SÃO PAULO
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria de Educação

APRENDER SEMPRE

VOLUME 4

1ª À 3ª SÉRIE - ENSINO MÉDIO

MATEMÁTICA
2021

PROFESSOR

Governo do Estado de São Paulo

Governador
João Doria

Vice-Governador
Rodrigo Garcia

Secretário da Educação
Rossieli Soares da Silva

Secretária Executiva
Renilda Peres de Lima

Chefe de Gabinete
Henrique Cunha Pimentel Filho

Coordenador da Coordenadoria Pedagógica
Caetano Pansani Siqueira

Presidente da Fundação para o Desenvolvimento da Educação
Nourival Pantano Junior

APRESENTAÇÃO

Estas sequências didáticas/de atividades foram elaboradas com o intuito de oferecer um suporte adicional aos estudantes, auxiliando-os no processo de recuperação e aprofundamento de aprendizagens essenciais para seu percurso educacional.

Com o intuito de favorecer a aprendizagem de todos os estudantes, não deixando ninguém para trás, serão oferecidas, além das sequências de atividades, avaliações diagnósticas e formativas para acompanhar a evolução da aprendizagem dos estudantes e direcionar o ensino às suas necessidades; e formações, com foco no uso do resultado das avaliações e no desenvolvimento das atividades presentes neste material.

Os materiais, as avaliações e as formações do Programa de Recuperação e Aprofundamento estão articulados entre si, fortalecendo o desenvolvimento das habilidades essenciais para o percurso educacional dos estudantes.

Essas habilidades essenciais foram selecionadas a partir de análises do Currículo Paulista no Ensino Fundamental e na 1ª série do Ensino Médio, e do Currículo Oficial vigente na 2ª e 3ª séries do Ensino Médio, dos resultados do SARESP 2019 e da Avaliação Diagnóstica de Entrada (ADE), de 2020, em um trabalho conjunto entre a equipes curriculares da Coordenadoria Pedagógica (COPED), PCNP e professores da rede. Considerando a importância da continuidade do trabalho de recuperação iniciado em 2020, a matriz de habilidades do Programa de Recuperação e Aprofundamento, que serviu de base a este material, foi elaborado tendo em conta um ciclo de progressão das aprendizagens de 2020 a 2021.

As sequências didáticas/de atividades de Língua Portuguesa e Matemática contam com orientações didáticas que auxiliarão no trabalho para o desenvolvimento das habilidades essenciais de cada ano/série, de forma articulada aos demais materiais disponibilizados pela SEDUC.

Para favorecer esse entrelaçamento, há indicações de como utilizar as sequências didáticas/de atividades juntamente com o Ler e Escrever, o EMAI e o São Paulo Faz Escola.

Cada professor, a partir de seu contexto, poderá utilizar essas sequências didáticas/de atividades para promover o desenvolvimento dos estudantes, de acordo com as necessidades de cada um, com o objetivo de oferecer a todos oportunidades de aprendizagem, não deixando ninguém para trás.

Desejamos a todos um excelente trabalho!

Coordenadoria Pedagógica - Coped

ANOTAÇÕES

1ª Série

1ª Série do Ensino Médio - Matemática			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAS**
1	Porcentagens: Problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos.	(**EF09MA05**) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 9º ano:** Vol.3, Situação de Aprendizagem 4 ATIVIDADE 1 – O MUNDO FINANCEIRO A NOSSA VOLTA ATIVIDADE 2 – JUROS E DESCONTOS: HERÓIS, VILÕES? DEPENDE DA COMPREENSÃO
2	Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração.	(**EF09MA13**) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (**EF09MA14**) Resolver e elaborar situações-problema de aplicação do teorema de Pitágoras.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 9º ano:** Vol. 3, Situação de Aprendizagem 1 ATIVIDADE 1 – UM TRIÂNGULO FAMOSO ATIVIDADE 2 – TEOREMA DE PITÁGORAS ATIVIDADE 5 – RELAÇÕES MÉTRICAS ATIVIDADE 6 – OUTRAS RELAÇÕES MÉTRICAS E APLICAÇÕES Vol. 3, Situação de Aprendizagem 2 ATIVIDADE 1- APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS
3	Sistemas de equações de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano.	(**EF08MA08**) Resolver e elaborar situações problema que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 8º ano** Vol.3, Situação de aprendizagem 3 ATIVIDADE 1 – SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES COM DUAS INCÓGNITAS ATIVIDADE 2 – PROBLEMAS COM SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU ATIVIDADE 3 – ANÁLISE DAS DIFERENTES RESOLUÇÕES GRÁFICAS DE UM SISTEMA

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

ANOTAÇÕES

1º ANO - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

OLÁ, PROFESSOR!

Espera-se que o estudante possa, ao final dessa Sequência de Atividades e por meio de intervenção pedagógica, utilizar diferentes estratégias para cálculo de porcentagens (mental, calculadora, tecnologias digitais e estratégias pessoais), conhecer e se familiarizar com o cálculo de porcentagem, identificando situações do cotidiano em que a noção de porcentagem está presente, especialmente no contexto da educação financeira. As atividades também tratam de situações em que as formas percentual, fracionária e decimal se relacionam por meio de gráficos. Além disso, visa contribuir no cálculo de porcentagens em acréscimos e decréscimos simples, com ou sem o uso de tecnologias digitais, e não somente em sala de aula, mas de forma híbrida, possibilitando a aprendizagem em qualquer ambiente.

PLANEJAMENTO PARA DESENVOLVER A SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

HABILIDADE ESSENCIAL

Deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compar-tilhamento de conhecimentos e a colaboração para que os estudantes desenvolvam a seguinte habilidade:

(EF09MA05) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentu-ais sucessivos e a determinação das taxas percentuais no contexto da educação financeira, preferencialmente com o uso detecnologias digitais.

AULA	DURAÇÃO	PROPOSIÇÃO
1 2	90 min	Porcentagem: relação entre duas grandezas.
3 4	90 min	Porcentagem e acréscimos.
5 6	90 min	Porcentagem e decréscimos.
7 8	90 min	Situações – problema envolvendo acréscimos e decréscimos.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

AULAS 1 E 2 – PORCENTAGEM: RELAÇÕES ENTRE DUAS GRANDEZAS.

Objetivos da aula:
- Utilizar a relação entre grandezas e registrar as frações e números decimais em situações do cotidiano.
- Nestas aulas, vamos resolver situações financeiras que envolvem orçamento familiar.

1. O quadro, a seguir, mostra o resultado do levantamento dos gastos mensais de Laura, que recebe dois salários mínimos, num total de R$ 2.200,00.

VALORES MENSAIS DE LAURA	
Aluguel	40%
Água, luz e internet	0,20
Alimentação	1/4
Outros	15%

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Leia atentamente os dados registrados no quadro e responda às questões seguintes:

a. Desses números apresentados, quais estão no registro fracionário, quais estão no registro percentual e quais estão na representação decimal?

REGISTROS	NÚMEROS
Fracionária	**¼**
Percentual	**40% ou 15%**
Decimal	**0,20**

AULAS 1 E 2 – PORCENTAGEM: RELAÇÃO ENTRE FRAÇÕES E DECIMAIS

OBJETIVO DAS AULAS

Utilizar a relação entre entre grandezas e registrar as frações e números decimais em situações do cotidiano.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes sentados individualmente, respeitando os protocolos de higiene e o distanciamento social, com as carteiras dispostas em "U" ou, se possível, organize-os em duplas produtivas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante, lápis, borracha, caneta e calculadora.

INICIANDO

Professor, inicie uma conversa, com os estudantes, explicando qual é o objetivo das Aulas 1 e 2: "utilizar a relação entre frações e números decimais para realizar cálculos de porcentagem em situações do cotidiano". Sugerimos que, por meio de questionamentos, levante os conhecimentos prévios que os estudantes já têm em relação ao tema. Por exemplo, pergunte: "O que vocês entendem sobre a palavra porcentagem?" e "Como calcular porcentagem mentalmente?". Explique o conceito de porcentagem e os conceitos de frações e decimais, fazendo a relação frações-decimais e exemplificando a conversão da registros percentual para as representações decimal e fracionária. Relembre-os sobre a importância dessas conversões na elaboração de gráficos de setores.

DESENVOLVENDO

Com o Caderno do Estudante em mãos, sugerimos que, nas Aulas 1 e 2, os estudantes realizem as três atividades que envolvem as conversões da representação percentual para o registro fracionário ou decimal fracionária e decimal, fazendo os cálculos mentalmente e mostrando o significado de cada uma delas, em especial o registro percentual. Espera-se que os estudantes respondam às questões, identificando situações do cotidiano em que a de porcentagem está presente, mesmo que não seja expresso em linguagem matemática.

Na **Atividade 2**, resgate o conceito debatido na atividade anterior e informe-os que essa atividade será uma continuação da primeira. Atente-os para situações apresentadas e observe se concluíram que 10% significa dividir o total por 10. Esse percentual (10%) é bastante utilizado em nosso cotidiano e sua correspondência com "a décima parte" é bastante familiar, tanto no conhecimento escolar, como no conhecimento do cotidiano.

Posteriormente, chame a atenção para a **Atividade 3**, em que os estudantes deverão representar geometricamente os dados apresentados no gráfico de setores da **Atividade 1**. Para concluir a atividade, promova um momento de discussão para que os estudantes reflitam sobre as ideias envolvidas e exponham o que observaram até o momento.

FINALIZANDO

Retome as ideias que os estudantes levantaram no início das aulas, podendo ser oralmente, quando eles socializarem o que absorveram na aula. Peça que registrem por escrito, por meio de figuras ou mapas mentais. Realize a correção coletiva das resoluções das atividades, verificando se os estudantes conseguiram fazer as conversões das representações. Caso apareçam resultados divergentes, discuta com a turma o que pode ter ocorrido e proponha alguma tarefa similar a fim de esclarecer possíveis dúvidas.

b. Qual o registro do valor dedicado à parte dos gastos com a alimentação?

Resposta: Os gastos com a alimentação estão representados pela forma de registro fracionária $\frac{1}{4}$

c. Nesse quadro, você encontra também a expressão "outros". O que ela significa?

Resposta: Espera-se que o estudante responda que a expressão "outros" significa gastos que não são considerados fixos, ou seja, despesas variáveis, e que ela está representada na forma percentual.

d. De acordo com o quadro dado, é possível concluir que 0,20 de todo salário de Laura representa os gastos em água, luz e internet? Essa representação está na forma decimal ou percentual?

Resposta: Sim, 0,20 é um número decimal e representa a parte do salário de Laura gasto com água, luz e internet.

e. Qual é a porcentagem que o aluguel representa nos gastos de Laura?

Resposta: A porcentagem que o aluguel representa nos gastos de Laura é de 40%.

f. A porcentagem que representa o aluguel de Laura significa:

( ) mais da metade do salário de Laura

( ) menos da metade do salário de Laura

Resposta: Menos da metade do salário de Laura.

g. Preencha a seguinte tabela, registrando os gastos de acordo com as registros:

Gastos	Representação fracionária	Representação Decimal	Representação Percentual
Aluguel	$\frac{40}{100} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	0,40	40%
Alimentação	1/4	0,25	25%
Água, luz e internet	$\frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	0,20	20%
Outros	$\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$	0,15	15%

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Resposta:

Aluguel:

$\frac{40}{100} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}40$

Alimentação:

$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

Água, luz e internet:

$0{,}20 = \frac{20}{100} = 20\%$

Outros:

$15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$

2. O quadro, a seguir, mostra uma outra forma de divisão em partes iguais do salário de Laura em relação aos seus gastos mensais:

Salário de Laura									

a. Em quantas partes foram divididas o salário de Laura?

Resposta: De acordo com a figura dada, o salário de Laura foi dividido em 10 partes iguais.

b. Que percentual representa o salário total de Laura?

Resposta: 100%.

c. Podemos concluir que cada coluna da tabela representa 10% do salário de Laura?

Resposta: Sim, elas representam "a décima parte".

d. Sendo o salário de Laura igual a R$ 2.200,00, qual o valor de cada uma das partes representadas na tabela?

Resposta: Dividindo o salário de Laura de R$ 2.200,00 por 10, teremos R$ 220,00 em cada parte ou 10% do salário.

3. Usando os dados das atividades anteriores, responda às seguintes questões:

a. Quantas partes do salário de Laura são necessárias para efetuar o pagamento do aluguel? Qual é o valor do aluguel de Laura?

Resposta: Como Laura gasta 40% para pagar o aluguel, são necessárias 4 partes do salário, num total de R$ 880,00.

b. Quantas partes do salário de Laura são gastos com alimentação? Qual o valor que este gasto representa?

Resposta: Como Laura gasta 1/4 do seu salário, ou 25%, são necessárias 2 partes e meia, ou seja, R$ 550,00são gastos com alimentação.

c. Qual é o valor gasto com água, luz e internet? Quanto esse gasto representa? Quantas partes do salário de Laura são necessárias?

Resposta: Como Laura gasta 0,20 do salário dela de R$ 2.200,00, são necessárias 2 partes do salário, ou seja, R$ 440,00.

d. Depois de reservar o valor gasto com alimentação, pagar o aluguel, as contas de água, luz e internet, quanto sobrou do salário de Laura para outras despesas? Quantas partes do salário de Laura são necessárias para as outras despesas?

Resposta: Depois de pagar as despesas fixas, sobra R$ 330,00 dos R$ 2.200,00, sendo necessária uma parte e meia de seu salário.

e. Retomando a figura que representa o salário de Laura dividido em partes iguais, represente as partes de cada gasto mensal: Aluguel, água, luz e internet, alimentação e outras despesas.

Resposta:

Salário de Laura = R$ 2.200,00

Salário de Laura								

Salário de Laura			
Aluguel 4 partes R$ 880,00	Água, luz e internet 2 partes R$ 440,00	Alimentação 2,5 partes R$ 550,00	Outras despesas 1,5 partes R$ 330,00

ANOTAÇÕES

AULAS 3 E 4 – PORCENTAGEM E ACRÉSCIMOS

OBJETIVO DAS AULAS

Localizar valores e índices financeiras em tabelas, e resolver e elaborar situações-problema em contextos de tratamento de dados, com apoio de porcentagens que envolvam aplicação de acréscimos simples.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes sentados individualmente, respeitando os protocolos de higiene e o distanciamento social, com as carteiras dispostas em "U" ou, se possível, organize-os em duplas produtivas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante, lápis, borracha e calculadora.

INICIANDO

Inicie essa aula, apresentando seu objetivo: "resolver e elaborar situações-problema em contextos de tratamento de dados, com apoio de porcentagens que envolvam aplicação de acréscimos". Retome, com os estudantes, os registros fracionárias e decimais de porcentagem e cálculo de porcentagem, ou seja, valor principal vezes a porcentagem. Sugerimos que, por meio de questionamentos, levante os conhecimentos prévios que os estudantes já têm em relação ao tema. Por exemplo, pergunte: "O que vocês entendem quando escutam as frases: 'a gasolina vai aumentar 5%', ou 'o preço do feijão aumentou 15%'?" Peça para que eles exemplifiquem situações financeiras relacionadas a acréscimos. Explique que nos enunciados de situações-problema podem aparecer termos como: percentual de aumento, taxa de aumento ou acréscimo e taxa percentual de aumento ou acréscimo. Todas representam um aumento no valor principal.

AULAS 3 E 4 – PORCENTAGEM E ACRÉSCIMOS

Objetivos da aula:

- Localizar informações financeiras em tabelas, e resolver e elaborar situações-problema em contextos de educação financeira que envolvam aplicação de acréscimos simples.
- Nestas aulas, vamos resolver situações de educação financeira no contexto de alguns impostos que envolvem cálculo de acréscimos simples.

1. Observe a conta de energia elétrica a seguir:

enel

Eletropaulo Metropolitana Eletricidade de São Paulo S. A.
Av. Dr. Marcos Penteado de Ulhôa Rodrigues, 939, Loja 1 e 2, Térreo, 1° ao 7° andar - Torre II
Bairro Sítio Tamboré - Barueri/SP - Cep. 06460-040 | CNPJ 61.695.227/0001-93
Inscrição Estadual: 206.165.226.110 | Regime Especial Proc. N° 1000635-686924/2005

SEGUNDA VIA.

1

Dados do Cliente/Unidade Consumidora

Nº DA INSTALAÇÃO 61585688 | Nº DO CLIENTE 12608131

CPF/CNPJ: 012.345.678-09 INSC. EST: ISENTO

MARIA HELENA DA SIVA SANTOS

RUA DAS FLORES 123 101 A
CEP: 01020-003 FORTALEZA/CE

Dados da Conta

VENCIMENTO	TOTAL A PAGAR (R$)
08 MAR 2021	169,60

CONTA REFERENTE A FEV 2021

Dados de Medição

Nº do medidor		15330580
Leitura anterior	19 JAN	2.805
Leitura atual	19 FEV	3.020
Próxima leitura	19 MAR	
Fator multiplicador		1,00000
Consumo do mês (kWh)		215,0
Número de dias		31

Histórico de Faturamento

Mês/Ano	kWh	Dias
fev/21	215	31
jan/21	200	31
dez/20	181	31
nov/20	201	29
out/20	196	32
set/20	138	29
ago/20	184	30
jul/20	143	32
jun/20	64	31
mai/20	179	31
abr/20	179	30
mar/20	149	30
fev/20	175	29

Classificação da Unidade Consumidora

Grupo B | Subgrupo B1 | Classe RESIDENCIAL

Subclasse RESIDENCIAL

Tipo de fornecimento Monofásico | Modalidade Tarifária Convencional

Reservado ao Fisco FE33.4D73.32AB.F0A7.6B93.6F4B.AA0E.879A

Data de emissão	Nº Nota fiscal	Série	Base de cálculo	Alíquota	ICMS
19 FEV 2021	291856988	B	161,54	25%	40,38

CFOP 5258: Venda de en. elétrica a não contribuinte

Descrição de Faturamento Bandeira(s) Tarifária(s) aplicada(s) no mês AMARELA

CCI	DESCRIÇÃO	QTD kWh	TARIFA C/ICMS	BASE ICMS	ALIQ ICMS	ICMS	VALOR
0605	USO SIST. DISTR (TUSD)	215,000	0,38070	81,85	25%	20,46	81,85
0601	ENERGIA (TE)	215,000	0,33154	71,28	25%	17,82	71,28
0698	ADICIONAL BANDEIRA AMARELA	0,000	0,00000	3,84	25%	0,96	3,84
0699	PIS/PASEP (0,51%)			0,80	25%	0,20	0,80
0699	COFINS (2,35%)			3,77	25%	0,94	3,77
0807	COSIP - SÃO PAULO - MUNICIPAL						9,66
0999	DMIC DEZEMBRO/2020						1,60-

Tarifas aplicadas (sem impostos)

CONVENCIONAL-RESIDENCIAL 0,28551 (TUSD) 0,24868 (TE)

Valor dos Tributos: R$ 43,82

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

a. Qual foi o valor total a pagar da conta de energia elétrica em reais?

Resposta: R$ 169,60.

b. Qual foi o valor do consumo do mês (kWh)?

Resposta: 215,0 kWh.

c. Qual é o valor de base de cálculo da conta de energia elétrica dada?

Resposta: A base de cálculo é R$ 161,54.

d. Qual alíquota se encaixa à conta de energia elétrica dada?

Resposta: Se encaixa na alíquota de 25%.

e. Qual é o valor total dos tributos (ICMS, PIS e COFINS)?

Resposta: R$ 43,82. Esse valor pode ser visualizado no final da fatura ou somando-se os valores: 20,46 + 17,82 + 0,96 + 0,80 + 3,77 = 43,82.

f. Qual é o valor da taxa COSIP (Contribuição Social de Iluminação Pública)?

Resposta: A taxa COSIP é de R$ 9,66.

g. Quanto ficaria a conta de energia elétrica, “compra de energia”, sem os tributos? Como você chegou a essa conclusão?

Resposta: R$ 116,12. Pode-se chegar a este valor subtraindo os tributos no valor de R$ 43,82 e a taxa de R$ 9,66 do valor total da conta de energia elétrica.

h. Preencha a tabela, a seguir, com a composição da conta de energia elétrica dada.

COMPOSIÇÃO DA CONTA DE ENERGIA ELÉTRICA	
Compra de energia	**R$ 116,12**
Impostos (ICMS, PIS/PASEP/COFINS)	**R$ 43,82**
TAXA COSIP	**R$ 9,66**
Total	**R$ 169,60**

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

DESENVOLVENDO

Com o Caderno do Estudante em mãos, peça para os estudantes se atentarem à forma como o enunciado da situação-problema apresentada na **Atividade 1** é importante para que eles reconheçam, no contexto da fatura da conta de energia elétrica, a ideia de aumento quando o imposto é acrescido ao valor gasto.

Na **Atividade 2**, eles devem perceber que existe um cálculo mais prático que envolve acréscimos do que o cálculo tradicional e que determina o valor da porcentagem para, só então, calcular o valor final acrescido ou descontado. Este é o cálculo dado pelo produto do valor principal com o fator multiplicativo (1 + acréscimo). As **Atividade 3** e 4 são situações-problema que envolvem percentual de acréscimo quando se conhece o valor principal.

Na **Atividade 6**, os estudantes terão a experiência de elaborar uma situação-problema, construindo o conhecimento para articular o texto do enunciado, os dados, as operações envolvidas e a solução.

FINALIZANDO

Espera-se que, ao final das aulas, os estudantes já tenham se apropriado da operacionalização do fator multiplicativo que envolve percentual de acréscimo no contexto financeiro. Finalize as aulas, construindo, com toda a turma, uma breve síntese oral. Quando os estudantes socializarem o que absorveram na aula, peça que registrem por escrito, por meio de figuras ou mapas mentais.

Caso observe a existência de estudantes que ainda não tenham se apropriado do que foi proposto nesse estudo ou que queiram se aprofundar nos objetos de conhecimento matemático desenvolvidos nessas aulas, sugerimos plataformas digitais de estudos. Na **Atividade 6**, verifique se os estudantes, por meio da criação de seus próprios enunciados, organizaram os conhecimentos adquiridos. É importante observar se os estudantes estão montando a resolução de forma correta, se estimam o resultado e se os procedimentos com as operações com números decimais estão corretos.

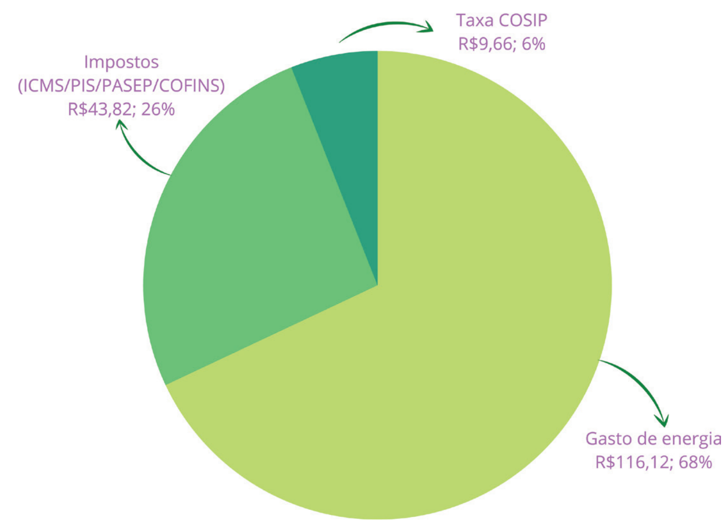
i. Determine a relação percentual da composição da conta de energia elétrica em relação ao valor total da fatura.

Composição da conta de energia elétrica	Valores da composição (em reais) diante do total da fatura	Fração Parte/Todo	Decimal	Relação percentual entre a parte e o total (%)
Compra de energia	116,12	$\frac{116,12}{169,60}$	0,6846	68%
Impostos	43,82	$\frac{43,82}{169,60}$	0,2583	26%
Taxa	9,66	$\frac{9,66}{169,60}$	0,0569	6%
Total	169,60	$\frac{169,69}{169,60}$	1	100%

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

j. Preenche os dados do gráfico a seguir, de acordo com a tabela da atividade anterior:

Composição da conta de energia elétrica



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

2. Além de calcular porcentagens de um valor, podemos determinar quanto vale um aumento nele. Por exemplo:

Taxa de aumento: 30% = 30/100 = 0,30 = 0,3.

Fator de multiplicação = 1 + taxa de aumento.

Fator de multiplicação = 1 + 0,3 = 1,3.

Complete o quadro a seguir e verifique que cálculo prático é dado pelo produto do valor principal com o fator multiplicativo (1 + acréscimo).

Valor principal	Acréscimo ou taxa de aumento	Valor do Acréscimo	Valor após o acréscimo	Fator de multiplicação (1+ taxa de aumento)	Valor principal x fator de multiplicação
200	30%	200 x 0,30 = 60	260	(1+ 0,30)	200 x 1,3 = 260
750	40%	750 x 0,40 = 300	1050	(1+ 0,40)	750 x 1,40 = 1050
345	27%	345 x 0,27 = 93,15	438,15	(1+ 0,27)	345 x 1,27 = 438,15
87	13%	87 x 0,13 = 11,31	98,31	(1+ 0,13)	87 x 1,13 = 98,31
950	65%	950 x 0,65 = 617,50	1567,50	(1+ 0,54)	950 x 1,65 = 567,50
25	25%	25 x 0,25 = 6,25	31,25	(1+ 0,25)	25 x 1,25 = 31,25
1043	56%	1043 x 0,56 = 584,08	1627,08	(1+ 0,56)	1043 x 1,56 = 1627,08
32	78%	32 x 0,78 = 24,96	56,96	(1+ 0,78)	32 x 1,78 = 56,96

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

3. Observe o anúncio de uma loja:

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Nessa loja, para vendas a prazo (pagamento em mais de uma parcela), os preços dos produtos sofrem um acréscimo de 14%.

Qual é o preço desse celular na venda a prazo?

Resposta: 1299 x (1+0,14) = 1299 x 1,14 = 1480,86, ou seja, o valor do celular, na venda a prazo, é de R$ 1.480,86.

4. A tarifa de ônibus da cidade de São Paulo, que era R$ 4,00, sofreu dois acréscimos: um de 7,5% no mês de janeiro de 2019 e outro de 2,33%, em janeiro do ano seguinte. Qual é o valor da tarifa após os aumentos?

Resposta: Primeiro aumento: 4 x (1 + 0,075) = 4 x 1,075 = 4,30; após o 1º aumento, a tarifa passou de R$ 4,00 para R$ 4,30.

Segundo aumento: 4,40 x (1 + 0,0233) = 4,30 x 1,0233 = R$ 4,40.

A tarifa passou de R$ 4,30 para R$ 4,40 após o segundo aumento.

5. Agora é sua vez: crie uma situação-problema que envolva a aplicação de percentuais de acréscimos e repasse ao seu colega de turma para resolvê-la.

Resposta: Espera-se que o estudante utilize estratégias diferenciadas para elaborar a situação-problema, relacionando o enunciado a propagandas de compras à vista ou a prazo.

6. Agora, depois de trocar as situações elaboradas, resolva a situação que recebeu. Registre, aqui, a forma de resolução:

Resposta: Espera-se que o estudante descreva os procedimentos de resolução e avalie o resultado.

AULAS 5 E 6 - PORCENTAGEM E DECRÉSCIMOS

Objetivos da aula:
- Resolver e elaborar situações-problema em contextos que envolvam aplicação de decréscimo.

Nestas aulas, vamos resolver situações de educação financeira no contexto de alguns impostos que envolvem cálculo de decréscimos simples.

1. O imposto INSS (Instituto Nacional do Seguro Social) é descontado da folha de pagamento do trabalhador, de acordo com a faixa de salário, como podemos verificar na tabela a seguir:

Alíquotas para trabalhadores do setor privado (INSS)	
Salário Contribuição	Alíquota
Até um salário mínimo (R$ 1.100,00)	7,5%
A partir de R$ 1.100,01 até R$ 2.203,45	9%
A partir de R$ 2.203,49 até R$ 3.305,22	12%
A partir de R$ 3.305,23 até R$ 6.433,57*	14%
*Teto do INSS	

Fonte: Secretaria de previdência, Ministério da Economia

O novo cálculo INSS é calculado seguinte os seguintes passos:

1) Identificar a faixa salarial do funcionário;

Exemplo: R$ 2.500,00.

2) Retirar a alíquota aplicada à faixa salarial até chegar ao valor do salário do funcionário;

Exemplo: 1ª faixa: R$ 1.100,00 x 7,5% = R$ 82,50.

2ª faixa: R$ (2.203,48 – 1.100,00) x 9% = 1.103,48 x 0,09 = 99,31.

AULAS 5 E 6 - PORCENTAGEM E DECRÉSCIMOS

OBJETIVO DAS AULAS

Resolver e elaborar situações-problema em contextos de educação financeira que envolvam aplicação de decréscimo.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes sentados individualmente, respeitando os protocolos de higiene e o distanciamento social, com as carteiras dispostas em "U", ou, se possível, organize-os em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante, lápis, caneta, borracha e calculadora.

INICIANDO

Inicie essa aula apresentando seu objetivo: "resolver e elaborar situações-problema em contextos de que envolvam aplicação de decréscimos". Retome, com os estudantes, a ideia de acréscimos estudada nas aulas anteriores, ressaltando o cálculo do valor principal vezes o fator multiplicativo.

Sugerimos que, por meio de questionamentos, levante os conhecimentos prévios que os estudantes já têm em relação ao tema. Por exemplo, pergunte: "O que vocês entendem quando escutam as frases: 'comprei meu celular com desconto de 15%', 'pagando o boleto antecipadamente tenho um desconto de 10%'?". Peça para que eles exemplifiquem situações financeiras relacionadas a decréscimos. Explique que, nos enunciados de situações-problema, podem aparecer termos como: percentual de desconto, taxa de desconto ou decréscimo e taxa percentual de desconto ou decréscimo, e que eles representam uma diminuição do valor principal. Se achar conveniente, explique o que são e para que servem os impostos.

DESENVOLVENDO

Com o Caderno do Estudante em mãos, peça para os estudantes se atentarem às formas como enunciados das situações-problema são apresentados na **Atividade 1**. É importante que eles reconheçam, no contexto do imposto INSS (Instituto Nacional do Seguro Social) que é descontado do valor do salário, a ideia de decréscimo como valor a ser diminuído do valor principal.

3) Quando chegar a faixa salarial correspondente ao salário do funcionário, deve-se subtrair o valor da faixa salarial em questão e aplicar a alíquota;

Exemplo: 3ª faixa: R$ (2.500,00 – R$ 2.203,49) x 12% = R$ 296,51 x 0,12 = R$ 35,58

4) Somar todos os valores para descobrir a porcentagem de desconto do INSS e dividir o valor pelo salário para descobrir a alíquota efetiva.

Exemplo: R$ 82,50 + R$ 99,31 + R$ 35,58 = R$ 217,29.

a. Calcule o valor de desconto do imposto do exemplo anterior, ou seja, um salário de R$ 2.500,00, pela regra antiga, que apenas calculava o percentual da faixa sobre o valor inteiro do salário, sem separá-lo por faixa.

Resposta: De acordo com o cálculo do imposto utilizado pela regra anterior, o salário dado como exemplo, de R$ 2.500,00, representaria o desconto direto da 3º faixa, ou seja, R$ 2.500,00 x 12% = R$ 300,00. Assim, o desconto do imposto INSS seria de R$ 300,00.

b. Compare o valor a ser descontado pela nova regra, ou seja, por faixas, com o valor do desconto do imposto utilizado na regra antiga, calculado no item (a).

Resposta: O valor do desconto do imposto calculado pela regra utilizada anteriormente no item (a) é de R$ 300,00, e o valor do desconto do imposto calculado no exemplo pela nova regra é de R$ 217,29. Ou seja, o desconto do imposto é menor pela nova regra.

c. Represente na forma de porcentagem o valor do desconto do imposto utilizado na forma atual de desconto e compare com a porcentagem de desconto utilizado na regra anterior.

Resposta: Usando a fração parte do todo, temos:

$\frac{parte}{todo} = \frac{217{,}29}{2500}$ **= 0,0869 ≈ 8,69.**

Logo, o valor do desconto do imposto calculado na forma atual representa 8,69%. Comparando com regra utilizada anteriormente no item (a), o desconto de R$ 300,00 representa 12%. Conclui-se que, pela nova regra, o valor do desconto do imposto de R$ 217,29 é menor que o da regra antiga.

d. Qual o valor de desconto em folha de pagamento de um trabalhador da primeira faixa, ou seja, que ganha R$ 1.100,00?

Resposta: 1.100 x 7,5%, ou 1.100 x $\frac{7{,}5}{100}$ ou 1.100 x 0,075. Total do desconto R$ 82,50.

e. Rita é uma trabalhadora do comércio que ganha R$ 1.200,00. Ela pagará 7,5% sobre R$ 1.100,00 e mais 9% sobre o restante de seu salário, ou seja 9% de R$100,00. Qual o valor total da contribuição do INSS de Rita?

Resposta:

1ª faixa: 7,5% de R$ 1.100,00, ou seja, 1.100 x 7,5% = R$ 82,50,

2ª faixa: 9% do restante do salário de Rita (1200 – 1.100 = 100), ou seja, 9% de 100, 100 x 0,09% = 9,00

Total da contribuição: 82,50 + 9,00 = 91,50.

f. A figura a seguir representa o comprovante de pagamento de um motorista que ganha R$ 1.800,00 de salário e paga R$145,00 de contribuição ao INSS.

ABC Comércio Ltda Rua do Bairro, 01 CNPJ: 04.123.875/0001-12			RECIBO DE PAGAMENTO DE SALÁRIO Referente ao mês de março/2021	
Código 2	Nome do funcionário		C.C: CBO: 7823-10 28 Motorista	
CÓDIGO	DESCRIÇÕES	REFERÊNCIAS	PROVENTOS	DESCONTOS
5 9101	Salário Mensalista I.N.S.S	30,00	1.800,00	145,50
		Totais	1.800,00	145,50
			SALÁRIO LÍQUIDO	R$ 1.654,50

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Usando a tabela de alíquotas de contribuição do INSS, descrimine os valores e porcentagens usados para o cálculo do desconto da contribuição desse trabalhador.

Resposta: Como o trabalhador ganha R$ 1.800,00, contribui em duas faixas, a primeira de 7,5%, e a segunda de 9%.

1ª faixa: 7,5% de R$ 1.100,00, ou seja, 1.100 x 7,5% = R$ 82,50, subtraindo esse valor do total de 145,50, temos R$ 63,00 que representam 9% da diferença do salário total (1800 – 100 = 700), ou seja, R$ 700,00. Logo, 9% de 700, 700x 0,09 = 63,00.

Total da contribuição: 82,50 + 9,00 = 145,50.

Na **Atividade 2**, eles devem perceber que o cálculo prático, valor principal vezes fator multiplicativo, também pode ser aplicado para decréscimos ou descontos. Ou seja, basta trocar o sinal de + pelo sinal de -, valor principal x (1 - decréscimo).

2. Além de calcular porcentagens de um valor, podemos determinar quanto vale um decréscimo ou desconto, por exemplo:

Taxa de desconto: 40% = 40/100 = 0,40 = 0,4.

Fator de multiplicação = 1 - taxa de decréscimo.

Fator de multiplicação = 1 - 0,4 = 0,6.

Complete a tabela a seguir e verifique que cálculo prático é dado pelo produto do valor principal com o fator multiplicativo (1 - decréscimo).

