. Os itens 4 e 5 têm o mesmo objetivo de 1 e 2, isto é, levá-los a perceber o que é necessário para construir o gráfico sem precisar montar uma tabela de pontos, mas agora para uma função de 2º grau, por meio da comparação dos gráficos dados nestes itens. Dessa forma, poderão montar o gráfico da função de 2º grau dada no item 6.

2. A coordenadora de um curso de inglês registrou, durante os últimos 5 anos, o número de matrículas e verificou que a cada ano elas aumentaram em 15. Quando iniciou os registros, havia 10 alunos matriculados. Sendo assim, a função que representa o número de matrículas em função do tempo x (em anos) é f(x)= 15x+10. Observe o gráfico que representa essa função, considerando seu domínio como o conjunto dos números reais. Em seguida, responda o que se pede.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. Qual a maior diferença entre a reta que representa essa função e a reta do item 1?

A reta do item 1 é decrescente e a do item 2 é crescente.

b. Quais os valores do coeficiente a para esta função e a função dada no item 1? São positivos ou negativos?

No item 1, $a = -0,75$, que é negativo, e no item 2, $a = 15$, que é positivo.

c. Como você pode relacionar o valor de a (positivo ou negativo) com a inclinação da reta (crescente ou decrescente)?

Se a for positivo, a reta é crescente. Se a for negativo, a reta é decrescente.

Logo, o gráfico de uma função polinomial de 1° grau $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, que é uma reta, é crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$.

A função $S(t) = \frac{\alpha \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot t + S_0$ descreve a posição S de um objeto no espaço em metros, de acordo com o tempo t em segundos, que se move com aceleração constante α, isto é, que está em movimento uniformemente variado. S_0 representa a posição inicial do objeto e v_0 é sua velocidade inicial. Note que esta função é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, ou seja, é uma **função polinomial de 2° grau.**

3. Dois amigos resolveram lançar do chão um foguete de brinquedo que descreve um movimento uniformemente variado.

a. Considerando que a aceleração do foguete é $\alpha = -10\, m/s^2$, e que o lançamento foi feito com velocidade inicial $v_0 = 30\ m/s$, como seria a função que representa a sua trajetória?

Como o foguete foi lançado do chão, $S_0 = 0$. Assim,

$$S(t) = \frac{-10 \cdot t^2}{2} + 30 \cdot t + 0 \Rightarrow S(t) = -5t^2 + 30t.$$

b. Quais os coeficientes a, b e c dessa função?

$a = -5$, $b = 30$ e $c = 0$.

c. Sabe-se que no momento $t = 0$, o foguete estará pousado no chão. Quanto tempo após o lançamento ele estará novamente no chão?

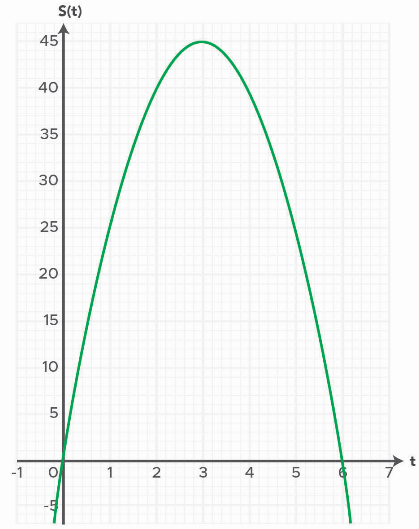
O foguete estará no chão quando $S(t) = 0$. Logo,

$-5t^2 + 30t = 0 \Rightarrow t^2 - 6t = 0 \Rightarrow t(t-6) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t - 6 = 0 \Rightarrow t = 6$.

Portanto, o foguete estará novamente no chão após 6 segundos.

O valor encontrado e o valor $t = 0$ são chamados **raízes** ou **zeros** dessa função, pois são tais que $S(t) = 0$. Note que, para encontrá-los, foi necessário resolver uma equação de 2º grau.

Observe o gráfico dessa função, considerando o domínio como parte do conjunto dos números reais:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

d. Qual figura é a representação gráfica desta função?

Uma parábola.

e. Em qual ponto o gráfico cruza o eixo y? O que representa a coordenada y deste ponto?

O gráfico de f cruza o eixo y no ponto (0 ; 0). A coordenada $y = 0$ é o valor do coeficiente c.

f. Em quais pontos os gráficos cruzam o eixo x? O que representa a coordenada x destes pontos?

O gráfico de f cruza o eixo x nos pontos $(0 ; 0)$ e $(6;0)$. As coordenadas $x=0$ e $x = 6$ são as raízes dessa função.

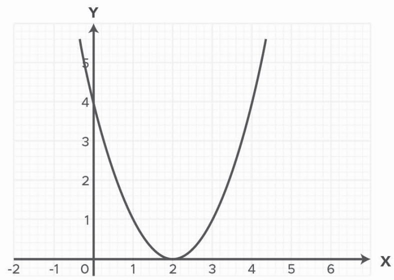
Assim como foi observado para este caso, o gráfico de uma função de 2° grau sempre é uma parábola que cruza o eixo x nos pontos cujas coordenadas em x são as raizes da função, e cruza o eixo y no ponto cuja coordenada em y é o coeficiente b. Note que, caso a função não tenha raízes ou zeros ($\Delta < 0 \; para \; f(x) = 0$), seu gráfico não cruzará o eixo x. Ainda, se for encontrada apenas uma raiz ($\Delta = 0 \; para \; f(x) = 0$), o gráfico tocará o eixo x e não o cruzará.

g. Observando o gráfico, responda: qual a altura máxima atingida pelo foguete? Quanto tempo ele demora para atingi-la?

A altura máxima é $45m$. Ele demora 3 segundos para atingi-la.

Os valores encontrados são as coordenadas do **vértice** dessa parábola, que representa a trajetória do foguete de brinquedo. Nesse caso, o vértice é o ponto máximo que a parábola atinge. Caso não se tenha o gráfico da função, é possível encontrar suas coordenadas fazendo o seguinte cálculo: $V = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

5. Observe a seguir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 10x + 25$:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. Qual a maior diferença entre esta parábola e a do item 4?

No item 4, a parábola tem concavidade voltada para baixo, e no item 5, tem concavidade voltada para cima.

b. Quais os valores do coeficiente a para esta função e para a função dada no item 4? São positivos ou negativos?

No item 4, $a = -5$, que é negativo, e no item 5, $a = 1$, que é positivo.

c. Como você pode relacionar o valor de a (positivo ou negativo) com a concavidade da parábola (voltada para cima ou para baixo)?

Se a for positivo, a parábola tem concavidade voltada para cima. Se a for negativo, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Sendo assim, o gráfico de uma função polinomial de 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, que é uma parábola, tem sua concavidade voltada para cima se $a > 0$, e voltada para baixo se $a < 0$.

FINALIZANDO

Propõe-se que, ao final da aula, sejam retomados os conceitos de zero da função e os itens necessários para a montagem de um gráfico de funções de 1º e 2º grau sem precisar preencher uma tabela de pontos.

AULAS 7 E 8 – AS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas ou trios.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante, caderno, lápis, borracha e calculadora.

INICIANDO

É interessante iniciar a aula relembrando os conceitos de potência e logaritmo, bem como questionando os estudantes sobre o que eles entendem por crescimento ou decrescimento exponencial. Neste momento, também já pode ser dito a eles que ao final serão resolvidos exercícios sobre funções que estiveram presente no ENEM e no SARESP. Para a realização das atividades propostas, sugere-se a organização dos estudantes em duplas ou trios.

AULAS 7 E 8 – AS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Objetivos das aulas
- Efetuar operações com potências e raízes;
- Reconhecer a definição da função exponencial e logarítmica;
- Estabelecer relações entre as representações de funções exponencial e logarítmica;
- Resolver situações-problema que envolvam funções exponenciais e logarítmicas nos quais sejam necessários compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas.

Você será convidado a conhecer as funções exponencial e logarítmica, que têm uma relação especial entre si. Para resolvê-las, será necessário relembrar tudo que você viu até aqui sobre funções; então, reúna-se com sua dupla e mãos à obra!

As funções exponenciais têm diversas aplicações em várias áreas, como, por exemplo, na biologia, na física, na economia... No item 1 há um exemplo na biologia:

1. Ao fazer uma pesquisa em seu laboratório, uma cientista observou que a cada hora o número de bactérias presentes em um meio triplicava.

a. Sabendo que inicialmente havia duas bactérias, determine quantas estarão presentes neste meio ao final de 4 horas.

0 horas $\rightarrow 2$; *1 hora* $\rightarrow 2 \cdot 3 = 6$; *2 horas* $\rightarrow 6 \cdot 3 = 18$; *3 horas* $\rightarrow 18 \cdot 3 = 54$;
4 horas $\rightarrow 54 \cdot 3 = 162$. **Ao final de 4 horas, haverá 162 bactérias no meio.**

b. Qual é a função que representa a relação existente entre a quantidade q de bactérias em determinado tempo t, dado em horas? Note que a quantidade depende do tempo.

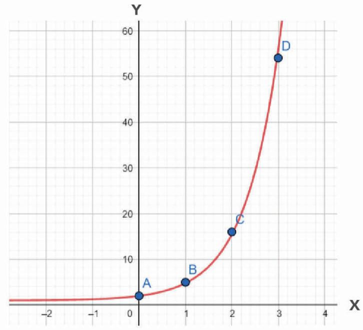
Reescrevendo os cálculos do item "a", tem-se
0 horas $\rightarrow 2 = 2 \cdot 3^0$; *1 hora* $\rightarrow 2 \cdot 3 = 6 = 2 \cdot 3^1$; *2 horas* $\rightarrow 6 \cdot 3 = 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$;
3 horas $\rightarrow 18 \cdot 3 = 54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^3$;
4 horas $\rightarrow 54 \cdot 3 = 162 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^4$; ... ; *t horas* $\rightarrow 2 \cdot 3^t$.
Logo, a função será $q(t) = 2 \cdot 3^t$.

Comumente, define-se função exponencial como sendo da forma $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, mas aqui também será considerada como função exponencial as funções como a do caso apresentado, isto é, que tem um número multiplicando a potência.

c. Quanto tempo demorará para que se tenha 4374 bactérias?

Deve-se encontrar o valor de t para o qual
$q(t) = 4374$: $q(t) = 2 \cdot 3^t \Rightarrow 2 \cdot 3^t = 4374 \Rightarrow 3^t = \frac{4374}{2} = 2187$.
Fatorando *2187* **para obter uma potência de base** *3*, **tem-se** $2187 = 3^7$. **Logo,**
$3^t = 3^7 \Rightarrow t = 7$. **Portanto, demorará** *7* **horas para que se tenha** *4374* **bactérias.**

Observe o gráfico dessa função considerando seu domínio como o conjunto dos números reais.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Nele estão marcados os pontos A(0; 2), B(1; 5), C(2; 16) e D(3; 54), cuja distância entre eles aumenta conforme aumenta o valor de t. Note que este gráfico é crescente, uma vez que, conforme o tempo aumenta, a quantidade de bactérias também aumenta. Note também que ele não cruza o eixo x, apesar de se aproximar muito. Sendo assim, observe que o contradomínio dessa função é o conjunto dos números reais positivos.

Outra aplicação de função exponencial é na economia:

2. Você sabia que, após ser comprado em uma concessionária, um carro perde seu valor anualmente? Suponha que determinado carro foi comprado por R$35000,00 e desvalorize 8% ao ano. Faça o que se pede.

a. Encontre a função exponencial segundo a qual a desvalorização deste carro ocorre.

Se o carro desvaloriza 8% **ao ano, todo ano ele passa a valer** 92% **do que valia no ano anterior. Assim, o seu valor atual é multiplicado por** $0{,}92$**. Logo, como o valor pago foi** $R\$\ 35000{,}00$**, considerando** t **o tempo em anos e** v **o valor do carro, tem-se a seguinte função:**

$v(t) = 35000 \cdot 0{,}92^t$.

b. Qual será aproximadamente o valor do carro seis meses após a sua compra?

Como t é dado em anos e seis meses representa meio ano, tem-se que $t = \frac{1}{2}$**. Logo,** $v\left(\frac{1}{2}\right) = 35000 \cdot 0{,}92^{\frac{1}{2}} = 35000 \cdot \sqrt{0{,}92} \cong 35000 \cdot 0{,}96 = 33600$**. Portanto, seis meses após sua compra o carro valerá aproximadamente** $R\$\ 33600{,}00$**.**

DESENVOLVENDO

Nos itens 1 e 2 da Atividade 1 será trabalhado o conceito de função exponencial, isto é, sua definição e o que é necessário para que o gráfico seja crescente ou decrescente. Essa última parte será feita através da comparação dos gráficos das duas funções relacionadas a esses itens, que tratam de uma aplicação na biologia e uma na economia. Os gráficos são apresentados prontos para que os estudantes possam se familiarizar com o formato assumido por eles.

Nos itens 3 e 4, os estudantes trabalharão com funções logarítmicas, sendo apresentada sua definição e um gráfico para que possam entender o formato que ele assume. Isso também é feito através de aplicações dessa função: uma sobre o nível sonoro e outra sobre intensidade de terremotos. No item 5, eles devem traçar os gráficos das funções $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln \ln x$ e $h(x) = x$ para que possam verificar que os gráficos das funções exponencial e logarítmica são simétricos em relação à função identidade, o que ocorre devido ao fato de serem inversas. No segundo momento da aula, que é a Atividade 2, os alunos devem relembrar todos os conceitos vistos sobre funções para discutir e responder as questões de 1 a 4 retiradas do ENEM e do SARESP. A correção pode ser feita coletivamente.

Observe o gráfico dessa função, considerando seu domínio como sendo o conjunto dos números reais:

Fonte: elaborado para fins didáticos.

c. Qual a maior diferença que pode ser observada entre os gráficos desta função e da função dada no item 1?

O gráfico da função do item 1 é crescente, enquanto este é decrescente.

d. No item 1, a potência da forma a^t que aparece na função é 3^t, e neste caso é $0{,}92^t$. Note que $3>1$ e $0<0{,}92<1$. Como você pode relacionar o valor da base a $(a>1$ ou $0<a<1)$ com o fato de a função exponencial representada no gráfico ser crescente ou decrescente?

Se $a > 1$, o gráfico representa uma função que é crescente, e se $0 < a < 1$, o gráfico representa uma função que é decrescente.