Valor principal	Decréscimo ou taxa de desconto	Valor do decréscimo	Valor após o decréscimo	Fator de multiplicação (1- taxa de desconto)	Valor principal x fator de multiplicação
300	40%	300 x 0,40 = 120	180	(1- 0,40)	300 x 0,6 = 180
700	30%	700 x 0,30 = 210	490	(1 - 0,30)	700 x 0,7 = 490
435	72%	435 x 0,72 = 313,20	121,80	(1 - 0,72)	435 x 0,28 = 121,80
78	35%	78 x 0,35 = 27,30	50,7	(1 - 0,35)	78 x 0,65 = 50,7
590	25%	590 x 0,25 = 147,50	442,50	(1 - 0,25)	590 x 0,75 = 442,50
52	65%	52 x 0,65 = 33,80	18,20	(1 - 0,35)	52 x 0,65 = 33,80
3410	10%	3410 x 0,10 = 341	3069	(1 - 0,90)	3410 x 0,1 = 3069
26	50%	26 x 0,50 = 13	13	(1 - 0,50)	26 x 0,5 = 13

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

3. Observe o anúncio de uma loja.

Fonte: Pixabay.

Qual o preço desse notebook à vista?

Resposta: Usando o dispositivo prático:

1699 x (1-0,20) = 1699 x 0,80 = 1359,20, ou seja, o valor do notebook à vista é R$ 1.359,20.

4. Maria Rita recebeu um aumento de 30% sobre o seu salário de R$ 3.800,00. Sendo assim, o desconto do imposto de renda, que era de 22,5%, passou a ser de 27,5%.

a. Quanto Maria Rita recebia de salário após o desconto de imposto de renda de 22,5%?

Resposta: 3800 x (1- 0,225) = 3800 x 0,775 = 2945, ou seja, com o desconto do imposto de renda de 22,5%, Maria Rita recebia de salário R$ 2.945,00.

b. Qual o valor do novo salário de Maria Rita?

Resposta: 3800 x (1+0,30) = 3800 x 1,30 = 4940. Ou seja, com o aumento de 30%, Maria Rita passará a receber R$ 4.940,00.

c. Qual o valor que Maria Rita passou a receber a partir do aumento e descontado o novo imposto de renda?

Resposta: 4940 x (1 – 0,275) = 4940 x 0,725 = 3581,50. Ou seja, com o desconto de 27,5% de imposto de renda, Maria Rita terá de salário R$ 3.581,50.

Na **Atividade 3**, é proposta uma situação-problema que envolve percentual de decréscimo quando se conhece o valor principal. Na **atividade 5**, os estudantes terão a experiência de elaborar uma situação-problema, construindo o conhecimento para articular o texto do enunciado, os dados, as operações envolvidas e a solução.

FINALIZANDO

Espera-se que, ao final das Aulas 5 e 6, os estudantes já tenham se apropriado da operacionalização do fator multiplicativo que envolve decréscimo no contexto financeiro. Finalize as aulas construindo com a turma uma breve síntese oral. Quando os estudantes socializarem o que absorveram na aula, peça que registrem por escrito, por meio de figuras ou mapas mentais.

Caso observe a existência de estudantes que ainda não tenham se apropriado do que foi proposto nesse estudo ou que queiram se aprofundar nos objetos de conhecimento matemático desenvolvidos nessas aulas, sugerimos plataformas digitais de estudos.

Na **Atividade 5**, verifique se os estudantes, por meio da criação de seus próprios enunciados, organizaram os conhecimentos adquiridos. Neste momento, é importante observar se os estudantes estão montando a resolução de forma correta, se estimam o resultado e se os procedimentos com as operações com números decimais estão corretos.

AULAS 7 E 8 – SITUAÇÕES – PROBLEMA ENVOLVENDO ACRÉSCIMOS E DECRÉSCIMOS

OBJETIVO DAS AULAS

Resolver situações-problema no contexto de educação financeira, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes sentados individualmente, respeitando os protocolos de higiene e o distanciamento social, com as carteiras dispostas em "U" ou, se possível, organize-os em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante, lápis, borracha e calculadora.

5. Agora é sua vez, crie uma situação-problema que envolva a aplicação de percentuais de decréscimos ou desconto e repasse ao seu colega de turma.

Resposta: Espera-se que o estudante utilize estratégias diferenciadas para elaborar a situação-problema, relacionando o enunciado a propagandas de compras à vista com desconto, imposto retido na fonte, etc.

Agora, depois de trocar as situações elaboradas, resolva a situação que recebeu.

Registre aqui a forma de resolução:

Resposta: Espera-se que o estudante descreva os procedimentos de resolução e avalie o resultado.

AULAS 7 E 8 – SITUAÇÕES–PROBLEMA ENVOLVENDO ACRÉSCIMOS E DECRÉSCIMOS

Objetivos da aula:
- Resolver situações problema no contexto de educação financeira, preferencialmente.

Nestas aulas, vamos resolver situações de educação financeira que envolvem cálculo de percentuais sucessivos com ou sem o uso de tecnologias digitais.

1. Juliana vende caneca recheada de bolo de maçã, cenoura ou chocolate, todos com cobertura de chocolate, para complementar a renda de sua família. Ela vende cada caneca com o bolo por R$20,00. Suas anotações estão na tabela a seguir:

a. Calcule o custo total, o preço total de venda e a porcentagem de lucro de cada item que Juliana usa para compor a caneca recheada de bolo de cenoura, e a porcentagem do preço de venda sobre o preço de custo, conforme tabela a seguir:

Cálculo da margem de lucro

1. Determine o lucro (subtraia as despesas do custo do produto)

2. Divida o lucro bruto pela receita.

3. Multiplique o resultado por 100 para chegar a uma porcentagem.

INICIANDO

Inicie essa aula, apresentando o objetivo das aulas: "resolver situações-problema, no contexto de educação financeira, no formato de avaliações oficiais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais". Retome, com os estudantes, o conceito de acréscimos e decréscimos. Explique, aos estudantes, que essas duas últimas aulas são uma excelente oportunidade para a troca de experiências sobre a resolução de problemas em que a leitura, a interpretação, o raciocínio lógico, a revisão de estratégias e a verificação da solução encontrada serão solicitadas nas atividades propostas, pois foram retidas de avaliações oficiais.

Planilha: Bolo de cenoura			
Material	Custo	Preço de venda	Porcentagem de lucro
Caneca	R$ 11,50	R$ 15,00	$\frac{15-11,5}{11,5}$ = 0,3043 ou 30,43%
Bolo de cenoura	R$ 2,00	R$ 3,00	$\frac{3-2}{2}$ = 0,3043 ou 30,43%
Cobertura de chocolate	R$ 0,50	R$ 1,00	$\frac{1-0,5}{0,5}$ =1 ou 100,00%
Embalagens	R$ 1,50	R$ 2,50	$\frac{2,5-1,5}{0,5}$ = 0,6667 ou 66,67%
Total Custo	R$ 15,50		
Total de preço de venda		R$ 21,50	
Total porcentagem de lucro			$\frac{21,5-15,5}{15,5}$ = 0,3871 ou 38,71%

b. Calcule o custo total, o preço total de venda e a porcentagem de lucro de cada item que Juliana usa para compor a caneca recheada de bolo de maçã, e a porcentagem do preço de venda sobre o preço de custo, conforme tabela a seguir:

Planilha: Bolo de maçã			
Material	Custo	Preço de venda	Porcentagem de lucro
Caneca	R$ 11,50	R$ 15,00	$\frac{15-11,5}{11,5}$ = 0,3043 ou 30,43%
Bolo de maçã	R$ 2,80	R$ 4,00	$\frac{4-2,80}{2,80}$ = 0,4286 ou 42,86%
Cobertura de chocolate	R$ 0,50	R$ 1,00	$\frac{1-0,5}{0,5}$ = 1 ou 100,00%
Embalagens	R$ 1,50	R$ 2,50	$\frac{2,5-1,5}{1,5}$ = 0,6667 ou 66,67%
Total Custo	R$ 16,30		
Total Preço de venda		R$ 22,50	
Total porcentagem de lucro			$\frac{22,50-16,30}{16,30}$ = 0,3804 ou 38,04%

DESENVOLVENDO

Com o Caderno do Estudante em mãos, comente, com os estudantes, a respeito dos acréscimos e decréscimos e sua relação com a educação financeira no contexto cotidiano. Oriente-os a estarem atentos aos enunciados das situações-problema apresentadas nas quatro atividades contidas nessas aulas, pois estas exigirão os conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores.

Na **Atividade 1**, espera-se que os estudantes verifiquem os custos e preço de venda e lucro (preço de venda - custos) e, se possível, organizem esses dados em uma planilha eletrônica. É importante destacar, para os estudantes, que a planilha eletrônica apenas executa uma fórmula predeterminada; as soluções e procedimentos para resolução da atividade é esperada deles.

FINALIZANDO

Finalize essa Sequência de Atividades, construindo, com a turma, uma breve síntese oral. Quando os estudantes socializarem o que absorveram na aula, peça que registrem por escrito, por meio de figuras ou mapas mentais.

Caso apareçam resultados divergentes, discuta com a turma o que pode ter ocorrido e proponha alguma tarefa similar, a fim de esclarecer dúvidas. Caso queiram se aprofundar nos objetos de conhecimento matemático desenvolvidos nessas aulas, sugerimos as plataformas digitais de estudos.

c. Calcule o custo total, o preço total de venda e a porcentagem de lucro de cada item que Juliana usa para compor a caneca recheada de bolo de chocolate, e a porcentagem do preço de venda sobre o preço de custo, conforme tabela a seguir:

Planilha: Bolo de chocolate			
Material	Custo	Preço de venda	Porcentagem de lucro
Caneca	R$ 11,50	R$ 15,00	$\frac{15-11,5}{11,5}$ = 0,3043 ou 30,43%
Bolo de chocolate	R$ 3,20	R$ 4,50	$\frac{4,50-3,20}{3,20}$ = 0,4063 ou 30,43%
Cobertura de chocolate	R$ 0,50	R$ 1,00	$\frac{1-0,5}{0,5}$ = 1 ou 100,00%
Embalagens	R$ 1,50	R$ 2,50	$\frac{2,5-1,5}{1,5}$ = 0,6667 ou 66,67%
Total Custo	R$ 16,70		
Total Preço de venda		R$ 23,00	
Total porcentagem de lucro			$\frac{23-16,70}{16,70}$ = 0,3772 ou 37,72%

Em qual sabor Juliana obtém maior lucro?

Resposta: Para saber qual sabor Juliana obterá maior lucro, devemos subtrair o custo do preço de venda de cada sabor:

cenoura: R$21,50 – R$15,50 = R$ 6,00;

maçã: R$22,50 - R$ 16,30 = R$ 6,20;

chocolate: R$ 23 - R$16,70 =R$ 6,30.

Logo, o sabor que Juliana obterá maior lucro é o de chocolate que é maior valor.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

ANOTAÇÕES

1º ANO - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

OLÁ, PROFESSOR!

Espera-se que o estudante possa, ao final desta Sequência de Atividades, e por meio de intervenção pedagógica com uso de alguns materiais manipuláveis, demonstrar, conhecer e se familiarizar com as relações métricas no triângulo retângulo, levando em conta o Teorema de Pitágoras, inclusive a semelhança de triângulos, não somente em sala de aula, mas de forma híbrida, possibilitando a aprendizagem em qualquer ambiente.

A escolha das habilidades foram feitas por meio de análises realizadas dos resultados das avaliações ADE (Avaliação Diagnóstica de Entrada/2019) e SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), que revelaram fragilidades dos estudantes com relação às habilidades que seguem e devem ser desenvolvidas considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração, para que os estudantes desenvolvam as habilidades: (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos; (EF09MA14) Resolver e elaborar situações-problema de aplicação do teorema de Pitágoras.

<table>
<tr><th>AULA</th><th>DURAÇÃO</th><th>PROPOSIÇÃO</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">90 min</td><td rowspan="2">O triângulo retângulo e seus elementos</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2">90 min</td><td rowspan="2">Ralações métricas no triângulo retângulo</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="2">90 min</td><td rowspan="2">Teorema de Pitágoras</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="2">90 min</td><td rowspan="2">Aplicação do Teorema de Pitágoras</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
</table>

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

AULAS 1 E 2 – O TRIÂNGULO RETÂNGULO E SEUS ELEMENTOS

Objetivos das aulas:
- Reconhecer o triângulo retângulo e seus elementos.

O triângulo retângulo é um polígono que possui dois ângulos agudos e um ângulo reto.

1. No plano cartesiano a seguir, vamos construir um triângulo e marcar os seus elementos:

a. **Vértices:** marque três pontos distintos, ponto A (0,0), ponto B (3,0) e ponto C (0,4).

b. **Lados:** trace um segmento de reta entre os pontos A e B, B e C, A e C. Nomeie os lados da figura.

Lado a oposto ao Vértice A.

Lado b oposto ao Vértice B.

Lado c oposto ao Vértice C.

Cada lado do triângulo é nomeado de acordo com o vértice oposto a ele.

Ângulos:

O ângulo $\hat{A}$ é formado pelos lados ____________ e __________

O ângulo $\hat{B}$ é formado pelos lados ____________ e __________

O ângulo $\hat{C}$ é formado pelos lados ____________ e __________

Resposta:
O ângulo Â é formado pelos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.
O ângulo B̂ é formado pelos lados $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$.
O ângulo Ĉ é formado pelos lados $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$.
BOX para contornar respostas de marcar

AULAS 1 E 2 – O TRIÂNGULO RETÂNGULO E SEUS ELEMENTOS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes sentados individualmente, respeitando os protocolos de higiene e o distanciamento social, com as carteiras dispostas em "U" ou, se possível, organize-os em duplas produtivas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante, transferidor, palitos de churrasco, fita adesiva, régua e tesoura.

INICIANDO

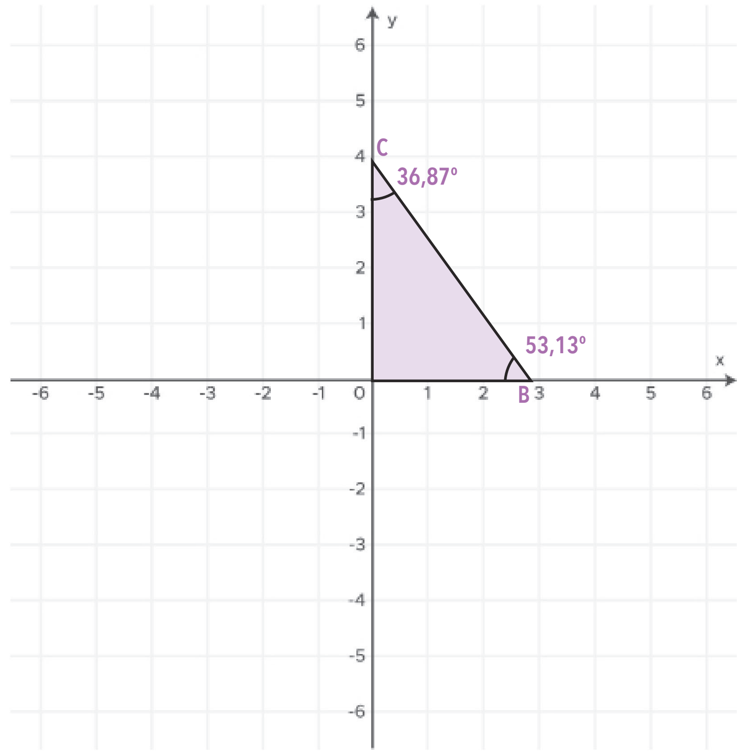
Professor, inicie uma conversa com os estudantes explicando quais são os objetivos das Aulas 1 e 2, ou seja, reconhecer que o triângulo retângulo é um polígono que possui dois ângulos agudos e um ângulo reto. Apresente à turma algumas informações relacionadas à classificação de triângulos quanto aos lados e ângulos e sobre soma de seus ângulos internos. Discuta sobre a importância de se ter contato sobre esse tema como conhecimento prévio para introdução do Teorema de Pitágoras. Lembre-se de falar dos triângulos quanto a seus ângulos, do quão é importante reconhecer um triângulo retângulo tanto pela construção geométrica da figura, como pelos ângulos internos. Investigue o que os alunos sabem sobre o tema. Questione, por exemplo, se conhecem termos como lados, vértice, ângulo reto, cateto, hipotenusa, entre outros.

DESENVOLVENDO

Com o Caderno do Estudante em mãos, peça para eles observarem como nomear os pontos (vértices) e os segmentos de reta (lados) que aparecem na **Atividade 1**. Nas **Atividades 2** e **3**, inicialmente, resgate o conceito a que os estudantes chegaram na atividade anterior, converse com eles e informe-os que essa atividade será uma continuação da primeira. Serão trabalhados o reconhecimento visual, a relação entre os ângulos e a posição dos lados do triângulo retângulo como introdução ao Teorema de Pitágoras, tema das próximas aulas. Atente-os para o reconhecimento da hipotenusa de um triângulo retângulo dada a sua representação figural, seus lados ou ângulos na tabela 4 da **Atividade 3**, para que ela seja preenchida com muita atenção.

FINALIZANDO

Retome as ideias que os estudantes levantaram no início das aulas, podendo ser oralmente. Quando os estudantes socializarem o que compreenderem da aula, peça que registrem por escrito, por representação, por meio de figuras ou mapas mentais. Para finalizar, realize a correção coletiva das resoluções, principalmente no reconhecimento de um triângulo que apresenta em um dos seus ângulos o valor de 90°, verificando se os estudantes conseguiram atingir o objetivo de reconhecer um triângulo retângulo por meio da representação da figura e pelas medidas dos ângulos internos ou lados. Caso apareçam resultados divergentes, discuta com a turma o que pode ter ocorrido e proponha alguma tarefa similar, a fim de esclarecer possíveis dúvidas.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Agora, vamos classificar o triângulo construído: usando um transferidor, determine o valor de cada ângulo do triângulo construído.

ângulo $\hat{A}$ 90 graus.

ângulo $\hat{B}$ 53,13 graus.

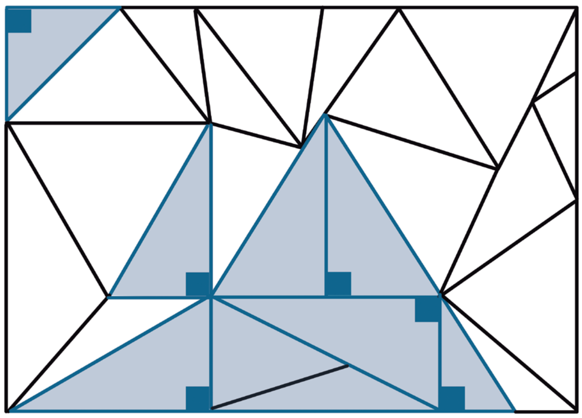
ângulo $\hat{C}$ 36,87 graus.

Os triângulos retângulos são aqueles que apresentam um dos seus ângulos com 90°.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

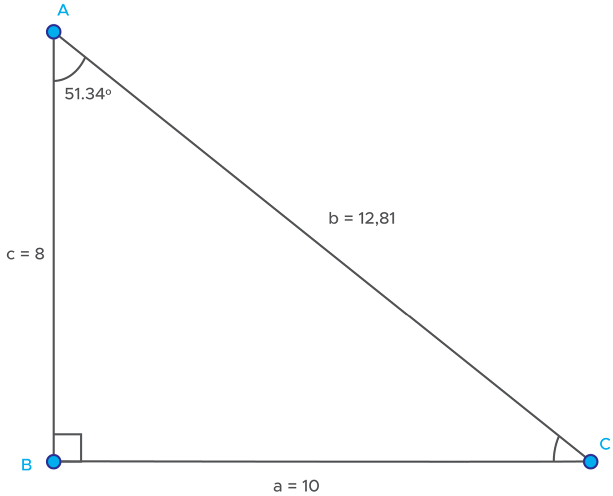
Professor, na atividade 1, se não for possível a utilização do transferidor para medir os ângulos, demonstre a medição com o transferidor de professor no quadro, para que os estudantes anotem os valores e identifiquem o triângulo retângulo.

2. No mosaico a seguir, pinte somente os triângulos retângulos:



3. Dados os triângulos retângulos a seguir, preencha os quadros 1 e 2 referentes ao triângulo ABC e quadros 3 e 4 referentes ao triângulo DEF.

Triângulo ABC



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, os triângulos terão as medidas dos seus ângulos e lados indicados para facilitar os cálculos e a exploração das medidas. Os alunos deverão preencher as tabelas dos triângulos retângulos ABC e DEF, Medidas dos ângulos e Medidas dos lados.

Quadro1: medidas dos ângulos e lados do triângulo ABC.

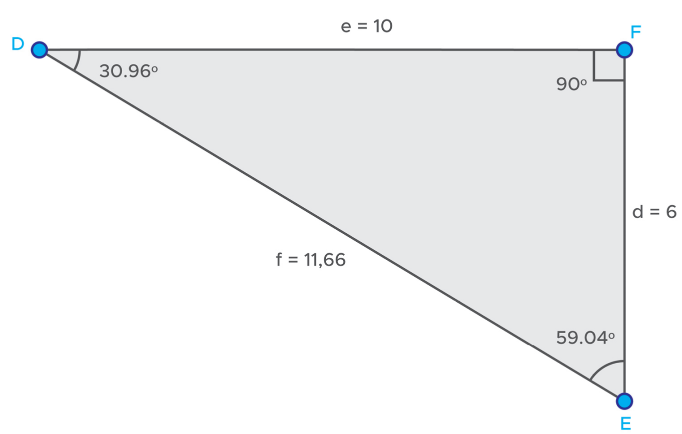
Triângulo	Medidas dos ângulos			Medidas dos Lados		
	Ângulo $\hat{A}$	Ângulo $\hat{B}$	Ângulo $\hat{C}$	Lado a	Lado b	Lado c
ABC	51,34°	90°	38,66°	10	12,81	8

Quadro 2: Medidas e soma dos ângulos do triângulo ABC

Triângulo	Medidas dos ângulos		
	Ângulo $\hat{A}$	Ângulo $\hat{C}$	Soma das medidas dos ângulos
ABC	51,34°	38,66°	90°

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, e num triângulo retângulo temos um ângulo reto, então a soma dos outros dois ângulos será 90°.

Triângulo DEF



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Quadro 3: medidas dos ângulos e lados do triângulo DEF

Triângulo	Medidas dos ângulos			Medidas dos Lados		
	Ângulo $\hat{D}$	Ângulo $\hat{E}$	Ângulo $\hat{F}$	Lado d	Lado e	Lado f
DEF	30,96°	59,04°	90°	6	10	11,66

Quadro 4: hipotenusa do triângulo DEF

No triângulo retângulo DEF.

Qual é o maior lado?

O lado f com 11,66.

Qual o lado que fica oposto ao maior ângulo?

O lado $\overline{DE}$ ou lado f.

Então, o lado que representa a hipotenusa é:

O lado $\overline{DE}$ ou lado f.

Num triângulo retângulo o lado com a maior medida é oposto ao ângulo de 90°. Esse lado recebe o nome de hipotenusa.

ANOTAÇÕES

AULAS 3 E 4 – TEOREMA DE PITÁGORAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes sentados individualmente, respeitando os protocolos de higiene e o distanciamento social, com as carteiras dispostas em "U" ou, se possível, organize-os em duplas produtivas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante, lápis e borracha.

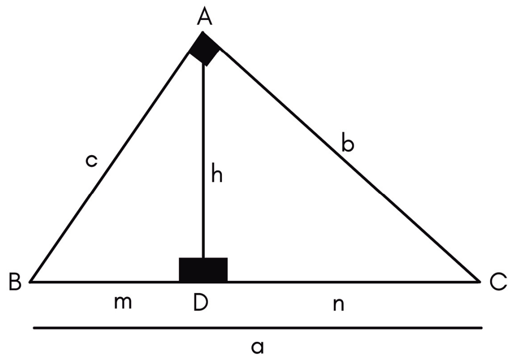
INICIANDO

Inicie uma conversa explicando para os estudantes que darão continuidade aos estudos em relação aos elementos do triângulo retângulo e que as Aulas 3 e 4 têm como objetivo reconhecer relações métricas no triângulo retângulo. Apresente à turma algumas informações relacionadas à proporção entre lados e à semelhança de triângulos e mostre a importância de se ter contato sobre esse assunto para demonstração e entendimento das relações métricas no triângulo retângulo.

AULAS 3 E 4 – RELAÇÃO MÉTRICA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Objetivos das aulas:
- Demostrar as relações métricas no triângulo retângulo.

1. A figura a seguir contém três triângulos retângulos semelhantes, com ângulos retos em $\hat{A}$ e $\hat{D}$.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Observe a figura e complete os quadros:

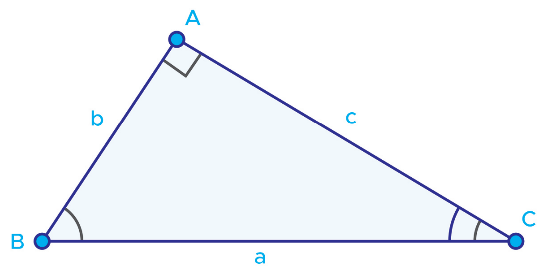
Triângulo	Lados	Ângulo reto
ABC	a, b,c	$\hat{A}$
ADC	n,b,h	$\hat{D}$
ABD	m,h,c	$\hat{D}$

Triângulo	Hipotenusa	Cateto	Cateto
ABC	a	b	c
ADC	b	n	h
ABD	c	h	m

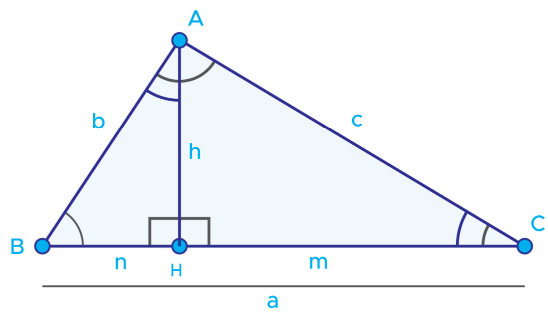
DESENVOLVENDO

Com o Caderno do Estudante em mãos, explique para os estudantes que, na **Atividade 1**, eles vão reconhecer os lados e ângulos do triângulo retângulo. Na **Atividade 2**, será desenvolvida a relação existente entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, a relação existente entre as medidas do cateto, sua projeção e a hipotenusa, a relação entre as medidas da hipotenusa, altura e os catetos e a relação entre as medidas da altura, e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Esta atividade será muito importante para o desenvolvimento das próximas quatro atividades, que consistem em aplicar as relações métricas do triângulo retângulo que deman-

2. Para encontrar as relações métricas no triângulo retângulo, vamos usar os triângulos ABC e ABD e ADC semelhantes, representados nas figuras a seguir.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Para isso, vamos considerar:

a: medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo de 90º).
b: cateto.
c: cateto.
h: altura relativa à hipotenusa.
m: projeção do cateto c sobre a hipotenusa.
n: projeção do cateto b sobre a hipotenusa.

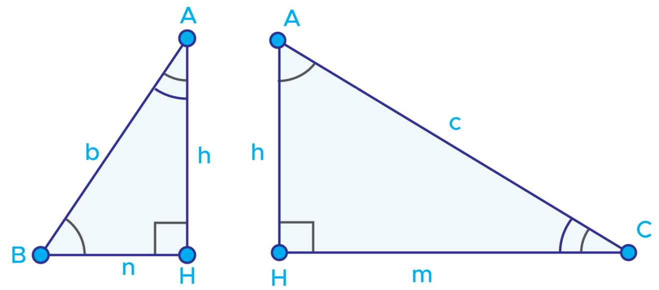
(I) No triangulo retângulo ABC, a medida da hipotenusa a é igual a soma das medidas das projeções dos catetos m e n, ou seja, então a = m+ n..

FINALIZANDO

Finalize as aulas 3 e 4 elaborando com toda a turma uma breve síntese, podendo ser realizada oralmente. Para finalizar, realize a correção das **Atividades 3 e 4**, cuja solução compreende uma aplicação direta das relações. Quando os estudantes socializarem o que compreenderam na aula, peça que façam um registro por meio de figuras ou mapa mental. Discuta com a turma e proponha outras atividades, caso observe a necessidade de estudantes que ainda não tenham se apropriado do que foi proposto nestas aulas ou que queiram se aprofundar nos objetos de conhecimento discutidos.

dam do estudante associações entre duas ou mais relações métricas. Atente-os para as **Atividades 4 e 5**, em que será necessário um esboço da representação de um triângulo retângulo no apoio à resolução das atividades.

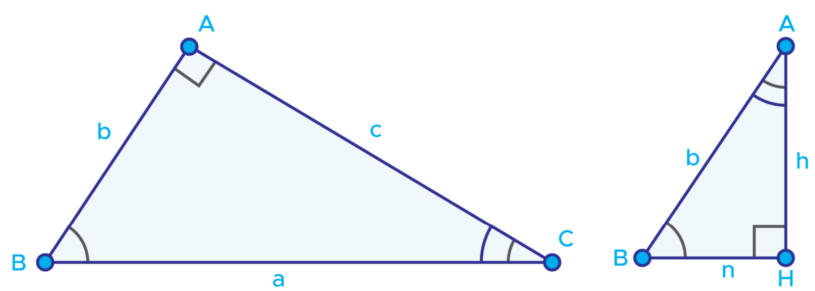
Para extrair algumas propriedades, vamos separar os triângulos:



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

II) Os triângulos ABC e HBA são semelhantes. Encontre a proporção entre seus lados e verifique a afirmação:

O quadrado da medida do cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção do cateto sobre ela. Em outras palavras, $b^2 = a.n$.



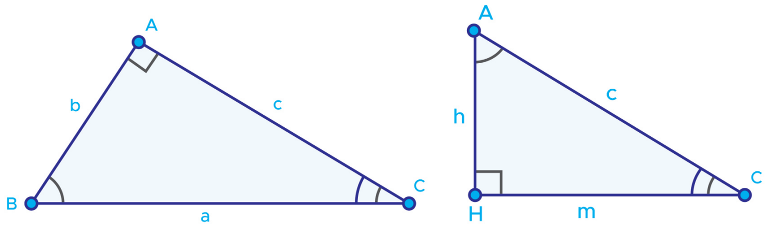
Fonte: Elaborado para fins didáticos.

A razão entre a medida da hipotenusa a e a medida do cateto b no triângulo ABC é igual a razão entre a medida da hipotenusa b e a medida do cateto n do triângulo HBA. Logo, temos:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$ Então, $b^2 = a \cdot n$.

(III) Os triângulos ABC e AHC são semelhantes. Encontre a proporção entre seus lados e verifique a afirmação:

O quadrado da medida do cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção do cateto sobre ela. Em outras palavras, $c^2 = a.m$.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

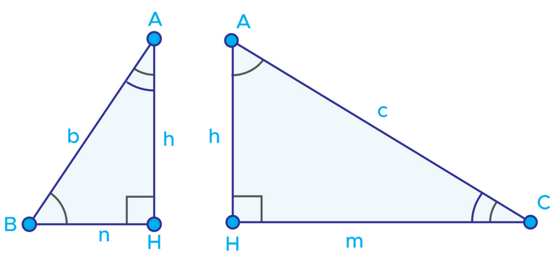
A razão entre a medida da hipotenusa a e a medida do cateto c do triângulo ABC é igual a razão entre a medida da hipotenusa c e a medida do cateto m do triângulo HBA. Logo, temos:

$\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$ Então, $c^2 = a \cdot m$

(IV) Os triângulos ABH e AHC são semelhantes. Encontre a proporção entre seus lados e verifique a afirmação:

O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos sobre a medida da hipotenusa.

Em outras palavras, h2 = m.n.



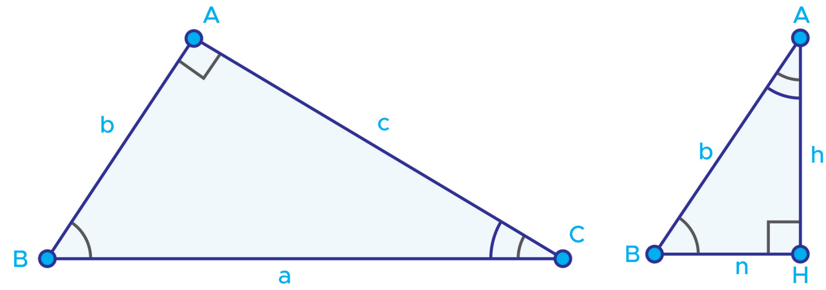
Fonte: Elaborado para fins didáticos.

A razão entre a medida da altura relativa à hipotenusa h e a medida do cateto n do triângulo ABC é igual a razão entre a medida do cateto m e a medida da altura relativa da hipotenusa h do triângulo AHC. Logo, temos:

$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$ Então, $h^2 = m \cdot n$

(V) Os triângulos ABH e ABC são semelhantes. Encontre a proporção entre seus lados e verifique a afirmação:

O produto entre a medida da hipotenusa e a medida da altura relativa a ela é igual ao produto das medidas dos catetos. Em outras palavras, a . h = b . c.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

(II) A razão entre a medida da hipotenusa a e a medida do cateto n do triângulo ABC é igual a razão entre a medida do cateto b e medida da altura relativa da hipotenusa h do triângulo ABH. Logo, temos:

$\frac{a}{c} = \frac{b}{h}$ **Então,** $a \cdot h = b \cdot c$

(VI) Demonstre o teorema de Pitágoras, "o quadrado da hipotenusa é igual à soma do quadrado dos catetos ($a^2 = b^2 + c^2$)", usando a soma de duas relações encontradas anteriormente nos itens (II) e (III):

Somando membro a membro das igualdades dos itens (II) e (III), temos: $b^2 = a . n$ **com** $c^2 = a . m$.

com $c^2 = a \cdot m$.

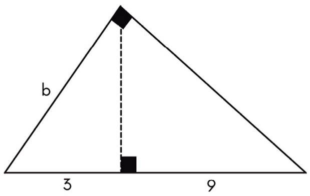
$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$.

$b^2 + c^2 = a \cdot (n + m)$ **- de acordo com o item (I)** $a = m + n$.

$b^2 + c^2 = a \cdot a$.

$b^2 + c^2 = a^2$ **. Isto é, a relação de Pitágoras é válida.**

4. Aplicando as relações métricas nos triângulos retângulos a seguir, determine o valor de b e n:

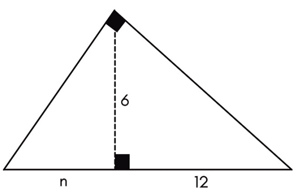


Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Resposta: $b^2 = (3 + 9) \cdot 3 = 36$

$b = \sqrt{36} = \pm 6.$

Como b é uma medida de segmento, então consideramos apenas o valor positivo.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

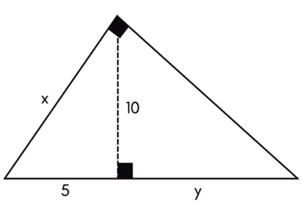
Resposta: $6^2 = n \cdot 12$

$12n = 36$

$n = 3.$

5. A medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é 10 cm e uma das projeções mede 5 cm e forma junto com um cateto x um novo triângulo retângulo. Determine o valor de x

Resposta:



$10^2 = 5 \cdot y$ $\quad x^2 = 25 \cdot 5$

$5y = 100$ $\quad x^2 = 125$

$y = 20$ $\quad x = \sqrt{125} = \pm 5\sqrt{5}$

Como x é uma distância, consideramos $x = 5\sqrt{5}$.

AULAS 5 E 6 – TEOREMA DE PITÁGORAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes sentados individualmente, respeitando os protocolos de higiene e o distanciamento social, com as carteiras dispostas em "U" ou, se possível, organize-os em duplas produtivas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante, lápis, borracha, régua e calculadora.

INICIANDO

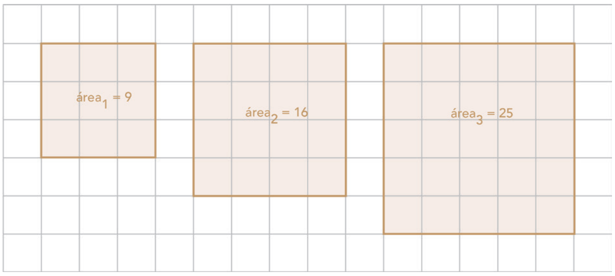
Inicie esta aula apresentando seu objetivo: compreender o Teorema de Pitágoras por meio de sua demonstração geométrica. Retome com os estudantes a importância de compreender a relação entre a medida de comprimento da hipotenusa e dos catetos de um triângulo retângulo, apresentando à turma algumas informações relacionadas ao Teorema de Pitágoras. Converse sobre a importância desse tema ao longo de todo o Ensino Médio.

AULAS 5 E 6 – TEOREMA DE PITÁGORAS

Objetivos das aulas:
- Demonstrar o Teorema de Pitágoras a partir do conceito de área em quadriculações.

O **Teorema de Pitágoras** relaciona o comprimento dos lados do triângulo retângulo (triângulo com ângulo de 90º) da seguinte maneira: **a soma dos quadrados de seus catetos corresponde ao quadrado de sua hipotenusa.**

1. Na malha quadriculada a seguir, cada quadrado representa uma unidade. Construa três quadrados de lados 3, 4 e 5, respectivamente.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Adotando cada quadradinho como uma unidade de área.

a. Determine o valor da área do quadrado de lado 3.

Resposta: espera-se que o estudante conte os 9 quadradinhos do quadrado de lado 3, chegando à área de 9 u², podendo também utilizar a fórmula do cálculo de área do quadrado $A = l^2$, ou seja, $3^2 = 9$ u².

b. Determine o valor da área do quadrado de lado 4.

Resposta: espera-se que o estudante conte os 16 quadradinhos do quadrado de lado 4, chegando à área de 16 u², podendo também utilizar a fórmula do cálculo de área do quadrado $A = l^2$, ou seja, $4^2 = 16$ u².

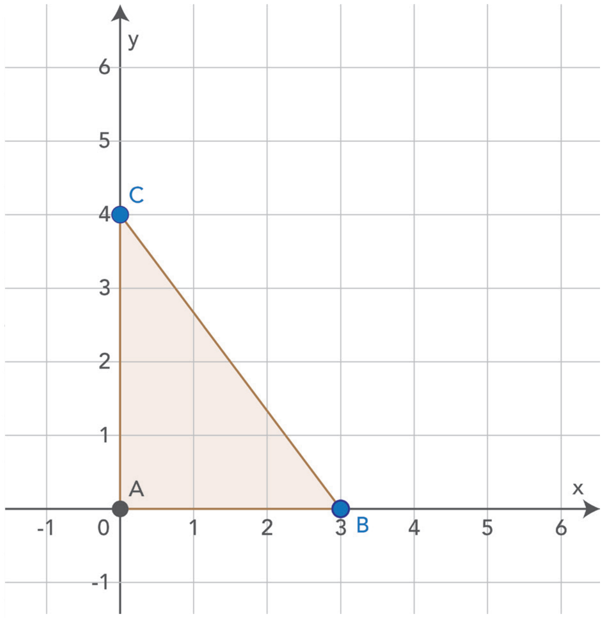
DESENVOLVENDO

Com o Caderno do Estudante em mãos, peça para os estudantes fazerem as construções (com ou sem o uso da tecnologia) com atenção, em que os alunos vão acompanhar a demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras e a aplicação deste teorema em algumas situações-problema nas próximas aulas. Se necessário, revisite a área do quadrilátero, dada a necessidade do cálculo para realização da construção dos quadrados. É importante que os estudantes realizem e registrem os cálculos necessários para a realização da atividade. Certifique-se que os estudantes relacionaram os quadrados construídos com os lados do triângulo retângulo. Se for possível o uso do

c. Determine o valor da área do quadrado de lado 5.

Resposta: espera-se que o estudante conte os 25 quadradinhos do quadrado de lado 5, chegando à área de 25 u², podendo também utilizar a fórmula do cálculo de área do quadrado $A = l^2$, ou seja, $5^2 = 25$ u².

2. No plano cartesiano a seguir, construa um triângulo retângulo e marque os seus vértices por meio dos três pontos distintos: ponto A (0,0), ponto B (3,0) e ponto C (0,4).



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

a. Qual o valor do cateto (lado $\overline{AB}$)?

Resposta: considerando o plano cartesiano, o cateto ou lado $\overline{AB}$ mede 3 unidades.

FINALIZANDO

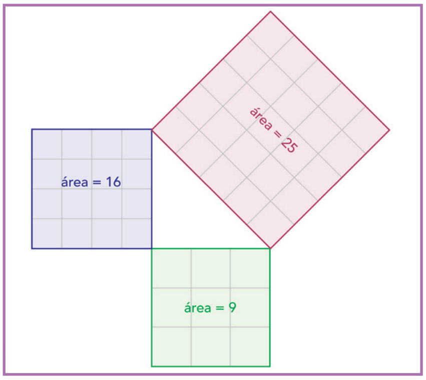
Finalize as Aulas 5 e 6 construindo com toda a turma uma breve síntese, podendo ser realizada oralmente. Quando os estudantes socializarem o que compreenderam na aula, peça que registrem por escrito, por meio de figuras ou mapas mentais. Caso observe a existência de estudantes que ainda não tenham se apropriado do Teorema de Pitágoras ou que queiram se aprofundar nos objetos de conhecimento matemático desenvolvidos nessas aulas, sugerimos o uso de plataformas digitais de estudos.

software de geometria dinâmica, peça para os estudantes construírem um triângulo que não seja triângulo retângulo, repetindo os passos da atividade, e peça para que eles justifiquem oralmente as respostas.

b. Qual o valor do cateto (lado $\overline{AC}$)?

Resposta: considerando o plano cartesiano, o cateto ou lado $\overline{AC}$ mede 4 unidades.

c. Reproduza os quadrados da atividade 1 no plano cartesiano do início da atividade sobre os lados do triângulo retângulo construído da seguinte maneira:



O lado do quadrado de lado 3 sobre o cateto (lado $\overline{AB}$) do triângulo.

O lado do quadrado de lado 4 sobre o (lado $\overline{AC}$) do triângulo.

O lado do Quadrado de lado 5 sobre a hipotenusa (lado $\overline{BC}$) do triângulo.

d. Agora, complete o seguinte quadro referente às áreas dos quadrados:

Área do quadrado 1 construído sobre o cateto $\overline{AB}$	Área do quadrado 2 construído sobre o cateto $\overline{AC}$	Área do quadrado 3 construído sobre a hipotenusa $\overline{BC}$	Soma das áreas dos quadrados 1 e 2 construídos sobre os catetos
9	*16*	**25**	**25**

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

e. Escreva uma expressão matemática entre os valores das áreas dos quadrados:

Resposta: espera-se que o estudante responda $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$, ou a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

f. Complete a seguinte tabela referente aos lados do triângulo ABC:

Medida do cateto $\overline{AB}$	Medida do cateto $\overline{AC}$	Medida da hipotenusa $\overline{BC}$
3	*4*	**5**

g. Explique, com suas palavras, como calculou o valor da hipotenusa BC do triângulo ABC.

Resposta: espera-se que o estudante responda que, de acordo com o triângulo retângulo ABC, depois de construir quadrados sobre os seus lados, se estabelece uma relação entre as medidas dos lados desse triângulo retângulo:

Área 9, lado 3 Área 16, lado 4 Área 25, lado 5

h. De acordo com a respostas anteriores, podemos dizer que, num triângulo retângulo, a medida da área do quadrado, cujo lado corresponde à medida da hipotenusa, é igual à soma das áreas dos quadrados cujo lados correspondem às medidas dos catetos?

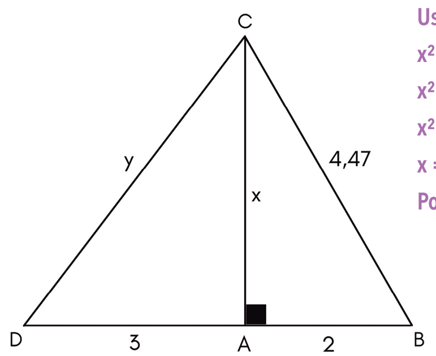
Resposta: espera-se que o estudante responda que sim, que a medida do quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos, verificando, assim, a demonstração do Teorema de Pitágoras utilizando os conceitos de áreas em quadriculações.

AULAS 7 E 8 – APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Objetivos das aulas:

- Resolver e elaborar situações-problema que requerem a aplicação do teorema de Pitágoras

1. Determine o valor de x e y da figura a seguir:



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Resposta:

Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 + 2^2 = (4,47)^2$

$x^2 = 19,98 - 4$

$x^2 = 15,98$

$x = \pm\sqrt{15,98} \cong \pm 3,99,$

Por se tratar do segmento $\overline{AC}$, $x \cong 3,99$.

$y^2 = x^2 + 3^2$, para $x = 3,99$

$y^2 = (3,99)^2 + 9$

$y^2 = 15,92 + 9$

$y^2 = 24,92$

$y = \pm\sqrt{24,92} \cong \pm 4,99$

Por se tratar do segmento CD. $y \cong 4,99$.

AULAS 7 E 8 – APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes sentados individualmente, respeitando os protocolos de higiene e o distanciamento social, com as carteiras dispostas em "U" ou, se possível, organize-os em duplas produtivas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante, lápis, borracha, régua e calculadora.

INICIANDO

Inicie esta aula apresentando os objetivos de aprendizagem: resolver e elaborar situações-problema que requerem a aplicação do Teorema de Pitágoras. Converse sobre a importância do Teorema de Pitágoras ao longo de todo Ensino Médio. Questione, por exemplo, se conhecem termos como "catetos" e "hipotenusa". Verifique a possibilidade de uso da calculadora que, neste momento, suaviza os procedimentos do cálculo de potência e raiz quadrada, permitindo ao estudante se concentrar no processo da resolução das situações propostas. Se não for permitido, outro recurso que poderá ser utilizado é um software de geometria dinâmica que pode ser usado no celular sem o uso da internet, desde que instalado anteriormente.

DESENVOLVENDO

Com o Caderno do Estudante em mãos, comente com os estudantes que as atividades propostas nestas duas aulas consistem em aplicar o Teorema de Pitágoras a algumas situações-problema. Na **Atividade 1**, espera-se que os estudantes relacionem a solução desta questão com o Teorema de Pitágoras. Após esse entendimento, eles deverão calcular o valor de x e y, ou seja, aplicar o Teorema de Pitágoras tanto para determinar o valor de x, como para determinar o valor de y.

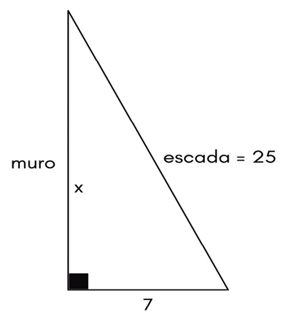
Na **Atividade 2**, que consiste numa adaptação de uma questão de uma avaliação oficial, desmembrada em quatro partes para que o estudante possa relacionar as informações fornecidas no enunciado com os cálculos adequados para a resolução correta. A **Atividade 3** também foi adaptada com a inclusão da figura para ajudar o estudante na construção da resolução correta. A **Atividade 4** está relacionada com uma situação do cotidiano, verificando que as medidas dos tamanhos dos celulares apresentadas pelos seus fabricantes se dão pela proporção da medição da diagonal da tela do aparelho, que é dada em polegadas. Neste momento, é necessária uma conversa sobre conversão de medidas. E finalmente, nas **Atividades 5 e 6** os estudantes terão a oportunidade de verificar essas medições em seus próprios aparelhos.

FINALIZANDO

Finalize essa Sequência de Atividades construindo com toda a turma uma breve síntese, podendo ser realizada oralmente. Quando os estudantes socializarem o que compreenderam da aula, peça que registrem por escrito, por meio de figuras ou mapas mentais. No final deste percurso de aprendizagem, espera-se que os estudantes saibam aplicar o Teorema de Pitágoras em diferentes situações. Caso observe a existência de estudantes que ainda não tenham se apropriado do que foi proposto neste estudo, ou que queiram se aprofundar nos objetos de conhecimento matemático desenvolvidos nestas aulas, sugerimos indicar outras atividades e plataformas digitais de estudos.

2. (Fuvest/SP - adaptado) Uma escada de 25 dm de comprimento se apoia em um muro do qual seu pé dista 7 dm. Se o pé da escada se afastar mais 8 dm do muro, qual o deslocamento verificado pela extremidade superior da escada?

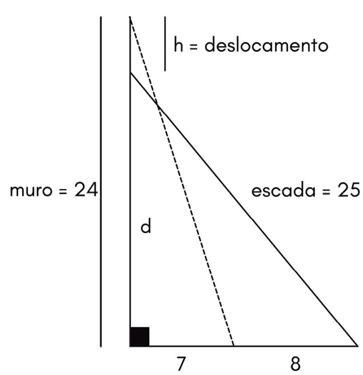
a. Usando o Teorema de Pitágoras, calcule a altura do muro.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Resposta:
Usando o Teorema de Pitágoras, temos:
$d^2 + 7^2 = 25^2$
$d^2 = 625 - 49$
$d^2 = 576$
$d = \pm\sqrt{576} = \pm 24$, por se tratar de distância, $d = 24$ dm.

b. A extremidade inferior da escada deslocou 8 dm, conforme a figura. Qual a distância entre a base do muro e a extremidade inferior da escada?



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Resposta: A distância entre a base do muro e a extremidade inferior da escala é dada por 7 + 8 = 15 dm.

c. Usando o Teorema de Pitágoras, mostre que a distância entre o chão e o ponto em que a escada ficou encostada no muro é de 20 dm.

Resposta: Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$d^2 + 15^2 = 25^2$

$d^2 = 625 - 225$

$d^2 = 400$

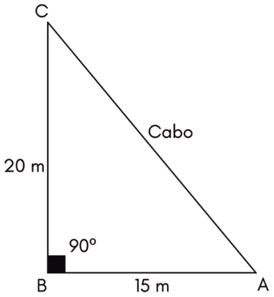
$d = \pm\sqrt{400} = \pm 20$, **por se tratar de distância,** $d = 20$ **dm.**

d. Baseado nos resultados anteriores, calcule o deslocamento h superior da escada.

Resposta: De acordo com os dados anteriores, temos a altura do muro igual a 24 dm. Após o deslocamento da escada, a distância do ponto de apoio no muro até o chão é de 20 dm. Logo 24 – 20 = 4dm.

3. (UFRS) Uma torre vertical é presa por cabos de aço fixos no chão, em um terreno plano horizontal. Se A está a 15m da base B da torre e C está a 20m de altura, comprimento do cabo AC é:

A) 15m B) 20m C) 25m D) 35m E) 40m



Resposta:

O triângulo formado é um triângulo retângulo, em que os catetos medem 15 m e 20 m. Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2$

$(\overline{AC})^2 = 15^2 + 20^2$

$(\overline{AC})^2 = 225 + 400$

$(\overline{AC})^2 = 625$

$(\overline{AC}) = \pm\sqrt{525} = \pm 25$, **por se tratar de distância,** $\overline{AC} = 25$ **metros.**

4. As telas de celulares de qualquer tipo são medidas em polegadas referente à sua diagonal (cada polegada equivale ao sistema internacional de unidades a 2,54 cm).

A figura a seguir representa um celular com 3,4 polegadas de largura e 4,4 polegadas de altura.

Calcule a medida da diagonal desse celular.

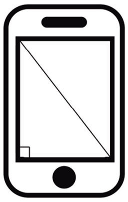


Imagem: Fonte: IO-Images / Pixabay.

Resposta: Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

(Diagonal)² = (Largura)² + (Altura)² (usaremos Diagonal como d)

$d^2 = (3{,}4)^2 + (4{,}4)^2$

$d^2 = 11{,}56 + 19{,}36$

$d^2 = 30{,}92$

$d = \pm\sqrt{30{,}92} \cong \pm 5{,}56$, **por se tratar de distância,** $d \cong 5{,}56$ **polegadas.**

5. Que tal, fazer os cálculos no seu próprio celular? Faça a medição da largura e da altura em centímetros com uma régua. Não esqueça de fazer a transformação de centímetros para polegadas (dividir o valor encontrado por 2,54) para verificar se o valor é o mesmo o que o fabricante anuncia.

Resposta: Espera-se que o estudante use o Teorema de Pitágoras após fazer a medição da altura e largura do celular, e no final do cálculo, faça a transformação de centímetros para polegadas.

6. Agora é sua vez: crie uma situação-problema que envolva a aplicação do Teorema de Pitágoras e troque-a com seu colega de turma.

Resposta: Espera-se que o estudante utilize estratégias diferenciadas para elaborar a situação-problema, relacionando o enunciado da situação à triângulos retângulos onde é necessário o Teorema de Pitágoras para a solução correta.

Agora, depois de trocar as situações elaboradas, resolva a situação que recebeu.

Registre aqui a forma de resolução:

Resposta: Espera-se que o estudante descreva os procedimentos de resolução e avalie o resultado e identifique a medida apresentada pelo fabricante.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

ANOTAÇÕES

1º ANO - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

OLÁ, PROFESSOR!

Espera-se que o estudante possa, ao final dessa Sequência de Atividades, utilizar diferentes estratégias para resolução de situações problemas que possam ser resolvidas por sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. Na Sequência de Atividades, os sistemas de equações do 1º grau serão resolvidos algebricamente e representados no plano cartesiano com ou sem o uso de tecnologias digitais. As atividades poderão ser desenvolvidas também no ambiente híbrido.

A escolha da habilidade foi feita por meio de análises realizadas dos resultados das avaliações ADE (Avaliação Diagnóstica de Entrada/2019) e SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), que revelaram fragilidades dos estudantes com relação aos conteúdos que seguem, e devem ser desenvolvidas considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração para que os estudantes desenvolvam a habilidade (EF08MA08) Resolver e elaborar situações-problema que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

PLANEJAMENTO PARA DESENVOLVER A SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração para que os estudantes desenvolvam a seguinte habilidade:

(EF08MA08) Resolver e elaborar situações problema que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

AULA	DURAÇÃO	PROPOSIÇÃO
1 2	90 min	Diferentes registros de representação para equação do 1º grau.
3 4	90 min	Resolver situação-problema envolvendo sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.
5 6	90 min	Representação gráfica no plano cartesiano da solução de um sistema de equações do 1º grau.
7 8	90 min	Resolver situação-problema que envolve sistema de equações do 1º grau e representar a solução no plano cartesiano.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

AULAS 1 E 2 – DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO PARA EQUAÇÃO DO 1º GRAU.

Objetivos das aulas:
- Representar, por meio do registro algébrico, uma equação do 1° grau com duas incógnitas;
- Representar, no plano cartesiano, a solução de uma equação do 1° grau com duas incógnitas.

1. Dada a seguinte situação, responda as questões:

Maria pediu em uma lanchonete um salgado e um suco, pagando R$ 6,00 pelos dois itens. Quanto Maria pagou por cada um deles?

a. Podemos dizer que cada um desses itens custou R$ 3,00? Por que?

Resposta: esta pode ser uma das soluções. O problema tem mais de uma solução, pois o enunciado não informa que os dois itens têm o mesmo valor. Sendo assim, existem várias combinações de valores que resultam em R$ 6,00.

b. Chamando o preço do salgado de x e o preço do suco de y, escreva uma expressão algébrica em equação para essa situação.

Resposta: Convertendo o registro em língua natural para o registro algébrico, temos um salgado x mais um suco y num total de 6 reais, ou seja: $x + y = 6$.

c. Considerando que a lanchonete só trabalha com preços de salgados e sucos com valores inteiros para facilitar o troco, quais são as soluções possíveis para a situação?

Resposta: Nesse caso, as possíveis soluções são:
$X = 1$ e $Y = 5$; $X = 2$ e $Y = 4$; $X = 3$ e $Y = 3$; $X = 4$ e $Y = 2$; $X = 5$ e $Y = 1$.

AULAS 1 E 2 – DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO PARA EQUAÇÃO DO 1º GRAU.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes sentados individualmente, respeitando os protocolos de higiene e o distanciamento social, com as carteiras dispostas em "U" ou, se possível, organize-os em duplas produtivas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante, lápis, régua, borracha e calculadora.

INICIANDO

Professor, inicie uma conversa com os estudantes explicando quais são os objetivos das Aulas 1 e 2, ou seja, representar algebricamente e no plano cartesiano uma equação do 1° grau com duas incógnitas. Sugerimos que, por meio de questionamentos, levante os conhecimentos que os estudantes já têm em relação ao tema. Por exemplo, pergunte: "O que vocês entendem sobre incógnita?" ou "qual a diferença entre variável e incógnita?". Se houver necessidade, retome a resolução de equação do 1° grau com uma incógnita.

DESENVOLVENDO

Com o Caderno do Estudante em mãos, sugerimos que na Aula 1 e 2 os estudantes realizem as três atividades que envolvem as conversões dos registros de representação algébricos para registro de representação gráfica e vice-versa. É importante atenção especial ao registro de representação gráfico, dada a importância deste registro para resolução de sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas, tema das próximas aulas.

Na **Atividade 1**, a proposta é que os estudantes determinem soluções distintas para uma mesma equação do 1° grau com duas incógnitas. Atente-os que, para esta atividade, o número zero não será considerado, já que o preço do salgado ou suco não pode ser nulo, e que os valores somente podem assumir números inteiros e positivos para facilitar o troco, ou seja, apenas números naturais, que no gráfico representa apenas pontos, e não uma reta. Na **Atividade 2**, é importante que os estudantes percebam que, dado um valor para uma das incógnitas, é possível substituir esse valor na equação e, assim, determinar o valor da outra incógnita, sempre respeitando as condições dadas sobre os valores que as incógnitas podem assumir e esse valor pode ser um número real positivo, representado por uma reta no gráfico.

FINALIZANDO

Retome as ideias que os estudantes levantaram no início das aulas, mesmo oralmente. Quando eles socializarem o que aprenderam na aula, peça que registrem por escrito, por meio de figuras ou mapas mentais. Realize a correção coletiva das resoluções das atividades, verificando se os estudantes conseguiram fazer as conversões dos registros de representação algébricos para registro de representação gráfico, e vice-versa. Caso apareçam resultados divergentes, discuta com a turma o que pode ter ocorrido e proponha alguma tarefa similar a fim de esclarecer possíveis dúvidas.

d. Preencha o quadro a seguir contendo os possíveis valores para o preço do salgado (x) e do suco (y).

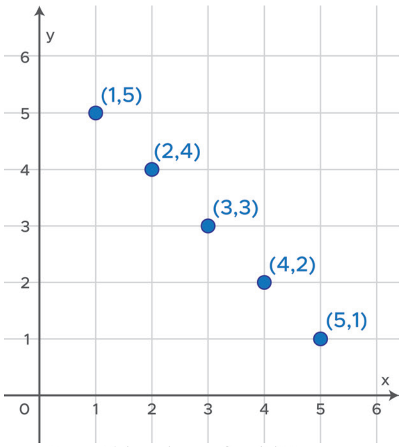
Salgado (x)	Suco (y)	Total
1	5	6
2	4	6
3	3	6
4	2	6
5	1	6

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

e. De acordo com o quadro preenchido no item anterior (d), quais os pares ordenados que são solução da equação $x + y = 6$?

Os pares ordenados que representam as possíveis soluções para a equação $x + y = 6$ são (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) e (5,1), lembrando que a lanchonete só trabalha com valores inteiros para facilitar o troco.

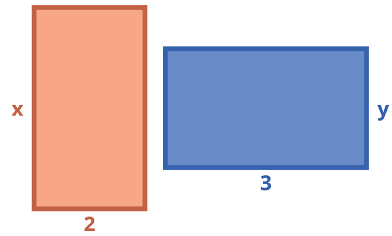
f. Dado o plano cartesiano a seguir, localize os pares ordenados (x,y) que correspondem aos valores encontrados no item (e) anterior:



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

2. A áreas de uma figura geométrica plana equivale à medida da sua superfície, e o cálculo da área do retângulo é obtido por meio da multiplicação da base pela altura. As somas das áreas das duas figuras (retângulos) a seguir é 30.

a. Qual é a equação do 1° grau com duas incógnitas que representa a soma das duas áreas?



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Resposta: A área da primeira figura é dada por 2x, e a área da segunda figura por 3y. Logo, a soma das duas áreas é dada por $2x + 3y = 30$.

b. Podemos dizer que, nesta situação, $x = 9$ e $y = 4$, ou seja, o par ordenado (9, 4) é a solução da equação $2x + 3y = 30$?

Resposta: Sim, pois substituindo na equação $2x + 3y = 30$ o x da equação por 9 e o y por 4, temos $2.9 + 3.4 = 18 + 12 = 30$, o que torna a sentença verdadeira.

c. Se o valor de x for igual a 4 e o valor de y igual a 9, ou seja, o par ordenado (4,9), ele é a solução da equação $2x + 3y = 30$?

Resposta: Não, pois substituindo na equação $2x + 3y = 30$ o x da equação por 4 e o y por 9, temos $2.(4) + 3.(9) = 8 + 27 \neq 30$, o que torna a sentença falsa.

d. Na equação 2x + 3y = 30, substitua o valor x = 3 e encontre o valor de y.

Resposta: Substituindo x pelo número 3 na equação 2x+3y=30, temos:
2.(3)+ 3y = 30
6 + 3y = 30
3y = 30 -6
3y = 24
y = 24/3
y = 8
A solução da equação 2x +3y = 30, quando x = 3, é o par ordenado (3,8).

e. Se y = 2, encontre o valor de x na equação 2x +3y = 30.

Resposta: Substituindo o valor de y pelo número 2 na equação 2x+3y=30, temos:
2.x + 3.(2) = 30
2x + 6 = 30
2x = 30 -6
2y = 24
x = 24/2
x = 12
A solução da equação 2x +3y = 30, quando y = 2, é o par ordenado (12,2).

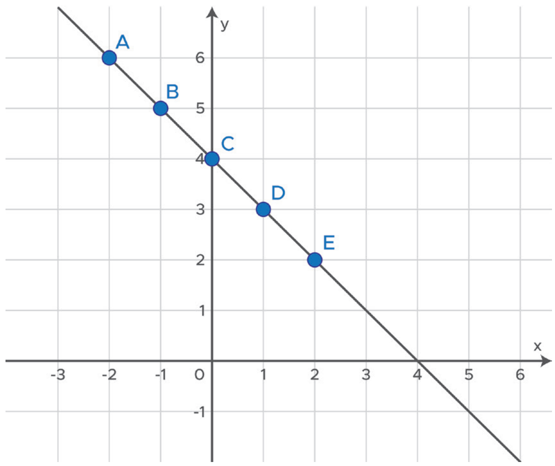
3. Determine algumas soluções possíveis, em formato de par ordenado, para a equação do 1° grau com duas incógnitas x + y = 4.

a. No quadro a seguir, determine os valores de y a partir da substituição dos valores dados de x:

x	x + y = 4	y	Par ordenado (x,y)
-2	-2 + y = 4	6	(-2,6)
-1	-1 + y = 4	5	(-1,5)
0	0 + y = 4	4	(0,4)
1	1 + y = 4	3	(1,3)
2	2 + y = 4	2	(2,2)

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

b. Localize os pares ordenados no plano cartesiano encontrados no quadro do item (a), trace uma reta r sobre os pontos.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

ANOTAÇÕES

AULAS 3 E 4 – RESOLVER SITUAÇÃO-PROBLEMA ENVOLVENDO SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes sentados individualmente, respeitando os protocolos de higiene e o distanciamento social, com as carteiras dispostas em "U" ou, se possível, organize-os em duplas produtivas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante, lápis, borracha, régua e calculadora.

INICIANDO

Inicie essa aula apresentando seu objetivo, que é resolver uma situação problema por meio de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Retome, com os estudantes, a equação do 1º grau com duas incógnitas, lembrando-os de que as incógnitas são os números desconhecidos representados por letras e, na maioria dos casos, essas letras são x e y. Peça para que eles exemplifiquem situações que possam se registradas algebricamente e escreva estas situações na lousa.

AULAS 3 E 4 – RESOLVER SITUAÇÃO-PROBLEMA ENVOLVENDO SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS.

Objetivos das aulas:
- Resolver uma situação-problema por meio de um sistema de equações duas equações do 1º grau com duas incógnitas.

1. Em uma loja virtual, Patrícia comprou quatro pulseiras e cinco anéis pagando um total de R$ 105,00. Joelma também comprou na mesma loja cinco pulseiras e sete anéis dos mesmos produtos de Patrícia, pagando R$ 138,00.

Atribua os valores dados na tabela aos produtos adquiridos por Patrícia e Joelma e verifique se o valor atribuído torna verdadeira a sentença que representa o valor pago nos preços.

Valor da Pulseira	Valor do Anel	Patrícia 4 pulseiras + 5 anéis = 105	Joelma 5 pulseiras +7 anéis = 138	Verdadeira Sim ou não
20	5	4.(20) + 5.(5) = 105	5.20 + 7.5 = 135	Não
15	9	4.(15) + 5.(9) = 105	5.15 + 7.9 = 138	Sim

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

c. Agora, represente a compra de Patrícia e Joelma por meio de uma equação do 1º grau com duas incógnitas.

Resposta:
Valor da pulseira: x
Valor do anel: y
Compras de Patrícia: 4 pulseiras + 5 anéis = 105. Trocando o valor das pulseiras por x e o valor dos anéis por y, temos: $4x + 5y = 105$
Compras de Joelma 5 pulseiras +7 anéis = 138. Trocando o valor das pulseiras por x e o valor dos anéis por y, temos: $5x + 7y = 138$

DESENVOLVENDO

Com o Caderno do Estudante em mãos, peça para os estudantes se atentarem às formas de como enunciados das situações-problema são apresentados. A proposta da **Atividade 1** é que os estudantes tentem resolvê-la por tentativa e erro, para em seguida trabalhar a solução por meio da tabela, valorizando o conhecimento das quatro operações. Espera-se que os estudantes consigam resolvê-la. Se necessário, faça um exemplo na lousa. Na **Atividade 2**, eles poderão resolver o sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, depois de determinaram as equações do 1º grau com duas incógnitas. Espera-se que eles compreendam que o sistema de duas equa-

2. As idades de Rafael e Cristiane somam 60 anos, e a idade de Cristiane é o dobro da idade de Rafael. Usando as letras x e y para representar as incógnitas, represente algebricamente:

a. A idade de Rafael: **x**

b. A idade de Cristiane: **y**

c. As idades de Rafael e Cristiane juntas: **x + y**

d. A idade de Cristiane em relação à idade de Rafael: **y = 2x**

e. Adotando a equação das idades de Rafael e Cristiane juntas como a primeira equação do 1° grau com duas incógnitas, e a idade de Cristiane em relação à idade de Rafael como segunda equação do 1° grau com duas incógnitas, monte o sistema de equação a seguir:

$$\begin{cases} \_\_\_\_ + \_\_\_\_ = \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ = \_\_\_\_ \end{cases}$$

Resposta: Considerando as idades de Rafael e Cristiane juntas, x + y, como primeira equação com duas incógnitas, e a idade de Cristiane em relação a idade de Rafael, y = 2x, como a segunda equação do 1° grau com duas incógnitas, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y = 2x \end{cases}$$

3. Dentre as duas situações dadas, indique qual traduz o seguinte sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas:

$$\boxed{\begin{cases} x + y = 22 \\ 2x + 4y = 82 \end{cases}}$$

Situação 1: Num sitio tem vacas e bois num total de 22 animais e 82 patas. Quantos vacas e quantos bois há nesse sítio?

Situação 2: Num estacionamento há carros e motos, totalizando 22 veículos e 82 rodas. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

Resposta:

Considerando que carros tem 4 rodas e motos tem 2 duas, a situação 2 corresponde ao sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas, o que não acontece na situação 1, já que bois e vacas tem o mesmo número de patas.

ções do 1° grau com duas incógnitas é formado por duas equações do 1° grau que contém duas incógnitas cada. As **Atividades 3 e 4** propõem a conversão do registro em língua materna para o registro algébrico, e vice-versa. E finalmente, na **Atividade 5**, os estudantes terão a oportunidade de criar a sua própria situação usando o conhecimento adquirido nas atividades anteriores.

FINALIZANDO

Espera-se que, ao final dessas aulas, os estudantes consigam realizar a conversões do registro em língua materna para o registro algébrico, e vice-versa, em situações-problemas que envolvam sistemas de duas equações do 1° grau com duas incógnitas. Finalize as aulas construindo com toda a turma uma breve síntese, podendo ser realizada oralmente. Quando os estudantes socializarem o que aprenderam absorverem na aula, peça que eles elaborem um texto explicativo ou mapa mental. Caso observe a existência de estudantes que ainda não tenham se apropriado do que foi proposto nesse estudo ou que queiram se aprofundar nos objetos de conhecimento matemático desenvolvidos nessas aulas, sugerimos plataformas digitais de estudos. Na **Atividade 5**, verifique se os estudantes elaboraram enunciados a partir dos conhecimentos adquiridos. Neste momento, é importante observar se os estudantes estão montando a situação de forma que atenta ao sistema de equações do 1° grau, pois esses conhecimentos serão necessários para as próximas aulas.

4. Silvana possui 10 notas. Entre notas de 20 reais e notas de 5 reais, essas notas somam juntas 140 reais. Considerando x a quantidade de notas de 20 reais e y a quantidade de notas de 5 reais. Assinale a opção que pode representar um sistema de duas equações do 1ª grau com duas incógnitas entre as igualdades seguintes:

a. $\begin{cases} x + y = 10 \\ 20x + 5y = 140 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y = 140 \\ 20x + 5y = 10 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5x + 20y = 140 \\ x + y = 10 \end{cases}$

Resposta: Considerando x a quantidade de notas de 20 reais e y a quantidade de notas de 5 reais em um total de 10 notas que somam 140 reais, temos: $x + y = 10$ como a soma dos dois tipos de notas, e $20x + 5y = 140$, onde o total de 140 reais é igual a x notas de 20 reais e y notas de 5 reais, temos: $20x + 5y = 140$.

x = quantidade de notas de 20 reais.

y = quantidade de notas de 5 reais.

logo, obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 20x + 5y = 140 \end{cases}$$

5. Agora é sua vez, crie uma situação-problema para o sistema de equação do 1° grau com duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 2y = 28 \end{cases}$$

Resposta: Espera-se que o estudante utilize estratégias diferenciadas para elaborar a situação-problema, relacionando a equação com pelo menos um par ordenado de solução.

AULAS 5 E 6 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA NO PLANO CARTESIANO DA SOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU.

Objetivos das aulas:

- Resolver um sistema de duas equações de 1° grau e representar a solução no plano cartesiano.

A representação no plano cartesiano da posição relativa entre duas retas ocorre nas seguintes posições: concorrentes, paralelas ou paralelas coincidentes.

Retas paralelas: são aquelas retas encontradas em um mesmo plano, apresentam a mesma inclinação e não apresentam nenhum ponto em comum.

Retas paralelas coincidentes: pertencem ao mesmo plano e possuem todos os pontos em comum.

Retas concorrentes: Duas retas distintas que estão em um mesmo plano são concorrentes quando possuem um único ponto em comum.

Essas posições são determinadas de acordo com a resolução do sistema de equações do 1° grau com duas incógnitas dadas, visto que essas equações possuem uma reta como representação geométrica.

O perímetro é a medida do contorno de uma figura geométrica. O perímetro de um polígono pode ser obtido pela soma das medidas dos seus lados.

1. A soma dos perímetros de duas figuras geométricas, um pentágono regular e um triângulo equilátero, é 8, e a diferença é 2. Calcule a medida do perímetro de cada figura.

a. Qual é a equação do 1° grau com duas incógnitas que representa a soma dos dois perímetros?