Assim como as funções exponenciais, as funções logarítmicas têm muitas aplicações. Um exemplo é no cálculo do nível da intensidade do som em um ambiente:

3. O nível sonoro de um ambiente (N), dado em decibel (dB), pode ser calculado a partir da relação $N = 10 \cdot loglog \left(\frac{I}{I_0}\right)$, onde I é a intensidade do som considerado, correspondente ao nível N, e I_0 é uma constante que representa o limiar de audição, isto é, a menor intensidade sonora audível, que é $I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$ (watts por metro quadrado). Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS), o nível sonoro aceitável para nossa audição é de até 50 dB. Qual é a intensidade correspondente a esse nível?

Utilizando propriedade e definição de logaritmo, tem-se:

$$50 = 10 \cdot loglog \left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Rightarrow loglog\ I - loglog\ 10^{-12} = 5$$

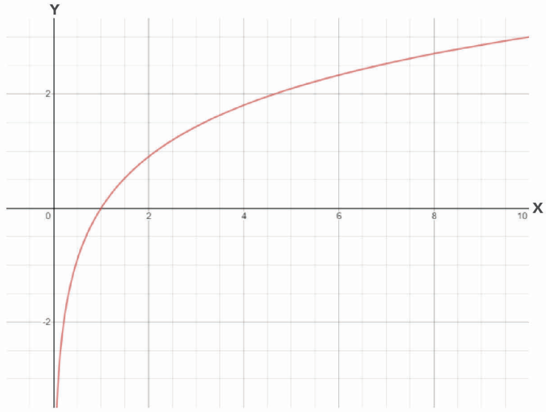
$$\Rightarrow loglog\ I + 12 = 5 \Rightarrow loglog\ I = -7 \Rightarrow I = 10^{-7}\, W/m^2 \ .$$

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, é interessante relembrar aos alunos que se não aparece um número como base do logaritmo, é porque a base é 10.

Uma função logarítmica na base a é da forma f(x)=x , com a sendo um número real positivo e diferente de 1. Note que no caso apresentado, existe uma constante multiplicando o logaritmo, o que será considerado aqui também como uma função logarítmica.

Observe o gráfico dessa função, cujo domínio é o conjunto dos números reais positivos:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Os gráficos das funções logarítmicas seguem a mesma regra que os gráficos das funções exponenciais: se $a > 1$, o gráfico é crescente, e se $0 < a < 1$, o gráfico é decrescente, onde a é a base do logaritmo dado na função.

Outra aplicação de funções logarítmicas é no cálculo da magnitude de um terremoto:

4. Sendo E a energia liberada por um terremoto em kW/h (kilowatts hora), e E_0 uma constante igual a $7 \cdot 10^{-3}\, kW/h$, que é a energia inicial, é possível calcular a intensidade I de um terremoto através da relação $I = \frac{2}{3} log log\ \frac{E}{E_0}$.

a. Um dos maiores terremotos ocorridos no Brasil foi em 1955, no Mato Grosso, e teve intensidade I=$6,2$. Qual foi a energia E liberada por este terremoto? Utilize a aproximação $0,85$ para $log\ 7$.

$$I = \frac{2}{3} logloglog\ \frac{E}{E_0}$$

$$\frac{2}{3} loglog\ \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} = 6,2 \Rightarrow loglog\ E - loglog\ 7 \cdot 10^{-3} = 9,3 \Rightarrow$$

$$loglog\ E - (loglog\ 7 + loglog\ 10^{-3}) = 9,3 \Rightarrow loglog\ E - 0,85 + 3 = 9,3 \Rightarrow$$

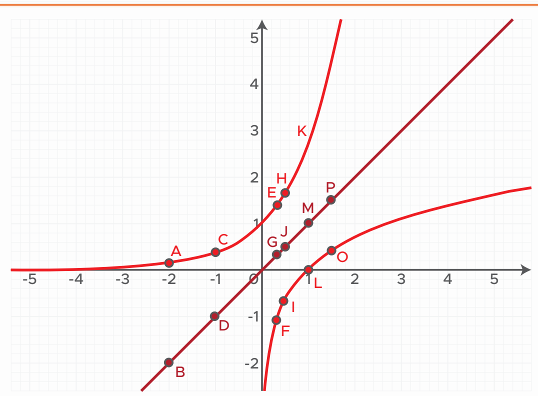
$$loglog\ E = 7,15 \Rightarrow E = 10^{7,15} k\,W/h.$$

b. O gráfico dessa função seria crescente ou decrescente?

Crescente, pois a base do logaritmo é 10, que é um número maior que 1.

5. Preencha a tabela a seguir e represente graficamente no plano cartesiano as funções $f(x) = e^x$, em que $e \cong 2{,}7$, $g(x) = \ln \ \ ln\, x$ (logaritmo de x na base e) e $h(x)=x$ (função identidade):

x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	1,5
$f(x)$	$e^{-2} = \frac{1}{e^2} \cong 0{,}1$	$e^{-1} = \frac{1}{e} \cong 0{,}4$	$e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e} \cong 1{,}4$	$e^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{e} \cong 1{,}6$	$e^1 = e \cong 2{,}7$	$e^{1{,}5} \cong 4{,}5$
$g(x)$	$\nexists$	$\nexists$	$\ln\frac{1}{3} \cong -1{,}1$	$\ln\frac{1}{2} \cong -0{,}7$	$\ln 1 = 0$	$\ln 1{,}5 = 0{,}4$
$h(x)$	-2	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$1{,}5$



O que você pode observar com relação a estes três gráficos?

Os gráficos de $f(x)$ (função exponencial) e $g(x)$ (função logarítmica) são simétricos em relação ao gráfico de $h(x)$ (função identidade).

Isso ocorre porque as funções exponencial e logarímica que têm o mesmo valor a (nesse caso, $a = e$) são inversas.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, os alunos podem ser orientados a nomear os pontos, assim como está feito no plano cartesiano, e a usar cores diferentes para representar o gráfico de cada função.

FINALIZANDO

Nesta aula, a verificação do desenvolvimento das habilidades assumidas para o trabalho com essa Sequência de Atividades pode ser feita, pois nela os estudantes deverão relembrar o conceito de função, bem como as formas de representá-la, e os casos específicos vistos (funções polinomiais de 1º e 2º grau, função exponencial e função logarítmica). Assim, será possível, com o engajamento dos estudantes, sanar possíveis dúvidas que permaneceram.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

3ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

ANOTAÇÕES

3ª SÉRIE - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

OLÁ, PROFESSOR!

Nesta Sequência de Atividades, falamos diretamente com você, que está aí na sala de aula, no convívio direto com os estudantes. Estes terão oportunidade, neste momento, de se envolverem com atividades que possibilitam a retomada de conceitos, propriedades e procedimentos essenciais para o desenvolvimento de seus conhecimentos e capacidades em Matemática.

A Sequência de Atividades deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e de distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração. Além disso, as socializações das atividades, por parte dos estudantes, são percebidas como oportunidades de serem desenvolvidas habilidades e competências que dizem respeito à cooperação, à empatia, à argumentação, à comunicação, entre outras.

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos vinculados a grandezas proporcionais, em diferentes contextos.

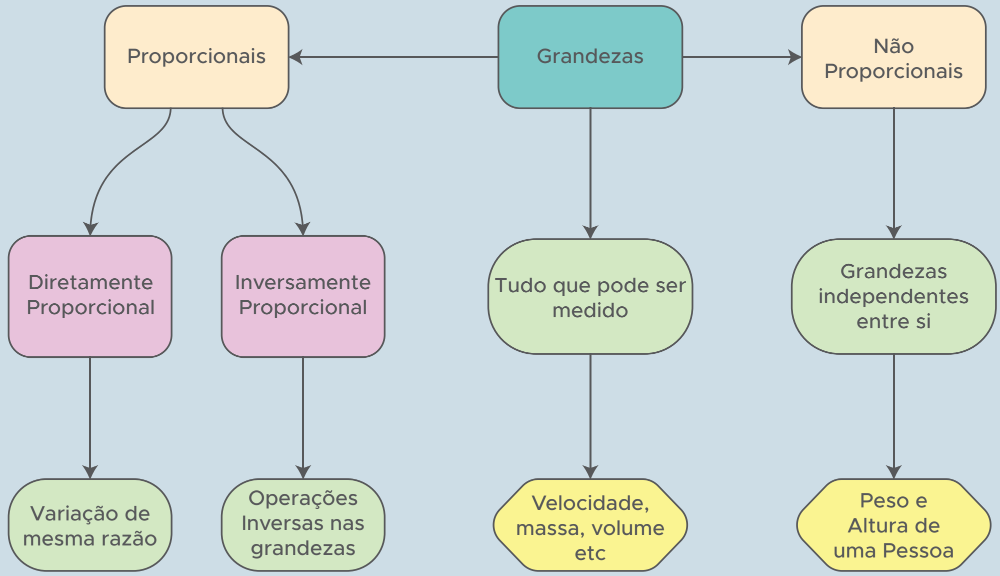
A habilidade a ser desenvolvida na aula é: (EF09MA08) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e outras áreas.

AULA	TEMPO	ATIVIDADE
1 e 2	90 min	Estudo das grandezas proporcionais
3 e 4	90 min	Cálculo de grandezas direta e inversamente proporcionais
5 e 6	90 min	Divisão em partes proporcionais
7 e 8	90 min	Situações-problema em outras áreas

Sabemos que as atividades por si só não ensinam. Por isso, professor, a sua atuação é tão importante em cada uma das situações propostas aqui. Elas têm como objetivo a recuperação das aprendizagens e o desenvolvimento das habilidades esperadas para a 3ª série do Ensino Médio. Para isso, este caderno deverá servir como mais uma ferramenta que o auxiliará no processo de ensino, sendo necessário, portanto, que você considere, em seu replanejamento, outras possibilidades de discussão e recursos para além daqueles sugeridos nesta Sequência de Atividades. Para ajudá-lo nessa ação, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenal acerca das Sequências de Atividades. Tais formações acontecerão nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPCs). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, sugerimos que, após essa etapa, apresente um mapa conceitual abordando sobre a definição de grandezas proporcionais e classificando-as como grandezas diretamente proporcional e indiretamente proporcional. Discuta, ainda, com os estudantes, sobre as grandezas diretamente e inversamente proporcionais, revisando o conteúdo. Abaixo, é apresentado um exemplo de mapa que pode ser utilizado.



CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, para discussão da resolução desta questão, é esperado que o estudante entenda a relação entre as grandezas. Sendo assim, como solução, espera-se que seja discutido:

Situação 1. DP, pois, ao dobrar o número de pessoas na festa, necessariamente aumentará o consumo de alimento previsto, na mesma proporção. Sendo assim, à medida que uma grandeza aumenta, a outra também aumenta.

Situação 2. IP, pois, quanto mais erros têm na prova, menor será a nota ou quanto menos erros, mais nota irão obter. Sendo assim, à medida que uma grandeza aumenta, a outra diminui.

Situação 3. IP, pois, ao dobrar o número de funcionários para pintar um prédio, a quantidade de dias para finalizar a pintura diminuirá, uma vez que um número maior de pessoas realizará o serviço. Assim, à medida que uma grandeza aumenta, a outra diminui.

Situação 4. DP, pois, se o atendimento de cada paciente tem a duração de 10 minutos e tiver 3 pessoas em sua frente, o tempo de espera para que você seja atendido será triplicado. Do mesmo modo que se tiver 4 pessoas em sua frente, na fila, o tempo de espera será quadruplicado. Sendo assim, à medida que uma grandeza aumenta, a outra também aumenta.

Situação 5. IP, pois, se um carro tem sua velocidade aumentada, ele percorrerá o percurso mais rapidamente, de modo que na mesma proporção com que a velocidade é aumentada, o tempo de percurso é diminuído. Sendo assim, à medida que uma grandeza aumenta, a outra diminui.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

AULAS 1 E 2 – ESTUDO DAS GRANDEZAS PROPORCIONAIS

Nesta atividade, você será convidado a relembrar o conceito de função, bem como sua notação usual, sendo possível reconhecê-la em meio a outras relações entre duas variáveis. Para isso, você deverá também recordar os conceitos de domínio, contradomínio e imagem de uma função. Junte-se com sua dupla e vamos lá!

Objetivos das aulas
- Compreender o que são grandezas proporcionais;
- Diferenciar grandezas diretamente e inversamente proporcionais;
- Relacionar matematicamente grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

1. Você já deve ter ouvido falar em grandezas nas aulas de Física, como em óptica geométrica, que cuida em descrever os fenômenos provocados pela propagação da luz, desconsiderando sua natureza ondulatória. Os fenômenos que produzem propagação de ondas são estudados pela Ondulatória e os fenômenos de natureza elétrica ou magnética, pela parte denominada Eletromagnetismo. Em qualquer das áreas da Física, citadas anteriormente, são válidas as relações de proporcionalidade direta e inversa, quando forem proporcionais a várias outras. Nesta sequência, iremos abordar sobre as grandezas proporcionais, mas, antes, tratemos de definir o que são as grandezas proporcionais.

a. Com suas palavras, defina o que são as grandezas proporcionais.

Grandezas são ditas como tudo aquilo que se pode medir ou contar. Elas são classificadas em inversamente e diretamente proporcionais. A grandeza diretamente proporcional mantém variação de mesma razão entre as grandezas, por exemplo, se uma dobra, a outra também dobra. Duas grandezas são inversamente proporcionais quando o aumento de uma implica na redução da outra, ou seja, dobrando uma grandeza, a correspondente reduz pela metade; triplicando uma grandeza, a outra reduz para terça parte... e assim por diante, por exemplo, velocidade e tempo.

2. Analise as sentenças no quadro e classifique-as como DP (Diretamente Proporcional) ou IP (Inversamente Proporcional).

1. Ao dobrar o número de pessoas em uma festa, o valor gasto com alimentação também será dobrado.	DP
2. Em uma avaliação com 10 questões, em que cada questão correta vale 1 ponto, quanto maior a quantidade de erros, menor é a pontuação obtida.	IP
3. 4 funcionários pintam um prédio em 5 dias. Então, 8 funcionários pintarão o mesmo prédio em 2 dias e meio.	IP

AULAS 1 E 2 – ESTUDO DAS GRANDEZAS PROPORCIONAIS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Alunos organizados em grupos de 4.