Resposta: Considerando x o perímetro da 1ª figura e y o perímetro da segunda figura, temos a soma dos perímetros: $x + y = 8$

b. Qual é a equação do 1° grau com duas incógnitas que representa a diferença dos perímetros?

Resposta: Considerando x o perímetro da 1ª figura e y o perímetro da segunda figura, temos a diferença dos perímetros: $x - y = 2$

AULAS 5 E 6 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA NO PLANO CARTESIANO DA SOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE DUAS EQUAÇÕES DO 1º GRAU.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes sentados individualmente, respeitando os protocolos de higiene e o distanciamento social, com as carteiras dispostas em "U" ou, se possível, organize-os em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante, lápis, caneta, borracha, régua e calculadora.

INICIANDO

Inicie essas aulas apresentando seu objetivo: Resolver um sistema de duas equações de 1° grau e representar a solução no plano cartesiano. Retome com os estudantes o significado de plano cartesiano e representação da solução da equação do 1° grau com duas incógnitas no plano cartesiano. Sugerimos que, por meio de questionamentos, levante os conhecimentos que os estudantes já têm em relação ao estudo do registro de representação geométrico de um sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas. Por exemplo, pergunte: "O que vocês entendem por intersecção de retas?" ou "O que são retas paralelas? O que vocês entendem por retas paralelas coincidentes?" Lembre-os que a posição relativa entre duas retas no plano já foi apresentada a eles em outras oportunidades em geometria, e se for necessário, esboce as posições relativas entre duas retas no plano na lousa e faça a relação com o plano cartesiano, mostrando que essas posições são determinadas de acordo com a equação do 1º grau com duas incógnitas, visto que essas equações possuem como representação geométrica uma reta.

DESENVOLVENDO

Com o Caderno do Estudante em mãos, peça para os estudantes se atentarem aos procedimentos que serão necessários para as soluções das atividades, como a resolução de equações do 1º grau, localização de pontos no plano cartesiano e representação de retas no plano cartesiano. A proposta da **Atividade 1** é resolver um sistema de duas equações de 1º grau e representar a solução no plano cartesiano. Na **Atividade 2**, o sistema de duas equações com duas incógnitas proposto terá a sua resolução impossível, em que não há pontos em comum, ou seja, na representação das retas no plano cartesiano elas não se interceptam, formando assim duas retas paralelas. Na **Atividade 3**, a solução do sistema de duas equações com duas incógnitas será possível e indeterminada, quando as duas retas representadas no plano cartesiano se coincidem e a solução será infinitos pares ordenados. E na **Atividade 4**, os estudantes terão a oportunidade de analisar estes casos a partir das soluções encontradas nas atividades anteriores e classificar a solução dos sistemas de duas equações com duas incógnitas entre SPD Sistema Possível e Determinado, SPI Sistema Possível e Indeterminado e SI Sistema Impossível.

c. Complete as lacunas do sistema de equação do 1º grau com duas incógnitas com as equações encontradas nos itens (a) e (b).

______ + ______ = ______

______ - ______ = ______

Resposta:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Agora, nos itens (d) e (e) vamos determinar a solução, por meio do par ordenado, que satisfaz simultaneamente as duas equações do 1º grau com duas incógnitas

d. No quadro a seguir, determine os valores de y a partir da substituição dos valores dados de x para a equação x + y = 8

x	x + y = 8	y	Par ordenado (x, y)
0	0 + y = 8	8	(0,8)
8	8 + y = 8	0	(8,0)

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

e. No quadro a seguir, determine os valores de y a partir da substituição dos valores dados de x para a equação x - y = 2

x	x - y = 2	y	Par ordenado (x, y)
0	0 - y = 2	-2	(0,-2)
2	2 - y = 2	0	(2,0)

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

f. Localize no plano cartesiano os pares ordenados determinados na tabela do item anterior (d), e com uma régua trace a reta r, que passa por esses pontos que representa infinitas soluções para a equação do 1º grau com duas incógnitas:

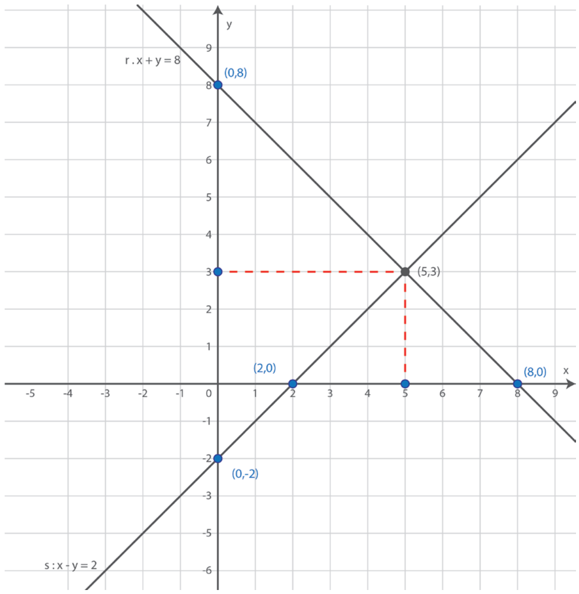
r: $x + y = 8$

g. Localize no plano cartesiano os pares ordenados determinados na tabela do item anterior (e), e com uma régua trace a reta s, que passa por esses pontos que representam as infinitas soluções para a equação do 1º grau com duas incógnitas:

s: $x - y = 2$.

h. O ponto de intersecção entre as retas r e s, ou seja, o par ordenado comum as duas retas, corresponde à solução do sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, determinado no item (c) desta atividade. Sendo assim, qual a coordenada do ponto que representa a solução do sistema?

Resposta: Representando as equações $x + y = 8$ e $x - y = 2$ no plano cartesiano por meio de retas, podemos localizar o ponto de intersecção entre as duas retas, ou seja, o par ordenado (5,3), que será a solução do sistema.



que queiram se aprofundar nos objetos de conhecimento matemático desenvolvidos nessas aulas, sugerimos plataformas digitais de estudos. Na **Atividade 4**, verifique se os estudantes representaram corretamente as retas que envolvem o sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas no plano cartesiano, sendo muito importante esse estudo para as próximas aulas, onde eles deverão resolver situações-problema em que os sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas são a ferramenta básica para resolvê-las.

FINALIZANDO

Espera-se que ao final das aulas 5 e 6, os estudantes já tenham se apropriado da representação da solução no plano cartesiano. Neste momento, é importante observar se os estudantes estão montando a resolução de forma certa, se estimam o resultado e os procedimentos com as operações e equações corretamente. Finalize as aulas construindo com toda a turma uma breve síntese, podendo ser realizada oralmente. Quando os estudantes socializarem o que aprenderam na aula, peça que elaborem um registro por meio de figuras ou mapas mentais. Caso observe a existência de estudantes que ainda não tenham se apropriado do que foi proposto nesse estudo ou

2. Resolva o sistema e represente a solução no plano cartesiano:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$$

a. Preencha os dois quadros a seguir, uma para cada equação, determinando os valores de y a partir da substituição dos valores dados de x:

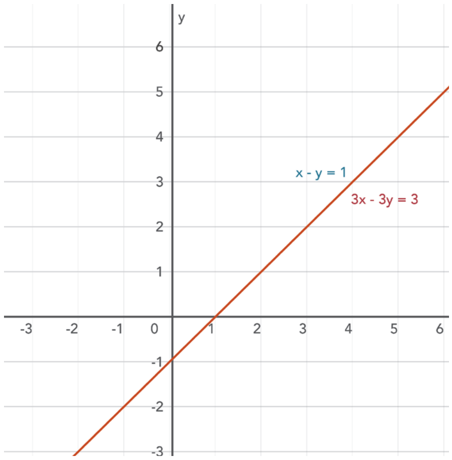
x	x - y = 1	y	Par ordenado (x, y)
0	0 - y = 1	-1	(0,-1)
1	1 - y = 1	0	(1,0)

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

x	3x - 3y = 3	y	Par ordenado (x, y)
0	3.(0) - 3y = 3	-1	(0,-1)
1	3.(1) - 3y = 3	0	(1,0)

Fonte: Elaborado para fins didáticos

b. Localize no plano cartesiano os pares ordenados determinados nas tabelas no item anterior (a), e com uma régua trace as retas que passam por esses pontos, que representam as soluções das equações do 1° grau com duas incógnitas:



3. Resolva o sistema e represente a solução no plano cartesiano:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

a. Preencha os dois quadros, uma para cada equação, determinando os valores de y a partir da substituição dos valores dados de x:

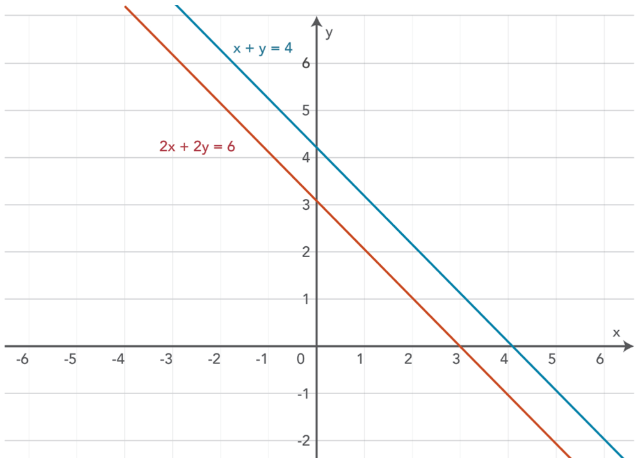
x	x + y = 4	y	Par ordenado (x, y)
0	0 + y = 4	4	(0,4)
4	(4) + y = 4	0	(4,0)

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

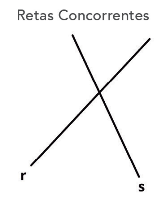
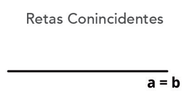
x	2x + 2y = 6	y	Par ordenado (x, y)
0	2.(0) + 2. y = 6	3	(0,3)
3	2.(3) + y = 6	0	(3,0)

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

b. Localize no plano cartesiano os pares ordenados determinados nos quadros no item anterior (a). Com uma régua trace as retas que passam por esses pontos, e que representam as soluções das equações do 1° grau com duas incógnitas:



Agora que já vimos as posições das retas no plano cartesiano por meio de um sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas, podemos verificar que existem três possíveis situações para a solução de sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas, de acordo com o quadro a seguir:

Sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas	**Solução**	**Posição no plano cartesiano**	
SPD – Sistema Possível e Determinado	Única solução – um único par ordenado que satisfaz, simultaneamente, as duas equações do 1° grau com duas incógnitas	Retas concorrentes	
SPI – Sistema Possível e Indeterminado	Infinitas solução – infinitos pares ordenados que satisfazem, simultaneamente, as duas equações do 1° grau com duas incógnitas	Paralelas coincidentes	
SI – Sistema Impossível	Nenhuma solução- nenhum par ordenado que satisfaz, simultaneamente, as duas equações do 1° grau com duas incógnitas	Paralelas Distintas	

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

4. Agora é sua vez! Observando as representações da solução dos sistemas de duas equações do 1° grau com duas incógnitas no plano cartesiano, relacione as linhas do quadro a seguir com as três atividades que você resolveu anteriormente, classificando-as de acordo com o tipo de solução do sistema de duas equações do 1° grau:

Sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas	Solução	Posição no plano cartesiano	Atividade
SPD – Sistema Possível e Determinado	Única solução – um único par ordenado que satisfaz, simultaneamente, as duas equações do 1° grau com duas incógnitas	Retas concorrentes	Atividade 1
SPI – Sistema Possível e Indeterminado	Infinitas solução – infinitos pares ordenados que satisfazem, simultaneamente, as duas equações do 1° grau com duas incógnitas	Paralelas coincidentes	Atividade 2
SI – Sistema Impossível	Nenhuma solução- nenhum par ordenado que satisfaz, simultaneamente, as duas equações do 1° grau com duas incógnitas	Paralelas Distintas	Atividade 3

ANOTAÇÕES

AULAS 7 E 8 – RESOLVER SITUAÇÃO-PROBLEMA QUE ENVOLVE SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU E REPRESENTAR A SOLUÇÃO NO PLANO CARTESIANO.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Organize os estudantes sentados individualmente, respeitando os protocolos de higiene e o distanciamento social, com as carteiras dispostas em "U" ou, se possível, organize-os em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante, lápis, borracha, régua e calculadora.

AULAS 7 E 8 – RESOLVER SITUAÇÃO-PROBLEMA QUE ENVOLVE SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU E REPRESENTAR A SOLUÇÃO NO PLANO CARTESIANO.

Objetivos das aulas:
- Resolver e elaborar problemas que envolvam sistemas de equações de 1° grau com duas incógnitas.

1. (AAP, 2018) Um comerciante de bijuterias comprou numa semana 4 pulseiras e 3 colares por R$ 120,00. Na semana seguinte comprou 4 colares e 12 pulseiras por R$ 260,00. Indique o sistema de equações que permite descobrir o preço de cada pulseira e de cada colar:

a. $\begin{cases} 4x + 3y = 120 \\ 4x + 12y = 260 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 4x + 3y = 120 \\ 12x + 4y = 260 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x + y = 120 \\ 12x + 4y = 260 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4x + 12y = 120 \\ 3x + 4y = 260 \end{cases}$

Resposta: Considerando x = quantidade de pulseiras e y = quantidade de colares, temos 4 pulseiras e 3 colares na primeira compra, totalizando 120 reais, e na segunda compra temos 12 pulseiras e 4 colares, num total de 260 reais. Tomando a primeira compra como a primeira equação, e a segunda compra como a segunda equação do sistema, obtemos o sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas:

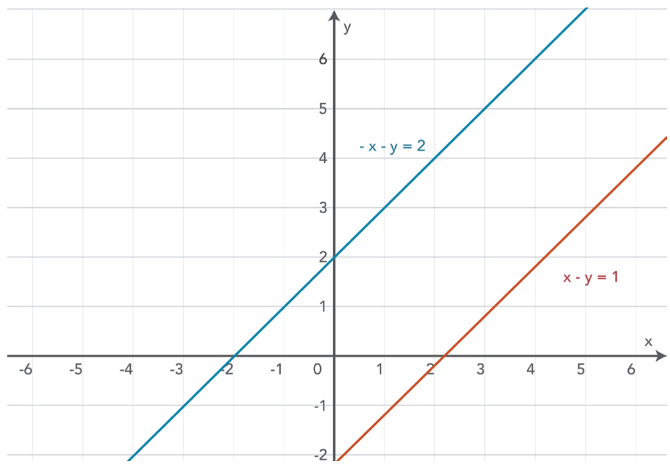
a) $\begin{cases} 4x + 3y = 120 \\ 12x + 4y = 260 \end{cases}$

INICIANDO

Inicie essa aula apresentando os objetivos de aprendizagem: resolver e elaborar situação problema que envolve sistemas de duas equações de 1° grau com duas incógnitas. Retome com os estudantes os conceitos envolvidos nas aulas anteriores de registro algébrico e registro gráfico de um sistema de duas equações do 1° grau com duas incógnitas. Explique aos estudantes que a proposta dessas duas últimas aulas é a troca de experiências sobre a resolução de problemas, onde a leitura, a interpretação, o raciocínio lógico, a revisão de estratégias e a verificação da solução encontrada serão solicitadas nas atividades propostas, pois algumas foram retidas de avaliações oficiais.

2. (AAP, 2018, adaptada) Dado o sistema $\begin{cases} -x - y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

a. represente graficamente a solução do sistema no plano cartesiano a seguir:



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

b. Observe atentamente as respostas da atividade anterior (a) e responda: a representação gráfica da solução do sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas resolvido no item (a) será dada por duas retas:

(A) Concorrentes.

(B) Paralelas.

(C) Coincidentes.

(D) Transversais.

Resposta: (B) Paralelas. Analisando a representação no plano cartesiano das duas retas, podemos concluir que elas não se cruzam no plano e não tem ponto que satisfaçam as duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Sendo assim, a posição relativa entre as duas retas no sistema do 1º grau revela que elas são paralelas.

c. De acordo a sua reposta do item anterior (b), assinale a alternativa que traz a classificação correta do sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.

(A) Sistema Possível e Determinado (SPD).

(B) Sistema Possível e Indeterminado (SPI).

(C) Sistema Impossível.

Resposta: A posição relativa entre as duas retas representadas pelas equações do sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas no plano cartesiano indica que são retas paralelas, ou seja, não se cruzam. Portanto, não há ponto cartesiano de intersecção, e o sistema é impossível.

tematização das aulas, por abordar questões de avaliações oficiais. E na **Atividade 4**, eles terão a oportunidade de elaborar um enunciado para um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.

Realize a correção, focando nas estratégias e procedimentos de solução. Solicite aos estudantes que explicitem como foi calcular as operações e procedimentos, com ou sem o uso da calculadora. Outras questões que estão presentes, na maioria de avaliações oficiais com este tema, também podem ser propostas. Se possível, use um software de geometria dinâmica que poderá facilitar a solução dos sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas propostos nas atividades.

DESENVOLVENDO

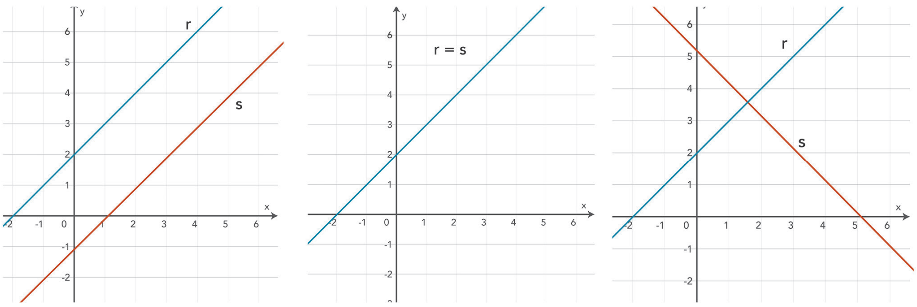
Com o Caderno do Estudante em mãos, comente com os estudantes durante a aula a respeito da importância do registro algébrico e do registro gráfico para a solução de situações-problema que envolvem um sistema de equações do 1º grau. Oriente-os a estarem atentos aos enunciados das quatro atividades contidas nestas aulas, que exigirão os conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores.

Na **Atividade 1**, espera-se que os estudantes façam a conversão do registro da língua materna para o registro algébrico, ou vice-versa. Se necessário, faça a interpretação do enunciado em conjunto com eles. As **Atividades 2 e 3** poderão servir como sis-

FINALIZANDO

Finalize essa Sequência de Atividades construindo com toda a turma uma breve síntese, podendo ser realizada oralmente. Quando os estudantes socializarem o que aprenderam na aula, peça que elaborem um registro por meio de figuras ou mapas mentais. Ao final das atividades, os estudantes devem ser capazes de resolver e classificar a solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, seja ele no registro algébrico, registro gráfico ou registro em língua materna. Caso apareçam resultados divergentes, discuta com a turma o que pode ter ocorrido e proponha outras atividades, a fim de esclarecer dúvidas e caso queiram se aprofundar nos objetos de conhecimento matemático desenvolvidos nessas aulas.

3. (AAp,2018, adaptada) Os gráficos a seguir correspondem a representações de três sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas no plano cartesiano I II III:



I II III

Pela análise dessas representações podemos afirmar que esses sistemas são, respectivamente:

A) possível e indeterminado; impossível; possível e determinado.

B) impossível; possível e determinado; possível e indeterminado.

C) impossível; possível e indeterminado; possível e determinado.

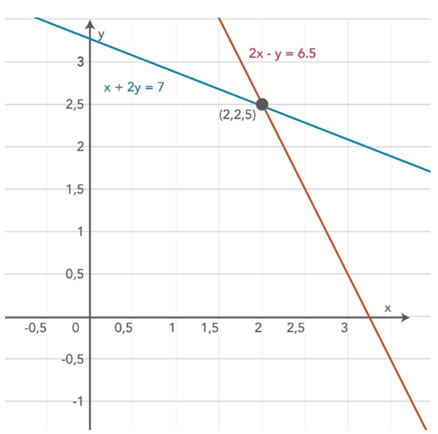
D) possível e determinado; impossível; possível e indeterminado.

Resposta: Letra (C). O primeiro gráfico representa a posição relativa entre duas retas paralelas, logo, sem ponto de intersecção entre elas. Portanto, Sistema Impossível (SI). O segundo gráfico representa a posição relativa entre duas retas paralelas coincidentes, logo, todos os pontos das duas retas são de intersecção entre elas. Portanto, Sistema Possível e Indeterminado (SPI). E o terceiro gráfico representa a posição relativa entre duas retas concorrentes, logo, um ponto de intersecção entre elas. Portanto, Sistema Possível e Determinado (SPD).

4. Elabore uma situação problema que possa ser resolvida pelo sistema a seguir e resolva-o graficamente:

$$\begin{cases} 2x + y = 6{,}5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

Resposta: Desenvolvimento do estudante, mas uma possível situação pode ser relacionada com medidas ou dinheiro, já que a questão envolve números decimais



ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

2ª Série

2ª Série do Ensino Médio - Matemática			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAS**
1	Área de figuras planas; Áreas do círculo e comprimento de sua circunferência.	**(EF08MA19)** Resolver e elaborar situações-problema que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 8º ano Vol.2** Situação de aprendizagem 5 ATIVIDADE 1 – DESCOBRINDO MEDIDAS DE ÁREA Situação de aprendizagem 6 ATIVIDADE 2 – ÁREA DO CÍRCULO ATIVIDADE 3 – ÁREAS DE UM CÍRCULO E DE SUAS PARTES
2	Princípio multiplicativo da contagem; soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral	**(EF08MA22)** Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno do 8º ano Vol. 1** Situação de aprendizagem 7 ATIVIDADE 1 – POSSÍVEIS EVENTOS: A PRESENÇA DO ALEATÓRIO
3	Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies	Saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies. (Currículo Vigente 2020)	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno da 1ªsérie:** Vol.4 – 2020 Tema: "Polígonos regulares circunscrição e pavimentação de superfície"

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

ANOTAÇÕES

2ª SÉRIE - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

OLÁ, PROFESSOR!

Nesta Sequência de Atividades (SA), falamos diretamente com você que está aí na sala de aula, no convívio direto com os estudantes, os quais terão oportunidade, nesse momento, de se envolver com atividades que possibilitam a retomada de conceitos, propriedades e procedimentos essenciais para o desenvolvimento de seus conhecimentos e capacidades em matemática.

A Sequência de Atividades deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração. Além disso, as socializações das atividades, por parte dos estudantes, são percebidas aqui como oportunidades de serem desenvolvidas habilidades e competências que dizem respeito à cooperação, à empatia, à argumentação e à comunicação, entre outras.

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam área de figuras planas; áreas do círculo e comprimento de sua circunferência.

As escolhas das habilidades foram feitas por meio das análises realizadas dos resultados de avaliações internas e externas (diagnóstico de entrada e SARESP), que revelaram fragilidades dos estudantes com relação à habilidade: (EF08MA19) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	Quadriláteros em contextos.
3ª e 4ª/ 90 min	Entre triângulos e quadriláteros.
5ª e 6ª/ 90 min	Círculos e circunferências.
7ª e 8ª/ 90 min	Áreas para determinar medidas em terrenos.

Sabemos que as Atividades por si só não ensinam. Por isso, professor, a sua atuação é tão importante em cada uma das situações propostas aqui, cujo objetivo é recuperar as aprendizagens e desenvolver as habilidades esperadas para a 2ª série do Ensino Médio. Para isso, este caderno deverá servir como mais uma ferramenta que o auxiliará no processo de ensino, sendo necessário, portanto, que você considere, em seu replanejamento, outras possibilidades de discussão e recursos, para além daqueles sugeridos nesta Sequência de Atividades. Para ajudá-lo nessa ação, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenal acerca das Sequências de Atividades, nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPCs). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

AULAS 1 E 2 – QUADRILÁTEROS EM CONTEXTOS.

Objetivos das aulas
- Calcular a área do quadrado, retângulo, paralelogramo, losango e trapézio a partir das expressões algébricas;
- Resolver situações-problema por meio do cálculo de área de quadriláteros;
- Elaborar situações-problema que abordem o cálculo de área de quadriláteros.

Cálculo de área

As atividades que serão desenvolvidas nas próximas aulas trazem casos que abordam o cálculo de área. Para isso, são propostas situações que envolvem diferentes formas planas, em contextos diversos, cuja problemática requer a determinação da medida dessas superfícies.

Para as aulas 1 e 2, serão necessários cálculos de áreas de quadriláteros como quadrado, retângulo, paralelogramo, losango e trapézio. Então, é interessante que você recorde as expressões algébricas utilizadas para tais cálculos.

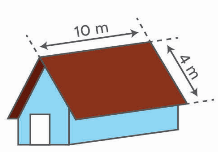
$$A_{Paralelogramo} = b \cdot h$$

$$A_{Quadrado} = l^2 \qquad A_{Retângulo} = b \cdot h$$

$$A_{Losango} = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$A_{Trapézio} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

1. Dentre os vários modelos de telhas que existem no mercado, as mais comuns são as telhas no formato de um paralelogramo, às quais são necessárias, em média, 20 delas para recobrir cada m² de telhado. De acordo com os dados, calcule a quantidade aproximada de telhas desse tipo, necessárias para o recobrimento total do telhado de uma casa cujo formato e dimensões estão indicadas na figura.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

A área total do telhado a ser recoberto é: $2 \cdot 10 \cdot 4 = 80\ m^2$. Como para cada m^2 são necessárias 20 telhas, então, para o recobrimento total de um telhado como esse há a necessidade de: $80 \cdot 20 = 1600\ m^2$ telhas desse tipo.

AULAS 1 E 2 – QUADRILÁTEROS EM CONTEXTOS.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

A atividade será realizada de maneira individual.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

INICIANDO

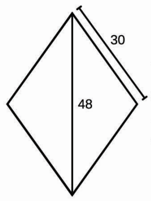
Professor, as atividades propostas para serem realizadas nas aulas 1 e 2 têm foco no cálculo de área dos principais quadriláteros. Dessa forma, sugerimos que, em uma conversa inicial, os estudantes sejam questionados sobre o que representa a área de uma figura, instigados a pensarem e verbalizarem exemplos de situações que envolvam cálculo de área e, particularmente, dialogar sobre as fórmulas de cálculo de área de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios. Sugira, por exemplo, que alguns estudantes registrem (na lousa ou na tela, caso a aula esteja ocorrendo de forma presencial ou remota, respectivamente) as fórmulas e socializem com os demais os seus exemplos, explicando cada um deles. Após esse momento, promova a leitura coletiva do texto introdutório do **Caderno do Estudante** e provoque os estudantes sobre o significado de cada incógnita expressa nas sentenças algébricas que correspondem às fórmulas para cálculo de áreas desses quadriláteros. Além disso, é pertinente ainda conversar sobre algumas das características dos quadriláteros citados, destacando aquelas que eles têm em comum e as que os diferenciam. Ressalte, professor, que há uma atividade em que eles terão que elaborar uma situação-problema relativa a esse objeto de conhecimento.

DESENVOLVENDO

Após estas discussões introdutórias, proponha a realização das atividades 1, 2 e 3 da SA. A orientação quanto à necessidade da leitura atenciosa de cada enunciado, é indispensável. Caso considere pertinente, a leitura dos enunciados pode ser feita coletivamente e de maneira oral. Essas atividades trazem contextos que indicam o cálculo de área de retângulos e losangos, então, pode-se propor um diálogo com questionamentos sobre as características desses quadriláteros, visto que esse conhecimento é importante para o ato de calcular suas áreas. Particularmente na **Atividade 2**, deve-se recorrer ao teorema de Pitágoras para a determinação da medida da diagonal menor do losango e, portanto, uma retomada pode ser necessária. Após a finalização do tempo combinado para a resolução desse bloco de atividades, incentive a correção de forma oral e explicativa em que os estudantes participem ativamente. Após, sugerimos novamente um tempo para a resolução de atividades, agora um outro bloco, contendo as **Atividades 4, 5 e 6** das quais 5 e 6 são itens do SARESP. A atividade requer o cálculo de área de figuras obtidas através da junção ou retirada de quadriláteros, vale uma discussão sobre estratégias possíveis para tais cálculos, so-

2. Um vidraceiro está produzindo um vitral formado por losangos cujo lado mede 30 cm e a diagonal maior tem 48 cm. Nessas condições, qual é a quantidade de vidro necessária para fazer uma peça como essa do vitral?

Para calcular a quantidade de vidro necessária para a produção de um losango como o indicado no enunciado, basta determinar a área desse polígono. Para isso, precisamos das medidas das duas diagonais do losango. Para calcular a medida da diagonal menor: $30^2 = 24^2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{900 - 576} = \sqrt{324} \Rightarrow x = 18\ cm.$ Dessa forma, teremos que a área necessária será: $A = \frac{36 \cdot 48}{2} = \frac{1728}{2} = 864\ cm^2.$



Fonte: elaborado para fins didáticos.

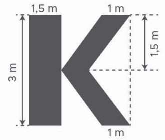
3. Cortando quadradinhos de 1 cm² nos quatro cantos de uma lâmina quadrada de aresta 10 cm e dobrando os lados da lâmina, montou-se uma pequena caixa aberta. Quantos cm² de material foram necessários para a montagem dessa caixa?

A área da lâmina completa é: $A = 10^2 = 100\ cm^2$, como serão retirados 4 quadradinhos de $1\ cm^2$ de área cada um, sobrarão, então: $100 - 4 \cdot 1 = 96\ cm^2$.

Fonte: elaborado para fins didáticos.

4. Observe atentamente as medidas e as formas planas que compõem cada figura e calcule a área das partes em destaque.

a.



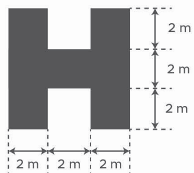
Fonte: elaborado para fins didáticos.

Uma maneira de calcular essa área total é somando a área do retângulo com as áreas dos dois paralelogramos. Então, teremos:

$$A_{Total} = A_{Retângulo} + 2 \cdot A_{Paralelogramo}$$

$$A_{Total} = 3 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 1 \cdot 1{,}5 = 4{,}5 + 3 = 7{,}5\ m^2$$

b.



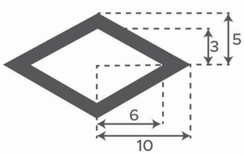
Fonte: elaborado para fins didáticos.

Para determinar essa área total podemos somar a área dos dois retângulos laterais com a área do quadrado central. Assim, ficamos com:

$$A_{Total} = 2 \cdot A_{Retângulo} + A_{Quadrado}$$

$$A_{Total} = 2 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 24 + 4 = 28\, m^2$$

c.

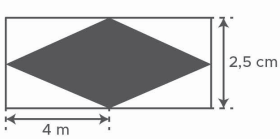


Fonte: elaborado para fins didáticos.

Para o cálculo da área hachurada, é possível subtrair a área do losango maior da área do losango menor, ou seja,

$$A_{Hachurada} = \frac{10 \cdot 20}{2} - \frac{6 \cdot 12}{2} = 100 - 36 = 64\, u^2$$

d.



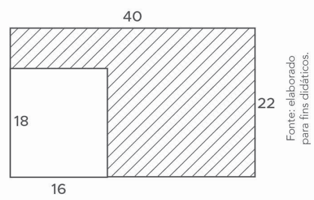
Fonte: elaborado para fins didáticos.

A área do losango em destaque pode ser calculada diretamente aplicando a fórmula, no entanto, nesse caso, tem-se a necessidade de deixar as medidas na mesma unidade. Pode-se usar centímetros, por exemplo:

$$A_{Losango} = \frac{2{,}5 \cdot 800}{2} = \frac{2000}{2} = 1000\, cm^2$$

bretudo olhando-se que existem formas diferentes de resolver corretamente alguns casos. É muito importante possibilitar que os estudantes socializem os caminhos que utilizaram para a resolução e incentivar que percebam que não há uma forma mais correta do que outra. A **Atividade 6** traz a observação e o cálculo de área de quadriláteros que são as faces de um sólido geométrico. É uma interessante oportunidade de se dialogar sobre relações entre formas planas e formas espaciais. Permita, professor, a correção com participação dos estudantes. Para finalizar essas aulas, a atividade 7 solicita a elaboração de um problema em contexto cujo cálculo de área de quadrilátero seja relacionado. Propõe-se que após elaborar, os estudantes troquem, entre si, os problemas para que um solucione a situação do colega.

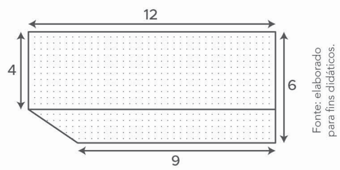
e.



O cálculo da área da região destacada pode ser feito subtraindo-se a área do retângulo menor da área do retângulo maior. Dessa forma, ficamos com:

$$A_{Hachurada} = 40 \cdot 22 - 18 \cdot 16 = 880 - 288 = 592\ u^2$$

f.



A área total hachurada pode ser obtida somando-se a área do retângulo com a área do trapézio:

$$A_{Total} = 4 \cdot 12 + \frac{(12 + 9) \cdot 2}{2} = 48 + \frac{42}{2} = 69\ u^2$$

5. (SARESP - 2009) Uma parede de uma escola, com formato retangular, tem 4 m de comprimento e 3 m de altura. A diretora quer pintá-la utilizando duas cores de tinta acrílica. A cinza será utilizada ao longo de todo seu comprimento, mas até a altura de 2 m. O restante da parede será pintado com tinta branca. A medida da área, em m², a ser pintada de branco é:

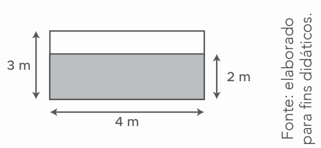
a. 3

b. 4

c. 6

d. 8

Como mostra a figura, a área da parte a ser pintada de branco será: $4 \cdot 1 = 4\ m^2$.



6. (SARESP – 2009) Um tanque para conservação de líquidos tem o formato de um bloco retangular (paralelepípedo reto retângulo) como o da figura abaixo, com 1,5 m de altura, 3 m de comprimento e 2 m de largura e para que fique impermeabilizado todo o interior do tanque, inclusive o da tampa, é revestido com epóxi. Ao comprar os materiais devemos considerar que para a preparação dessa tinta epóxi são misturados dois componentes: uma pasta própria e um catalisador. A cada galão de 3,6 litros de pasta é necessário adicionar 1 litro de catalisador, e essa mistura é suficiente para pintar aproximadamente 22 m² da superfície do tanque. Assinale a alternativa que mostra, respectivamente, o número mínimo necessário de galões de pasta e de litros de catalisador.

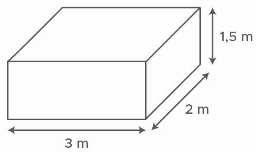
a. 1 e 1.

b. 1 e 2.

c. 2 e 2.

d. 2 e 3.

e. 3 e 3.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

RESPOSTA: C

De acordo com as dimensões indicadas na figura, temos:

2 **superfícies de** 3 **por** $1,5 : 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 9\ m^2$

2 **superfícies de** 2 **por** $1,5 : 2 \cdot 2 \cdot 1,5 = 6\ m^2$

2 **superfícies de** 3 **por** $2 : 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12\ m^2$

Dessa forma, no total são: $9 + 6 + 12 = 27\ m^2$**. Pelo enunciado,** 1 **galão de pasta e** 1 **litro de catalisador são usados para impermeabilizar** $22\ m^2$**. Então, serão necessários, no mínimo,** 2 **galões de pasta e** 2 **litros de catalisador, já que a área total é de** $27\ m^2$**.**

7. Elabore uma situação-problema cujo contexto indique o cálculo de área de quadriláteros para a resolução. Use a criatividade. Em seguida, troque o seu problema com um colega de sala para que ele possa solucionar o seu e você possa resolver o dele. Para finalizar, conversem sobre os caminhos que usaram na resolução.

A resposta é pessoal, contudo, a título de exemplo, podemos ter: João e Dandara são irmãos e estão pensando sobre a embalagem que irão usar para colocar o presente para o dia das mães. Eles decidiram que irão cobrir com papel colorido a caixa, que tem medidas: 10 cm de altura, 30 cm de comprimento e 15 cm de largura. Para isso, quanto desse papel eles irão precisar, aproximadamente?

A partir das medidas fornecidas, temos:

$2 \cdot 30 \cdot 10 = 600\ cm^2$

$2 \cdot 15 \cdot 10 = 300\ cm^2$

$2 \cdot 30 \cdot 15 = 900\ m^2$

No total, serão necessários, aproximadamente: 600 + 300 + 900 = 1800 cm².

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, possibilite tempo para que haja a socialização com discussão sobre os problemas elaborados pelos estudantes e ênfase nas maneiras diferentes que podem ter usado para alcançar os resultados. Nessa ocasião, os estudantes podem sinalizar seus aprendizados e indicar possíveis dúvidas. Além disso, será um momento de avaliar se os objetivos previstos foram alcançados e, se for necessário, propor intervenções no sentido de esclarecer dúvidas e amenizar dificuldades.

AULAS 3 E 4 – ENTRE TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

INICIANDO

Os contextos utilizados para estas aulas preveem o cálculo de área de triângulos utilizando-se expressões algébricas. Nessa perspectiva, professor, apontamos que o diálogo inicial aconteça com a observação das expressões indicadas no início das atividades do **Caderno do Estudante** para as aulas 3 e 4. Nesse momento, pode-se realizar questionamentos como: qual é a relação entre o cálculo de área do triângulo e do retângulo? Alguém pode explicar isso? Em que situações é conveniente utilizar a expressão que usa a medida do semiperímetro? Pode-se solicitar que os estudantes exemplifiquem.

AULAS 3 E 4 – ENTRE TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS.

Objetivos das aulas
- Calcular a área de triângulos a partir de diferentes expressões algébricas;
- Resolver situações-problema por meio do cálculo de área de triângulos;
- Elaborar situações-problema que abordem o cálculo de área de triângulos.

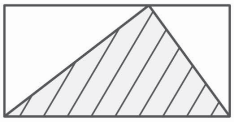
Como já havíamos comentado, continuaremos realizando atividades em que o centro está no cálculo de áreas. Para as aulas 3 e 4, as situações envolvem, em maior frequência, os triângulos. Dessa forma, cabe recordar expressões que permitem o cálculo de áreas desse polígono.

Área do triângulo

$$A_{Triângulo} = \frac{b \cdot h}{2} \qquad A_{Triângulo} = \sqrt{p \cdot (p - l_1) \cdot (p - l_2) \cdot (p - l_3)}$$

Em que p é o semiperímetro do triângulo: $p = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{2}$ e l_1, l_2, l_3 são as medidas dos lados do triângulo.

1. A figura abaixo representa um terreno retangular cuja área é de 800 m². A região triangular hachurada corresponde à parte de área construída. Nessas condições, determine a medida da área desse triângulo. Justifique a sua resposta.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

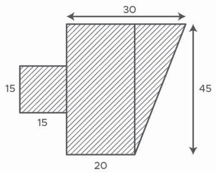
Se a área total do terreno retangular é de $800\ m^2$, temos que: $b \cdot h = 800\ m^2$. Como o triângulo hachurado tem a base e a altura, respectivamente, com as medidas da base e da altura do retângulo, ocorre:

$$A_{Triângulo} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{Triângulo} = \frac{800}{2} \Rightarrow A_{Triângulo} = 400\ m^2$$

O cálculo mostra que a área do triângulo considerado tem área igual à metade da medida da área do retângulo correspondente.

2. Calcule a área das figuras sombreadas, considerando as medidas em centímetros:

a.

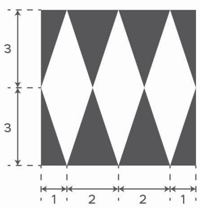


Fonte: elaborado para fins didáticos.

A área total dessa figura pode ser encontrada somando-se as áreas do quadrado, do retângulo e do triângulo indicados:

$$A_{Total} = 15 \cdot 15 + 20 \cdot 45 + \frac{(10 \cdot 45)}{2} = 225 + 900 + 225 = 1350\ cm^2$$

b.

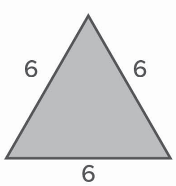


Fonte: elaborado para fins didáticos.

A área da região sombreada é o resultado da diferença entre a área do retângulo e a área dos seis triângulos iguais. Assim, termos:

$$A_{Sombreada} = 6 \cdot 6 - 6 \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} = 36 - 18 = 18\ cm^2$$

c.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Podemos calcular a área do triângulo equilátero indicado diretamente utilizando a fórmula de Herón. Para isso, começamos determinando a medida do semiperímetro desse triângulo:

$$p = \frac{6 + 6 + 6}{2} = 9\ cm$$

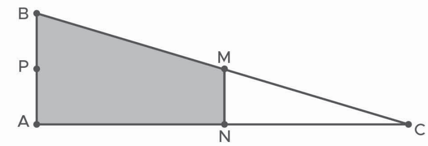
$$A_{Triângulo} = \sqrt{9 \cdot (9 - 6) \cdot (9 - 6) \cdot (9 - 6)} =$$

$$\sqrt{9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{9 \cdot 9 \cdot 3} = 9\sqrt{3}\ cm^2$$

DESENVOLVENDO

Esse momento inicial poderá enriquecer significativamente as aulas. Proponha tempo para a resolução dos problemas e sinalize que há itens do ENEM e do SARESP. É interessante que os estudantes vejam que o cálculo de área é objeto de conhecimento que, de maneira recorrente, aparece em exames. A **Atividade 1** tem um forte apelo teórico e, por isso, pode possibilitar discussões ricas sobre as relações entre áreas de retângulos e triângulos. A justificativa deve ser vista como ocasião para a comunicação e, sobretudo, a argumentação por meio de conhecimentos matemáticos. Novamente trazemos atividades que solicitam o cálculo de área de figuras obtidas por meio da composição ou cortes com outras. Discutir sobre as estratégias utilizadas em cada caso é importante. Os itens do SARESP e do ENEM propostos aqui também têm essa perspectiva de composição de figuras. A leitura detalhada e atenciosa dos enunciados é indispensável. Pode-se retomar e sugerir o uso das etapas de Polya (1995) para a resolução de problemas: compreensão do problema, planejamento de um plano, execução do plano e verificação da solução. Dedique tempo para a correção das atividades com envolvimento ativo dos estudantes. A **Atividade 6** propõe

3. (ENEM - 2010) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos, fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, indicados por letras.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calcada corresponde

a. à mesma área do triângulo AMC.

b. à mesma área do triângulo BNC.

c. à metade da área formada pelo triângulo ABC.

d. ao dobro da área do triângulo MNC.

e. ao triplo da área do triângulo MNC.

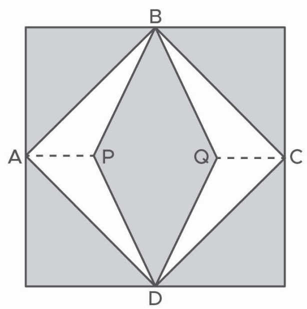
RESPOSTA: E

Os triângulos BAC e MNC são semelhantes, com razão de semelhança igual a 2 (k = 2) e, por isso, a razão entre suas áreas é igual a $k^2 = 2^2 = 4$. Assim, temos que:

$$\frac{A_{ABC}}{A_{MNC}} = k^2 \Rightarrow \frac{A_{CONCRETO}+A_{MNC}}{A_{MNC}} = 4 \Rightarrow A_{CONCRETO} = 4 \cdot A_{MNC} - A_{MNC} \Rightarrow A_{CONCRETO} = 3 \cdot A_{MNC},$$

ou seja, a área a ser calçada corresponde ao triplo da área do triângulo MNC.

4. (ENEM - 2012) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m², e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m². De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral desses?

a. R$ 22,50.

b. R$ 35,00.

c. R$ 40,00.

d. R$ 42,50.

e. R$ 45,00.

RESPOSTA: B

A área total da região clara corresponde à área de quatro triângulos iguais a APB, visto que APB, APD, CQD e CQB são triângulos congruentes, possuindo mesmas áreas:

$$A_{Triângulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A_{Triângulo} = \frac{1}{16} = 0{,}0625\ m^2.$$

A área sombreada corresponde à diferença da área do quadrado pela área clara total:

$$A_{Sombreada} = 1 - 4 \cdot 0{,}0625 \Rightarrow A_{Sombreada} = 0{,}75\ m^2.$$

Então, o custo com os materiais para o vitral será:

$$50 \cdot 0{,}25 + 30 \cdot 0{,}75 = 12{,}5 + 22{,}5 = 35 \text{ reais.}$$

elaboração de situação-problema cuja solução requer o cálculo de área de triângulos. Dessa vez, o próprio elaborador deverá solucionar o seu problema e um colega de turma irá fazer o estudo dessa resolução. A tarefa do colega é verificar a adequação dos procedimentos utilizados e, se necessário, fazer as devidas correções.

FINALIZANDO

Discussões com socialização da **Atividade 6** podem acontecer como avaliação das aulas e verificação das aprendizagens dos estudantes. Consideramos que momentos dessa natureza podem ocorrer com mais frequência, tendo em vista que o envolvimento dos estudantes nessas vivências pode contribuir com o repertório matemático deles. Além disso, ressalte o uso de cálculo de áreas em contextos reais e diversos e provoque os estudantes a pensarem sobre outros exemplos.

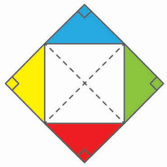
5. (SARESP - 2009) As hipotenusas de quatro triângulos retângulos isósceles coincidem com os lados de um quadrado, de cor branca, como indica a figura a seguir. Se os lados desse quadrado medem 4 cm, a soma das áreas dos triângulos coloridos e igual a:

a. 32 cm²

b. 16 cm²

c. 8 cm²

d. 4 cm²



Fonte: elaborado para fins didáticos.

RESPOSTA: B

Cada triângulo colorido tem área igual a $\frac{1}{4}$ **da medida da área do quadrado branco, ou seja,** $A_{Triângulo} = \frac{1}{4} \cdot 4^2 \Rightarrow A_{Triângulo} = 4\ cm^2$. **Assim, a soma das áreas dos triângulos coloridos é igual a** $4 \cdot 4 = 16\ cm^2$.

6. Novamente vamos aguçar a sua criatividade. Elabore uma situação-problema em que a resolução é feita por meio de cálculo de área de triângulo. Solucione o seu problema e troque a sua produção com um colega para que ele possa verificar a sua ideia e a organização do pensamento na resolução, para que você faça o mesmo com o material dele. Ao final, conversem sobre os caminhos que usaram para a resolução e interpretação de cada um.

Embora seja resposta pessoal, um exemplo pode ser: os pais de Ailton estão decorando o quarto dele e resolveram que vão inserir, em uma das paredes, alguns desenhos do próprio filho. Um dos desenhos que Ailton fez foi um triângulo com todos os lados medindo 50 cm. Determine a quantidade de tinta necessária para pintar apenas esse item decorativo.

RESOLUÇÃO:

$$p = \frac{50 + 50 + 50}{2} = 75\ cm$$

$$A = \sqrt{75 \cdot (75 - 50) \cdot (75 - 50) \cdot (75 - 50)} = \sqrt{75 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25} =$$

$$\sqrt{3 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} = 625\sqrt{3}\ cm^2$$

AULAS 5 E 6 – CÍRCULOS E CIRCUNFERÊNCIAS.

Objetivos das aulas

- Calcular a área de círculos e o comprimento de circunferências a partir de expressões algébricas;
- Resolver situações-problema envolvendo cálculo de área do círculo e comprimento da circunferência.

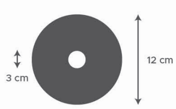
Os problemas previstos para as aulas 5 e 6 relacionam círculos e circunferências, de modo que, alguns deles recorrem ao cálculo da área do círculo e outros solicitam a determinação do comprimento da circunferência. Para começar, vamos retomar as expressões algébricas que possibilitam esses cálculos.

Área do círculo e comprimento da circunferência

$A_{Círculo} = \pi r^2$ $\qquad$ $C_{Circunferência} = 2\pi r$

Em que $\pi \cong 3{,}14$ e r é o raio do círculo ou da circunferência.

1. A figura seguinte representa um CD em que a área mais escura é a parte que se destina à gravação e a parte branca é um espaço vazio, usado para encaixe no equipamento. Verifique as medidas indicadas e responda: qual é a área da parte destinada à gravação?

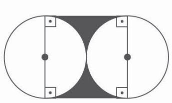


Fonte: elaborado para fins didáticos.

$A_{Maior} = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$ $\qquad$ $A_{Menor} = \pi \cdot 1{,}5^2 = 2{,}25\pi$

$A_{Gravação} = 36\pi - 2{,}25\pi = 33{,}75\pi = 33{,}75 \cdot 3{,}14 = 105{,}975\ cm^2$

2. Na figura, as duas circunferências tangentes possuem raio medindo 1cm. Qual é a área da parte hachurada?



Fonte: elaborado para fins didáticos.

$A_{Quadrado} = 2^2 = 4$ $\qquad$ $A_{Círculo} = \pi \cdot 1^2 = \pi$

$A_{Hachurada} = A_{Quadrado} - A_{Círculo} = 4 - \pi = 4 - 3{,}14 = 0{,}86\ cm^2$

INICIANDO

Para as aulas 5 e 6 os estudantes vão se deparar com situações em que terão que calcular a área de círculos e o comprimento de circunferências. Uma conversa inicial sobre a constante π é interessante e pode revelar o que eles recordam sobre o assunto. Questione, professor, se lembram que o π é obtido por meio da razão entre a medida do comprimento e do diâmetro de circunferências. Destaque que essa constante será utilizada nas próximas atividades, já que os problemas relacionam círculos e circunferências. Para enriquecer as discussões, também é possível dialogar sobre o fato de se calcular área de círculo e comprimento de circunferência e, nesse momento, solicitar que citem exemplos de objetos que representam círculos e outros que representam circunferências.

AULAS 5 E 6 – CÍRCULOS E CIRCUNFERÊNCIAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

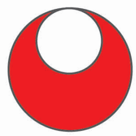
MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

DESENVOLVENDO

Após essas discussões introdutórias, proponha a realização das atividades em duplas. Acreditamos que as trocas propiciadas por momentos colaborativos têm muito a contribuir com a aprendizagem e com a formação integral dos estudantes. Assim, para estas aulas, pensamos que o 1º horário pode ser inteiramente dedicado à resolução dos problemas e aos registros individuais no caderno para que, durante o 2º horário, a verificação aconteça questão por questão, na lousa. As atividades relacionam determinação de área de círculos e comprimentos de circunferências em contextos diversos e de modo que é necessário partir do conhecimento teórico acerca desses objetos de conhecimento para então, buscar aplicações nos problemas. Embora os círculos apareçam com mais frequência nas atividades aqui, também são utilizadas situações em que eles vêm associados a outras formas geométricas como quadrados e retângulos. Desse modo, é interessante utilizar-se disso para avaliar a aprendizagem dos estudantes sobre os cálculos de áreas desses quadriláteros. Caso seja necessário, recomende uma retomada das atividades anteriores desse caderno. Durante a realização da atividade 1, professor, pode-se falar sobre a coroa circular, já

3. (SARESP – 2009 - Adaptada) O desenho abaixo representa um brinco formado por duas circunferências tangentes. A medida do diâmetro da maior é o dobro da medida do diâmetro da menor. Se o comprimento da circunferência menor e igual a C, então qual é o comprimento da maior?



Fonte: elaborado para fins didáticos.

$$C_{Circunferência\ menor} = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{C_{Circunferência\ menor}}{2\pi}$$

$$C_{Circunferência\ maior} = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{C_{Circunferência\ maior}}{2\pi}$$

O raio da maior é o dobro do raio da menor, ou seja,

$$R = 2r = 2 \cdot \frac{C_{Circunferência\ menor}}{2\pi} = \frac{C_{Circunferência\ menor}}{\pi}.$$

Logo, temos que:

$$C_{Circunferência\ maior} = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{C_{Circunferência\ menor}}{\pi} \Rightarrow R = 2 \cdot C_{Circunferência\ menor}$$

4. (SARESP – 2009) Quando Mariana conheceu o relógio das flores, que é circular, ela ficou admirada com seu tamanho. Para descobrir a medida da circunferência do relógio, ela deverá

a. multiplicar o diâmetro do relógio por π.

b. dividir o diâmetro do relógio por π.

c. multiplicar o raio do relógio por π.

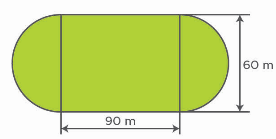
d. dividir o raio do relógio por π.

Fonte: https://i.pinimg.com/originals/f0/42/53/f0425334419 63c8afe9b6d5432889098.jpg

RESPOSTA: A

A questão é teórica e requer que o estudante sinalize que sabe como se calcula o comprimento de uma circunferência, ou seja, que indique que conhece a expressão: $C_{Circunferência} = 2\pi r$ que pode também ser entendida como o produto do diâmetro pelo valor de π.

5. (SARESP - 2012) Observe a figura que mostra o desenho de uma pista de atletismo.Um atleta que dá 4 voltas em uma pista como essa, percorre uma distância, em metros,aproximadamente igual a



Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. 1 473,6.

b. 1 486,81.

c. 1 498,56.

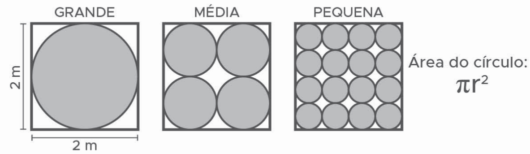
d. 1 525,39.

e. 1 612,4.6

RESPOSTA: A

Um atleta que percorre 4 voltas numa pista como essa se desloca o correspondente a 4 vezes o contorno da pista. Então, temos que, para a parte circular: $C_{Circunferência} = 2\pi R = 2\pi \cdot 30 = 188{,}4\ m^2$. Dessa forma, o percurso de uma volta corresponde a: $188{,}4 + 90 + 90 = 368{,}4\ m^2$ e, então, as para as 4 voltas, o atleta percorrerá: $1\ 473{,}6\ m^2$.

6. (ENEM - 2004) Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas. As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

A partir dessas informações, pode-se concluir que:

a. a entidade I recebe mais material do que a entidade II.

b. a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.

c. a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.

d. as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.

e. as três entidades recebem iguais quantidades de material.

RESPOSTA: E

$$A_{Sobra\ da\ grande} = 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 0{,}86\ m^2$$

$$A_{Sobra\ da\ média} = 2^2 - 4 \cdot \pi \cdot 0{,}5^2 = 0{,}86\ m^2$$

$$A_{Sobra\ da\ grande} = 2^2 - 16 \cdot \pi \cdot 0{,}25^2 = 0{,}86\ m^2$$

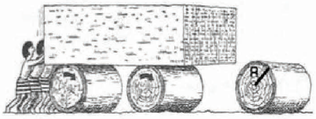
Então, as três entidades recebem iguais quantidades de material.

que a região escura delimitada na figura é uma e, então, dialogar sobre uma possível expressão algébrica para cálculo de área da coroa por meio da diferença entre as áreas dos dois círculos envolvidos. A **Atividade 2** pode possibilitar boas discussões, sobretudo quanto aos conceitos de raio e diâmetro, bem como as relações entre eles. É indispensável a observação com cautela da imagem fornecida pelo enunciado. As **Atividades 1, 2 e 3** podem trazer à tona conversas sobre posições relativas entre circunferências. Tratar a respeito de circunferências concêntricas, internas, externas, tangentes e secantes cabem perfeitamente. Os itens do SARESP e do ENEM aqui utilizados fornecem elementos interessantes para serem discutidos contextos variados em que os círculos e as circunferências aparecem na vida cotidiana.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, promova uma conversa em que os estudantes possam dar seus próprios exemplos de situações que relacionam círculos e circunferências, principalmente em que haja necessidade de serem calculados área e comprimentos. Permita que, nesse momento, eles sinalizem sobre as dúvidas ou dificuldades que tenham enfrentado além de relacionarem os estudos de hoje com aqueles desenvolvidos nas aulas anteriores.

7. (ENEM - 2010) A ideia de usar rolos circulares para deslocar objetos pesados provavelmente surgiu com os antigos egípcios ao construírem as pirâmides.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Representando por R o raio da base dos rolos cilíndricos, em metros, a expressão do deslocamento horizontal y do bloco de pedra em função de R, após o rolo ter dado uma volta completa sem deslizar, é

a. $y = R$.

b. $y = 2R$.

c. $y = \pi R$.

d. $y = 2\pi R$.

e. $y = 4\pi R$.

RESPOSTA: E

O deslocamento da tora em relação ao solo é $2\pi R$. O deslocamento do bloco em relação à tora é $2\pi R$. Logo, o deslocamento y pedido é dado por $y = 4\pi R$.

ANOTAÇÕES

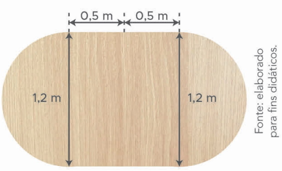
AULAS 7 E 8 – ÁREAS PARA DETERMINAR MEDIDAS EM TERRENOS.

Objetivos das aulas
- Resolver situações-problema em contextos variados utilizando cálculo de área de triângulos, de quadriláteros e de círculos;
- Determinar medidas de terrenos utilizando expressões de cálculo de área;
- Elaborar situações-problema em contextos variados que abordem o cálculo de área de triângulos, de quadriláteros e de círculos.

A proposta para as últimas aulas desta Sequência de Atividades é elaborar e resolver problemas em que o cálculo de área relaciona mais de uma forma geométrica, sobretudo, em contextos envolvendo cálculos de medidas de terrenos. Leia cada enunciado com atenção e, se considerar necessário, reveja as atividades que foram realizadas nas aulas anteriores e retome os estudos referentes ao cálculo de área de quadriláteros, triângulos e círculos.

Lembre-se que o trabalho colaborativo com a sua dupla e as discussões nos momentos de correção e socialização são muito interessantes e, portanto, é indispensável que você se envolva ativamente.

1. Na casa de dona Helena há uma mesa redonda com 0,60 m de raio. Em dias de visitas, é necessário abrir a mesa. Duas tábuas retangulares de 1,20 m por 0,50 m são acrescentadas ao meio da mesa fazendo com que ela obtenha o formato que aparece na figura abaixo. Com que área total fica a mesa da casa de dona Helena?



Fonte: elaborado para fins didáticos.

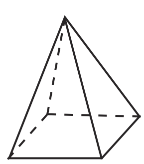
$$A_{Retângulo} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}2 = 1{,}2\ m^2$$

$$A_{Círculo} = \pi \cdot 0{,}6^2 = 1{,}13\ m^2$$

$$A_{Total} = A_{Retângulo} + A_{Círculo} = 1{,}2 + 1{,}13 = 2{,}33\ m^2$$

2. (SARESP - 2010) Um cliente encomendou de uma fábrica de barracas de camping, 300 barracas com a forma de uma pirâmide quadrangular, com 4 m de arestas da base e 1,5 m de altura. Sabendo que o chão de cada barraca deve ser forrado e considerando que não haja nenhum desperdício de lona na confecção das barracas, quantos metros quadrados de lona serão necessários para confeccionar a encomenda?

Altura da face lateral:



$$x^2 = 1{,}5^2 + 2^2 = 2{,}25 + 4 \Rightarrow x = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5\ m$$

$$A_{Face\ lateral} = \frac{4 \cdot 2{,}5}{2} = 5\ m^2$$

$$A_{Base} = 4^2 = 16\ m^2$$

$$A_{Total} = 300 \cdot (4 \cdot 5 + 16) = 300 \cdot 36 = 10800\ m^2$$

INICIANDO

Professor, para as aulas 7 e 8 as atividades retomam o que foi estudado sobre cálculo de área. São problemas contextualizados em que aparecem quadriláteros, triângulos e círculos. Sendo assim, comece promovendo um diálogo sobre as atividades realizadas nas aulas anteriores. Para isso, proponha que os estudantes folheiem o **Caderno do Estudante**, observem os seus registros e verifiquem se alguma lacuna pode ter ficado para que seja esclarecida. Retome as expressões utilizadas para o cálculo de área de quadriláteros, de triângulos e de círculos.

AULAS 7 E 8 – ÁREAS PARA DETERMINAR MEDIDAS EM TERRENOS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

DESENVOLVENDO

Após essa conversa inicial, os estudantes, em duplas, devem se dedicar à leitura e à resolução das atividades, aplicando-se o conhecimento construído até aqui. As trocas de experiências propiciadas pelo trabalho em dupla são sempre muito ricas. São oportunidades de aumento do repertório matemático por parte dos estudantes e de realização de trabalho colaborativo de fato. Assim, professor, incentive que as duplas trabalhem de maneira harmoniosa, com ambos se envolvendo ativamente. A **Atividade 1** traz um problema em que é necessário calcular área de retângulos e de círculo. É interessante conversar sobre o fato de esse ser um contexto muito possível na vida real e, assim, mostrar aos estudantes o uso de conhecimentos matemáticos na vida. A **Atividade 2** estabelece relações entre cálculo de área a partir de formas tridimensionais. Desperte o interesse e a percepção dos estudantes quanto a tais relações. Discuta que nesse caso, embora apareça uma figura tridimensional, o que se está solicitando não é o cálculo de volume, mas sim de área das faces laterais e da base. Além disso, a utilização do teorema de Pitágoras também possibilita boa reflexão. As **Atividades 3, 4 e 5** apresentam figuras obtidas por meio da composição de mais de uma forma geométrica. Converse com os estudantes sobre as figuras utilizadas em cada item, bem como sobre o cálculo de área de cada um.

3. (ENEM - 2019) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento. O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro d = 40 cm, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é h = 60 cm, conforme ilustração na figura. Use 3,14 como aproximação de π.

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

a. 16 628.

b. 22 280.

c. 28 560.

d. 41 120.

e. 66 240.

RESPOSTA: B.

$$A_{semicircunferência} = \frac{\pi \cdot 20^2}{2} = 628\ cm^2$$

$$A_{Quadrado} = 40^2 = 1600\ cm^2$$

$$A_{Total} = 10 \cdot (628 + 1600) = 10 \cdot 2228 = 22280\ cm^2$$

4. (ENEM - 2008) O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo, e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

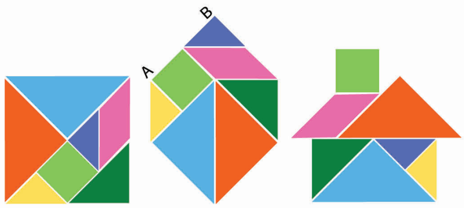


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

a. 4 cm^2

b. 8 cm^2

c. 12 cm^2

d. 14 cm^2

e. 16 cm^2

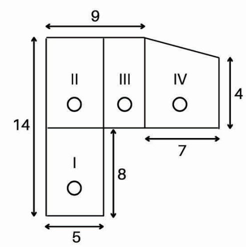
RESPOSTA: B.

O lado AB é formado pelos lados de um quadrado e um triângulo, que podem ser encontrados na diagonal do quadrado na figura 1 (que foi dividido para formar o tangram). Sabendo que as diagonais de um quadrado se encontram em seus pontos médios, essa diagonal mede 4 cm. Como as diagonais do quadrado são congruentes, nesse caso, as duas medem 4 cm. Todo quadrado também é um losango, então, para calcular a área do quadrado da figura 1, faremos:

$$A_{Quadrado} = \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{16}{2} = 8\ cm^2$$

Como as três figuras têm a mesma área, pois são formadas pelas sete peças do tangram, temos que a área da figura 3 também é igual a $8\ cm^2$.

5. (ENEM - 2012) Jorge quer instalar aquecedores no seu salão de beleza para melhorar o conforto dos seus clientes no inverno. Ele estuda a compra de unidades de dois tipos de aquecedores: modelo A, que consome 600 g/h (gramas por hora) de gás propano e cobre 35 m^2 de área, ou modelo B, que consome 750 g/h de gás propano e cobre 45 m^2 de área. O fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área menor do que a da sua cobertura. Jorge vai instalar uma unidade por ambiente e quer gastar o mínimo possível com gás. A área do salão que deve ser climatizada encontra-se na planta seguinte (ambientes representados por três retângulos e um trapézio).



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Avaliando-se todas as informações, serão necessários

a. quatro unidades do tipo A e nenhuma unidade do tipo B.

b. três unidades do tipo A e uma unidade do tipo B.

c. duas unidades do tipo A e duas unidades do tipo B.

d. uma unidade do tipo A e três unidades do tipo B.

e. nenhuma unidade do tipo A e quatro unidades do tipo B.

RESPOSTA: C.

Calculando-se as áreas de cada ambiente é possível identificar aquele cuja área seja menor ou igual a 35 m2 onde, portanto, deve ser utilizado o aparelho do modelo A, pois cobrirá a área e será mais econômico na utilização do gás. Para os ambientes que tiverem área entre 35 e 45 m2, o modelo B é o apropriado, apesar de gastar mais gás propano, é o que cobre a área. Os ambientes I, II e III têm a forma retangular e o IV tem a forma de um trapézio. Assim, temos:

$$A_I = 8 \cdot 5 = 40\ m^2, \quad A_{II} = (14 - 8) \cdot 5 = 30\ m^2, . \quad A_{III} = 6 \cdot (9 - 5) = 24\ m^2,$$

$$A_{IV} = \frac{(6 + 4) \cdot 7}{2} = \frac{70}{2} = 35\ m^2$$

Dessa forma, para obedecer às recomendações do fabricante, conclui-se que o modelo A será utilizado nos ambientes II e III e o modelo B nos ambientes I e IV.

FINALIZANDO

Por fim, a atividade 6 repete a proposta de elaboração de problemas envolvendo cálculo de áreas, contudo, dessa vez, relacionando medidas de terrenos. Além disso, há a indicação de elaboração de um painel, presencial ou virtual, para que os estudantes escolham a situação que irão resolver. Dessa forma, entendemos que serão identificados os conceitos e cálculos em que ainda apresentam lacunas ou dificuldades. A socialização final visa superar tais dificuldades e avaliar as aprendizagens que efetivamente foram desenvolvidas.

6. Para esta atividade você terá que elaborar uma situação-problema em que a resolução seja por meio do cálculo de área de quadriláteros, triângulos ou círculos. Contudo, a recomendação aqui é que seja pensado em um contexto envolvendo medidas de terreno. Após a elaboração, haverá a produção de um painel na sala (ou virtual) com as questões criadas por todas as duplas de estudantes. Desse painel, cada dupla deverá escolher um problema para resolver para que, em seguida, seja sorteado um outro problema para cada dupla corrigir. Por fim, haverá o momento de socialização dessas correções. Desse modo, a dinâmica vai seguir as seguintes etapas:

1ª etapa: elaborar o problema;

2ª etapa: organizar o painel (presencial ou virtual);

3ª etapa: escolher um problema para resolver (só não pode escolher o seu próprio problema);

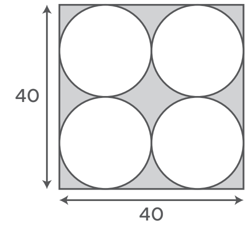
4ª etapa: resolver o problema escolhido;

5ª etapa: realizar sorteio para o problema que cada dupla vai corrigir;

6ª etapa: realizar a verificação/correção da resolução feita por outra dupla;

7ª etapa: socializar as observações identificadas nas correções.

Mais uma atividade cuja resposta é de natureza pessoal, no entanto, sugerimos um exemplo de possível problema a ser criado: Uma praça está sendo revitalizada. O terreno completo tem a forma de um quadrado com 40 m de lado. Nele, existem quatro ilhas cobertas, que são quiosques para serem usados em eventos pelos visitantes, como mostra a figura.



Nessas condições, calcule a área da região que ainda não tem cobertura nessa praça.

$$A_{Terreno} = 40 \cdot 40 = 1600\ m^2$$

$$A_{Ilha} = 3{,}14 \cdot 10^2 = 3{,}14 \cdot 100 = 314\ m^2$$

Assim, a área que ainda está descoberta é de:

$$A_{Descoberta} = 1600 - 4 \cdot 314 = 1600 - 1256 = 344\ m^2$$

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

ANOTAÇÕES

2ª SÉRIE - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

OLÁ, PROFESSOR!

Os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam o princípio multiplicativo da contagem e a soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.

As escolhas das habilidades foram feitas por meio das análises realizadas dos resultados de avaliações internas e externas (diagnóstico de entrada e SARESP), que revelaram fragilidades dos estudantes com relação à habilidade: (EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	Qual é a chance?
3ª e 4ª/ 90 min	Cardápios e o princípio multiplicativo
5ª e 6ª/ 90 min	Soma de probabilidades do espaço amostral
7ª e 8ª/ 90 min	Probabilidades em contextos variados

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

AULAS 1 E 2 – QUAL É A CHANCE?

Objetivos das aulas
- Definir o espaço amostral de um experimento aleatório;
- Compreender a probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis;
- Calcular a probabilidade de eventos diversos.

Para as Aulas 1 e 2 dessa Sequência de Atividades, trazemos uma proposta em que os conceitos matemáticos vão sendo abordados à medida que você for realizando as atividades. Para isso, as discussões com a turma são indispensáveis. Acompanhe as orientações do professor, leia tudo com atenção e participe ativamente do processo de resolução e socialização.

1. Reflexões

Há situações que nos levam a refletir sobre contextos cujo interesse é pensar sobre a chance de algo acontecer. Essa chance, em Matemática, pode ser verificada por meio do cálculo de probabilidades. Note que há situação em que temos a certeza do que vai acontecer, no entanto, existem outras que são incertas. O centro das atenções do estudo das probabilidades é, especialmente, verificar a chance de ocorrência dos chamados *experimentos aleatórios*, ou seja, daqueles fenômenos que não temos a certeza do seu resultado. *Experimentos aleatórios* são aqueles em que o resultado não pode ser previamente determinado com certeza. Por exemplo:

a. Se você jogar uma moeda para o alto, terá a certeza de qual face cairá voltada para cima?

Não teremos a certeza de qual face cairá voltada para cima, poderá ser cara ou coroa.

b. Lançando um dado comum, numerado de 1 a 6, é possível, antes que ele caia, dar a certeza de qual face ficará voltada para cima?

Não podemos afirmar, com toda a certeza, qual face cairá voltada para cima, pode ser qualquer um dos números 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

INICIANDO

As atividades previstas para as Aulas 1 e 2 foram pensadas e estão sendo propostas para serem desenvolvidas por meio de reflexões que visam o estudo introdutório da probabilidade. Nesse sentido, a sugestão é que discussões teóricas associadas a esse conceito aconteçam no decorrer da realização das atividades. Então, para começar, a conversa pode partir de questionamentos como: "ao sortear um estudante nessa turma, qual é a chance de ser uma menina? Qual é a chance desse estudante ter 15 anos? E qual é a chance de ser sorteado um estudante que está cursando a 1ª série do Ensino Médio?" A proposta, professor, é promover uma discussão sobre contextos que relacionam a chance de algo acontecer. Sugerimos que sejam utilizados eventos simples, eventos certos e eventos impossíveis. Feitas tais discussões, consideramos que a realização em duplas das atividades propostas, com posterior correção de forma coletiva, é um bom caminho.

AULAS 1 E 2 – QUAL É A CHANCE?