MATERIAL NECESSÁRIO

Para o estudante: Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

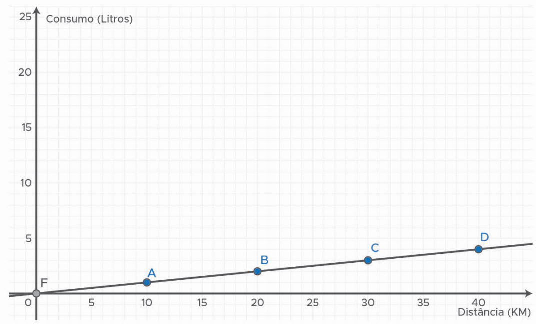
Professor, para as aulas 1 e 2 desta Sequência, com as carteiras organizadas em grupos, é recomendado começar uma conversa com os estudantes informando que, nas próximas aulas, estudarão, de forma acentuada, situações-problema que envolvam grandezas proporcionais. É importante encaminhar a discussão no sentido de orientá-los quanto à importância do estudo das grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Sendo assim, apresente uma situação em que é possível encontrar a relação de grandeza proporcional e proponha um momento para que os estudantes pensem sobre o conceito de grandezas proporcionais. Após essa breve introdução, peça aos grupos que compartilhem, com toda a turma, o que foi discutido entre eles. Logo, os estudantes poderão receber o **Caderno do Estudante** impresso e realizar a leitura coletiva das questões.

DESENVOLVENDO

Para começar, apresente uma situação em que é possível identificar as grandezas proporcionais, mas lembre-se de não apresentar o conceito. Essa proposta deve ser feita para que os estudantes pensem sobre o assunto, sem ter a resposta de imediato. Para ajudar, discuta e questione sobre as receitas de culinária; velocidade de um automóvel, relacionando com o tempo e dentre outras situações que os ajudem a deduzir o conceito. Depois desse momento, os estudantes poderão responder à questão 1. Para a questão 2, deixe que os estudantes pensem na questão individualmente, num primeiro momento. Enquanto respondem, circule pela sala e observe as principais estratégias de resolução e dificuldades dos estudantes, fazendo intervenções, quando necessário. Lembre-se de nunca falar a resposta da atividade ao estudante ou dizer como alcançá-la, procure fazer perguntas que os estimulem a encontrar a resposta. A partir da questão 3, procure revisar a regra de três simples. Para a questão 4, induza o estudante a construir a ideia matemática da proporção através de uma tabela e mostre que quando uma grandeza se altera, a outra irá seguir a mesma proporção. Para questão 5 e 6, peça aos grupos que compartilhem as resoluções.

4. Em um hospital, o atendimento de cada paciente tem a duração de 10 minutos. Portanto, quanto maior a quantidade de pacientes para serem atendidos antes de você, maior será o tempo de espera para você ser atendido.	DP
5. Com uma velocidade de 100 Km/h, um carro vai da cidade A para a cidade B em 1 hora. Com uma velocidade de 60 Km/h, o mesmo carro percorre o mesmo percurso em 1h40min.	IP

3. Jonas comprou uma moto pois possui baixo consumo de combustível. O gráfico abaixo relaciona o consumo e a distância percorrida por ela durante o mês.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. Quais são as grandezas representadas no gráfico?

b. Essas grandezas são diretamente proporcionais? Explique.

c. Com quantos litros de combustível a moto percorre uma viagem de 15 Km, se a cada 10 Km é consumido 1 litro de combustível?

a) As grandezas apresentadas no gráfico são: consumo em litros e distância percorrida em km.

b) As grandezas são diretamente proporcionais, pois, à medida que a quantidade de quilômetros percorridos aumenta, o consumo também aumenta, assim temos uma reta crescente.

c) sabemos que ao percorrer 10 km o consumo é de 1 litro, então:

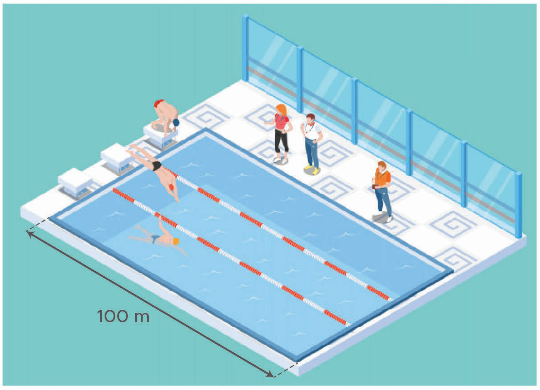
$$\frac{10}{15} = \frac{1}{x}$$

$$10x = 15$$

$$x = \frac{15}{10} = 1{,}5\ Km$$

4. Mariana realiza seu treinamento de natação em uma piscina de sua cidade. Ela irá participar de um campeonato de nado raso em que a piscina é de 400 metros. No quadro a seguir, está representado o seu desempenho em percorrer a piscina abaixo. Preencha o quadro e responda em quanto tempo ela irá realizar a prova do campeonato, havendo a mesma proporção?

Distância	Tempo (Segundos)
100 m	70
200 m	140
300 m	210
400 m	280



Fonte: elaborado para fins didáticos.

5. (Saresp) Um pintor fez uma tabela relacionando a área da superfície a ser pintada, o tempo gasto para pintar essa superfície e a quantidade de tinta.

Área	Tempo (h)	Tinta (*l*)
10	2	1
40	8	4
80	16	8

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, propomos a correção coletiva de todas as questões. O incentivo à participação de todos os estudantes é muito importante. Dessa forma, será possível identificar os que ainda apresentam fragilidades quanto aos objetos de conhecimento tratados, permitindo planejar possíveis estratégias para o esclarecimento de dúvidas. Além de tudo, o trabalho em grupo proporciona o compartilhamento de ideias para a construção do conhecimento.

Para pintar uma superfície de 200 m², o tempo e a quantidade de tinta gastos são, respectivamente:

a. 10H e 20L.

b. 20H e 30L.

c. 20H e 20L.

d. 40H e 20L.

As grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, então calcule o tempo em relação à área:

$$\frac{10}{200} = \frac{2}{x}$$

x = 40 horas.

Agora, encontre a quantidade de tinta em relação à área:

$$\frac{10}{200} = \frac{1}{Y}$$

$$Y = 20l$$

Portanto, alternativa D.

6. Qual é a velocidade de um automóvel que gasta quatro horas em um percurso, sabendo que gastaria 8 horas, nesse mesmo percurso, se estivesse a 40 km/h?

Para resolver esse problema, é possível usar a regra de três. Para tanto, é necessário construir uma proporção entre a velocidade do automóvel e o tempo gasto por ele no percurso. Essa proporção é:

$$\frac{4}{8} = \frac{x}{40}$$

Observe que, aumentando a velocidade, o tempo gasto no percurso diminui, portanto, essas grandezas são inversamente proporcionais. Para encontrar a velocidade do automóvel, é preciso inverter uma das razões da proporção acima

$$\frac{4}{8} = \frac{40}{x}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, teremos:

$$4x = 320$$

$$x = \frac{320}{4}$$

x=80 km por hora.

7. (Saresp-2011) Ao comprar dois chocolates, Pedro pagou R$ 3,00. Se Pedro gastasse R$ 13,50, quantos chocolates compraria?

a. 6.

b. 6,5.

c. 9.

d. 9,5.

Observe que 2 chocolates custaram R$ 3,00, então, 1 chocolate custa R$ 1,50, sendo assim, $\frac{R\$\ 13{,}50}{R\$\ 1{,}50} = R\$\ 9{,}00$. Logo, a correta é a alternativa C.

AULAS 3 E 4 – CÁLCULO DE GRANDEZAS DIRETA E INVERSAMENTE PROPORCIONAS

Objetivos das aulas
- Resolver situações-problema que envolvam duas ou mais grandezas, direta ou inversamente proporcionais;
- Elaborar situações-problema que envolvam duas ou mais grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

Agora que relembrou conceitos sobre as grandezas proporcionais, bem como situações-problemas, esperamos que, com os exercícios a seguir, você possa utilizar seus conhecimentos atuais para construir problemas.

1. Uma estudante levou 30 dias para ler um livro de 600 páginas. Quantos dias a mesma estudante, mantendo o ritmo de leitura, levará para ler outro livro de 360 páginas?

As grandezas tempo (dias) e número de páginas são diretamente proporcionais, pois, note que quando o número de páginas diminui, o tempo que a estudante irá levar para ler o livro também irá diminuir.

Tempo (dias)	Nº páginas
30	600
X	360

Como é diretamente proporcional, é possível utilizar a regra de três simples:

$$600x = 10800$$
$$x = \frac{10800}{600}$$
$$x = 18$$

Logo, a estudante vai levar 18 dias para ler 360 páginas.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, procure destacar com os estudantes as questões do Saresp. Proponha, ainda, que o grupo que responder primeiro, faça a resolução delas na lousa e que compartilhem com a turma a forma que solucionaram, justificando cada questão. Essa interação entre os estudantes é importante para abrir discussões e expor novas ideias e pensamentos, possibilitando a troca de conhecimentos.

AULAS 3 E 4 – CÁLCULO DE GRANDEZAS DIRETA E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA
Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO
Para o aluno: Caderno do Estudante impresso.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, procure desenvolver e auxiliar o estudante sem dar respostas ou ideias, pois, nessa etapa, o erro servirá para entender e construir um problema. Sendo assim, faça apenas questionamentos nos momentos em que achar que deve intervir. Somente ao final, corrija e comente os erros, bem como os acertos.

No exercício acima, o estudante é convidado a completar o exercício de uma forma lógica. Entretanto, segue, abaixo, uma possível solução:

a. As grandezas que podemos escolher podem ser quantidade de cadernos e preço, sendo que a primeira coluna representaria o número de cadernos e a segunda, o valor pago pelos cadernos.

b. Observando a tabela, é possível perceber que as grandezas são diretamente proporcionais, pois há uma constante de proporcionalidade que garante essa proporcionalidade direta. Ao passo que os valores da primeira coluna dobram, os valores da segunda coluna dobram também. Ao passo que os valores da primeira coluna triplicam em relação ao primeiro valor, os valores da segunda coluna triplicam em relação ao seu primeiro valor.

2. Anteriormente você solucionou situações-problemas. Se pararmos para pensar, qualquer situação a ser resolvida por uma sequência de ações com o objetivo de "chegar em algum lugar" é uma situação-problema. Agora que você sabe resolver problemas, use o quadro abaixo para elaborar um problema que envolva grandezas proporcionais. Para isso, use o espaço em branco na tabela e coloque as grandezas.

2	5
4	10
6	15
10	25
20	50

a. Quais são as duas grandezas?

Resposta Pessoal.
Sugestão de resposta: quantidade de cadernos e preço.

b. As grandezas são inversamente ou diretamente proporcionais?

Resposta Pessoal. Sugestão de resposta: Observando a tabela, é possível perceber que as grandezas são diretamente proporcionais, pois quanto mais cadernos compramos, maior é o valor a ser pago.

3. Agora é com você! Construa uma situação-problema que envolva grandezas proporcionais, sem nenhum auxílio de tabela. Use a sua criatividade! Elabore a atividade, tomando como base sua rotina do dia a dia ou até mesmo sobre algum assunto que goste muito. Logo em seguida, responda os itens a seguir.

a. Apresente a solução para seu problema.

b. Troque seu problema com o colega e peça para ele solucionar. Logo após, questione-o sobre as dificuldades e anote.

c. Seu problema pôde ser solucionado? Caso a resposta seja não, escreva o motivo, se foi por falta de informações, falta de coerência ou até mesmo por dificuldade na interpretação.

Respostas Pessoais.
Sugestão de resposta:
Para fazer uma panela grande de mingau, são necessárias 5 vasilhas de 4 litros de leite. Se forem usadas vasilhas de 2 litros cada, quantas serão necessárias?

$$\frac{5}{x} = \frac{2}{4}$$
$$2x = 20$$
$$x = 10$$

Logo, se forem usadas vasilhas de 2 litros, serão necessárias 10 vasilhas.

Agora é hora de testar nossos conhecimentos. Neste momento, você já sabe conceitos, solucionar e criar situações-problema que envolvem grandezas proporcionais. Chegou o momento de colocar em prática e aprimorar tudo que você aprendeu até então.

4. ENEM 2013 - Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m³. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Essa indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m³, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente. A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a:

a. 2.

b. 4.

c. 5.

d. 8.

e. 9.

Observe que, neste caso, existem três grandezas: capacidade, número de ralos e tempo de escoamento. Para solucionar este problema, é preciso analisar as grandezas: se são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. Como a questão solicita o número de ralos necessários para que o escoamento ocorra em horas, compare as grandezas tempo e capacidade com a grandeza número de ralos.

Quanto maior a capacidade, mais ralos são necessários, então essas duas grandezas são diretamente proporcionas

Quanto maior o número de ralos, menor o tempo de escoamento, então essas duas grandezas são inversamente proporcionais.

Portanto, é possível utilizar a regra de três composta:

$$\frac{6}{x} = \frac{900}{500} \cdot \frac{4}{6}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{3600}{3000}$$

$$\frac{6}{x} = 1{,}2$$

$$x = 5$$

Logo, a quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser de 5 ralos. Portanto, a correta é a alternativa C.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, na resolução deste exercício, proponha que alguns estudantes comentem sobre seu problema e que apresentem a solução. Comente, também, sobre algum que apresente erro na construção, mas tome o devido cuidado, pois a intenção não é criticar e, sim, aprender com o erro.

Ainda assim, segue abaixo uma sugestão de resolução:

Para fazer uma panela grande de mingau, são necessárias 5 vasilhas de 4 litros de leite. Se forem usadas vasilhas de 2 litros cada, quantas serão necessárias?

Observe que as grandezas são inversamente proporcionais, pois quanto menor a capacidade da vasilha, mais vasilhas de leite serão necessárias para fazer o mingau. Então:

$$\frac{5}{x} = \frac{2}{4}$$

$$2x = 20$$

$$x = 10$$

Logo, se forem usadas vasilhas de 2 litros, serão necessárias 10 vasilhas.

INICIANDO

Professor, para as aulas 3 e 4 desta Sequência, com as carteiras organizadas em grupos, é recomendado começar uma conversa com os estudantes, informando que, nas próximas aulas, estudarão divisões em partes iguais, escalas e taxa de variação. É importante encaminhar a discussão no sentido de orientá-los quanto à importância do estudo das grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Sendo assim, discuta com os estudantes a respeito de problemas que possam envolver grandezas proporcionais com uma ou mais grandezas. Após essa breve introdução, revise a regra de três simples e composta e relacione-as com as grandezas proporcionais. Logo, os estudantes poderão receber o **Caderno do Estudante** impresso e realizar a leitura coletiva das questões.