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

DESENVOLVENDO

As **Atividades 1, 2 e 3** buscam discutir o significado de probabilidade e o conceito de experimentos aleatórios, espaço amostral e evento. Dessa forma, a indicação é que os exemplos que os estudantes devem propor e as perguntas que têm para responder sejam relacionadas aos conceitos apresentados nos textos introdutórios dos enunciados de cada atividade. A socialização dos exemplos com toda a turma é indispensável, então, incentive a participação efetiva dos estudantes para sinalizarem seus entendimentos sobre os assuntos abordados e a possibilidade de relacioná-los com situações reais. São usados os casos de lançamentos de moedas e de dados, e partidas de futebol, contudo, cabe citar outros exemplos de experimentos aleatórios para que sejam identificados o espaço amostral e possíveis eventos.

c. No início de uma partida de futebol, por exemplo, é possível já acertar o placar final?

Antes de a partida terminar, não podemos dar a certeza de qual será o placar final.

d. Podemos concluir que lançamento de moeda, lançamento de dado e partidas de futebol são experimentos aleatórios? Justifique a sua resposta.

Sim, são experimentos aleatórios porque esses três casos são fenômenos em que não temos como garantir o resultado previamente.

2. Não podemos garantir, previamente, os resultados de experimentos aleatórios. Contudo, podemos formar um conjunto em que os elementos são todos os resultados possíveis de um experimento desse tipo. Tal conjunto é chamado de espaço amostral. Dessa forma, responda: Qual é o *espaço amostral* do experimento lançamento de uma moeda? E no caso do lançamento de um dado comum, qual é o espaço amostral?

Para o lançamento de uma moeda, o espaço amostral é: $U=\{cara, coroa\}$.
Para o lançamento de um dado comum, o espaço amostral é: $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3. Cada elemento do espaço amostral, isto é, cada possível resultado de um experimento aleatório recebe o nome de evento. Vejamos alguns exemplos para os experimentos usados até aqui:

Experimento	Evento 1	Evento 2
Lançamento de uma moeda.	A face voltada para cima é cara.	A face voltada para cima é coroa.
Lançamento de um dado comum.	A face voltada para cima é o número 6.	A face voltada para cima é um número primo.
Partida de futebol entre os times A e B.	O resultado final foi 2 x 1.	A partida deu empate.

Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. Seria possível algum outro evento para o experimento *Lançamento de uma moeda*?

Não, pois essas duas são as únicas possibilidades para o experimento *Lançamento de uma moeda*, ou seja, lançando-se uma moeda, a face voltada para cima ou será cara, ou será coroa.

b. Indique algum outro exemplo de evento correspondente ao experimento *Lançamento de um dado comum*.

A título de exemplo, podemos ter **a face voltada para cima é um número natural menor do que 4.**

c. Referente ao evento *Partida de futebol entre os times A e B*, são possíveis muitos outros eventos. Exemplifique um deles.

Como exemplo, é possível citar **o placar final de 1 x 0.**

4. O número que informa a chance de um evento acontecer, ou seja, a probabilidade, pode ser calculada por meio da razão entre o número de elementos do evento e o número de elementos do espaço amostral. Observe: sorteando-se, ao acaso, um dia da semana, qual é a probabilidade de ocorrer um dia em que a letra inicial:

a. É *s*?

Dos sete dias da semana, três (segunda-feira, sexta-feira e sábado) começam com a letra *s*, então, a probabilidade de ser sorteado um dia com essa inicial é $\frac{3}{7}$.

b. É *t*?

Há apenas um dia cuja letra inicial é *t* (terça-feira), portanto a probabilidade de sortear um dia que começa com *t* é $\frac{1}{7}$.

c. É uma *vogal*?

Nenhum dos dias da semana são escritos com a primeira letra sendo vogal, assim, a probabilidade é 0.

IMPORTANTE

Perceba que o evento é um subconjunto do espaço amostral. Isso significa que a quantidade de elementos de um evento sempre será, no máximo, igual à quantidade de elementos do espaço amostral correspondente. Para ambos os conjuntos, a quantidade mínima de elementos é zero; consequentemente, a razão entre tais quantidades é um número real entre zero e um. Logo, podemos concluir que a probabilidade de um evento é um número real pertencente ao intervalo: $0 \leq P(E) \leq 1$. Assim, teremos:

$$P(E) = \frac{quantidade\ de\ elementos\ do\ evento}{quantidade\ de\ elementos\ do\ espaço\ amostral} = \frac{n(E)}{n(U)}$$

É comum a utilização de E para evento, U para espaço amostral (ou Universo), $P(E)$ para probabilidade do evento E, $n(E)$ para a quantidade de elementos do evento e $n(U)$ para a quantidade de elementos do espaço amostral (ou Universo).

Após essas, as **Atividades de 4 a 10** se voltam para o cálculo de probabilidades simples. Partem do entendimento da probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Assim, sugerimos que tais atividades sejam realizadas em duplas para que os estudantes possam trocar experiências. Há ainda a indicação de retomada sobre as relações entre porcentagens, números decimais e frações. Caso considere pertinente, converse com a turma sobre tais relações, associando-as ao cálculo de probabilidades.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, nesse momento, consideramos pertinente uma retomada sobre relações entre porcentagens, números decimais e frações. Sugerimos que converse com os estudantes sobre o significado de porcentagens como 100%, 50%, 25%, 10% e 1%, indique cada uma na forma de fração e a representação em formato de número decimal, relacionando-as.
Pode partir de ideias como:

Daqui para frente é com você. As atividades seguintes solicitam que seja determinada a probabilidade de eventos diversos ocorrerem. Faça uma leitura atenta, realize os cálculos necessários e responda a todos os itens.

5. Sorteando-se, ao acaso, uma das letras da palavra **MATEMÁTICA**, qual é a probabilidade de sair uma **consoante**? E a letra **A**? E a letra **M**?

Probabilidade de sair uma consoante: $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Probabilidade de sair a letra A: $\frac{3}{10}$

Probabilidade de sair a letra M: $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

6. Em uma sala de cinema com 80 pessoas, 45 são homens e 35 são mulheres. Qual é a probabilidade de a primeira pessoa a sair dessa sala ser homem?

Como são 45 homens de um total de 80 pessoas, a probabilidade de a primeira pessoa a sair ser homem é: $\frac{45}{80} = \frac{9}{16}$.

7. Um centro de convenções disponibiliza cinco andares de estacionamento para os seus visitantes: E1, E2, E3, E4 e E5. Ao entrar nesse local, qual é a probabilidade de alguém utilizar um andar de estacionamento com número ímpar?

Dos cinco andares de estacionamento, três têm numeração ímpar, logo, a probabilidade será $\frac{3}{5}$

ANOTAÇÕES

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, nesse momento, consideramos pertinente uma retomada sobre relações entre porcentagens, números decimais e frações. Sugerimos que converse com os estudantes sobre o significado de porcentagens como 100%, 50%, 25%, 10% e 1%, indique cada uma na forma de fração e a representação em formato de número decimal, relacionando-as. Pode partir de ideias como:

100% de um inteiro → corresponde a todo esse inteiro;

50% de um inteiro → corresponde à metade desse inteiro;

25% de um inteiro → corresponde à quarta parte desse inteiro;

10% de um inteiro → corresponde à décima parte desse inteiro;

1% de um inteiro → corresponde à centésima parte desse inteiro.

Além disso, é interessante relacionar:

$$100\% = \frac{100}{100} = 1$$

$$\mathbf{50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5}$$

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

8. Retomando a informação de que $0 \leq P(E) \leq 1$

► Esse intervalo nos indica que a menor probabilidade possível vale zero e a maior é igual a um. Dizer que a probabilidade de algum evento é zero, significa que não há chance dele acontecer. Por outro lado, se a probabilidade for igual a 1, é certa a sua ocorrência. Quando a probabilidade é zero, dizemos que é um evento impossível, e quando vale 1, temos um evento certo.

► Além disso, como a probabilidade é uma razão, podemos escrevê-la na forma de número decimal, como fração ou ainda em porcentagem.

A partir do exposto, veja o contexto abaixo e responda o que se pede.

- Um professor produziu uma planilha com as notas dos estudantes de suas três turmas em um exame.

NOTA	Nº DE ESTUDANTES
10,0	8
9,0 ou 9,5	19
8,0 ou 8,5	27
7,0 ou 7,5	36
6,0 ou 6,5	25
5,0 ou 5,5	5
Abaixo de 5,0	0

Um livro será sorteado entre todos esses estudantes. Qual é, então, a probabilidade de um estudante com pontuação maior ou igual a 7,0 ser sorteado?

Dos 120 (8 + 19 + 27 + 36 + 25 + 5) estudantes que fizeram o exame, 90 (8 + 19 + 27 + 36) alcançaram pontuação maior ou igual a 7,0. Portanto, a probabilidade de um estudante desse grupo ser sorteado é de: $\frac{90}{120} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%.$

FINALIZANDO

O encerramento das aulas pode acontecer com os estudantes exemplificando situações cujo cerne é o cálculo da chance de algo acontecer, identificando espaço amostral e eventos possíveis. Além disso, é importante que consigam identificar a quantidade de elementos de eventos e do espaço amostral para calcularem probabilidades simples por meio da razão entre tais quantidades. Dessa forma, pode-se perceber se os conceitos discutidos ficaram claros para a turma e também dúvidas que possam ter sido sinalizadas para que sejam pensadas intervenções viáveis para o esclarecimento.

9. Um casal planeja ter exatamente dois filhos. Considerando que esse casal consiga ter os dois filhos, qual é a chance de serem ambas meninas?

Para dois filhos, o espaço amostral, opções de sexo, é:

$U=\{(menina,menina),(menina,menino),(menino,menina),(menino,menino)\}$.

Dessa forma, das quatro opções possíveis, apenas uma considera duas meninas, então a probabilidade de o casal ter duas filhas é de: $\frac{1}{4}=25\%$

10. (ENEM - 2015) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

a. $\frac{1}{100}$

b. $\frac{19}{100}$

c. $\frac{20}{100}$

d. $\frac{21}{100}$

e. $\frac{80}{100}$

Resposta: C

Do total de 100 senhas, 20 são numeradas de 1 a 20, então a probabilidade de uma dessas ser sorteada é de: $\frac{20}{100}$.

AULAS 3 E 4 – CARDÁPIOS E O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Objetivos das aulas
- Utilizar o princípio multiplicativo em contextos variados;
- Aplicar o princípio multiplicativo para determinar a quantidade de elementos de um evento e do espaço amostral.

Sobre alguns problemas de contagem

São comuns as situações em que há a necessidade de utilizarmos estratégias matemáticas para solucionar problemas que se relacionam à ideia de contagem. Por muitas vezes, a contagem direta, elemento a elemento, é suficiente. Contudo há casos em que a quantidade de elementos é grande e, então, se o interesse não for conhecer todos os agrupamentos envolvidos, mas sim a quantidade total deles, é melhor nos valer de ferramentas mais práticas para agilizar o processo e reduzir a chance de erro. As atividades previstas para essas aulas trazem situações inseridas em contextos como esses, portanto, lembre-se de fazer uma leitura muito atenciosa de cada item, estabeleça estratégias que julgar convenientes e execute-as para solucionar cada problema proposto.

1. Para organizar o almoço de uma escola de tempo integral, a equipe gestora, juntamente com as merendeiras, recebem um cardápio elaborado por nutricionista. Vamos, então, simular a tarefa de escolha do lanche semanal de uma escola. Para começar, veja as opções que foram sugeridas pela nutricionista:

Carboidrato	Proteína	Salada	Suco	Sobremesa
- Feijão - Lentilha - Arroz - Macarrão - Batata	- Frango - Carne moída - Peixe - Ovo	- Legumes com maionese - Salada fria	- Acerola - Abacaxi com hortelã - Goiaba	- Iogurte natural - Salada de frutas

Os diretores dessa escola estão contando com a apoio dos estudantes do Ensino Médio para a organização do cardápio de uma semana comemorativa. Assim, a tarefa deles é sugerir possibilidades de pratos que contenham, obrigatoriamente, dois tipos de carboidrato diferentes, uma porção de proteína, uma salada, uma opção de suco e uma sobremesa para cada estudante. Nessas condições, faça o que se pede:

INICIANDO

Os contextos utilizados para essas aulas preveem o uso do princípio multiplicativo para a resolução de problemas de contagem. Nessa perspectiva, professor, apontamos que promova um diálogo sinalizando a importância desse princípio como prática que favorece processos de contagem em situações cujo interesse não é identificar quais são os agrupamentos formados, mas sim, quantos são. É pertinente a leitura do texto introdutório de maneira coletiva. Além dessas, outras situações podem ser pensadas e discutidas com a turma para que percebam o interesse por identificar a quantidade total desses agrupamentos, sem necessariamente escrever todos eles, possibilitando a realização de uma contagem direta. Nessa conversa inicial, os estudantes podem ser informados que as atividades para essas aulas envolverão contagem e que eles poderão utilizar a calculadora para agilizar os cálculos, caso considerem necessário.

AULAS 3 E 4 – CARDÁPIOS E O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante e calculadora.

DESENVOLVENDO

Como a **Atividade 1** utiliza uma situação muito possível na vida real, sugerimos que seja realizada em dupla para que haja troca de experiências e discussões entre os estudantes. A realização dessa atividade pode servir como prática, em que os estudantes deverão elaborar cardápios que atendam às condições estabelecidas no enunciado. Eles poderão registrar na lousa possíveis exemplos para esse contexto em particular e informar outras situações similares, como escolha de conjuntos de roupas, de lanches, entre outros tantos. Pensamos, professor, que uma rica discussão seria sobre árvores de possibilidades. Desse modo, acreditamos que poderia registrar na lousa exemplos de tais árvores e, ainda, convidar os estudantes para pensar a respeito e produzir as suas próprias, finalizando com a socialização pela turma.

A **Atividade 2** apresenta informações teóricas sobre o princípio multiplicativo e um exemplo de situação resolvida que o utiliza. A conversa, a partir dessa leitura, tem um papel muito importante nesse estudo. Incentive a participação de todos.

As **Atividades 3, 4, 5 e 6** são itens do SARESP e do ENEM, em que o princípio multiplicativo aparece como ferramenta que favorece a resolução. Ressalte a importância da leitura atenciosa dos enunciados,

a. Estaria correto dizer que uma possibilidade de cardápio poderia ser: lentilha, arroz, peixe, salada fria, suco de goiaba e iogurte natural? Explique a sua resposta.

Sim, essa seria uma opção porque atende ao que é solicitado, ou seja, utiliza os itens sugeridos pela nutricionista e inclui dois tipos de carboidrato diferentes, uma porção de proteína, uma salada, uma opção de suco e uma sobremesa.

b. Cite outro exemplo de cardápio, utilizando apenas as opções fornecidas pela nutricionista e atendendo às condições estabelecidas.

A resposta é pessoal, mas podemos considerar algumas opções, como feijão, macarrão, ovo, salada de legumes com maionese, suco de acerola e salada de frutas.

c. É possível calcular o número total de cardápios que pode ser montado a partir das informações dadas, sem ter que, necessariamente, escrever todos eles? Justifique a sua resposta.

Sim, basta multiplicar a quantidade de itens para escolha de cada possibilidade. Assim, teremos: $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 960$ opções de cardápios diferentes.

2. Diversos são os contextos cujo interesse é contar o número total de possibilidades envolvidas sem ter que, necessariamente, explicitar todas elas. Até porque, há ocasiões em que mostrar todas as possibilidades para, a partir daí, contá-las, é inviável por se tratar de grandes quantidades. Para situações em que isso acontece, o *princípio multiplicativo* é um excelente dispositivo para o cálculo dessas possibilidades.

O *Princípio Multiplicativo* ou *Princípio Fundamental da Contagem* é uma ferramenta muito usada para solução de problemas de contagem, sobretudo sem a necessidade de enumerar todos os elementos dessa contagem. Na prática, aplicá-lo consiste em dividir o evento em etapas independentes, contar a quantidade de maneiras possíveis de cada etapa e multiplicar esses resultados para determinar o total de possibilidades diferentes de ocorrência do evento.

Podemos ainda explicitar o *Princípio Multiplicativo* ou *Princípio Fundamental da Contagem* a partir da ideia de que, se um acontecimento ocorre de P_1 modos diferentes, outro ocorre de P_2 modos diferentes, e assim sucessivamente, então o número de vezes que os $\underline{n}$ acontecimentos podem ocorrer simultaneamente é: $P_1 . P_2 . P_3 . \dots . P_n$.

Assim, por exemplo, se considerarmos o tipo de placas usadas nos automóveis do Brasil, em que constam três letras do alfabeto e quatro algarismos, podemos pensar que o total possível de placas diferentes é de:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175.760.000.$$

Então, alguém que queira criar uma senha com seis dígitos diferentes, utilizando apenas algarismos, tem quantas opções diferentes?

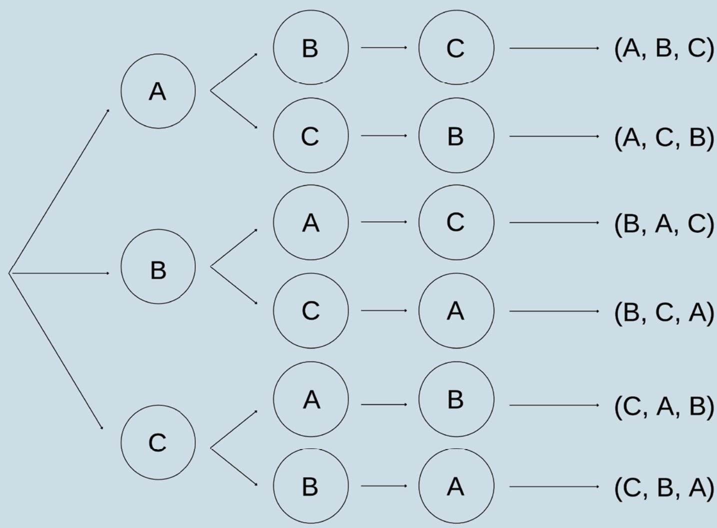
Utilizando apenas algarismos, há dez opções para cada dígito, no entanto, como eles devem ser diferentes, à medida que usamos um algarismo, este já não pode ser considerado para o dígito seguinte. Assim, ficaremos com

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151.200$ opções de senhas diferentes.

bem como a contagem correta das possibilidades de cada elemento que forma os agrupamentos envolvidos. Destacamos a relevância da socialização de como cada dupla pensou sobre o problema. As **Atividades 7 e 8** propõem cálculo de probabilidades, no entanto, o uso do princípio multiplicativo se dá para a determinação das quantidades de elementos do evento e do espaço amostral. Situações desse tipo, ou seja, envolvendo criação de senhas e formação de números a partir de algumas condições. Aparecem, costumeiramente, nos livros didáticos, em exames de larga escala e em processos seletivos de modo geral.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Para enriquecer as discussões, sugerimos uma conversa sobre a árvore de possibilidades, como um desenho/esquema/diagrama usado para representar situações de contagem. É interessante que seja apresentado aos estudantes que esta é uma rica ferramenta, com forte poder ilustrativo, para explicitarmos todas as possibilidades relativas a alguns contextos de contagem. Indicamos que sejam utilizados contextos, como a escolha de peças de roupa para formar um conjunto completo, a escolha de itens de comida para formação de cardápios, os caminhos para se deslocar de uma localidade a outra, entre outras tantas opções. A título de exemplo, temos essa árvore de possibilidades:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

ANOTAÇÕES

3. (ENEM) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada. O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

a. 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

b. 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

c. 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

d. 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

e. 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Resposta: A

A quantidade total de respostas possíveis pode ser calculada por meio do produto das quantidades de personagens, objetos e cômodos.

$5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$

Como o número de alunos é 280, então a diferença entre a quantidade de número de alunos e a quantidade de possibilidades é $280 - 270 = 10$, ou seja, há 10 alunos a mais do que o total de possibilidades de respostas diferentes.

4. (ENEM) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela abaixo.

grupos taxonômicos	número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	**209**

T&C Amazônia, ano 1, n.º 3, dez./2003

FINALIZANDO

Para a finalização das aulas, pode-se retomar as atividades desenvolvidas e observar os processos que foram utilizados na resolução de cada uma. Nessa ocasião, o envolvimento dos estudantes tem muito a contribuir com a aprendizagem e ainda esclarecer a você, professor, que dificuldades eles sentiram e dúvidas que ficaram. Indicamos que ressalte o uso do princípio multiplicativo em contextos reais e diversos, e que provoque os estudantes a pensarem sobre outros exemplos.

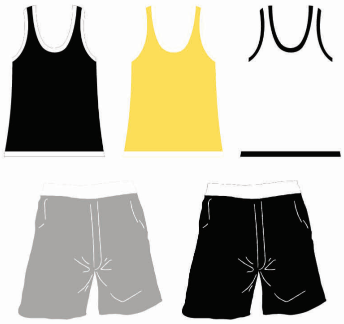
Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três espécies de mamíferos – uma do grupo dos Cetáceos, outra do grupo dos Primatas e a terceira dos grupos dos Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

a. 1320
b. 2090
c. 5840
d. 6600
e. 7245

Resposta: A

Como, pela tabela, existem 2 cetáceos, 20 primatas e 33 roedores, o total de conjuntos distintos em que há um de cada dessas espécies é dado por $2 \cdot 20 \cdot 33 = 1320.$

5. (SARESP – 2015 adaptada) Para frequentar as aulas de basquete, Rodrigo tem três camisetas, uma preta, uma amarela e uma branca, e duas bermudas, uma cinza e outra preta.

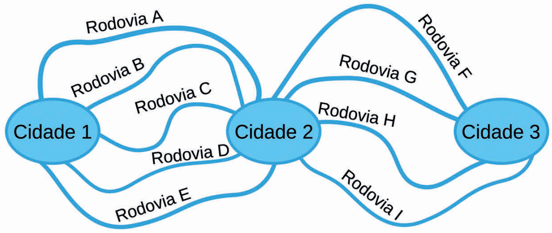


Fonte: Canva

De quantas maneiras diferentes Rodrigo pode se vestir para as aulas?

Como Rodrigo tem 3 opções de camisetas e 2 opções de bermudas, ele poderá escolher $3 \cdot 2 = 6$ **conjuntos diferentes para vestir.**

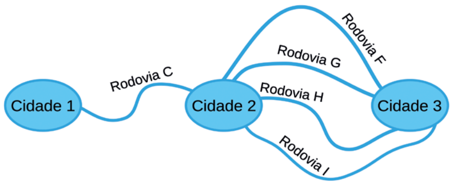
6. (SARESP – 2015 adaptada) Há 5 rodovias ligando as cidades 1 e 2, e há mais 4 rodovias que ligam as cidades 2 e 3, conforme ilustra a figura a seguir.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Uma maneira de chegar à cidade 3 partindo da cidade 1 é, por exemplo, tomar a rodovia A, e depois tomar a rodovia F. De quantas maneiras diferentes um motorista pode partir da cidade 1 e chegar até a cidade 3, passando pela cidade 2?

Para cada possível caminho escolhido para ir da cidade 1 até a cidade 2, há quatro possibilidades de caminhos a serem escolhidos para o trajeto da cidade 2 à cidade 3. Por exemplo,



Dessa forma, o total de trajetos pode ser obtido fazendo: $5 \cdot 4 = 20$. Portanto, serão 20 trajetos diferentes possíveis.

7. No mundo atual, em que contextos virtuais fazem parte da vida de uma quantidade expressiva da população, muitas são as situações em que temos que criar senhas. Bancos, acesso às instituições de ensino, redes sociais, entre outros, são exemplos de situações cujo acesso é por meio de login e senha. É uma ferramenta de segurança, e, o aconselhável é que sejam senhas diferentes e que utilizem algarismos, letras e caracteres especiais, tudo isso para reduzir a chance de clonagem. Imagine que hoje você precise criar uma nova senha. Ela deve ser composta por três algarismos distintos, duas letras diferentes (não há diferença entre maiúsculas e minúsculas) e um caractere especial escolhido entre @, & e *. Além disso, em cada acesso, você tem apenas três tentativas de acerto dessa senha. Caso essa quantidade se exceda, ela será bloqueada. Nessas condições, qual é a probabilidade de alguém descobrir a sua senha só utilizando tentativas?

Seguindo as condições estabelecidas, a senha terá seis dígitos no total, sendo três algarismos distintos, duas letras diferentes (não há diferença entre maiúsculas e minúsculas) e um caractere especial escolhido entre @, & e *. Assim, o total de senhas possíveis será:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 3 = 1.404.000$$

Desse modo, a probabilidade de alguém descobrir a senha apenas tentando é de:

$$\frac{3}{1.404.000} = \frac{1}{468.000}$$

8. Ao se escolher, ao acaso, um número com quatro dígitos distintos usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, qual é a probabilidade de se escolher um número ímpar?

Usando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 para formar números com quatro dígitos diferentes, temos um total de: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ números.

Dessa quantidade, temos ímpares: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$ números.

Assim, a probabilidade de se escolher um número ímpar desse total é:

$$\frac{72}{120} = \frac{3}{5}$$

AULAS 5 E 6 – SOMA DE PROBABILIDADES DE UM ESPAÇO AMOSTRAL

Objetivos das aulas

- Investigar situações envolvendo soma de probabilidades;
- Reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1;
- Resolver situações-problema envolvendo soma de probabilidades de um espaço amostral.

1. Em uma escola de Ensino Médio, por causa das medidas de segurança e distanciamento social, os estudantes se revezam entre aulas presenciais e atividades remotas, de modo que todos participam nessas modalidades por uma semana, invertendo-se os grupos na semana seguinte.

Imagine uma turma dessa escola com 36 estudantes. Desses, 21 optaram por começar voltando às atividades presenciais, enquanto os demais permanecem na modalidade remota durante uma semana. Na semana seguinte, esses 21 ficam em atividades remotas e os outros participam das aulas presencialmente. Essa organização fez parte da vida dessa escola por algumas semanas.

Considere agora que um dos professores irá realizar um sorteio dentre todos os estudantes dessa turma. Para garantir que realmente todos tenham a mesma chance de ganhar, o professor realizou o sorteio incluindo o nome de todos apenas uma vez.

A partir desse contexto, responda:

a. Qual é a probabilidade de ser sorteado um estudante que participou das atividades presencialmente na primeira semana?

Dos 36 estudantes da turma, 21 voltarão às atividades presenciais na semana inicial, então a probabilidade de ser sorteado um dentre esses é de

$$\frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$$

AULAS 5 E 6 – SOMA DE PROBABILIDADES DO ESPAÇO AMOSTRAL

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Atividade a ser realizada individualmente.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

b. Qual é a probabilidade de um estudante que começou em atividades remotas ser contemplado nesse sorteio?

Do total da turma, 15 começaram em atividades remotas, logo, a probabilidade de um estudante desse grupo ser contemplado no sorteio é

$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

c. Que resultado se obtém ao somarmos essas duas probabilidades? Escreva um breve comentário explicando o significado dessa soma.

Somando-se essas duas probabilidades, temos: $\frac{7}{12} + \frac{5}{12} = \frac{12}{12} = 1.$ A soma obtida foi 1, significando que os eventos considerados são complementares, ou seja, juntos correspondem ao espaço amostral.

SOMA DE PROBABILIDADES (Eventos Complementares)

Um evento pode ocorrer ou não. Assim, a soma da probabilidade de que ele ocorra (sucesso) com a probabilidade de que ele não ocorra (insucesso) é igual a 1. Eles são eventos complementares.

Em toda distribuição de probabilidades, a soma das probabilidades de cada evento é igual a 1, ou seja, corresponde ao espaço amostral.

2. (ENEM – 2011 adaptada)

PARTE I: Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida). O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada. Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é

a. Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.

b. Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.

INICIANDO

Para as Aulas 5 e 6, os estudantes vão se deparar com situações para investigar a ideia de soma de probabilidades de um espaço amostral. O início pode ser com discussão sobre a ideia de eventos complementares. Por exemplo, proponha a situação: “aqui na sala temos n estudantes com idade até 15 anos e m estudantes com mais de 15 anos. Qual é a probabilidade de, aleatoriamente, ser sorteado um estudante com até 15 anos? E a probabilidade de ser sorteado um estudante com mais de 15 anos? Qual é a soma dessas probabilidades?” Ao final desses questionamentos, a conversa deve se encaminhar para o entendimento de que os eventos considerados no exemplo, ou seja, estudantes dessa sala com até 15 anos e estudantes dessa sala com mais de 15 anos, formam o espaço amostral, já que todos os alunos ou pertencem a um evento, ou ao outro. E nesse sentido, a percepção de que a soma das probabilidades desses eventos deve ser igual a 1 já pode ser incentivada nesse momento. Outros exemplos podem ser sugeridos tanto por você, quanto pelos estudantes da turma.

DESENVOLVENDO

A **Atividade 1** traz um contexto muito próximo à realidade atual, em que os estudantes de uma escola estão participando de atividades em contexto presencial e também em contexto remoto, revezando-se a cada semana. Após a introdução com os exemplos iniciais, a resolução dessa atividade pode ser encaminhada para que os estudantes a cumpram individualmente. Sugerimos que seja disponibilizado tempo para a leitura detalhada e a resolução completa dos itens a, b e c, com posterior leitura coletiva e socialização das respostas pelos estudantes. As conclusões das ideias discutidas até esse momento podem acontecer a partir da leitura do texto SOMA DE PROBABILIDADES, que aparece logo após a **Atividade 1**. Cumpridas essas etapas, indicamos a leitura coletiva e criteriosa de cada enunciado das **Atividades 2, 3 e 4**. Depois, é importante a disponibilização de tempo para a resolução dessas atividades e, em seguida, a verificação dos caminhos utilizados por cada estudante com vistas às soluções. As correções podem ser feitas de maneira oral ou com registro na lousa, mas é indispensável que defendam as suas ideias por meio de argumentos matemáticos.

c. Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.

d. Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo.

e. Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

Resposta: C
Vejamos as possibilidades de cada um vencer a partir das escolhas que fizeram:
Arthur = soma 12: {(1,11); (2,10); (3,9); (4,8); (5,7)} (5 possibilidades);
Bernardo = soma 17: {(2,15); (3,14); (4,13); (5,12); (6,11); (7,10); (8,9)} (7 possibilidades);
Caio = soma 22: {(7,15); (8,14); (9,13); (10,12)} (4 possibilidades);
Logo, dentre os três, Bernardo é o que apresenta a maior chance de vencer.

PARTE II: Considerando que o espaço amostral dessa situação é o conjunto formado por todas as possibilidades de Arthur, Bernardo e Caio, responda:

a. Qual é a probabilidade de o jogo ser vencido por:

- Arthur?
- Bernardo?
- Caio?

Arthur: $\frac{5}{16}$ **Bernardo:** $\frac{7}{16}$ **Caio:** $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

b. Qual é a soma dessas probabilidades? Explique a sua resposta.

A soma dessas probabilidades é 1, já que todas juntas formam o espaço amostral da situação em questão. Para conferir: $\frac{5}{16} + \frac{7}{16} + \frac{4}{16} = \frac{16}{16} = 1.$

3. (ENEM – 2010) A figura I abaixo mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.

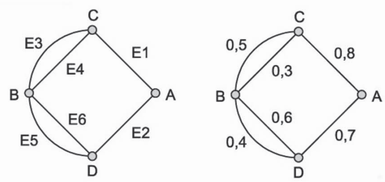


Figura I   Figura II

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível. O melhor trajeto para Paula é

a. E1E3.

b. E1E4.

c. E2E4.

d. E2E5.

e. E2E6.

Resposta: D

Probabilidade de engarrafamento + probabilidade de não haver engarrafamento = 1

Probabilidade de engarrafamento = 1 - probabilidade de não haver engarrafamento.

Analisando cada uma das alternativas de resposta, temos:

a) E1E3 = $1 - 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

b) E1E4 = $1 - 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 1 - 1{,}4 = 0{,}86$

c) E2E4 não existe.

d) E2E5 = $1 - 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$

e) E2E6 = $1 - 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$

A menor probabilidade é do trecho E2E5, letra D.

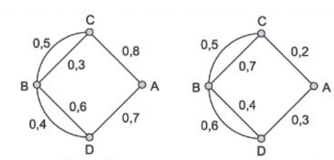


Figura II   sem congestionamento

Fonte: elaborado para fins didáticos.

4. Dois irmãos vão mergulhar no oceano para pescar. O mais velho tem $\frac{3}{7}$ de chance de encontrar algum peixe grande, o mais jovem tem $\frac{2}{7}$ de chance e a probabilidade de os dois encontrarem bons peixes é de $\frac{1}{7}$. Qual é a probabilidade de os dois irmãos não pescarem peixe algum?

Pela ideia de evento complementar, temos que:

A probabilidade de ambos não pescarem peixe algum é: $1 - \frac{3}{7} - \frac{2}{7} - \frac{1}{7} = \frac{7-3-2-1}{7} = \frac{1}{7}$.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, promova uma conversa em que os estudantes possam dar seus próprios exemplos de situações que relacionam probabilidades e soma de probabilidades. Consideramos de suma importância o incentivo à participação oral dos estudantes para que sinalizem sobre as dúvidas ou dificuldades que tenham enfrentado, além de relacionarem os estudos de hoje com aqueles desenvolvidos nas aulas anteriores. Nesse sentido, cabe retomar o conceito de experimento aleatório, espaço amostral, evento e probabilidade nessas aulas, com a indicação de que os estudantes informem cada elemento desse nos problemas resolvidos.

AULAS 7 E 8 – PROBABILIDADES EM CONTEXTOS VARIADOS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

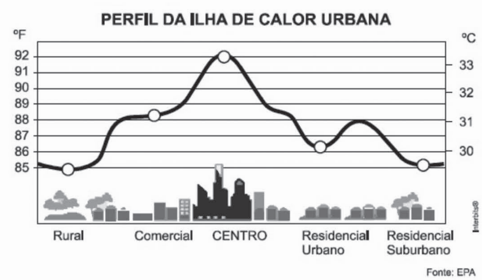
INICIANDO

Professor, para as Aulas 7 e 8, pensamos que o momento é retomar todos os conceitos estudados nas aulas dessa sequência e esclarecer possíveis dúvidas ou lacunas que possam ter ficado. Desse modo, sugerimos que o início da aula aconteça com a observação e o diálogo sobre as atividades realizadas até aqui. Indicamos que seja uma revisão orientada a partir da leitura das atividades anteriores, ressaltando-se os conceitos estudados e revendo as resoluções das atividades. Oriente, professor, que nas aulas desse dia, a proposta é resolver problemas que contemplam todos os conceitos relacionados à probabilidade que foram discutidos nas aulas anteriores, a saber: experimento aleatório, espaço amostral, evento, probabilidade simples, cálculo de probabilidade, princípio multiplicativo e soma de probabilidades.

AULAS 7 E 8 – PROBABILIDADES EM CONTEXTOS VARIADOS

Objetivos das aulas
- Solucionar situações-problema envolvendo cálculo de probabilidade;
- Utilizar o princípio multiplicativo para cálculo de probabilidades em situações-problema;
- Resolver situações-problema envolvendo o cálculo de probabilidades desconhecidas, usando o fato de que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

1. (ENEM - 2011) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

a. $\frac{1}{5}$

b. $\frac{1}{4}$

c. $\frac{2}{5}$

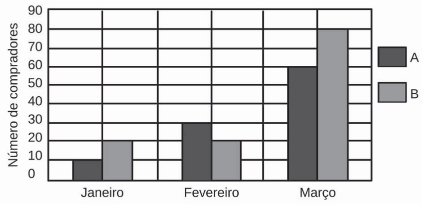
d. $\frac{3}{5}$

e. $\frac{3}{4}$

Resposta: E

Dentre as 4 opções, Rafael, de acordo com as condições do problema, terá que escolher entre Rural, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. Então, a probabilidade será $\frac{3}{4}$.

2. (ENEM – 2013 adaptada) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

Nos três meses considerados, o número de compradores do produto A foi 10 + 30 + 60 = 100, e o número de compradores do produto B, 20 + 20 + 80 =120. Logo, como no mês de fevereiro 30 pessoas compraram o produto A e 20 pessoas compraram o produto B, então a probabilidade pedida é igual a $\frac{30}{100} \cdot \frac{20}{120} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$.

3. (ENEM - 2012) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é:

a. Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

b. José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c. José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d. José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

e. Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

Resposta: D

Resultados que darão a vitória a José: {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}.

Resultados que darão a vitória a Paulo: {(1,3), (2,2), (3,1)}.

Resultados que darão a vitória a Antônio: {(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)}.

Logo, a resposta é a letra D, pois José tem a maior probabilidade de vencer, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

DESENVOLVENDO

Após essa conversa inicial, sinalize que serão seis itens do ENEM e do SARESP. Todos abordam probabilidade e envolvem conceitos e cálculos que foram estudados. Com os estudantes em duplas, organize tempo para que solucionem todas as atividades. Ressalte que, se julgarem necessário, podem rever as atividades das aulas anteriores, e que é indispensável a devida concentração. As atividades consideram contextos variados com objetivo de calcular probabilidades.

Nas duas primeiras, os dados devem ser retirados a partir da leitura dos gráficos fornecidos. Na **Atividade 1**, o cálculo da probabilidade é direto, enquanto na 2, é necessário realizar contagem e, em seguida, produto de probabilidades. A **Atividade 3** apresenta um contexto mais associado à contagem. Pede que seja observada a probabilidade a partir da verificação das possibilidades de somas dos números das faces superiores em dados lançados aleatoriamente. A **Atividade 4** apresenta probabilidades escritas em forma de porcentagem e, assim, é interessante revisar as relações entre porcentagens, números decimais e frações. A **Atividade 5** também requer essa revisão, já que solicita o cálculo direto de probabilidade, mas as opções de resposta aparecem em forma de percentuais. A última atividade, a de número 6, prevê o uso imediato do princípio multiplicativo para solucionar um problema de contagem. Destacamos que o tempo para correção deve ser proveitoso com a participação efetiva dos estudantes ao mostrarem suas respostas e explicarem a forma como pensaram. É uma oportunidade de utilizarem os conceitos matemáticos em processos de comunicação e argumentação.

FINALIZANDO

Por fim, o encerramento das aulas pode acontecer com um diálogo sobre a probabilidade como um número que informa a chance de algo acontecer. Nele, é possível apresentar exemplos que envolvem interesse em determinar as chances e também possibilitar que os estudantes exemplifiquem. Será um rico momento para identificar e esclarecer dúvidas, e ainda avaliar as aprendizagens que efetivamente foram desenvolvidas.

4. (ENEM - 2017) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região. Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

a. 0,075

b. 0,150

c. 0,325

d. 0,600

e. 0,800

Resposta C

Calculando a probabilidade de ele se atrasar, com e sem chuva, tem-se:

Com chuva: $P = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$

Sem chuva: $P = 0{,}7 \cdot 0{,}25 = 0{,}175$

A soma obtida será $0{,}15 + 0{,}175 = 0{,}325$.

5. (SARESP - 2013) Um estojo de maquiagem tem 12 tonalidades de batom, sendo 3 tonalidades cintilantes e as restantes cremosas. A probabilidade de se retirar, ao acaso, desse estojo um batom cintilante é:

a. 30%.

b. 25%.

c. 10%.

d. 20%.

Resposta B

Das 12 opções, existem 3 batons cintilantes. Logo, a probabilidade pedida vale

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ ou } 25\%.$$

6) (SARESP – 2013 adaptada) O líder de uma torcida organizada da seleção brasileira encomendou camisetas azuis, amarelas e brancas que devem ser usadas com bermudas jeans ou pretas. Sendo obrigatório o uso de uma camiseta e uma bermuda, qual é o número de combinações possíveis?

Multiplicando a quantidade de camisetas para escolher pela quantidade de bermudas, ocorre

$$3 \cdot 2 = 6$$

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

ANOTAÇÕES

2ª SÉRIE - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

OLÁ, PROFESSOR!

Os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de reconhecer e aplicar conceitos, propriedades e procedimentos em contextos que envolvam polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies.

As escolhas das habilidades foram feitas por meio das análises realizadas dos resultados de avaliações internas e externas (diagnóstico de entrada e SARESP), que revelaram fragilidades dos estudantes, com relação à habilidade: saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies. (Currículo Vigente 2020).

AULA/TEMPO	ATIVIDADE
1ª e 2ª/ 90 min	É regular ou não?
3ª e 4ª/ 90 min	Polígonos inscritos e circunscritos
5ª e 6ª/ 90 min	Polígonos regulares na pavimentação de superfícies
7ª e 8ª/ 90 min	Problemas com polígonos regulares

ANOTAÇÕES

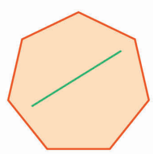
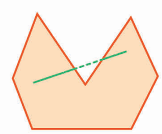
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

AULAS 1 E 2 – É REGULAR OU NÃO?

Objetivos das aulas
- Reconhecer um polígono regular;
- Compreender as propriedades dos polígonos regulares.

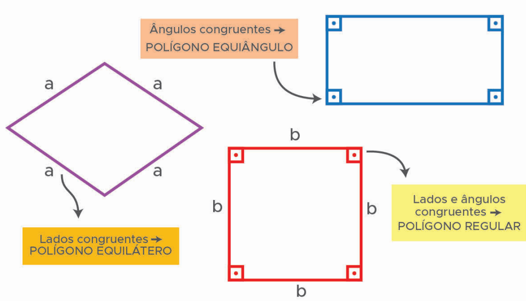
As atividades desta Sequência são destinadas ao estudo dos polígonos regulares. Dessa forma, você vai se deparar com atividades envolvendo o reconhecimento de um polígono regular, suas propriedades fundamentais, bem como a sua aplicação em situações-problema diversas.

1. Polígonos que apresentam todos os seus lados com a mesma medida são chamados de equiláteros, enquanto que aqueles cujos ângulos internos são todos iguais recebem o nome de polígonos equiângulos. Há ainda polígonos que atendem a essas duas propriedades, ou seja, têm todos os lados congruentes e todos os ângulos internos também congruentes. Existem polígonos em que quaisquer dois pontos situados no seu interior formam segmentos de reta que também estão completamente internos a esse polígono. Eles são chamados de polígonos convexos .

Exemplo de polígono convexo	Exemplo de polígono não convexo
	

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Polígonos convexos que são equiláteros e equiângulos ao mesmo tempo são denominados de polígonos regulares



Fonte: elaborado para fins didáticos.

INICIANDO

Como esta SA se volta para o estudo dos polígonos regulares, sugerimos que o ponto de partida seja um diálogo, com os questionamentos: o que têm em comum o triângulo equilátero e o quadrado? O que diferencia tais polígonos? Consideramos que registros na lousa e no caderno podem ser boas estratégias para a organização do pensamento e socialização das ideias dos estudantes. A proposta é que sejam discutidas questões relativas às semelhanças, como o fato de serem figuras planas, simples, fechadas, formadas apenas por segmentos de retas, com todos os lados com mesma medida e todos os ângulos internos congruentes. Por outro lado, podem ser apontadas diferenças que dizem respeito às quantidades de lados e diagonais, além da quantidade e das medidas dos ângulos internos. É indispensável que os estudantes sejam motivados a verbalizarem sobre essas características dos referidos polígonos, mas sem que lhes sejam antecipadas informações.

AULAS 1 E 2 – É REGULAR OU NÃO?

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

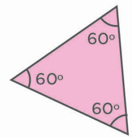
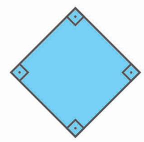
MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

DESENVOLVENDO

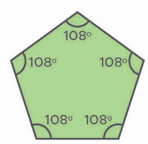
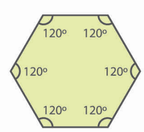
Estas provocações e discussões introdutórias podem ser seguidas pela leitura coletiva das atividades previstas para as aulas 1 e 2 e uma conversa sobre o conceito de polígono regular que consta na **Atividade 1**. Entendemos que para melhor aproveitamento, a realização das atividades em duplas, por meio de trabalho colaborativo, é adequada. Os estudantes devem ser orientados a realizarem a leitura cuidadosa de cada enunciado e a resolução detalhada das situações, com discussão e troca de experiências com o seu par. A **Atividade 1** apresenta alguns conceitos importantes em que o principal é o de polígono regular, e faz uso de termos como: congruentes, equilátero, equiângulo, convexo, ângulos internos e soma dos ângulos. É interessante que os estudantes relembrem esses termos, é provável que eles já tenham tido contato em anos escolares anteriores. Para responder ao que lhes é questionado, os estudantes deverão perceber, por meio da análise dos dados fornecidos, que a medida de cada ângulo interno de um polígono regular pode ser obtida por meio da razão entre a soma de todos os ângulos internos desse polígono pela quantidade de lados dele. Consideramos que tal atividade tem o caráter teórico forte e, portanto, pode servir de apoio para as situações que virão em seguida. Na **Atividade 2**, são apresentadas informações sobre o conceito de polígono inscrito em uma circunferência e de ângulo central e solicitadas as medidas do ângulo central em triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares inscritos.

O triângulo equilátero e o quadrado são exemplos de polígonos regulares. Note que:

Polígono regular	Representação	Soma dos ângulos internos	Medida do ângulo interno
Triângulo equilátero		180°	60°
Quadrado		360°	90°

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Dessa forma, podemos ainda afirmar que:

Polígono regular	Representação	Soma dos ângulos internos	Medida do ângulo interno
Pentágono regular		540°	108°
Hexágono regular		720°	120°

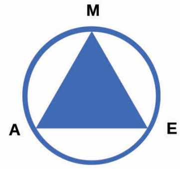
Fonte: elaborado para fins didáticos.

Observando as informações apresentadas nos quadros acima sobre a soma dos ângulos internos de alguns polígonos regulares e a medida de cada ângulo interno deles, é possível concluir mais uma de suas propriedades, que diz respeito à relação entre tais medidas. Assim, o que você consegue perceber sobre a relação entre a soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos regulares e a medida de cada um desses ângulos?

Observando as medidas indicadas nos quadros, notamos que a medida de cada ângulo interno do polígono regular pode ser encontrada dividindo a soma de todos os ângulos internos de cada um pela quantidade de lados que ele tem, ou seja:

$$a_{Interno} = \frac{Soma\ dos\ ângulos\ internos}{Quantidade\ de\ lados\ do\ polígono\ regular}$$

2. Na figura a seguir, todos os vértices do triângulo AME pertencem à circunferência. Veja que toda a superfície do triângulo pertence à região interna da circunferência. Quando isso acontece, dizemos que esse polígono está inscrito na circunferência. O triângulo AME é regular, ou seja, é equilátero e equiângulo e os seus lados são cordas da circunferência.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Dividindo uma circunferência em n arcos congruentes, as cordas consecutivas, definidas por esses arcos, formam um polígono regular, de n lados, inscrito nessa circunferência. Em um polígono regular inscrito, a medida do ângulo central é dada por:

$$a_{Central} = \frac{360°}{n}$$

Assim, responda: qual é a medida do ângulo central dos seguintes polígonos inscritos em circunferências:

a) Triângulo equilátero?

b) Quadrado?

c) Hexágono regular?

a) $a_{Central} = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{3} = 120°$

b) $a_{Central} = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{4} = 90°$

c) $a_{Central} = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{6} = 60°$

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, a proposta é que a atividade 4 propicie diálogos sobre as afirmações apresentadas em cada alternativa. Assim, é indispensável que os estudantes, nas duplas, conversem entre si e, em seguida, que seja disponibilizado momento de socialização para que relatem, oralmente, as suas ideias.

A **Atividade 3** traz afirmações, a serem consideradas verdadeiras ou falsas, referentes a um pentágono regular inscrito em uma circunferência. A partir de discussões entre as duplas, os estudantes deverão retomar conceitos e propriedades de polígonos inscritos para, enfim, classificar cada sentença como verdadeira ou falsa. A **Atividade 4** informa sobre o conceito de polígono circunscrito em circunferência. Apresenta um quadrado dessa forma e solicita que sejam preenchidas lacunas vazias em afirmações que contemplam esse contexto. Para finalizar, há a **atividade 5**, em que são fornecidas algumas relações métricas dos polígonos inscritos em circunferências, a partir das quais os estudantes terão duas perguntas em que devem ser determinados os lados de polígonos regulares inscritos cujo diâmetro ou raio da circunferência é fornecido.

3. Considere um pentágono regular inscrito em uma circunferência de raio r. Agora, observe cada afirmação abaixo e assinale a única que é correta.

a. Exatamente quatro vértices desse polígono pertencem à citada circunferência.

b. O raio desse polígono equivale a todo segmento de reta que vai do centro do polígono até a sua borda.

c. Dividindo-se o polígono em seus raios, obtém-se cinco triângulos isósceles.

d. O centro desse polígono não coincide com o centro da circunferência na qual ele está inscrito.

e. As medidas dos lados desse polígono podem assumir valores diferentes.

RESPOSTA: C

a. Incorreta: os cinco vértices desse polígono pertencem à circunferência, já que está inscrito nela.

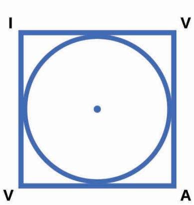
b. Incorreta: o raio do polígono é o segmento de reta que vai de seu centro até a circunferência em que está inscrito. A afirmação só é confirmada nos segmentos que vão do centro do polígono até os seus vértices.

c. Correta.

d. Incorreta: polígonos regulares inscritos em uma circunferência têm centro coincidindo com o dessa circunferência.

e. Incorreta: lados de polígonos regulares, por definição, são congruentes.

4) O quadrado VIVA, representado a seguir, tem todos os seus lados tocando externamente a circunferência. Nesse caso, dizemos que esse polígono está circunscrito na circunferência.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Perceba que o centro da circunferência coincide com o centro do quadrado, ou seja, essas duas figuras concêntricas. Como consequência disso, é possível notar relações entre algumas das medidas do quadrado e da circunferência. Analisando a figura, preencha cada sentença utilizando as palavras adequadas.

a. O quadrado está ___circunscrito___ na circunferência. Ambos têm o mesmo ___centro___. A medida do ___diâmetro___ da circunferência corresponde à medida do ___lado___ do quadrado.

b. Se considerarmos que o quadrado tem, por exemplo, lado medindo 10 cm, podemos concluir que a circunferência tem ___5___ cm de raio.

5. Algumas relações métricas dos polígonos regulares inscritos em circunferências

Polígono inscrito	Lado (L) em função do raio (r)	Apótema (a)	Perímetro (P)	Área (A)
Triângulo equilátero	$L = r\sqrt{3}$	$a = \frac{L\sqrt{3}}{6}$	$P = 3L$	$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$
Quadrado	$L = r\sqrt{2}$	$a = \frac{L}{2}$	$P = 4L$	$A = L^2$
Hexágono regular	$L = r$	$a = \frac{L\sqrt{3}}{2}$	$P = 6L$	$A = \frac{6L^2\sqrt{3}}{4}$

A partir dessas relações, determine:

a. A medida do lado de um quadrado inscrito em uma circunferência de 100 cm de diâmetro.

Se o diâmetro da circunferência tem 100 cm, seu raio mede 50 cm, logo o lado do quadrado inscrito nela é igual a:

$$L = r\sqrt{2} = 50\sqrt{2}\ cm$$

b. A medida do lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência com 60 cm de raio.

Se a circunferência tem 60 cm de raio, o triângulo inscrito nela tem lado medindo:

$$L = r\sqrt{3} = 60\sqrt{3}\ cm$$

FINALIZANDO

Entendemos que o encerramento das aulas pode acontecer com um diálogo com toda a turma, em que os estudantes verbalizem seus entendimentos sobre polígonos regulares, relação entre as medidas dos ângulos internos, polígonos inscritos e circunscritos. Nesse momento, pode-se solicitar que alguns estudantes falem sobre as propriedades discutidas e que outros citem características de polígonos regulares. Será um momento de interação entre todos, de maneira que possibilitará a percepção de possíveis dúvidas que tenham ficado, para serem articulados esclarecimentos e intervenções para superação das dificuldades. Além disso, o envolvimento ativo dos estudantes é indispensável nas etapas de socialização.

AULAS 3 E 4 – POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS E CIRCUNSCRITOS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

INICIANDO

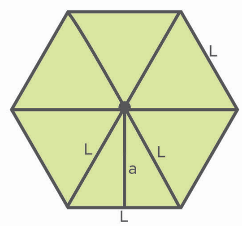
As aulas 3 e 4 requerem conhecimentos sobre polígonos regulares, suas propriedades e também inscritos ou circunscritos em circunferências. Dessa forma, já na introdução do **Caderno do Estudante**, informamos que eles poderão consultar as atividades realizadas nas aulas 1 e 2, caso considerem necessário. Assim, apontamos que o início desta aula pode vir com um diálogo sobre os pontos principais a respeito do referido conteúdo, inserindo-se o conceito de apótema que é apresentado. Uma possibilidade, para melhor visualização, pode ser projetar alguns polígonos regulares com a marcação do apótema de cada um. Para enriquecer ainda mais, há também a possibilidade de projetar polígonos regulares diversos, inscritos e circunscritos em circunferências, com indicação de seus elementos: raio, apótema, centro, lado. Oriente os estudantes a folhearem o **Caderno** e a observarem as atividades a que se dedicarão.

AULAS 3 E 4 – POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS E CIRCUNSCRITOS

Objetivos das aulas
- Explorar situações que envolvem polígonos regulares inscritos em circunferências;
- Explorar situações que envolvem polígonos regulares circunscritos em circunferências.

Para as próximas atividades, os conceitos estudados até agora, ou seja, polígonos regulares e suas propriedades e polígonos inscritos e circunscritos em circunferências serão retomados e utilizados na resolução de situações que envolvem contextos variados. Caso considere necessário, você poderá consultar as atividades anteriores para leitura e apoio na resolução das atividades previstas para estas aulas.

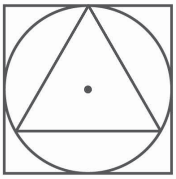
Para além dos já citados, trazemos ainda o definição de apótema de um polígono como sendo o segmento de reta que parte do centro de tal polígono e vai até um de seus lados, formando 90° com este. Dessa forma, o apótema é um segmento sempre perpendicular ao lado do polígono. Vejamos um exemplo:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Nessa figura, o segmento "a" corresponde ao apótema do hexágono regular.

1. **A respeito da figura a seguir, classifique as sentenças como verdadeiras (V) ou falsas (F):**



Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. (   ) O triângulo representado na figura está inscrito na circunferência.

b. (   ) O quadrado está inscrito na circunferência.

c. (   ) A medida do lado do triângulo é igual ao raio da circunferência.

d. (   ) O lado do quadrado tem medida igual a do raio da circunferência.

e. (   ) O diâmetro da circunferência indica a medida do lado do quadrado.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Para esta atividade, é importante que aconteça, com toda a turma, um diálogo sobre as afirmações apresentadas em cada alternativa para que os estudantes, nas duplas, socializem oralmente as suas ideias a respeito de cada afirmação.

DESENVOLVENDO

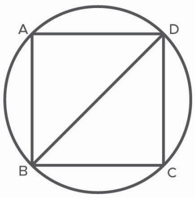
Realizada esta conversa inicial, proponha um tempo para a resolução dos problemas. Ressalte que a verificação acontecerá com a participação deles, socializando os caminhos que utilizaram em cada situação, seja de maneira oral ou com registro escrito na lousa ou na tela. A **Atividade 1** parte da observação de uma figura, em que constam um triângulo equilátero inscrito e um quadrado circunscrito em uma circunferência comum. São figuras concêntricas. Cabe destacar essa informação e possibilitar que as duplas observem cada afirmação atentamente para, em seguida, classificá-las como verdadeiras ou falsas. As sentenças abordam conceitos relativos a polígonos inscritos e circunscritos em circunferência e a suas propriedades e é indispensável, na correção, que os estudantes explicitem as justificativas pelas quais julgaram algumas alternativas falsas.

RESPOSTA:

a. (V)
b. (F) O quadrado está circunscrito na circunferência.
c. (F) O lado é maior do que o raio da circunferência e pode ser calculado por $L = r\sqrt{3}$.
d. (F) O lado do quadrado corresponde à medida do diâmetro da circunferência, ou seja, é o dobro da medida do raio dela.
e. (V)

Na **Atividade 2**, relata-se uma situação em que há um quadrado inscrito numa circunferência, representando uma toalha e o tampo de uma mesa, respectivamente, para que sejam analisados a partir de suas medidas. A **Atividade 3** traz um item do ENEM, em que a ideia de inscrição e circunscrição de polígonos é necessária para o entendimento. Sugerimos que os estudantes sejam orientados a construírem figuras para melhorar a visualização e facilitar a resolução.

2. Procura-se uma toalha para cobrir totalmente uma mesa redonda. A tentativa inicial foi de observar se uma toalha quadrada seria suficiente. Veja a imagem que indica essa tentativa:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

A imagem mostra que a toalha teste não cobre toda a mesa. Se a medida BD mede 3 metros, podemos afirmar que a toalha redonda necessária deverá ter:

a. No mínimo, o raio com 3 m.

b. O diâmetro com, pelo menos, 2 m.

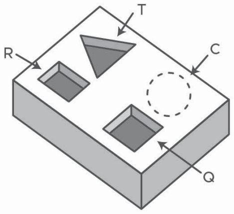
c. Raio com, pelo menos, 1,5 m.

d. Diâmetro mínimo de 1,5 m.

RESPOSTA: C

O segmento BD é, ao mesmo tempo, diagonal do quadrado inscrito e diâmetro da circunferência. Então, para que uma toalha cubra totalmente a mesa, ela deve ter dimensões, no mínimo, iguais às dessa mesa. Portanto, deverá ter diâmetro medindo pelo menos 3 m e, portanto, raio com pelo menos 1,5 m.

3) (ENEM - 2016) Um marceneiro está construindo um material didático que corresponde ao encaixe de peças de madeira com 10 cm de altura e formas geométricas variadas, num bloco de madeira em que cada peça se posicione na perfuração com seu formato correspondente, conforme ilustra a figura. O bloco de madeira já possui três perfurações prontas de bases distintas: uma quadrada (Q), de lado 4 cm, uma retangular (R), com base 3 cm e altura 4 cm, e uma em forma de um triângulo equilátero (T), de lado 6,8 cm. Falta realizar uma perfuração de base circular (C). O marceneiro não quer que as outras peças caibam na perfuração circular e nem que a peça de base circular caiba nas demais perfurações e, para isso, escolherá o diâmetro do círculo que atenda a tais condições. Procurou em suas ferramentas uma serra copo (broca com formato circular) para perfurar a base em madeira, encontrando cinco exemplares, com diferentes medidas de diâmetros, como segue: (I) 3,8 cm; (II) 4,7 cm; (III) 5,6 cm; (IV) 7,2 cm e (V) 9,4 cm.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Na **Atividade 4**, propomos uma situação em que está indicado um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência. Para a resolução, entendemos que pode ser necessário rever as propriedades desse tipo de polígono regular quando está nessa condição de inscrição, desse modo, rever as atividades anteriores pode ser uma boa ideia. O último bloco de atividades, composto pelas de número 5, 6 e 7, relacionam polígonos regulares circunscritos em circunferências. A proposta é que tais contextos sejam usados como aplicação das propriedades dos polígonos regulares. Assim, pode-se desenvolver uma conversa sobre os cálculos das relações métricas de polígonos circunscritos. Sugerimos que os estudantes, após resolverem tais atividades, troquem suas respostas com outra dupla para análise. Após isso, indicamos a resolução na lousa (ou na tela) por estudantes voluntários. Será um momento de socialização e de troca de experiências. Na ocasião, o envolvimento de todos, ouvindo as explicações dos colegas e opinando sobre os caminhos que foram utilizados, poderá favorecer significativamente a aprendizagem. Para a resolução destas três últimas atividades, pode ser que fazer uma figura representando cada contexto seja uma boa estratégia.

Considere 1,4 e 1,7 como aproximações para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, respectivamente. Para que seja atingido o seu objetivo, qual dos exemplares de serra copo o marceneiro deverá escolher?

a. I.

b. II.

c. III.

d. IV.

e. V.

RESPOSTA: B

Os diâmetros para os menores círculos que cabem em R, Q e T são:

- Diagonal do retângulo: $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = 5\ cm;$

- Diagonal do quadrado: $\sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}\ cm;$

- Diâmetro do círculo circunscrito em T: $cos\ 30° = \dfrac{\frac{6,8}{2}}{r} \Rightarrow r = \dfrac{3,4}{0,87} \therefore r \cong 3,9\ cm,$ logo o diâmetro é 8 cm.

Portanto, C deve ter diâmetro menor do que 5 cm.

Os maiores círculos possíveis de encaixe em R, Q e T têm as seguintes medidas:

- Retângulo: 3 cm.

- Quadrado: 4 cm.

- Diâmetro do círculo inscrito em T: $tg\ 30° = \dfrac{r}{\frac{6,8}{2}} \Rightarrow r = 3,4 \cdot 0,58 \therefore r \cong 2\ cm,$ logo o diâmetro é 4 cm.

Assim, C deve ter diâmetro maior do que 4 cm.

Como o diâmetro da serra copo deve satisfazer às duas condições, concluímos que deve ser um valor entre 4 cm e 5 cm. Dessa forma, a única alternativa que atende é a letra **B**.

4. O perímetro de um triângulo equilátero, inscrito em uma circunferência, é $5\sqrt{3}\,m$. A partir dessa informação, determine as medidas do raio da circunferência, do lado e da área desse triângulo.

Como o triângulo está inscrito na circunferência, o perímetro é o triplo do lado, então:

$$P = 3 \cdot L \Rightarrow 5\sqrt{3} = 3 \cdot L \Rightarrow L = \frac{5\sqrt{3}}{3} m.$$

Assim, o raio pode ser calculado por:

$$L = r \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{3} = r \cdot \sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{5}{3} m.$$

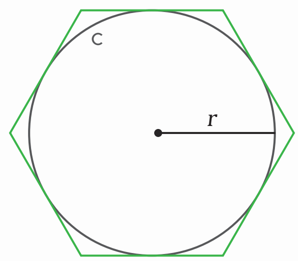
Além disso, temos que:

$$A_{Triângulo} = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{25 \cdot 3}{9} \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{Triângulo} = \frac{25\sqrt{3}}{12} m^2$$

5. Um hexágono regular com 30 cm de lado está circunscrito em uma circunferência. Usando 1,7 para aproximação de $\sqrt{3}$, determine qual deve ser a medida do raio dessa circunferência .

O raio da circunferência inscrita no hexágono regular pode ser determinado por: $r = \frac{L\sqrt{3}}{2}$.

Desse modo, $r = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \cong 25{,}5\ cm.$



Fonte: elaborado para fins didáticos.

6. Pense sobre o seguinte problema: ***Qual é a área de um hexágono regular que está circunscrito em uma circunferência de raio 10 cm?*** Nas atividades anteriores, foram apresentadas fórmulas que representam relações métricas dos polígonos inscritos em circunferências, no entanto, nesse problema, o hexágono está circunscrito. Sendo assim, que cálculos matemáticos poderiam ser usados para determinar a medida dessa área?

Como o hexágono está circunscrito, o raio da circunferência coincide com o apótema desse hexágono: 10 cm. Como o polígono é regular, os seus lados são todos congruentes (L). Dividindo o hexágono em 6 triângulos equiláteros, notamos que o apótema (raio da circunferência) divide cada triângulo em triângulos retângulos menores com hipotenusa L e catetos 10 cm e $\frac{L}{2}$. Disso, temos que:

$$L^2 = 10^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow L^2 - \frac{L^2}{4} = 100 \Rightarrow \frac{4L^2 - L^2 = 400}{4} \Rightarrow 3L^2 = 400 \Rightarrow L^2 = \frac{400}{3} \therefore L = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

Com esse resultado, podemos calcular a área de um dos triângulos que compõem o hexágono:

$$A_{Triângulo} = \frac{\frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot 10}{2} = \frac{200\sqrt{3}}{6} = \frac{100\sqrt{3}}{3}\ cm^2$$

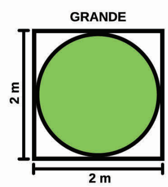
E, dessa forma, temos que a área desse hexágono será:

$$A_{Hexágono} = \frac{6 \cdot 100\sqrt{3}}{3} = 200\sqrt{3}\ cm^2$$

FINALIZANDO

Para a verificação das aprendizagens dos estudantes, pode ser realizada a observação de cada atividade desta aula, com registro individual dos pontos mais relevantes. É possível propor a produção de um mapa conceitual ou de um resumo que contemple os conceitos estudados até aqui.

7. Em um dos itens da prova de Matemática do Enem 2004, foi usada uma imagem em que havia um quadrado circunscrito num círculo. A partir do seu conhecimento sobre as propriedades dos polígonos regulares, determine a área da região branca da figura.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Como o quadrado está circunscrito no círculo, a área da parte branca pode ser obtida subtraindo-se a área desse círculo de raio 1 m da área do quadrado medindo 2 m. Assim, teremos:

$A_{Branca} = A_{Quadrado} - A_{Círculo} = 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 4 - 3{,}14 = 0{,}86\ m^2.$

ANOTAÇÕES

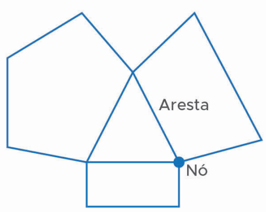
AULAS 5 E 6 – POLÍGONOS REGULARES NA PAVIMENTAÇÃO DE SUPERFÍCIES

Objetivo das aulas
- Solucionar situações-problema que relacionam polígonos regulares em contextos de pavimentação de superfícies.

Alguns conceitos estudados em Matemática possibilitam o alcance de conhecimentos que vão além das especificidades dessa área. A geometria é um campo que permite diversas dessas possibilidades. O estudo dos polígonos, por exemplo, tem muito a contribuir com áreas como arquitetura, engenharia, entre outras tantas. Nas artes, polígonos são comumente utilizados em obras obtidas por meio da composição e decomposição de figuras e, nesse contexto, os polígonos regulares surgem como rico elemento. Estudamos até aqui características desse tipo de polígonos e, para as próximas aulas, propomos um olhar mais detalhado para a utilização dessas formas em contextos de pavimentação de superfícies.

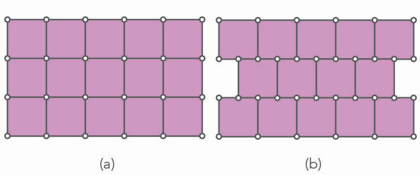
1. Sobre a pavimentação por polígonos

Artes como mosaicos aparecem em peças de artesanato, utensílios e ladrilhamentos de superfícies desde as civilizações mais antigas. Gregos, egípcios, árabes e chineses são exemplos de povos que se destacam também por seus famosos desenhos com padrões geométricos. Diversas pesquisas, no Brasil, apresentam interessantes resultados de estudos sobre essa temática informando, por exemplo, que investigações acadêmicas sobre as propriedades matemáticas das pavimentações são recentes. Segundo Santos (2006), pavimentações do plano utilizando polígonos são recobrimentos de superfícies planas sem que deixem espaços vazios ou sobreposição entre os polígonos. Em uma pavimentação, os vértices comuns dos polígonos são chamados de nós e os lados são as arestas, como indicado na figura seguinte.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Note que, na figura do exemplo, a pavimentação foi feita com quatro polígonos diferentes: triângulo, retângulo, trapézio e pentágono, de forma que as arestas são lados comuns a dois desses polígonos. Esse é o tipo de pavimentação chamado de lado-a-lado. Nos exemplos a seguir, o item (a) é pavimentação lado-a-lado, mas o (b) não é.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

INICIANDO

As atividades propostas para as Aulas 5 e 6 ampliam o estudo das figuras geométricas planas, sobretudo em contextos de pavimentação de superfícies. Para isso, a parte inicial, composta pelo texto introdutório e a **Atividade 1**, pode ser lida coletivamente, seguida de uma conversa sobre a noção de pavimentação com polígonos. Se possível, sugerimos que sejam exibidos mais exemplos de superfícies pavimentadas por polígonos e que os estudantes indiquem se conhecem lugares em que isso existe e se eles já observaram a junção de diversas figuras geométricas para formar um novo desenho. É interessante destacar que esses elementos podem ser observados em pisos, obras arquitetônicas, peças de artesanato, estampas de toalhas de mesa etc.

AULAS 5 E 6 – POLÍGONOS REGULARES NA PAVIMENTAÇÃO DE SUPERFÍCIES

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

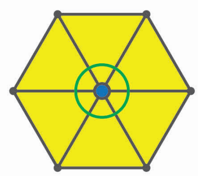
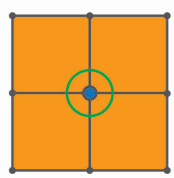
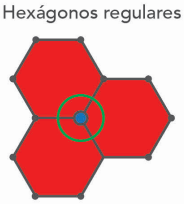
DESENVOLVENDO

Após esta etapa introdutória, os estudantes, em duplas, podem desenvolver as demais atividades previstas para estas aulas. Para que finalizem a atividade 1, os estudantes podem ser incentivados a realizarem testes a partir de desenhos com tentativas de recobrimento de superfícies usando triângulos equiláteros, quadrados, pentágonos e hexágonos regulares. O mais importante nessas tentativas são as discussões que podem ocorrer a respeito das suas observações.

Com a leitura desse texto introdutório e considerando o que estudamos nas aulas anteriores sobre as características dos polígonos regulares, responda: é possível formar pavimentações lado-a-lado utilizando apenas triângulos equiláteros? E quadrados? E hexágonos regulares?

RESPOSTA: sim, só é possível formar pavimentações lado-a-lado utilizando apenas um tipo de polígono se forem triângulos equiláteros ou quadrados ou hexágonos regulares.

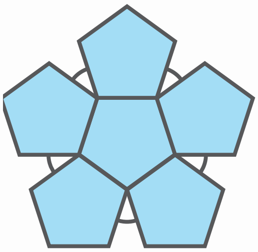
2. Preencha completamente o quadro, informando qual é a soma dos ângulos dos polígonos com vértice em um mesmo nó da pavimentação em cada caso e apresente uma explicação para esse valor.

Polígono da pavimentação	Soma dos ângulos	Explicação
Triângulos equiláteros 	360°	Cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60° e como cada nó é composto por seis triângulos, temos: $6 \cdot 60° = 360°$.
Quadrados 	360°	O quadrado tem cada ângulo interno medindo 90° e como cada nó é composto por quatro quadrados, temos: $4 \cdot 60° = 360°$.
Hexágonos regulares 	360°	Como os ângulos internos dos hexágonos regulares têm 120° e cada nó está composto por três hexágonos, temos: $3 \cdot 60° = 360°$.

Fonte: elaborado para fins didáticos.

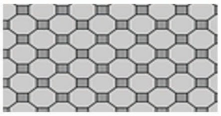
3. Agora, pense: é possível construir uma pavimentação do tipo lado-a-lado apenas com pentágonos regulares? Escreva um breve comentário utilizando argumentos que justifiquem a sua resposta.

Utilizando apenas pentágonos regulares não é possível pavimentar uma superfície porque esses polígonos deixariam espaços vazios que não podem ser preenchidos por outros pentágonos regulares sem haver sobreposição, como mostra a figura:



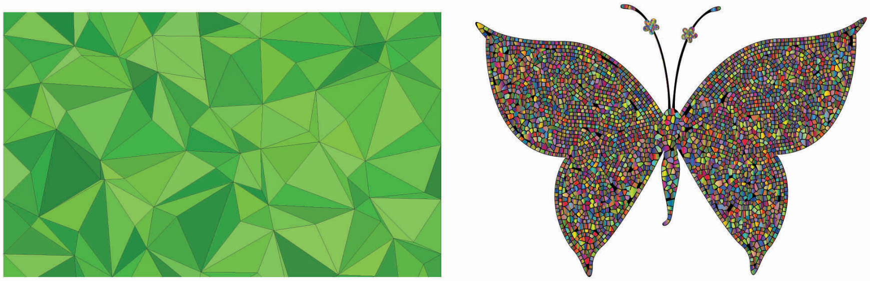
Fonte: elaborado para fins didáticos.