DESENVOLVENDO

Professor, para iniciar a aula, retome, através do exercício 1, resoluções de situações-problemas. Logo após, a ideia é auxiliar os estudantes a desenvolverem um problema. Assim, eles terão a oportunidade de construir seu próprio pensamento. Em seguida, peça para que resolvam a questão 2. Na questão 3, desenvolva, com os estudantes, como é a estrutura de um problema. Antes de tudo, explique sobre a importância de o problema fazer sentido em questão de interpretação, dados e coerência acima de tudo. Aproveite para discutir, depois que todos construírem o exercício, as ideias que surgiram, as dificuldades, e aponte possíveis correções, pois o debate faz parte da construção. A questão 4 deve ser realizada com o objetivo de que os estudantes possam aprofundar melhor o conhecimento no assunto. Ademais, é uma forma de constatar e encontrar dificuldades. Para isso, professor, é essencial que comente brevemente, caso necessite, sobre a velocidade na Física, em especial a fórmula da velocidade que pode ser utilizada na resolução da questão 6. A participação dos estudantes na realização dos exercícios é muito importante, por isso busque incentivá-los a tentarem sempre e propicie, durante as resoluções, discussões que julgar necessárias.

5. Para construir um muro com 2 metros de altura e 25 metros de comprimento, os operários levaram 25 dias. Quantos dias esse mesmo grupo de operários levaria para construir um muro de 1 metro de altura e 20 metros de comprimento?

Neste caso, existem três grandezas: altura, comprimento e dias. Observe que elas são diretamente proporcionais, pois se a altura aumenta, o número de dias também irá aumentar, e se o comprimento aumenta, o número de dias necessários também irá aumentar. Logo, usando a regra de três composta, tem-se:

$$\frac{25}{x} = \frac{2}{1} \cdot \frac{25}{20}$$

$$\frac{25}{x} = 2{,}5$$

$$x = \frac{25}{2{,}5}$$

$$x = 10 \text{ dias.}$$

6. Uma estudante registrou, na tabela abaixo, a velocidade que obteve durante 4 dias e seu respectivo tempo para chegar ao destino.

V (Km/h)	4	6	9	24
T(min)	18	12	8	3

Determine a função que relaciona a velocidade com o tempo.

Analisando a tabela e as grandezas, percebemos que elas são inversamente proporcionais, pois à medida que a velocidade aumenta, o tempo de chegada ao destino diminui ou à medida que a velocidade diminui, o tempo de chegada aumenta. Se considerarmos os estudos de Física, teríamos a opção de usar a fórmula da velocidade de um objeto em movimento retilíneo uniforme, assim: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Onde Δs é a distância percorrida e Δt o intervalo de tempo. Então: $v \cdot \Delta t = \Delta s$

Se substituirmos os valores da tabela na fórmula constataremos que:

$4 \cdot 18 = 32, 6 \cdot 12 = 72, 9 \cdot 8 = 72$ e $24 \cdot 3 = 72$. Logo, $v = \frac{72}{t}$

7. Em uma loja de brinquedos, de cada 15 brinquedos vendidos, 6 são carrinhos de controle remoto. No dia das crianças foi vendido um total de 600 brinquedos. Calcule a quantidade de carrinhos de controle remoto vendidos no dia das crianças.

Brinquedos	Carrinho
15	6
600	X

Observe que quanto mais brinquedos forem vendidos, mais carrinhos serão vendidos, logo as grandezas são diretamente proporcionais.

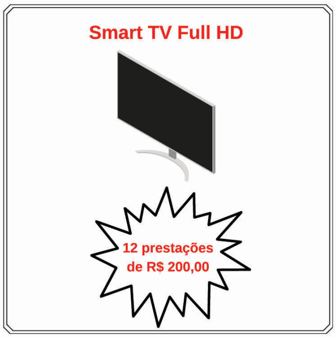
$$15x = 3600$$

$$x = \frac{3600}{15}$$

$$x = 240$$

Logo, foram vendidos 240 carrinhos de controle remoto no dia das crianças.

8. Marcos quer comprar uma televisão a prazo. Mas para conseguir pagar a TV, ele limitou o valor da prestação para, no máximo, R$ 270,00. Em quantas prestações, no mínimo, Marcos pode comprar a televisão do cartaz?



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Observe que quanto maior o valor da prestação, menor será a quantidade de parcelas, logo, as grandezas são inversamente proporcionais.

$$\frac{12}{x} = \frac{270}{200}$$
$$270x = 2400$$
$$x = 8{,}88 \cong 9.$$

8. (Enem-2015) Uma confecção possuía 36 funcionários, alcançando uma produtividade de 5400 camisetas por dia, com uma jornada de trabalho diária dos funcionários de 6 horas. Entretanto, com o lançamento da nova coleção e de uma nova campanha de marketing, o número de encomendas cresceu de forma acentuada, aumentando a demanda diária para 21600 camisetas. Buscando atender essa nova demanda, a empresa aumentou o quadro de funcionários para 96. Ainda assim, a carga horária de trabalho necessita ser ajustada.

Qual deve ser a nova jornada de trabalho diária dos funcionários para que a empresa consiga atender a demanda?

a. 1 hora e 30 minutos.

b. 2 horas e 15 minutos.

c. 9 horas.

d. 16 horas.

e. 24 horas.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, sugerimos que faça a correção ou comentário de todas as questões. Além disso, procure incentivar a participação dos estudantes. Assim, você terá uma noção do quão bem sucedidas estão sendo as aulas e conseguirá perceber as dúvidas que mais se destacam.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, procure comentar a questão acima com os estudantes, verifique se eles compreenderam a ideia de proporcionalidade direta e inversa. Essa questão é excelente para perceber se eles estão no caminho certo ou se, ainda, precisam de algum auxílio e revisão.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, nesta aula, revise o conteúdo de divisão em partes proporcionais, classificando-o quanto à divisão inversamente proporcional e divisão diretamente proporcional. Para isso, dê valores à situação apresentada abaixo e solucione com os estudantes. Assim, eles terão a base para iniciar.

Comparando a grandeza quantidade de funcionários com horas, teremos que quanto maior o número de funcionários trabalhando, menor o tempo necessário para produzir, então as duas grandezas são inversamente proporcionais. Agora, comparando as grandezas quantidade de camisetas e horas, teremos que quanto maior o número de camisetas, maior será o tempo necessário para produção, logo são grandezas diretamente proporcionais.

Portando, a correta é a alternativa C.

$$\frac{6}{x} = \frac{96}{36} \cdot \frac{5400}{21600}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{518400}{777600}$$

$$518400x = 4665600$$

$$x = 9$$

AULAS 5 E 6 – DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS

Objetivos das aulas
- Compreender o que são divisões em partes proporcionais;
- Resolver situações-problema que envolvam divisão em partes proporcionais, escalas e taxa de variação;
- Elaborar problemas que envolvam divisão em partes proporcionais, escalas e taxa de variação.

Neste momento, você já sabe sobre a definição de grandezas, que elas são classificadas em diretamente e inversamente proporcionais, e solucionar problemas que envolvam as grandezas proporcionais. Essa atividade tem como finalidade recordar a divisão proporcional. Então, vamos começar!

Pense na situação em que você e seu amigo fizeram um investimento financeiro em parceria, comprando uma casa. Entretanto, você investiu mais dinheiro do que ele. No decorrer do tempo, este imóvel valorizou e vocês venderam-no, o que gerou um retorno maior que o valor investido e vocês vão se reunir para dividir essa quantia. Entretanto, como será feita essa divisão? Nesse momento, a única coisa que passa pela sua cabeça é que o valor deve ser dividido de forma proporcional ao valor que cada um investiu. É essa a função da divisão proporcional, dividir em partes proporcionais.

1. O prêmio de um concurso de culinária será direcionado aos três primeiros colocados e o valor é de R$ 350.000,00 que deverá ser divido de forma diretamente proporcional aos pontos obtidos pelos participantes. Considerando que o primeiro colocado fez 220, o segundo 150 e o terceiro 130 pontos, determine a parte do prêmio relativa a cada participante.

$$\frac{A}{220} = \frac{B}{150} = \frac{C}{130} = \frac{(A+B+C)}{500} = \frac{350000}{500} = 700$$

$$\frac{A}{220} = R\$\ 700{,}00$$

$$A = R\$\ 154000{,}00$$

$$\frac{B}{150} = R\$\ 700{,}00$$

$$B = R\$\ 105000{,}00$$

$$\frac{C}{130} = R\$\ 700{,}00$$

C = R$ 84000,00

AULAS 5 E 6 – DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Para o aluno: Caderno do Estudante impresso.

2. Luana tem 3 filhos cujas idades são desconhecidas, x, y, e z. Mas temos as seguintes informações:

I- A soma das idades dos três é 40.

II- As idades são diretamente proporcionais aos números, 5, 2 e 3.

Então, a idade do filho mais velho é de:

a. 15.

b. 10.

c. 12.

d. 20.

Observe que:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{(x+y+z)}{5+2+3} = \frac{40}{10} = 4$$

$$\frac{x}{5} = 4$$

$$x = 20$$

$$\frac{y}{2} = 4$$

$$y = 8$$

$$\frac{z}{3} = 4$$

$$z = 12$$

O filho mais velho tem 20 anos, então a resposta correta é a alternativa D.

INICIANDO

Professor, para as aulas 5 e 6 dessa Sequência, com os estudantes organizados em dupla, é recomendado começar uma conversa com a turma. É importante encaminhar a discussão no sentido de orientá-los quanto à importância do estudo das divisões proporcionais, relacionando-as com situações do dia a dia. Sendo assim, discuta com os estudantes a respeito de problemas que possam envolver divisão proporcional. Após essa breve introdução, revise com os estudantes os conteúdos. Logo depois, os estudantes poderão receber o Caderno do Estudante impresso e realizar a leitura coletiva das questões.

DESENVOLVENDO

Professor, para iniciar a aula, proponha aos estudantes em suas duplas que pensem em uma possível solução para a questão 1. Procure não ajudar até eles pensarem em algo. Na questão 2, os estudantes precisam identificar que a solução será feita através da divisão proporcional. Deixe que eles pensem em como fazer isso sozinhos. Quando todos estiverem finalizando, faça comentários sobre a questão. A questão 3 é uma proposta de atividade do Enem para que os estudantes possam se familiarizar com esse tipo de questão, uma vez que precisarão para o vestibular. Pensando a partir da questão 4, tem-se o mesmo objetivo das propostas feitas nas aulas 3 e 4, em que o estudante precisa construir e elaborar seu próprio problema e trocar para solucionar o do colega, pois a interação entre eles proporciona a troca de conhecimento. Em seguida, é proposto mais um exercício para finalizar.

3. (ENEM 2019) Para contratar três máquinas que farão o reparo de vias rurais de um município, a prefeitura elaborou um edital que, entre outras cláusulas, previa:

- Cada empresa interessada só pode cadastrar uma única máquina para concorrer ao edital;
- O total de recursos destinados para contratar o conjunto das três máquinas é de R$ 31000,00;
- O valor a ser pago a cada empresa será inversamente proporcional à idade de uso da máquina cadastrada pela empresa para o presente edital.

As três empresas vencedoras do edital cadastraram máquinas com 2, 3 e 5 anos de idade de uso.

Quanto receberá a empresa que cadastrou a máquina com maior idade de uso?

a. R$ 3 100,00.

b. R$ 6 000,00.

c. R$ 6 200,00.

d. R$ 15 000,00.

e. R$ 15 500,00.

A divisão, nesse caso, é uma divisão inversa.

$$31000 = \frac{1k}{2} + \frac{1k}{3} + \frac{1k}{5}$$
$$31000 = \frac{31k}{30}$$
$$1000 = \frac{k}{30}$$
$$k = 30000$$

O valor que será recebido pela empresa que cadastrou a máquina mais velha é de $\left(\frac{1}{5}\right)k$. logo:

$$\frac{1}{5} \cdot 30000 = 6000$$

Logo, a alternativa correta é a letra B.

4. Agora que você sabe solucionar problemas envolvendo situações-problema que envolvem divisão proporcional, tanto inversa como direta, e já possui conhecimento em elaboração de problemas, elabore um problema que envolva divisão diretamente proporcional. Logo após, troque com sua dupla e peça que ela resolva.

Resposta pessoal.

Sugestão de resposta: Uma torneira enche uma piscina em 15 minutos, enquanto uma segunda torneira gasta 20 minutos para encher a mesma piscina. Com a piscina inicialmente vazia, abre-se a primeira torneira durante x minutos: ao fim desse tempo, fecha-se essa torneira e abre-se a segunda, a qual termina de encher o tanque em x+2 minutos. Calcule o tempo gasto para encher o tanque.

Vamos considerar que **V** é o volume total da piscina, $\mathbf{V_1}$ é o volume da piscina preenchido pela primeira torneira e $\mathbf{C_2}$ é o volume preenchido pela segunda. Vejamos a capacidade da piscina para cada torneira em função da capacidade ou volume total:

1º Torneira:

Vamos considerar que **V** é o volume total da piscina, $\mathbf{V_1}$ é o volume da piscina preenchido pela primeira torneira e $\mathbf{C_2}$ é o volume preenchido pela segunda. Vejamos a capacidade da piscina para cada torneira em função da capacidade ou volume total:

1º Torneira:

$$15 \cdot V_1 = X \cdot V$$

$$V_1 = \frac{X \cdot V}{15}$$

2º Torneira:

$$20 \cdot V_2 = V(X+2)$$

$$V_2 = \frac{V(X+2)}{20}$$

Sabemos que a capacidade de cada torneira foi suficiente para encher todo o volume da piscina, isto é, $\mathbf{V_1 + V_2 = V}$. Sendo assim, temos:

$$\frac{VX}{15} + \frac{V(X+2)}{20} = V$$

Ao solucionar a equação, teremos que o valor de x é de aproximadamente 7,7 min.

Então, se a primeira torneira gastou x minutos e a segunda, x + 2, no total, elas gastaram juntas **x + x + 2**. Se **x = 7,7**, então a piscina foi totalmente preenchida em **17,4 minutos aproximadamente** (7,7+ 7,7 + 2 = 17,5 min).

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, para que o estudante resolva o exercício, oriente de forma que ele possa ter novas ideias. E, mesmo que a resposta seja pessoal, utilize, como exemplo, a sugestão de resposta dada acima.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, sugerimos que faça a correção ou comentário de todas as questões das atividades. Além disso, procure incentivar a participação dos estudantes, assim terá uma noção do quão bem sucedidas estão sendo as aulas e conseguirá perceber as dúvidas que mais se destacam. Ao final das correções e discussões, informe ao estudante que, nas aulas 7 e 8, o conteúdo abordado será aplicado em diversos contextos e áreas do conhecimento.

5. O treino de futebol de Otávio teve duração de 170 minutos e foi dividido em três partes:

1- Alongamento.

2- Corrida pelo Campo.

3- Jogo entre o Time.

Sabendo que o tempo de duração das partes são proporcionais a 4, 8,5, preencha o quadro a seguir:

Parte do treinamento	Duração (min)
Alongamento	40
Corrida pelo Campo	80
Jogo do Time	50

Observe que:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{8} = \frac{z}{5} = \frac{(x+y+z)}{17} = \frac{170}{17} = 10$$

$$\frac{x}{4} = 10$$
$$x = 40$$

$$\frac{y}{8} = 10$$
$$y = 80$$

$$\frac{z}{5} = 10$$
$$z = 50$$

AULAS 7 E 8 – SITUAÇÕES-PROBLEMA EM OUTRAS ÁREAS

Objetivos das aulas
- Resolver situações-problema que envolvam relações de proporcionalidade em diversos contextos e áreas do conhecimento, utilizando modelos matemáticos;
- Elaborar situações-problema que envolvam relações de proporcionalidade em diversos contextos e áreas do conhecimento, utilizando modelos matemáticos.

Nas aulas anteriores, você conseguiu compreender conceitos de grandezas, dentre elas, diretamente e inversamente proporcionais, perceber relações de proporcionalidade entre duas ou mais grandezas, divisão em partes proporcionais e outros. Nestas últimas aulas, iremos focar em perceber essas relações de proporcionalidade em outras áreas do conhecimento. Sendo assim, procure identificar e discutir com seus colegas sobre as questões a seguir. Bons estudos!

1. As bactérias apresentam, como forma de reprodução, a reprodução binária. Esse tipo de reprodução assexuada acontece quando a bactéria duplica seu material genético e se divide em duas, mas ambas terão a mesma quantidade de DNA e representarão as mesmas funções. Complete a tabela que representa a reprodução dessas bactérias.

1	2	8	20	50	70
2	4	16	40	100	140

a. Explique como a tabela está representada.

A primeira linha corresponde a um número de bactérias e, a segunda linha, à reprodução total em relação à primeira linha, ou seja, 1 bactéria corresponde a 2, 2 correspondem a 4, 8 a 16.

b. A reprodução das bactérias é diretamente ou inversamente proporcional?

A reprodução é diretamente proporcional, pois quanto mais bactérias tiverem, maior o número total de reprodução.

INICIANDO

Professor, para as aulas 7 e 8 desta Sequência, com os estudantes organizados em grupos, é recomendado começar uma conversa com os estudantes a fim de finalizar o conteúdo. Para isso, informe aos estudantes sobre essa última etapa. Procure encaminhar essas duas últimas aulas com o objetivo de tirar dúvidas que eles possam ter até o momento e, ao mesmo tempo, introduzir as grandezas proporcionais em contextos diferenciados, destacando outras áreas como a Química, Física, Biologia e outras. Após essa breve introdução, revise com os estudantes o que achar pertinente para finalização. Logo, poderão receber o Caderno do Estudante impresso e realizar a leitura coletiva das questões.

AULAS 7 E 8 – SITUAÇÕES-PROBLEMA EM OUTRAS ÁREAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em grupos de 4.

MATERIAL NECESSÁRIO

Para o aluno: Caderno do Estudante impresso.

DESENVOLVENDO

Nesta última parte, deixe que os estudantes desenvolvam as resoluções dos exercícios sozinhos. Procure observar, em detalhes, se estão com dificuldades. Leia com os estudantes questão por questão e associe as questões, fazendo breves comentários sobre qual área do conhecimento ela envolve, se é Biologia, Física ou outras. Procure destacar nas questões a importância da Matemática para cada área do conhecimento, seja ela qual for. Esse momento deve ser usado para os estudantes perceberem como a Matemática é importante e reconhecer sua presença nos pequenos detalhes nas diversas áreas.

2) Você sabia que para construir uma maquete e um mapa é utilizada a noção de proporcionalidade matemática? As distâncias expressas nos mapas e maquetes indicam uma constante de proporcionalidade usada na transformação para a distância real. Leia a situação abaixo e responda.

A distância real, em linha reta, de uma cidade A até a cidade B é igual a 3000 km. Márcia estava analisando um mapa e, ao medir com a régua, percebeu que a distância entre duas cidades no mapa é de 12 cm. Qual a escala utilizada no mapa?

Primeiramente observe que 3000 km é 300000000 cm, então:

$$Escala = \frac{12}{300000000} = \frac{1}{25000000}$$

Vale ressaltar que toda escala é diretamente proporcional.

3. Certo automóvel consome, em média, 15 litros de combustível para percorrer 150 km. Ao manter essa média, quantos litros serão necessários para que o automóvel percorra 200, 250, 300, 350 e 500 km? Construa uma tabela representando os valores e justifique sua resposta.

Km	Litros
150	15
200	20
250	25
300	30
350	35
500	50

Espera-se como justificativa do estudante: quanto mais quilômetros o automóvel percorrer, maior será o consumo de combustível, sendo assim, há uma constante de proporcionalidade que garante que as grandezas são diretamente proporcionais e como para percorrer 150 km, o consumo é de 15 L, fica visível que a cada 50 km percorridos, o gasto com combustível é de 5 L.

4. (ENEM-2012) Em 20 de fevereiro de 2011, ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica, no globo terrestre, é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124° 3′ 0″ a leste do Meridiano de Greenwich.

Dado: 1° equivale a 60′ e 1′ equivale a 60″.

A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude da forma decimal é:

a. 124,02°.

b. 124,05°.

c. 124,20°.

d. 124,30°.

e. 124,50°.

A representação inteira do ângulo é 124. A parte decimal é representada por 3′0″, ou seja, 3′. Sabendo que 1° = 60′, teremos: $\frac{1^{\circ}}{x} = \frac{60'}{3'}$

As grandezas são diretamente proporcionais, por isso, basta aplicar a propriedade fundamental das proporções:

$$60x = 3$$

$$x = \frac{3}{60}$$

$$x = 0{,}05^{\circ}$$

Portanto, 124° 3′ 0″ = 124,05°.

5. (SARESP 2010) A relação entre a pressão e a temperatura de um gás quando este é mantido em um recipiente de volume constante é definida pela relação P/T=a, ou seja, a razão entre a pressão e a temperatura é constante. A tabela seguinte mostra, para um determinado gás, a evolução da pressão em relação à temperatura.

Temperatura (T)	300	400	700
Pressão (P)	60	80	

O valor que está faltando na tabela é:

f. 100.

g. 140.

h. 150.

i. 170.

j. 180.

Observe que a relação é de proporcionalidade direta entre as grandezas, então:

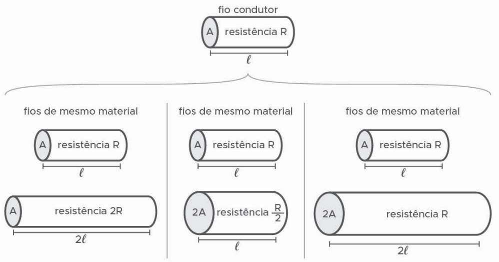
$$300x = 60 \cdot 700$$

$$300x = 42000$$

$$x = 140$$

6. (ENEM 2010) A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre resistência (R) e comprimento (ℓ), dada a mesma secção transversal (A), resistência (R) e área da secção transversal (A), dado o mesmo comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. direta, direta e direta.

b. direta, direta e inversa.

c. direta, inversa e direta.

d. inversa, direta e direta.

e. inversa, direta e inversa.

Na primeira parte, temos que quando o comprimento dobrou, a resistência também dobrou, logo, são diretamente proporcionais. Na segunda parte, a área aumentou e a resistência foi reduzida para a metade, então são inversamente proporcionais. Por fim, na terceira parte, quando o comprimento dobrou, a área também dobrou, logo são diretamente proporcionais.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, sugerimos que selecione alguns alunos para solucionar as questões na lousa. Inicie pequenas discussões sobre as resoluções, isso irá incentivar a participação de todos. Além disso, faça uma síntese sobre tudo o que foi visto até o momento. Comente principalmente sobre os conceitos e destaque, novamente, o mapa mental apresentado no começo, nele vimos que as grandezas são divididas em diretamente e inversamente proporcionais, bem como exemplos para simplificação e melhor assimilação. Em seguida, finalize, informando aos estudantes que nas últimas aulas eles terão a oportunidade de resolver situações-problema que envolvem outras disciplinas das diversas áreas do conhecimento.

ANOTAÇÕES

3ª SÉRIE - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

OLÁ, PROFESSOR!

Nesta Sequência de Atividades, falamos diretamente com você, que está aí, na sala de aula, no convívio direto com os estudantes, os quais terão oportunidade, nesse momento, de se envolverem com atividades que possibilitam a retomada de conceitos, propriedades e procedimentos essenciais para o desenvolvimento de seus conhecimentos e capacidades em matemática.

A Sequência de Atividades deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração. Além disso, as socializações das atividades, por parte dos estudantes, são percebidas aqui como oportunidades de serem desenvolvidas habilidades e competências que dizem respeito à cooperação, à empatia, à argumentação e à comunicação, entre outras.

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos que envolvem análise combinatória e probabilidade, sabendo diferenciar combinação de permutação e arranjo.

As habilidades a serem desenvolvidas nas aulas são:

- Compreender os raciocínios combinatórios aditivos e multiplicativo na resolução de situações-problema de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento.
- Saber calcular probabilidades de eventos em diferentes situações-problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas específicas.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª / 90 min	Ocorrência de um evento
3ª e 4ª / 90 min	O caminho percorrido
5ª e 6ª / 90 min	Combinando posições e cores
7ª e 8ª / 90 min	Probabilidade de um evento ocorrer

Sabemos que as atividades por si só não ensinam. Por isso, professor, a sua atuação é tão importante em cada uma das situações propostas aqui, cujo objetivo é recuperar as aprendizagens e desenvolver as habilidades esperadas para a 3ª série do Ensino Médio. Para isso, este caderno deverá servir como mais uma ferramenta que o auxiliará no processo de ensino, sendo necessário, portanto, que você considere, em seu replanejamento, outras possibilidades de discussão e recursos, para além daqueles sugeridos nesta Sequência de Atividades. Para ajudá-lo nessa ação, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenal acerca das Sequências de Atividades, nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPCs). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

3ª SÉRIE

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

AULAS 1 E 2 – OCORRÊNCIA DE UM EVENTO

Objetivos das aulas
- Compreender os princípios aditivo e multiplicativo no cálculo do número de possibilidades de ocorrência de um evento;
- Resolver situações-problema envolvendo os princípios aditivo e multiplicativo.

1. (SARESP – 2010 - adaptada) Lúcia precisava descobrir quantos números de dois algarismos distintos podem ser formados, utilizando apenas os algarismos 3, 5, 7 e 8. Ela resolveu, então, representar um diagrama de árvore para facilitar a contagem. Depois de montar o diagrama, a quantidade de números de dois algarismos distintos que Lúcia encontrou foi:

a. 8.

b. 10.

c. 12.

d. 14.

Para montar o diagrama de árvore vamos fazer três colunas, cada uma titulada em dezena, unidade e número, e ir alternando os números em cada uma delas. Veja o esquema a seguir:

DEZENA	UNIDADE	NÚMERO
3	5	35
	7	37
	8	38
5	3	53
	7	57
	8	58
7	3	73
	5	75
	8	78
8	3	83
	5	85
	7	87

Portanto, Lúcia encontrou 12 números de dois algarismos distintos. Alternativa C.

2. (AAP - 2018) Uma rede de *fast food* oferece sanduíches com diversas opções. O cliente deve escolher sempre uma dentre as opções a seguir:

- Pão de 70g: Pão Natural, Pão Francês ou Pão Sete Grãos.
- Salada: Tomate ou Alface.
- Frios: Presunto, Copa, Salame, Carne desfiada, Mortadela ou Atum.

De quantas maneiras diferentes um cliente pode montar seu sanduíche?

De acordo com o cardápio temos:
- 3 tipos de pães.
- 2 tipos de salada.
- 6 tipos de frios.

Temos que a quantidade de sanduíches será: $3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$ sanduíches.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, se preciso, chame a atenção de que os algarismos têm que ser distintos. Se os estudantes apresentarem dificuldades para montar o diagrama de árvore, oriente-os a fazer um esquema contendo três colunas (dezena, unidade e número), assim eles poderão se organizar melhor e não correr o risco de contar o mesmo número mais de uma vez ou então de esquecer algum número.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, embora essa questão possa ser resolvida montando o diagrama de árvore, oriente os estudantes a resolverem utilizando o princípio da contagem.

AULAS 1 E 2 – OCORRÊNCIA DE UM EVENTO

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em duplas produtivas, mas em um período remoto essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão, por meio de alguma plataforma, vinculados a você. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. É interessante começar as Aulas 1 e 2 desta Sequência com uma conversa com os estudantes informando que, nas próximas aulas, estudarão análise combinatória e probabilidade, com o destaque de que as atividades iniciais abordarão conteúdos sobre contagem, princípios aditivo e multiplicativo no cálculo do número de possibilidades. É interessante encaminhar a discussão no sentido de orientá-los quanto à importância do estudo da análise combinatória e da probabilidade para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático. Após essa breve introdução, os estudantes poderão realizar a leitura das questões no **Caderno do Estudante** impresso.

3. (SARESP – 2008) Um videogame, com o objetivo de identificar e personalizar os jogadores, permite que eles criem faces de pessoas a partir da composição de algumas características fornecidas, tais como: rosto, cabelo, olhos, boca e acessórios, conforme a tabela a seguir.

Rosto	Cabelo	Olhos	Boca	Acessórios
Redonda	Curto	Amendoados	Pequena	Óculos
Quadrangular	Comprido	Redondos	Grande	Boné
Comprida	Sem cabelo			Aparelho Dentário

Com esses dados, pode-se concluir que o número de faces diferentes que podem ser formadas usando esse videogame é:

a. 168.

b. 108.

c. 57.

d. 13.

Para cada um dos 3 tipos de rosto, há 3 tipos de cabelo e, para cada um deles, 2 composições para os olhos e, para cada uma delas, 2 tipos de boca e, para cada uma, 3 acessórios diferentes, isto é:

$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 108$.

Alternativa B

4. (AAP - 2018) Determine quantos números de 5 algarismos podem ser formados usando apenas os algarismos pares diferentes de zero.

Os algarismos pares, diferentes de zero, a serem usados são: 2, 4, 6 e 8.

Temos 5 posições de algarismos para analisar. O problema não comenta a possibilidade de não repetição de algarismos as diferentes posições, o que permite que em cada uma delas se use todos os algarismos pares propostos.

__4__ __4__ __4__ __4__ __4__

Usando o princípio multiplicativo temos: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$.

5. (ENEM - 2014) Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas.

Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por:

a. 100.
b. 90.
c. 80.
d. 25.
e. 20.

Como os caracteres da senha já existente não importam e a quantidade deles também não, vamos representá-los pelo símbolo asterisco (*) a quantidade de vezes que quisermos. Adotando uma senha com 4 caracteres, por exemplo, vamos representá-la como * * * * e analisar os outros dois caracteres, um no início e outro no final, que serão acrescidos a ela. Esses novos caracteres devem ser vogais minúsculas (a, e, i, o, u) e/ou vogais maiúsculas (A, E, I, O, U). Ao todo são 10 novos caracteres que podem ser utilizados e, como o problema não comenta a possibilidade de não repetição de vogais, podemos usar todas nas duas posições. Logo, temos 10 possibilidades para o início e 10 possibilidades para o final.

_10_ * * * * _10_

Portanto, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por 100.
Alternativa A.

6. (SARESP - 2010) Amanda, Bianca, Carolina, Diana, Érica e Flávia gostariam de dançar com Leo. Ele queria escolher uma para dançar valsa e outra para dançar tango.

A quantidade de escolhas distintas que Leo poderia fazer é:

a. 6.
b. 12.
c. 30.
d. 36.

Se são quantidades de escolhas distintas para dançar, então a menina que Leo escolher para dançar valsa não pode ser escolhida para dançar tango. Logo, para cada uma das 6 meninas que Leo pode escolher para dançar valsa, há 5 opções de escolha para ele dançar tango.

____6____	____5____
Meninas para dançar valsa	Meninas para dançar tango

Em um total de $6 \cdot 5 = 30$ possibilidades de escolhas diferentes.
Alternativa C.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, para a resolução desta questão é importante mostrar aos estudantes que nem sempre montar o diagrama de árvores é uma maneira viável, pois as possibilidades existentes podem ser muitas.

DESENVOLVENDO

Para começar, pode-se fazer o levantamento do conhecimento prévio dos estudantes em relação ao cálculo de possibilidades iniciando o assunto com uma conversa sobre diferentes técnicas de contagem. Apresente a Questão 1 do **Caderno do Estudante**, introduzindo assim os princípios aditivo e multiplicativo e apresentando a árvore de possibilidades. A Questão 2 do **Caderno do Estudante** pode ser utilizada para explicar que nem sempre a árvore de possibilidades é a melhor opção de escolha para a resolução de uma atividade, por apresentar muitas possibilidades a serem listadas e que, nessa ocasião, utilizar o princípio multiplicativo é mais prático e rápido. Com essas orientações, os estudantes poderão responder às Questões 3, 4 e 5 do **Caderno do Estudante.** Para as demais atividades, sugerimos que oriente os estudantes a prestarem atenção nas restrições apresentadas nos enunciados e que, geralmente, para não esquecermos das restrições, começamos a resolução da atividade por elas. Com essas orientações, os estudantes poderão responder às Questões 6, 7 e 8 do **Caderno do Estudante**.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, esta atividade é importante para lembrar aos estudantes que o algarismo 0 não pode ocupar a casa das centenas.

7. Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 8:

a. Quantos números de 3 algarismos podemos formar?

b. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

a) Há 7 possibilidades para a centena (0 não é permitido), 8 para a dezena (0 volta a ser contado) e 8 para a unidade (0 volta a ser contado).

__7__ __8__ __8__
centena dezena unidade

Portanto, podemos formar 448 números ($7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$) com três algarismos.

b) Com 3 algarismos distintos, há 7 possibilidades para a centena (0 não é permitido), 7 para a dezena (0 volta a ser contado, porém devemos retirar o que já foi utilizado na centena) e 6 para a unidade (0 volta a ser contado, porém devemos retirar dois algarismos que já foram utilizados nas outras duas casas).

__7__ __7__ __6__
centena dezena unidade

Portanto, podemos formar 294 números ($7 \cdot 7 \cdot 6 = 294$) com três algarismos distintos.

8. (AAP – 2015) Carlos, Cláudia e seus três filhos vão ocupar cinco poltronas de um cinema dispostas em sequência, como mostra o esquema.

Poltrona 1	Poltrona 2	Poltrona 3	Poltrona 4	Poltrona 5

O número de maneiras diferentes que eles podem fazer isso de modo que nenhum dos três filhos ocupem as poltronas das duas extremidades (1 e 5), é igual a:

a. 6.

b. 12.

c. 24.

d. 120.

De acordo com o enunciado, Carlos e Cláudia devem ocupar as poltronas das extremidades: para a 1ª poltrona, teriam 2 opções (Carlos ou Claudia), após fixar um deles na 1ª poltrona, sobrará somente uma opção para a 5ª poltrona. Logo, teremos: $2 \cdot 1 = 2$ possibilidades.

Para a 2ª poltrona, temos 3 opções. Sobrarão duas opções para a 3ª poltrona. Assim, sobrará somente uma opção para a 4ª poltrona. Portanto, temos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades.

Temos duas possibilidades de combinação para os pais e seis possibilidades de combinação para os filhos, portanto, temos $2 \cdot 6 = 12$ possibilidades diferentes de combinações.

____2___ ___3____ ___2___ ___1___ ___1___ = 12
1ª poltrona 2ª poltrona 3ª poltrona 4ª poltrona 5ª poltrona

Alternativa B.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, sugerimos a correção das questões. Incentive a participação dos estudantes de modo que possíveis dúvidas sejam esclarecidas. Informe que não é errado utilizar a árvore de possibilidades na resolução das atividades, mas mostre que nem sempre é viável, por ter que listar várias possibilidades o que demanda muito tempo e atenção, pois a chance de esquecer de contar alguma possibilidade é grande.

AULAS 3 E 4 – O CAMINHO PERCORRIDO

Objetivos das aulas
- Efetuar cálculos envolvendo fatorial;
- Diferenciar permutações simples, permutações com elementos repetidos e permutações circulares;
- Resolver situações-problema associadas a permutações.

Olá, estudante! Nas questões a seguir, você encontrará um termo que não é usual em nosso cotidiano. Vamos defini-lo antes de começarmos a resolução das atividades.

Talvez você já tenha ouvido alguém dizer que na palavra ROMA também pode ser lida como a palavra AMOR se lermos da direita para a esquerda. Perceba que as letras de ambas as palavras são as mesmas, apenas estão em ordem diferente. A permutação entre as letras de uma palavra formando ou não termos existentes na língua portuguesa é chamada de anagrama.

1. Quantos anagramas tem a palavra AMIGO?

Considerando as 5 letras: A, M, I, G e O, há 5 possibilidades para a primeira posição, 4 possibilidades para a segunda, 3 possibilidades para a terceira, 2 possibilidades para a quarta e 1 possibilidade para a quinta posição.

Pelo princípio fundamental da contagem, temos 120 possibilidades ($5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$), ou seja, são 120 anagramas.

2. Simplifique as expressões:

a. $\frac{47! + 48!}{49!}$

b. $\frac{n!}{(n+1)!}$

Professor, explique aos estudantes que o valor obtido pela permutação simples (Pn!) é chamado de fatorial. O fatorial de um número natural n, representado por n!, é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n.

a) $\frac{47! + 48!}{49!} = \frac{47! + 48 \cdot 47!}{49!} = \frac{47!\ (1 + 48)}{49 \cdot 48 \cdot 47!} = \frac{49}{49 \cdot 48} = \frac{1}{48}$

b) $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1) \cdot n!} = \frac{1}{n+1}$

AULAS 3 E 4 – O CAMINHO PERCORRIDO

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em duplas produtivas, mas em um período remoto essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão, por meio de alguma plataforma, vinculados a você. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. Para as Aulas 3 e 4 desta Sequência, é importante que os estudantes tenham sanado as possíveis dúvidas sobre os conteúdos das aulas anteriores, princípios aditivo e multiplicativo, pois servirão como base para abordar os assuntos dessas e das próximas aulas. Se julgar necessário, faça uns exemplos com o objetivo de relembrar alguns conceitos.

DESENVOLVENDO

Para começar, pode-se fazer o levantamento do conhecimento prévio dos estudantes sobre permutação. É possível que eles respondam que permutar é mudar algo de lugar. Aproveite esse momento para expor os assuntos que serão abordados nessas aulas. Apresente a atividade do **Caderno do Estudante**, introduzindo o conceito de permutação simples e o conceito de fatorial. Durante a realização desta atividade, explore a fórmula geral e a simbologia utilizada para indicar a permutação simples e o fatorial.

Com essas orientações, os estudantes poderão responder à Questão 2 do **Caderno do Estudante.** As Questões 3 e 4 do **Caderno do Estudante** podem ser utilizadas para explicar o conceito de permutação com repetição. Explique que, por convenção, não é feita a distinção entre letras com ou sem acento, logo a letra a, por exemplo, com acento ou sem acento tem o mesmo significado. Para as Questões 5 e 6 do **Caderno do Estudante**, sugerimos que oriente os estudantes a prestarem atenção nas restrições apresentadas nos enunciados, pois a permutação circular requer uma atenção maior, visto que a resolução não é tão direta assim, pois ao efetuar o deslocamento dos elementos, podemos correr o risco de contar a mesma configuração mais de uma vez. Com todas as orientações dadas as atividades anteriores, os estudantes poderão responder às Questões 7 e 8 do **Caderno do Estudante**.

FINALIZANDO

A finalização poderá ser feita com a elaboração de um resumo dos conteúdos vistos nas Aulas 3 e 4. Consideramos que essa etapa assumirá um papel importante no processo de aprendizagem, pois permitirá que os estudantes sintetizem seus conhecimentos.

3. Quantos anagramas tem a palavra ARARA?

Professor, chame a atenção dos estudantes que nos casos de ter letras repetidas a resolução precisa tem um pouco mais de cuidado. Durante a resolução, aborde a notação de permutação com repetição.

No caso da palavra ARARA, há 3 letras A, 2 letras R e um total de 5 letras. Então:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!\ 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!\ 2!} = \frac{20}{2} = 10$$

Logo, a palavra ARARA tem 10 anagramas.

4. Quantos anagramas da palavra MATEMÁTICA começam com a letra A?

Durante a atividade, explique que, por convenção, não se considera a acentuação gráfica nos anagramas. Logo, na palavra MATEMÁTICA, a letra A com ou sem acento tem o mesmo significado.

Existe uma restrição, os anagramas devem começar com a letra A.

Fixamos uma letra A e fazemos os possíveis anagramas com as demais: $A\ \underbrace{\text{MATEMATIC}}$

$$P_9^{2,2,2,1,1,1} = \frac{9!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 45360$$

Logo, 45360 anagramas de MATEMÁTICA começam com A.

5. Um grupo de cinco crianças vão sentar-se em uma mesa circular para realizar uma atividade. De quantas formas diferentes elas podem compor a mesa?

Professor, para esta atividade, explique que em uma configuração circular os referenciais externos não são considerados, vamos considerar apenas os elementos dispostos na circunferência.

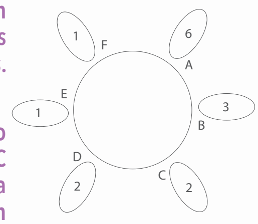
Vamos considerar que queremos permutar 5 crianças, logo teríamos $P_5 = 5!$

Porém devemos levar em consideração que é uma configuração circular e devemos excluir todas as configurações que são iguais. Como são 5 crianças para compor a mesa, teremos 5 situações com a mesma configuração, portanto teremos que dividir o 5! por 5:

$$\frac{5!}{5} = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = 24$$

Portanto, há 24 maneiras diferentes das crianças comporem a mesa.

6. Três homens e três mulheres vão sentar-se em volta de uma mesa redonda. De quantas formas podem ficar sentados sem que fiquem duas pessoas do mesmo sexo sentadas uma ao lado da outra?



De acordo com o enunciado, duas pessoas do mesmo sexo não podem estar lado a lado e por ser uma configuração circular, devemos excluir as que são repetidas. Se são 6 pessoas, teremos 6 configurações repetidas.

Agora, vamos dispor essas pessoas na mesa circular:

Temos 6 possibilidades para a cadeira A. Como não pode ser do mesmo sexo, temos apenas 3 possibilidades para a cadeira B. Para a cadeira C a pessoa tem que ser do mesmo sexo que a pessoa que se sentou na cadeira A, logo só temos 2 possibilidades. Para a cadeira D, a pessoa tem que ser do mesmo sexo que a pessoa que se sentou na cadeira B, logo só temos 2 possibilidades. Para a cadeira E a pessoa tem que ser do mesmo sexo que a pessoa que se sentou na cadeira A e na cadeira C, logo só temos 1 possibilidades. Para a cadeira F a pessoa tem que ser do mesmo sexo que a pessoa que se sentou na cadeira B e D e na cadeira C, logo só temos 1 possibilidades.

Multiplicando, temos: $6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$, porém teremos que excluir as 6 configurações repetidas.

$$\frac{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{6} = 12$$

Logo, há 12 formas das pessoas se sentarem na mesa sem que pessoas do mesmo sexo sentem uma ao lado da outra.

7. (ENEM - 2014) Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido. De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a. $20 \cdot 8! + (3!)^2$

b. $8! \cdot 5! \cdot 3!$

c. $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^8}$

d. $\frac{8! \cdot 5! \cdot 3!}{2^2}$

e. $\frac{16!}{2^8}$

Vamos analisar quantas maneiras diferentes o cliente tem para alugar cada filme.

Tem 8 filmes de ação, logo temos uma permutação de 8. ($P_8 = 8!$)

Tem 5 filmes de comédia, logo temos uma permutação de 5. ($P_5 = 5!$)

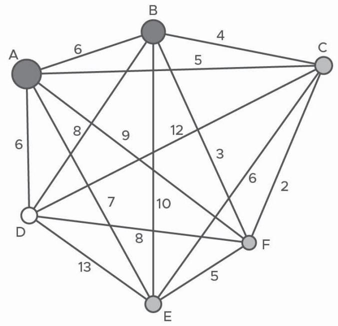
Tem 3 filmes de drama, logo temos uma permutação de 3. ($P_3 = 3!$)

Para sabermos a combinação total dos filmes, devemos multiplicar todas as permutações:

$8! \cdot 5! \cdot 3!$

Alternativa B.

8. (ENEM - 2010) João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA, informa que ele sairá da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1min30s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado. O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de:

a. 60 min.

b. 90 min.

c. 120 min.

d. 180 min.

e. 360 min.

João mora na cidade A, visita cinco cidades e retorna para a cidade dele. Então, temos uma única possibilidade para o começo e para o fim o trajeto. Já as cidades que irá visitar, ele poderá permutar e excluir os trajetos simétricos. Temos uma permutação com repetição:

__1__ __5__ __4__ __3__ __2__ __1__ __1__
A A

$P_5 = \frac{5!}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2}$ = 60 possibilidades

Como João gasta 1min30s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, em 60 sequências ele gastará 60 · 1,5 = 90min.
Alternativa B.

AULAS 5 E 6 – COMBINANDO POSIÇÕES E CORES

Objetivos das aulas
- Resolver situações-problema envolvendo arranjo simples;
- Diferenciar combinação de permutação e arranjo;
- Resolver situações-problema associadas a combinações e arranjos.

Na aula anterior, definimos o fatorial de um número natural n ($n!$) como sendo o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n. Por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Para esta aula, vamos precisar definir que caso $n = 0$, teremos $0! = 1$.

Vimos também que permutação é um agrupamento ordenado de todos os elementos.

Nessa aula, vamos utilizar o conceito de arranjo e de combinação. Arranjo é qualquer maneira de listar ordenadamente p elementos, tomados dentre os n elementos dados e a ordem em que os elementos são tomados importa. Já a combinação é qualquer escolha de p elementos dentre os n elementos dados. Na combinação apenas o conjunto dos elementos escolhidos é relevante, de modo que a ordem em que eles forem tomados não importa.

1. (ADE - 2020) A partir de um grupo de 9 pessoas, formado por 6 homens e 3 mulheres, pretende-se formar filas com 5 dessas pessoas de modo que as 3 mulheres ocupem sempre as 3 primeiras posições. Assim, de todas as filas possíveis, quantas obedecem a essa restrição?

a. 12.

b. 15.

c. 120.

d. 180.

e. 720.

Para ocupar as três primeiras posições de mulheres, existem três opções para a primeira posição, duas opções para a segunda e uma opção para a terceira; analogamente, no caso das posições de homens, existem seis homens possíveis para a primeira posição e cinco homens possíveis para a segunda posição. Portanto:

__3__ __2__ __1__ __6__ __5__ = 180

M M M H H

Outra forma de resolver essa questão, uma vez que o número de mulheres na fila e suas posições são fixas, é o número total de combinações ser derivado a partir do princípio multiplicativo. O número total de filas diferentes que podem ser formadas corresponde ao produto de todas as permutações possíveis das três mulheres e todos os arranjos possíveis dos seis homens, tomados dois a dois, ou seja:

$$\underbrace{M \quad M \quad M}_{P_3}\ \underbrace{H \quad H}_{A_{6,2}}$$

$$3! \cdot \frac{6!}{(6-2)!} = 3! \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 = 180$$

Logo, de todas as filas possíveis, 180 obedecem a restrição da questão.

Alternativa D.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em duplas produtivas, mas em um período remoto essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão, por meio de alguma plataforma, vinculados a você. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. Para as Aulas 5 e 6 desta Sequência, é importante que os estudantes tenham sanado as possíveis dúvidas sobre os conteúdos das aulas anteriores, tipos de permutações, pois nesta aula será estudado conceitos de arranjo e combinação. Espera-se que, ao final dessas aulas, os estudantes saibam diferenciar combinação de permutação e arranjo, além de resolverem situações-problema envolvendo esse conteúdo.

AULAS 5 E 6 – COMBINANDO POSIÇÕES E CORES

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante impresso.

DESENVOLVENDO

Pode-se começar perguntando aos estudantes o que eles entendem por arranjo e por combinação. É possível que eles respondam que é parecido com permutação, mudar algo de lugar. Complemente dizendo que no arranjo a ordem dos elementos importa e que na combinação a ordem não importa. Aproveite esse momento para expor os assuntos que serão abordados nessas aulas. Apresente a atividade do **Caderno do Estudante**, introduzindo assim o conteúdo sobre arranjo simples. Durante a realização desta atividade, explore a fórmula geral utilizada para indicar o arranjo simples. Com essas orientações, os estudantes poderão responder à Questão 2 do **Caderno do Estudante**. As Questões 3 e 4 do **Caderno do Estudante** podem ser utilizadas para explicar o conceito de combinação. Explique que formar uma dupla com os estudantes A e B é o mesmo que formar uma dupla com os estudantes B e A. A ordem dos elementos a serem tomados não importa e por essa razão devemos desconsiderar todas as repetições para não contarmos duas vezes a mesma coisa. Caso os estudantes apresentem dificuldades na Questão 5 do Caderno do Estudante, explore o conceito de combinação com repetição. Para as Questões 6 e 7 do Caderno do

2. (AAP - 2018) Um professor ministra um curso especial de matemática para cinco estudantes. Toda aula faz perguntas a cada um sobre a matéria desenvolvida. Para não ser repetitivo muda sempre a ordem em que chama os estudantes para responderem. A quantidade de modos diferentes que esse professor pode ordenar os estudantes para responder é:

a. 120.

b. 60.

c. 20.

d. 12.

e. 1.

No total temos cinco estudantes e vamos escolher os cinco para responderem às perguntas, mas a ordem em que os estudantes serão escolhidos importa, por isso é uma questão que envolve arranjo simples.

$$A_{5,5} = \frac{5!}{(5-5)!} = 120$$

Logo, o professor pode ordenar os estudantes de 120 maneiras. Alternativa A

3. (ADE - 2020) Uma escola está organizando uma competição de vôlei, com times de 6 estudantes. Para o time A, se candidataram 4 meninos e 6 meninas. Quantas combinações são possíveis para que se tenha um número igual de meninos e meninas nesse time?

a. 1.

b. 24.

c. 80.

d. 210.

e. 2880.

Professor, aproveite esse momento para formalizar a expressão de cálculo da combinação.

De acordo com o enunciado, temos que o número de meninos e meninas no time deve ser igual. Uma vez que o time é composto por seis jogadores, deve haver três meninos e três meninas em cada time. Se esse número é fixo, a quantidade total de times que pode ser formada é dada pelo produto entre todas as combinações de seis meninas tomadas três a três e todas as combinações de quatro meninos tomados três a três, da seguinte forma:

$$\underbrace{M\ \ M\ \ M}_{C_{6,3}}\ \underbrace{H\ \ H\ \ H}_{C_{4,3}}$$

$$\frac{6!}{3!\cdot(6-3)!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot(4-3)!} = \frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot 1!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{4\cdot 3!}{3!} = 5\cdot 4\cdot 4 = 80$$

Logo, há 80 maneiras diferentes de se formar o time dentro das condições apresentadas. Alternativa C.

Estudante, sugerimos que oriente os estudantes a prestarem atenção nas restrições apresentadas nos enunciados, além de verificarem se as ordens dos elementos importa ou não. Explique que essa verificação é fundamental para distinguir se a atividade abordará o conceito de arranjo ou de combinação.

4. (ENEM - 2019) Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formato e tamanho, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.

De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

a. $C^4_{12} \cdot C^3_{12} \cdot C^3_{12} \cdot C^2_{12}$

b. $C^4_{12} + C^3_8 + C^3_5 + C^2_2$

c. $C^4_{12} \cdot 2 \cdot C^3_8 \cdot C^2_5$

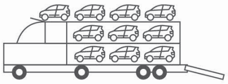
d. $C^4_{12} + 2 \cdot C^3_{12} + C^2_{12}$

e. $C^4_{12} \cdot C^3_8 \cdot C^3_5 \cdot C^2_2$

Durante a atividade, explique que na análise combinatória, quando vamos fazer uma coisa OU outra, esse OU significa adição. Quando vamos fazer uma coisa E outra, esse E significa multiplicação.
Seria interessante abordar as notações para representar a combinação $C_{n,p}$ e C^p_n.
Temos 12 vagões para escolher 4 para pintar de vermelho (C^4_{12}).
Agora temos 8 vagões para escolher 3 para pintar de azul (C^3_8).
Temos 5 vagões para escolher 3 para pintar de verde (C^3_5).
Agora temos 2 vagões para escolher 2 para pintar de amarelo (C^2_2).
Como vamos pintar todos os vagões, devemos multiplicar todas as combinações: $C^4_{12} \cdot C^3_8 \cdot C^3_5 \cdot C^2_2$
Alternativa E.

5. (ENEM – 2017 - adaptada) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.

No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.



Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

Esta atividade é sobre combinação com repetição. Se achar pertinente, peça para os estudantes grifarem as informações mais importantes no enunciado dando ênfase para a frase "pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis". Isto significa que é obrigatório ter um carrinho de cada cor disponível e que os outros carrinhos podem ser pintados de qualquer uma das quatro cores disponíveis. Teremos então repetição de cores.

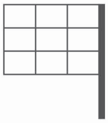
De acordo com o enunciado, temos 10 carrinhos e 4 cores para pintá-los. Como há pelo menos um carrinho de cada uma das 4 cores disponíveis, então sobrarão 6 carrinhos que podem ser pintados ou de amarelo, ou de branco, ou de laranja ou de verde. Teremos que organizar 4 carrinhos em 6 posições considerando a repetição. O que nos leva a fórmula:

$$C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!\cdot(n-1)!}$$

$$C_{4+6-1,6} = \frac{(4+6-1)!}{6!\cdot(4-1)!} = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 3!} = 84$$

São 84 modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir.

6. (AAP - 2016) De quantas maneiras distintas podemos colorir a bandeira abaixo com as cores AZUL, BRANCA e VERMELHA, de modo que todas as cores apareçam com mesma área e cada retângulo menor seja pintado com uma mesma cor? Considere que os 9 retângulos menores são todos iguais.



a. 20.

b. 64.

c. 84.

d. 104.

e. 1680.

Para uma primeira cor, temos três de nove retângulos para pintar, sem considerar a ordem pela qual eles serão coloridos. Desta forma temos, uma combinação de nove retângulos tomados três a três ($C_{9,3}$).

Escolhido os três primeiros retângulos, sobram seis para escolher três novos retângulos para pintar, ou seja, uma combinação de seis retângulos tomados três a três ($C_{6,3}$).

Sobram apenas três retângulos para a outra cor (não temos escolhas).

Pelo Princípio Multiplicativo (se um evento ocorre em sucessivas etapas o total de possibilidades de ocorrência desse evento é determinado pelo produto das possibilidades de cada etapa), multiplicam-se esses resultados. $C_{9,3}\cdot C_{6,3} = 84\cdot 20 = 1680$.

Alternativa E.

7. (ENEM - 2019) Durante suas férias, oito amigos, dos quais dois são canhotos, decidem realizar um torneio de vôlei de praia. Eles precisam formar quatro duplas para a realização do torneio. Nenhuma dupla pode ser formada por dois jogadores canhotos.

De quantas maneiras diferentes podem ser formadas essas quatro duplas?

a. 69.

b. 70.

c. 90.

d. 104.

e. 105.

Inicialmente, vamos considerar o total de duplas sem restrições. Queremos formar 4 duplas distintas, para isto temos as seguintes combinações:

Para a primeira dupla, temos duas de oito pessoas. Desta forma temos, uma combinação de oito pessoas tomadas duas a duas ($C_{8,2}$).

Escolhida a segunda dupla, sobraram seis para escolher duas pessoas para compor outra dupla, ou seja, uma combinação de seis pessoas tomadas duas a duas ($C_{6,2}$).

Escolhida a terceira dupla, sobraram quatro para escolher duas pessoas para compor outra dupla, ou seja, uma combinação de quatro pessoas tomadas duas a duas ($C_{4,2}$).

Sobram apenas duas pessoas para formar a última dupla, ou seja, uma combinação de duas pessoas tomadas duas a duas ($C_{2,2}$).

Devemos dividir por 4!, pois para compor as duplas a ordem não importa.

Agora vamos descontar o caso em que uma das duplas é canhota e calcular a combinação das outras. Retirando as duas pessoas canhotas, ficamos com seis pessoas para compor três duplas. Logo, temos as combinações $C_{6,2}$, $C_{4,2}$ e $C_{2,2}$

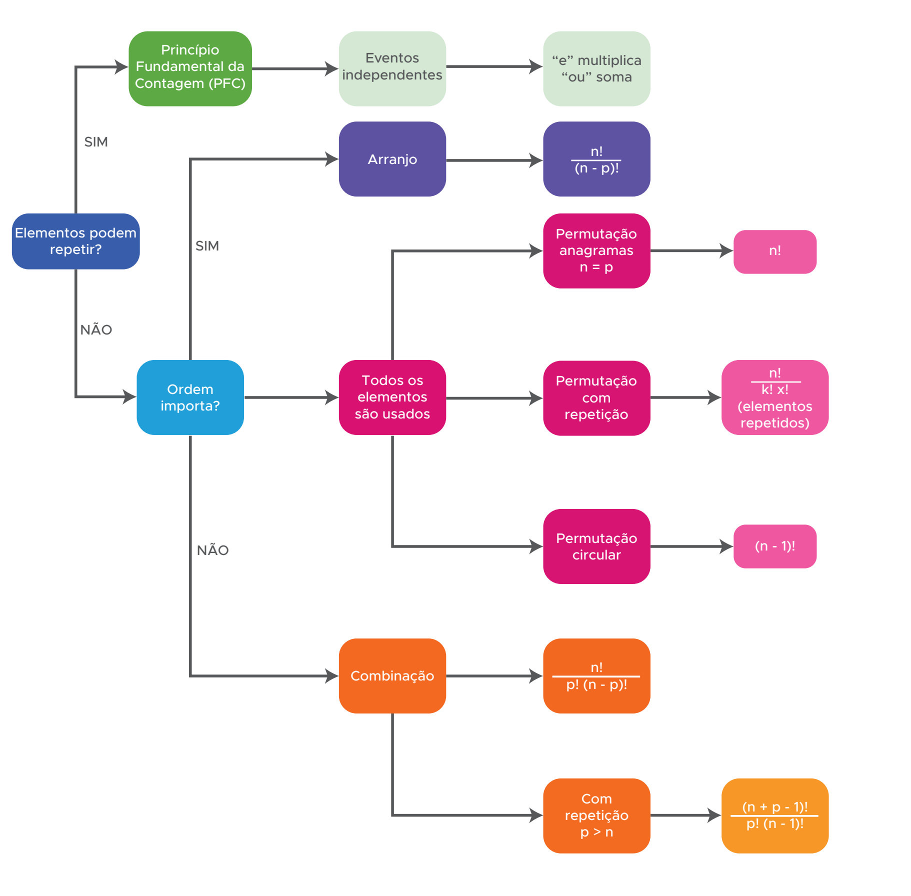
Devemos dividir por 3!, pois para compor as duplas a ordem não importa.

Logo a solução é dada por: $\dfrac{C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{4!} - \dfrac{1 \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2}}{3!} = 105 - 15 = 90$

Portanto, há 90 maneiras diferente de formar 4 duplas.

Alternativa C.

8. Elabore um mapa conceitual sobre permutação, arranjo e combinação.



FINALIZANDO

A finalização poderá ser feita com a elaboração de um mapa conceitual dos conteúdos vistos nas Aulas 5 e 6. Consideramos que essa etapa assumirá um papel importante no processo de aprendizagem, pois permitirá que os estudantes sintetizem seus conhecimentos. Solicite que algum estudante compartilhe o seu mapa conceitual, explicando-o. Dessa forma, será possível identificar os que ainda apresentam fragilidades quanto aos objetos de conhecimento tratados para planejar possíveis estratégias em busca de esclarecer essas dúvidas.

AULAS 7 E 8 – PROBABILIDADE DE UM EVENTO OCORRER

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante impresso.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em duplas produtivas, mas em um período remoto essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão, por meio de alguma plataforma, vinculados a você. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. Para essas atividades, propomos uma retomada dos principais conceitos tratados no decorrer desta Sequência de Atividades. Além disso, é interessante começar uma conversa informando que eles estudarão conceito de experimento aleatório, espaço amostral e evento para o cálculo da probabilidade. Comente que a probabilidade já está inserida em nosso cotidiano de uma maneira tão sutil que nem percebemos, pois ela está presente na meteorologia, nos jogos de lotéricas, nos investimentos bancários etc. Após essa breve introdução, os estudantes poderão realizar a leitura das questões do **Caderno do Estudante**.

AULAS 7 E 8 – PROBABILIDADE DE UM EVENTO OCORRER

Objetivos das aulas
- Compreender o conceito de experimento aleatório, espaço amostral e evento para o cálculo da probabilidade;
- Reconhecer eventos complementares;
- Calcular a probabilidade de eventos na resolução de situações-problema recorrendo a raciocínios combinatórios.

1. No lançamento simultâneo de dois dados, determine o espaço amostral e o evento de "sair soma 7".

O espaço amostral é formado por 36 elementos. São eles:

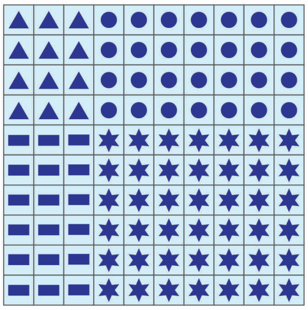
Ω = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}.

Para o evento "sair soma 7", vamos listar todos os elementos cuja soma é igual a 7.

Vamos chamar esse evento de A. Então, temos que:

A = {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)}.

2. (SARESP - 2019) Paula fechou os olhos e apontou ao acaso para um dos quadradinhos da figura a seguir.



A probabilidade de que Paula tenha apontado para um quadradinho contendo um triângulo é:

a. $\frac{21}{50}$

b. $\frac{7}{25}$

c. $\frac{9}{50}$

d. $\frac{3}{25}$

e. $\frac{2}{25}$

Oriente os estudantes que para calcular a probabilidade de um evento acontecer vamos precisar do número total de resultados possíveis e do número de resultados favoráveis.

Temos 100 resultados possíveis e 12 resultados favoráveis. Logo, chamando de A o evento "apontar para o triângulo", temos:

$$P(A) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

Alternativa D.

3. Qual é a probabilidade de sair pelo menos uma cara ao lançar, sucessivamente, uma moeda por 3 vezes?

Primeiro, vamos calcular o número total de elementos possíveis:

Em três lançamentos temos 2 possibilidades para o primeiro, 2 para o segundo e 2 para o terceiro. Logo $n(\Omega) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Agora, vamos calcular a probabilidade do evento que NÃO queremos, que é sair coroa (K) nos três lançamentos. Chamando esse evento de A, temos que:

$$A = \{(K, K, K)\} \rightarrow n(A) = 1 \rightarrow P(A) = \frac{1}{8}$$

Utilizando o conceito de evento complementar, temos que:

$P(A) + P(B) = 1$, em que $P(B)$ é a probabilidade de sair pelo menos uma cara

$$\frac{1}{8} + P(B) = 1$$

$$P(B) = 1 - \frac{1}{8}$$

$$P(B) = \frac{7}{8}$$

4. (ENEM - 2014) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser "verdadeiro" ou "falso" e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é:

a. 0,02048.

b. 0,08192.

c. 0,24000.

d. 0,40960.

e. 0,49152.

Sabendo que a probabilidade de errar uma resposta é de 0,20, então a probabilidade de acertar é 0,80, pois trata-se de um evento complementar.

Para o teste terminar na quinta pergunta, o candidato precisa:

1) Errar a quinta resposta (probabilidade de 0,20).

2) Errar uma das quatro primeiras respostas (probabilidade de $4 \cdot 0,20 = 0,80$).

3) Acertar as outras três respostas (probabilidade de $0,80^3 = 0,512$).

$0,20 \cdot 0,80 \cdot 0,512 = 0,08192$

Portanto, a probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é de 0,08192.

Alternativa B.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, se julgar pertinente, peça para os estudantes grifarem as informações importantes do enunciado dando ênfase para "pelo menos uma cara".

DESENVOLVENDO

Com a leitura do Caderno, os estudantes deverão ter clareza de que, para responderem à Questão 1, eles precisarão saber o que é um experimento aleatório, e qual é a diferença entre espaço amostral e evento. Professor, além de abordar esses conceitos, introduza o conceito de cálculo de probabilidades. Comente que para calcular a probabilidade de um evento ocorrer, devemos saber o total de resultados possíveis e o número de resultados favoráveis. Com isto, explore a fórmula do cálculo de probabilidades. Aproveite para falar sobre eventos complementares. Explique que a soma das probabilidades de os eventos ocorrerem deve ser igual a 100% ou igual a 1. Com essas informações, os estudantes poderão resolver todas as questões do **Caderno do Estudante**. Para o segundo momento da aula, os estudantes deverão se envolver com as Questões de 8 a 13, que são itens do ENEM, do SARESP, da AAP e da ADE. A correção poderá ser focada na leitura atenciosa de cada item e através do compartilhamento das diferentes estratégias de resolução. Uma conversa com os estudantes sobre o fato de que itens envolvendo probabilidade aparecem com frequência nos exames em larga escala pode ser pertinente.

5. (ENEM - 2010) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DOS CALÇADOS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0 a probabilidade de ela calçar 38,0 é:

a. 1/3
b. 1/5
c. 2/5
d. 5/7
e. 5/14

Observando o quadro, tem-se que o número de funcionárias com o calçado maior que 36,0 é igual a 3 + 10 + 1 = 14. Sendo que 10 calçam 38,0. Logo, a probabilidade é de:

$$\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

Alternativa D.

6. (SARESP - 2010) Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne, uma bebida e uma sobremesa.

Assinale a alternativa que mostra o número de pedidos diferentes que uma pessoa pode fazer.

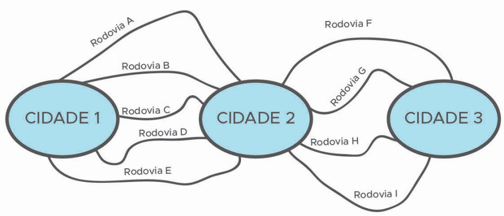
a. 90
b. 100
c. 110
d. 120
e. 140

Para cada uma das 2 opções de saladas há 4 tipos de pratos de carne e, para cada um deles, 5 variedades de bebidas e, para cada uma delas, 3 sobremesas distintas.

Número de pedidos diferentes que podem ser feitos por $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 120$

Alternativa D.

7. (SARESP - 2015) Há 5 rodovias ligando as cidades 1 e 2, e há mais 4 rodovias que ligam as cidades 2 e 3, conforme ilustra a figura a seguir.



Uma maneira de chegar à cidade 3 partindo da cidade 1 é, por exemplo, tomar a rodovia A, e depois tomar a rodovia F. De quantas maneiras diferentes um motorista pode partir da cidade 1 e chegar até a cidade 3, passando pela cidade 2?

a. 15.

b. 18.

c. 20.

d. 24.

Para cada uma das cinco rodovias que ligam as duas primeiras cidades, há a possibilidade de continuar a viagem por outras quatro rodovias para se chegar até o destino final. Logo, o total de trajetos pode ser obtido pelo produto entre o número de opções de rodovias em duas cidades, resultando em $5 \cdot 4 = 20$ trajetos possíveis.

Alternativa C.

8. (ADE - 2020) As duas figuras abaixo mostram placas de veículos automotores. A primeira mostra o modelo ainda utilizado no Brasil, mas que está em processo de transição para o modelo da segunda placa, que segue um novo padrão para o Mercosul.

Uma reportagem sobre a mudança no padrão das placas informa que a nova placa permitirá obter um número muito maior de combinações diferentes. A placa antiga permitia menos de 180 milhões de combinações. Considerando que existam 10 algarismos e 26 letras para comporem as placas, quantas seriam as combinações no novo modelo, aproximadamente?

a. 45 milhões

b. 175 milhões

c. 258 milhões

d. 333 milhões

e. 457 milhões

Considerando que existam 10 algarismos e 26 letras para comporem as placas, o número total de combinações diferentes que podem ser formadas corresponde ao seguinte produto:

$$\underset{L}{\underline{\ 26\ }}\ \underset{L}{\underline{\ 26\ }}\ \underset{L}{\underline{\ 26\ }}\ \underset{N}{\underline{\ 10\ }}\ \underset{L}{\underline{\ 26\ }}\ \underset{N}{\underline{\ 10\ }}\ \underset{N}{\underline{\ 10\ }} = 26^4 \cdot 1000 = 456\,976\,000$$

Há, aproximadamente, 457 milhões combinações para o novo modelo de placa de veículos automotores.

Alternativa E.

FINALIZANDO

Por fim, ressaltamos que esse encontro tem um importante papel quanto à verificação do desenvolvimento das habilidades assumidas para o trabalho com esta Sequência de Atividades. Nesse sentido, o encerramento, a partir das resoluções das questões propostas para as Aulas 7 e 8, deverá se articular no sentido de sistematizar os conceitos estudados sobre análise combinatória e probabilidade. Destacamos a relevância do envolvimento ativo dos estudantes nesses momentos.

9. (ENEM - 2011) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

a. 24
b. 31
c. 32
d. 88
e. 89

Como temos 5 dígitos ímpares, teremos 5 números para utilizar {1, 3, 5, 7, 9}.
Para calcular a posição do candidato, teremos que calcular as posições que estão antes dele e com isso a posição dele será determinada automaticamente depois de calcularmos todos os casos.
Escrevendo os números em ordem crescente até o 75 913, teremos:
1) Números iniciados em 1: 4! = 24
2) Números iniciados em 3: 4! = 24
3) Números iniciados em 5: 4! = 24
4) Números iniciados em 71: 3! = 6
5) Números iniciados em 73: 3! = 6
6) Números iniciados em 751: 2! = 2
7) Números iniciados em 753: 2! = 2
8) O número 75 913
A ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é:
24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 + 1 = 89
Alternativa E.

10. (ENEM - 2011) Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida). O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é

a. Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.
b. Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
c. Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
d. Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo.
e. Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

Vamos escrever as possibilidades de soma para cada um deles utilizando a numeração das bolas de 1 a 15.

Arthur: soma 12 = 1 + 11; 2 + 10; 3 + 9; 4 + 8; 5 + 7. Total de 5 possibilidades.

Bernardo: soma 17 = 2 + 15; 3 + 14; 4 + 13; 5 + 12; 6 + 11; 7 + 10; 8 + 9. Total de 7 possibilidades.

Caio: soma 22 = 15 + 7; 14 + 8; 13 + 9; 12 + 10. Total de 4 possibilidades.

Portanto, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.

Alternativa C.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

COORDENADORIA PEDAGÓGICA
Caetano Pansani Siqueira

DIRETORA DO DEPARTAMENTO DE DESENVOLVIMENTO CURRICULAR E DE GESTÃO PEDAGÓGICA
Viviane Pedroso Domingues Cardoso

DIRETORA DO CENTRO DE ENSINO MÉDIO – CEM
Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

ASSESSORIA TÉCNICA
Cassia Vassi Beluche
Deisy Christine Boscaratto
Isaque Mitsuo Kobayashi
Kelvin Nascimento Camargo
Luiza Helena Vieira Girão
Silvana Aparecida de Oliveira Navia
Valquiria Kelly Braga
Vinicius Gonzalez Bueno

EQUIPE CURRICULAR DE MATEMÁTICA - ENSINO MÉDIO
Ana Gomes de Almeida
Marcos José Traldi
Otávio Yoshio Yamanaka
Sandra Pereira Lopes
Vanderley Aparecido Cornatione

EQUIPE DE ELABORAÇÃO
Raph Gomes Alves
Abadia de Lourdes Cunha
Eliel Constantino da Silva
José Cícero dos Santos
Luciana Vieira Andrade
Isadora Lutterbach Ferreira Guimaraes
Tatiane Valéria Rogério de Carvalho
Giovanna Reggio
Veridiana Rodrigues Silva Santana

REVISÃO DE LÍNGUA
Vozes da Educação

PROJETO GRÁFICO E DIAGRAMAÇÃO
André Coruja
Sâmella Arruda
Alice Brito
Amanda Pontes
Ana Gabriella Carvalho
Cristall Hannah Boaventura
Emano Luna
Julliana Oliveira
Kamilly Lourdes
Lucas Nóbrega
Perazzo Freire
Rayane Patrício
Wellington Costa

SUPORTE A IMAGEM
Lays da Silva Amaro
Otávio Coutinho

SÃO PAULO
GOVERNO DO ESTADO

Secretaria de Educação