Como vimos na atividade 1, para recobrir superfícies com pavimentações lado-a-lado é possível utilizar mais de um tipo de polígono. Polígonos regulares também possibilitam isso. Veja um exemplo:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

4. Você já observou imagens formadas por padrões geométricos, por exemplo, em pisos, estruturas arquitetônicas e artesanatos? Essas são algumas possibilidades em que há uma interessante relação entre a Geometria e a Arte. Um exemplo de desenho proveniente da junção de pequenas peças coloridas com formas geométricas para decoração são os mosaicos.



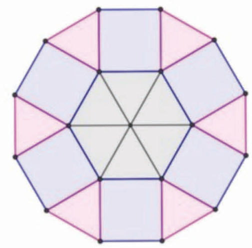
Fonte: Pixabay.

Após esses testes, verificações e reflexões, promova uma discussão envolvendo toda a turma para correção das respostas das **Atividades 1**, **2** e **3**. Propomos que, para a **Atividade 4**, a leitura do enunciado aconteça de forma coletiva e que os estudantes, oralmente, forneçam sugestões de possíveis caminhos para a sua resolução. Após esse momento, as duplas deverão se concentrar em busca de sua própria maneira de solucionar o problema. Sugerimos que a correção aconteça com estudantes voluntários socializando na lousa os seus cálculos. Caso considere interessante, permita que mais de uma dupla mostre o caminho utilizado para a solução, de maneira que seja possível uma discussão sobre as opções diferentes no sentido de aumentar o repertório matemático dos estudantes. Nessa ocasião, ressalte que é possível que mais de um caminho seja percorrido para obter a resposta e que todos são válidos, desde que estejam corretos.

FINALIZANDO

Ao término das Aulas 5 e 6, você pode construir com a turma uma síntese do conteúdo matemático estudado. Essa retomada pode ser registrada na lousa em forma de listas, com tópicos e subtópicos. Destaque sobre a importância da utilização de conceitos matemáticos em outras áreas de conhecimento, em particular, de entes da geometria. É possível também ressaltar que muitos deles não se fazem presentes apenas na sala de aula, mas na atuação de alguns profissionais, como arquitetos, pedreiros, engenheiros, artesãos, dentre outros. Para finalizar, pode-se propor a retomada de todas as atividades realizadas até aqui, com registro escrito dos principais tópicos.

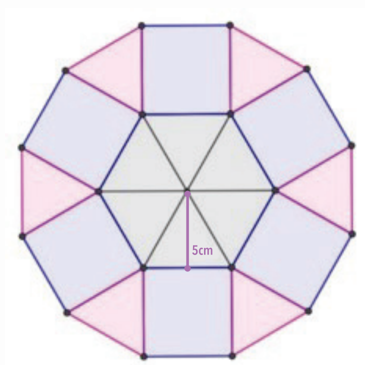
Uma peça cerâmica foi produzida com formato de mosaico a partir de polígonos regulares, conforme a imagem a seguir:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

A figura formada com a peça completa é um dodecágono, ou seja, um polígono com 12 lados. Sabendo que o apótema do hexágono regular localizado ao centro da peça mede 5 cm, qual a área total do mosaico?

É preciso identificar a localização do apótema do hexágono regular na parte central do mosaico, conforme a imagem a seguir:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Observa-se também, a partir da figura, que o hexágono é formado por seis triângulos equiláteros, cujo lado coincide com o lado dos quadrados que compõem a figura. Além disso, a medida do lado do quadrado é a mesma do lado dos triângulos equiláteros com cor rosa. Desse modo, o mosaico é formado por 12 triângulos equiláteros congruentes e 6 quadrados com mesma área. Para encontrar a medida do lado dos triângulos e dos quadrados, pode-se usar o Teorema de Pitágoras no triângulo formado com o apótema, o lado do triângulo e metade do lado do triângulo, obtendo:

$$l^2 = 5^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2 = 25 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow \frac{4l^2}{4} - \frac{l^2}{4} = 25 \Rightarrow \frac{3l^2}{4} = 25 \Rightarrow 3l^2 = 100 \Rightarrow$$

$$l^2 = \frac{100}{3} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{100}{3}} \Rightarrow l = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{3}} \Rightarrow l = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow l = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \therefore \boldsymbol{l = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,cm}$$

Por sua vez, a área do quadrado é dada por:

$$A_{quadrado} = l^2 = \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{100 \cdot 3}{9} \therefore A_{quadrado} = \frac{100}{3}\,cm^2$$

Por fim, a área do mosaico é igual a:

$$A_{mosaico} = 12 \cdot A_{triângulo} + 6 \cdot A_{quadrado}$$

$$A_{mosaico} = 12 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{3} + 6 \cdot \frac{100}{3} \quad \therefore \quad \boldsymbol{A_{mosaico} = 100\sqrt{3} + 200\,cm^2}.$$

AULAS 7 E 8 – PROBLEMAS COM POLÍGONOS REGULARES

ORGANIZAÇÃO DA TURMA
Estudantes organizados em duplas.

MATERIAL NECESSÁRIO
Caderno do Estudante.

INICIANDO
Professor, para as duas últimas aulas desta Sequência, propomos a realização de problemas com foco no estudo de polígonos regulares inscritos e circunscritos em circunferência, além da aplicação desses em contextos de pavimentação de superfícies. Consideramos, então, que talvez seja interessante começar por uma conversa de retomada das atividades realizadas até aqui, visto que alguns dos elementos necessários já foram discutidos em aulas anteriores. Esse diálogo pode abordar informações como polígonos regulares, suas propriedades, circunferências e seus elementos, além das relações métricas. Pode sugerir que os estudantes folheiem o **Caderno** e observem as situações-problema já realizadas.

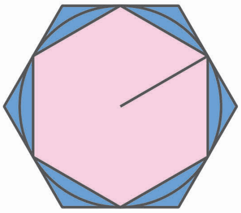
DESENVOLVENDO
Após esta conversa inicial, os estudantes devem se dedicar à leitura e resolução das atividades em duplas para garantir a troca de experiências e o trabalho colaborativo. Propomos cinco atividades em que aparecem triângulos equiláteros, quadrados, pentágonos e hexágonos regulares circunscritos em circunferências. A **Atividade 1** tem cunho mais teórico. Requer a observação da figura disponibilizada, a fim de que os estudantes identifiquem as formas geométricas contempladas. É uma ocasião para eles utilizarem com naturalidade os termos associados às noções relativas a polígonos regulares inscritos e circunscritos em circunferências. Possibilite, professor, que os estudantes oralizem as suas respostas em voz alta.

AULAS 7 E 8 – PROBLEMAS COM POLÍGONOS REGULARES

Objetivos das aulas
- Resolver situações-problema que envolvem polígonos regulares inscritos e circunscritos em circunferências;
- Solucionar situações-problema que envolvem polígonos regulares em pavimentação de superfícies.

Para finalizar as atividades desta Sequência, temos situações-problema que abordam polígonos regulares, tanto em contextos de pavimentação de superfícies quanto inscritos e circunscritos em circunferências. Alguns dos conceitos necessários aqui já foram discutidos e utilizados em aulas anteriores, então, se for necessário, você poderá consultar as atividades já realizadas. Lembre-se de ler cada enunciado com a devida atenção e realizar os registros detalhados de cada resolução.

1. Observe a figura abaixo:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Agora, responda o que é solicitado:

a. Que formas geométricas você identifica nessa figura?

Na figura, é possível identificar dois hexágonos e uma circunferência concêntricos. Um hexágono está inscrito e o outro está circunscrito nessa mesma circunferência.

b. O segmento de reta central que está destacado é elemento das três figuras geométricas que aparecem. Que elementos são esses?

O segmento de reta em destaque corresponde ao raio da circunferência citada e do hexágono inscrito, e é apótema do hexágono circunscrito.

As **Atividades 2** e **3** são itens do ENEM e trazem contextos com triângulo equilátero inscrito em circunferência e a noção de pavimentação com polígonos regulares. Para ambos os casos, sugerimos que você indique que construir uma figura para representar cada situação pode facilitar a visualização e a resolução.

2. (ENEM - 2015) O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm. Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa. Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$. O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a

a. 18.

b. 26.

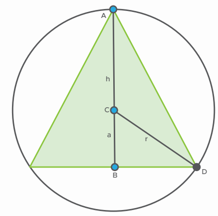
c. 30.

d. 35.

e. 60.

RESPOSTA: A

O enunciado relaciona uma circunferência circunscrita a um triângulo equilátero. Vejamos alguns elementos importantes na figura seguinte:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Assim, o raio r desse círculo pode ser calculado por: $\cos\alpha = \frac{\frac{L}{2}}{r}$

Como o ângulo envolvido é o de 30°, já que é a metade do ângulo interno do triângulo equilátero, e o triângulo tem 30 cm de lado, teremos:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{L}{2}}{r} \Rightarrow \cos 30° = \frac{\frac{30}{2}}{r} \Rightarrow r = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow r = \frac{30}{\sqrt{3}} \Rightarrow r \cong 17{,}6\ cm$$

Logo, dentre as medidas possíveis para o tampo da mesa, concluímos que deve ser escolhida a de 18 cm, ou seja, o tampo mais adequado é o que tem 18 cm de raio.

3. (ENEM – 2002) Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras

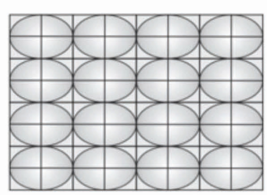


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano

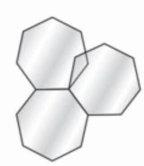
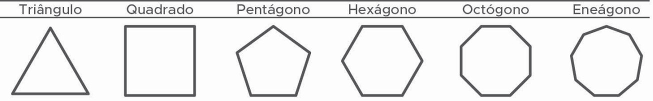


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou sperposição)

Fonte: elaborado para fins didáticos.

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Eneágono
Figura						
Ângulo interno	60º	90º	108º	120º	135º	140º

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

a. Triângulo.

b. Quadrado.

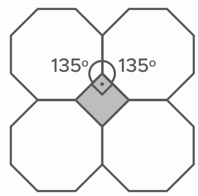
c. Pentágono.

d. Hexágono.

e. Eneágono.

RESPOSTA: B

Os octógonos regulares têm ângulos internos medindo 135°, então, a única forma de não deixar falhas na superfície é encaixando ângulos de 90°, para fechar com voltas completas (135° + 135° + 90° = 360°). Para isso, portanto, é necessário utilizar quadrados, como indicado ao lado:



Fonte: elaborado para fins didáticos.

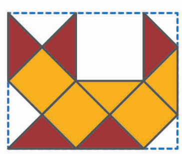
4. (AAP 2016) No retângulo apresentado a seguir foi composta uma figura utilizando peças de ladrilho no formato de quadrados, sendo quatro peças na cor amarela e duas peças e meia na cor vermelha. Pretende-se completar os espaços vazios do retângulo com peças de ladrilho no formato de quadrados brancos de mesma medida dos coloridos, então serão utilizadas

a. Duas peças e meia de ladrilho branco.

b. Três peças de ladrilho branco.

c. Três peças e meia de ladrilho branco.

d. Quatro peças de ladrilho branco.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

RESPOSTA: C

Para verificar a quantidade de ladrilhos brancos necessários para completar a superfície do retângulo, pode-se começar marcando as diagonais do quadrado branco. A partir disso, é possível notar que o lado desse quadrado corresponde à medida da diagonal do ladrilho original colorido. Assim, teremos quatro metades de ladrilhos nesse quadrado branco, outras duas metades (superior e lado direito) e ainda as duas partes brancas à direita que, juntas, formam uma metade de ladrilho. Dessa forma, no total, temos três partes (seis metades) e meia peça de ladrilho da cor branca.

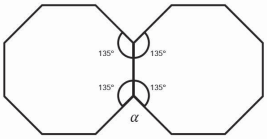
Nas **Atividades 4** e **5**, temos itens da AAP. Para a de número 4, a principal ideia associada diz respeito ao recobrimento de uma superfície retangular através de ladrilhos. Os estudantes podem ser orientados a dividirem as superfícies brancas para facilitar a visualização dos ladrilhos que são necessários para o preenchimento.

Na **Atividade 5**, eles devem retomar propriedades relativas à medida dos ângulos internos de polígonos regulares, em particular, o octógono regular. Além disso, cabe destacar o quanto uma figura pode contribuir com o entendimento sobre o cálculo realizado. Entendemos que a resolução detalhada de cada situação na lousa (ou na tela) é indispensável para que não fiquem dúvidas.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, promova uma conversa, em que os estudantes possam fornecer, com suas próprias palavras, as principais ideias estudadas sobre os polígonos regulares. Permita que, nesse momento, eles sinalizem sobre as dúvidas ou dificuldades que tenham enfrentado, além de relacionarem os estudos de hoje com aqueles desenvolvidos nas aulas anteriores. A socialização final visa superar tais dificuldades e avaliar as aprendizagens que efetivamente foram desenvolvidas. Oriente que eles retomem todas as atividades realizadas e leiam novamente os conceitos apresentados.

5. (AAP 2016) Pretende-se revestir uma parede com dois tipos de ladrilhos no formato de polígonos regulares, obtendo-se um encaixe perfeito. Sabendo que um dos polígonos regulares é um octógono, como mostra a figura a seguir.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

A medida do ângulo do polígono regular que se encaixa perfeitamente e está representado por α é

a. 45°.

b. 60°.

c. 90°.

d. 135°.

RESPOSTA: C

A soma das medidas dos ângulos indicados na figura é igual a 360°, logo teremos: $135° + 135° + \alpha = 360°$ e, portanto, $\alpha = 360° - 270° = 90°$.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

3ª Série

3ª Série do Ensino Médio - Matemática			
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES	**OBJETO DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES ESSENCIAIS**	**ARTICULAÇÃO DE MATERIAS**
1	Funções de 1º e 2º graus	Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1º e de 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos. (Currículo Vigente 2020)	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno da 1ª série -Vol. 2 – 2020** Tema: "Funções"
2	Funções trigonométricas	Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o seno, o cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos e aplicá-las em diversos contextos. (Currículo Vigente 2020) Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como f(x) = asen(bx) + c a partir do gráfico de y = sen(x), compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c. (Currículo Vigente 2020)	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno da 2ª série – Vol. 1 – 2020** Tema: Gráficos de funções periódicas envolvendo senos e cossenos.
3	Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos. Ponto e reta: distância. Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares.	Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações. (Currículo Vigente 2020) Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas. (Currículo Vigente 20200	**Algumas atividades dessas habilidades encontram-se no Caderno da 3ª série:** Vol.1 – 2020 Tema 1: "Geometria e método das coordenadas" Tema 2: "A reta a inclinação constante e a proporcionalidade"

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

ANOTAÇÕES

3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

OLÁ, PROFESSOR!

Nesta Sequência de Atividades falamos diretamente com você que está aí, na sala de aula, no convívio direto com os estudantes, os quais terão oportunidade, nesse momento, de se envolver com atividades que possibilitam a retomada de conceitos, propriedades e procedimentos essenciais para o desenvolvimento de seus conhecimentos e capacidades em matemática.

A Sequência de Atividades deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração. Além disso, as socializações das atividades, por parte dos estudantes, são percebidas aqui como oportunidades de serem desenvolvidas habilidades e competências que dizem respeito à cooperação, à empatia, à argumentação e à comunicação, entre outras.

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de resolver problemas envolvendo função afim e função quadrática.

A habilidade a ser desenvolvida nas aulas: saber utilizar, em diferentes contextos, as funções de 1º e 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.

Aula/tempo	Atividade
1ª e 2ª/ 90 min	Gráfico da função afim
3ª e 4ª/ 90 min	Proporcionalidade na função linear
5ª e 6ª/ 90 min	Gráfico da função quadrática
7ª e 8ª/ 90 min	Máximo, mínimo e estudo do sinal da função quadrática

Sabemos que as atividades por si só não ensinam. Por isso, professor, a sua atuação é tão importante em cada uma das situações propostas aqui, cujo objetivo é recuperar as aprendizagens e desenvolver as habilidades esperadas para a 3ª série do Ensino Médio. Para isso, este caderno deverá servir como mais uma ferramenta que o auxiliará no processo de ensino, sendo necessário, portanto, que você considere, em seu replanejamento, outras possibilidades de discussão e recursos, para além daqueles sugeridos nesta Sequência de Atividades. Para ajudá-lo nessa ação, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenal acerca das Sequências de Atividades, nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPCs). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

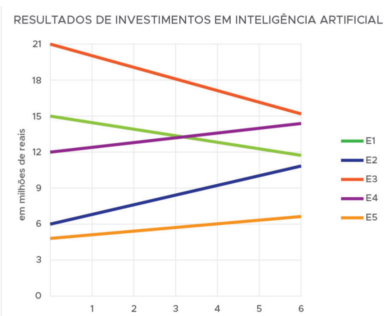
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

AULAS 1 E 2 – GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM

Objetivo das aulas:
- Resolver problemas envolvendo função afim e sua representação gráfica.

Nesta atividade, você será convidado a resolver problemas utilizando o conceito de função afim e a sua representação gráfica. Para isso, vamos recordar a nomenclatura da função afim, os significados dos seus coeficientes, identificar se é uma função crescente ou decrescente e saber construir o seu gráfico.
A função afim é definida como f(x) = ax + b ou y = ax + b. É classificada como função do 1° grau e seus coeficientes a e b são números reais diferentes de zero. O coeficiente a é chamado de coeficiente angular. Se a > 0, a função é crescente e se a < 0, a função é decrescente. O coeficiente b é chamado de linear, sendo b o valor da ordenada no eixo y.
Agora que você relembrou algumas características da função afim, junte-se com sua dupla e bom trabalho!

1. (AAP – 2019 – adaptada) **Grandes empresas de tecnologia iniciaram em 2015 os investimentos em busca do avanço da inteligência artificial (IA), na tentativa de melhorar a capacidade de processamento do aprendizado das máquinas. Em 2021, cinco destas empresas apresentaram os resultados desses investimentos em inteligência artificial, conforme gráfico a seguir, em que apresentaram os valores em milhões de reais em cada ano desde 2015 (eixo das abcissas):**



Fonte: Elaborado para fins didáticos

No período de 2019 a 2022, qual a empresa que terá o maior crescimento nos investimentos? Explique sua resposta.

De acordo com as informações no gráfico, todas as empresas investirão de forma crescente na inteligência artificial no período de 2019 a 2022, porém a empresa E3 possui o maior crescimento no período proposto, ou seja, quanto mais inclinada a reta em relação ao eixo x mais rápido é seu avanço para os valores maiores do eixo y.

Repare que:
- as retas E2, E4 e E5 estão representando funções crescentes. Isso ocorre porque para qualquer x_1 e x_2 pertencente ao intervalo contido no domínio das funções, temos: $f(x_1) > f(x_2)$.
- as retas E1 e E3 estão representando funções decrescentes. Isso ocorre porque para qualquer x_1 e x_2 pertencente ao intervalo contido no domínio das funções, temos: $f(x_1) < f(x_2)$.

AULAS 1 E 2 – GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM

ORGANIZAÇÃO DA TURMA
Estudantes organizados em duplas produtivas.

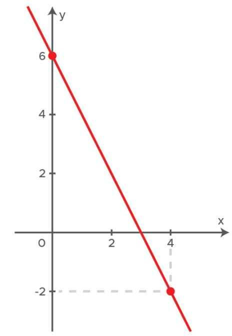
MATERIAL NECESSÁRIO
Caderno do Estudante.

INICIANDO
Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em duplas, mas em um período remoto essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão, por meio de alguma plataforma, vinculados a você. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. É interessante começar as aulas 1 e 2 desta Sequência com uma conversa com os estudantes, informando que, nas próximas aulas, estudarão funções de 1° e 2° grau, com o destaque de que as atividades iniciais abordarão conteúdos sobre resolução de problemas que envolvam função afim e sua representação gráfica. É interessante encaminhar a discussão no sentido de orientá-los quanto à importância do estudo funções para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático. Após essa breve introdução, os estudantes poderão realizar a leitura das questões no Caderno do Estudante.

DESENVOLVENDO
Para começar, você pode fazer o levantamento do conhecimento prévio dos

estudantes em relação a função afim e sua representação gráfica, iniciando o assunto com uma conversa sobre em que contexto a usamos. A questão 1 do Caderno do Estudante pode ser a base para explorar as características do gráfico da função de 1º grau, quando é crescente ou decrescente, qual é o coeficiente que determina a inclinação da reta, como identificar o maior crescimento, entre outras características. Na questão 2 do Caderno do Estudante, pode-se explorar a relação existente entre reta e ponto pertencente a reta para identificar a função que está sendo representada no gráfico. Para as questões 3, 4 e 5 do Caderno do Estudante, oriente os estudantes a interpretarem o enunciado do problema e a analisarem o gráfico. É importante identificar as grandezas envolvidas e analisar qual está em função da outra para obter a expressão da função. A questão 6 do Caderno do Estudante aborda a taxa de crescimento, oriente os estudantes a prestarem muita atenção em relação ao período que foi dado no enunciado com o período que está sendo pedido para que não gere erro. A questão 7 do Caderno do Estudante é uma ótima oportunidade para sintetizar o aprendizado sobre as características da função afim e o comportamento de seu gráfico.

2. Determine os valores de a e b e escreva a função afim de acordo com o gráfico a seguir.

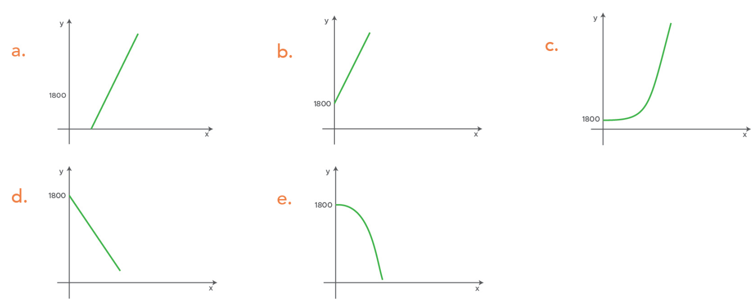


Fonte: Elaborado para fins didáticos

Com os pontos (0, 6) e (4, – 2) pertencem a reta, temos que: 6 = a · 0 + b → b = 6
– 2 = a · 4 + b → – 2 = a · 4 + 6 → – 8 = a · 4 → a = – 2
Portanto a função é f(x) = – 2x + 6.

Com esses dois pontos pertencentes à reta, chamados de pares ordenados (x, y), é possível calcular o valor dos coeficientes **a** e **b** da função afim.

3. (AAP – 2019) Uma das profissões em alta atualmente é o game designer (designer de jogos), profissional que atua em todos os processos da produção do jogo, onde é necessário entender de arte, marketing, programação, narrativa, roteiro e música. Em determinada empresa o salário de um game designer é composto pela parte fixa de R$ 1.800,00, mais uma parte variável de R$ 500,00 por jogo desenvolvido, O gráfico que representa o salário deste profissional é:



Fonte: (AAP, 2019)

Nesta questão, duas grandezas estão sendo expressas por meio de gráficos. A situação-problema refere-se a uma função de 1º grau na qual o salário está relacionado com a quantidade de jogos desenvolvidos. Sendo assim, além do salário fixo, existe uma quantia que varia de acordo com a quantidade de jogos.

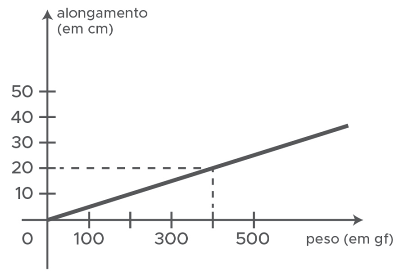
CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 2: Professor, retome a função afim como sendo y = ax + b ou f(x) = ax + b. Se julgar pertinente, relembre que o par ordenado é dado por (x, y).
QUESTÃO 3: Professor, nesta questão, relembre que o gráfico da função afim é uma reta e que nem sempre intercepta no ponto (0, 0). Se julgar pertinente, oriente os estudantes a organizar os dados em uma tabela para resolver a atividade.

Leia novamente o enunciado e destaque o valor do salário fixo e qual é a grandeza variável para responder esta questão.

y = 1800 + 500x
Alternativa B.

4. (AAP – 2018) Por volta do ano 1660 o cientista experimental Robert Hooke observou que o alongamento A de uma mola, dentro de certos limites, antes de perder sua elasticidade dada por uma constante k, é função do peso P do objeto suspenso por ela. Para uma mola em que k = 0,05 obteve-se o seguinte gráfico:



Fonte: Elaborado para fins didáticos

A lei desta função é dada por:

a. A = 0,05P

b. P = 0,05A

c. A = P + 0,05

d. P = A + 0,05

e. A = P + 0,05P

O alongamento da mola só depende do peso do objeto preso a ela, portanto temos que A = 0,05P
Alternativa A.

Note que, para existir uma função afim, o coeficiente a não pode ser zero, mas o coeficiente **b** pode. Com isso, podemos definir uma função afim como qualquer função f de ℝ em ℝ dada por uma lei da forma f(x) = ax + b, em que **a** e **b** são números reais dados e a ≠ 0.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 4: Professor, nesta questão, oriente os estudantes a observarem que o alongamento da mola deve ser expresso em função do peso do objeto.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, sugerimos a correção das questões do Caderno do Estudante. Incentive a participação dos estudantes de modo que possíveis dúvidas sejam esclarecidas e peça que compartilhem as resoluções com o objetivo de explorar as diferentes estratégias existentes para resolver uma determinada questão.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

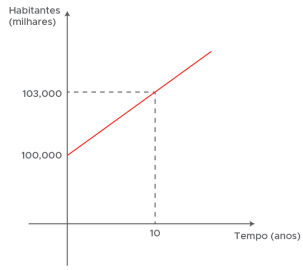
QUESTÃO 5: Professor, comente que o lucro é resultado entre o valor obtido menos o custo (lucro = valor obtido – custo.).

5. (ENEM – 2020 – adaptada) Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1.200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas. Disponível em: www.cnpso.embrapa.br. Acesso em: 27 fev. 2012 (adaptado).

Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

O valor obtido é calculado por: 50x, em que x é a quantidade de saca de 60 kg.
O custo é calculado por: $1200 \cdot 10 = 12\,000$ (1200 por 10 hectares). Portanto, $L(x) = 50x - 12\,000$.

6. (SARESP – 2014) O gráfico a seguir representa uma projeção do número de habitantes de um município em n anos.



Fonte: Elaborado para fins didáticos

A taxa de crescimento deste município, em habitantes por ano, foi de:

a. 103 000.
b. 100 000.
c. 3 000.
d. 300.
e. 10.

Observando o gráfico, temos que o número de habitantes apresenta um aumento de 3000 após 10 anos, que implica em um crescimento médio na população de 300 habitantes por ano. Alternativa D.

A situação-problema proposta está associada à função do 1° grau, cujo gráfico é uma reta, conforme apresentado. Observe o gráfico e calcule de quanto foi o aumento no número de habitantes após 10 anos. Preste atenção no que é pedido na questão! Volte no enunciado e destaque o que está sendo pedido e tente resolver.

7. Escreva as características fundamentais da função de 1° grau.

Chama-se função polinomial do 1° grau, ou função afim, qualquer função f de R em R dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais dados e $a \neq 0$. Além disso, o número a é chamado de coeficiente de x e o número b é chamado termo constante. O gráfico de uma função polinomial do 1° grau, $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy. O coeficiente de x, a, também é chamado coeficiente angular da reta e está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo Ox e o termo constante, b, é chamado coeficiente linear da reta. Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0 + b = b$. Assim, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy.

AULAS 3 E 4 – PROPORCIONALIDADE NA FUNÇÃO LINEAR

Objetivo das aulas:
- Resolver problemas de proporcionalidade utilizando a função linear como modelo matemático.

Nas últimas aulas, foi trabalhado a função afim e a sua representação gráfica. Agora, será abordado o conceito de função linear e proporcionalidade.

Uma função linear é uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por **f(x) = ax** para todo x real com a ≠ 0. Seu gráfico é uma reta não vertical que passa pela origem (0, 0).

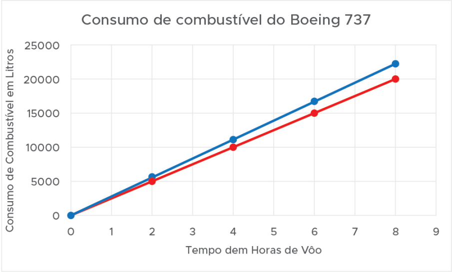
Para analisar a proporcionalidade na função linear, vamos relembrar o que são grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

Grandezas diretamente proporcionais são aquelas grandezas em que a variação de uma provoca a variação da outra numa mesma proporção. Se uma dobra a outra dobra, se uma é dividida pela metade, a outra também será dividida pela metade. Sua função é dada por $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$, para todo valor de x e todo $n \in \mathbb{N}^*$ e sua representação gráfica é uma reta intercepta no ponto (0,0).

Grandezas inversamente proporcionais são aquelas grandezas onde a variação de uma provoca a variação contrária da outra numa mesma proporção. Se uma dobra a outra cai pela metade, se uma aumenta, a outra diminui sempre na mesma proporção. Sua função é dada por $f(n \cdot x) = \frac{1}{n} \cdot f(x)$, para todo valor de x e todo $n \in \mathbb{N}^*$ e sua representação gráfica é uma hipérbole.

Agora que você relembrou alguns conceitos importantes, junte-se com sua dupla e vamos lá!

1. (AAP – 2019) **O meio de transporte aéreo tem aumentado a cada ano e, nas linhas de transporte aéreo, o avião mais utilizado é o Boeing 737 que, desde seu primeiro voo em 9 de abril de 1967, já transportou mais de 7 bilhões de pessoas. Essa aeronave possui motores movidos à querosene de aviação que consomem 2800 litros de combustível por hora de voo. Observe o gráfico do consumo de combustível de um Boeing 737 durante o voo:**



Fonte: Elaborado para fins didáticos

O gráfico apresentado anteriormente representa:

a. uma proporcionalidade inversa entre o consumo de combustível do avião e o tempo de voo.

b. a irregularidade encontrada entre o consumo de combustível do avião e o tempo de voo.

AULAS 3 E 4 – PROPORCIONALIDADE NA FUNÇÃO LINEAR

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em duplas produtivas, mas, em um período remoto, essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão, por meio de alguma plataforma, vinculados a você. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. Para as aulas 3 e 4 desta Sequência, é importante que os estudantes tenham sanado as possíveis dúvidas sobre os conteúdos das aulas anteriores sobre função de 1º grau, pois servirá como base para abordar os assuntos dessas aulas. Se julgar necessário, faça uns exemplos com o objetivo de relembrar alguns conceitos.

DESENVOLVENDO

Para começar, pode-se fazer o levantamento do conhecimento prévio dos estudantes sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais. É possível que eles respondam que grandezas diretamente proporcionais aumentam ou diminuem na mesma proporção, já as grandezas inversamente proporcionais, enquanto uma aumenta a outra diminui na mesma proporção. Aproveite esse momento para expor os assuntos que serão abordados nessas aulas. Apresente as questões do Caderno do Estudante, introduzindo o conceito de comparação entre duas grandezas. As questões 1 e 2 do Caderno do Estudante tem como objetivo verificar se o estudante demonstra conhecimento de detalhes relacionados à proporcionalidade direta e inversa. Para as questões 3, 4 e 5 do Caderno do Estudante, sugerimos que oriente os estudantes a prestarem atenção no enunciado do problema, pois, através dos dados, eles deverão identificar se a proporção é direta ou inversa e determinar a função linear. A questão 6 do Caderno do Estudante é uma ótima oportunidade para sintetizar o aprendizado sobre as características da função linear e a proporcionalidade entre grandezas.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 1: Professor, esta questão pretende verificar se o estudante compreende a relação de proporcionalidade direta entre duas grandezas em situações diversas, portanto, relembre quanto duas grandezas são diretamente proporcionais.

c. que o avião parado e desligado já está consumindo combustível.

d. uma proporcionalidade direta entre o consumo de combustível do avião e seu tempo de voo.

e. que a cada hora o avião consome, aproximadamente, 5000 litros de querosene de aviação.

Nota-se no gráfico que no instante zero o consumo do combustível também é nulo e seu crescimento descreve uma função de 1º grau, ou seja, uma reta que passa pela origem. Quando se divide o consumo de combustível do avião pelo tempo de voo, encontra-se a constante de proporcionalidade k.
Alternativa D.

Note que o consumo de combustível do avião é diretamente proporcional ao tempo de voo dele, o que pode ser observado no gráfico, pois é uma reta crescente que passa pela origem.

2. (AAP – 2019 – adaptada) Quando duas grandezas (x e y) são inversamente proporcionais, podemos escrever tanto que x é inversamente proporcional a y, como y é inversamente proporcional a x. Construa um gráfico que representa uma relação de proporcionalidade inversa entre as grandezas.

Para que seja constatada a relação de proporcionalidade inversa entre as grandezas x e y, é importante verificar se há reciprocidade entre a proporcionalidade inversa de x para y e de y para x. Numa análise gráfica dessa reciprocidade destacam-se alguns pontos: o gráfico deve ser de uma hipérbole.

3.) (SARESP – 2010) A relação entre a pressão e a temperatura de um gás quando este é mantido em um recipiente de volume constante é uma função linear definida pela relação $\frac{P}{T}=a$, ou seja, a razão entre a pressão e a temperatura é constante. A tabela seguinte mostra, para um determinado gás, a evolução da pressão em relação à temperatura.

Temperatura T	300	400	700
Pressão P	60	80	

(SARESP, 2010)

O valor que está faltando na tabela é

a. 100.

b. 140.

c. 150.

d. 170.

e. 180.

Proporcionalidade direta entre as variáveis do problema, Temperatura e Pressão. De acordo com a tabela temos que:

$$\frac{60}{300}=\frac{80}{400}=\frac{x}{700}=\frac{1}{5}\longrightarrow x=\frac{700}{5}=140$$

Alternativa B.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 2: Professor, oriente os estudantes a construírem o gráfico. Comente que em uma proporção inversa temos $y=\frac{k}{x}$, com k constante e que para construir um gráfico pode-se construir uma tabela fixando o valor da constante k, atribuir valores para x e calcular os valores de y.

4. (SARESP – 2009) A distância entre duas cidades é 160 km e Jair vai percorrê-la num tempo t com uma velocidade média v. Por exemplo, se Jair for a 80 km/h, isto é, percorrer 80 quilômetros em cada hora, ele demorara 2 horas para completar os 160 quilômetros.

Assinale a alternativa que mostra a relação entre **v** e **t**.

a. $v = 160t$

b. $v = \frac{t}{160}$

c. $v = 160 + t$

d. $v = 160 - t$

e. $v = \frac{160}{t}$

(velocidade = espaço/tempo).
Alternativa E.

Você se lembra de ter visto o conteúdo de velocidade média em Física? Pois então, essa questão aborda exatamente isso. Se por acaso você não se lembra da fórmula para calcular a velocidade média, leia com atenção o enunciado e analise: para percorrer uma determinada distância, se aumentar a velocidade, o tempo de percurso irá aumentar ou diminuir?

5. (AAP – 2019 – adaptada) A atividade física cresceu 24,1% durante o lazer, segundo pesquisa da Vigitel em 2017. A caminhada é a atividade mais praticada, seguida de perto pelo futebol e pela musculação. Porém vemos constantemente o ciclismo crescente tomando conta das ruas. Um grupo de ciclismo percorreu 240 km em 12 horas. Considerando a velocidade média do grupo nessa viagem, qual é a expressão que representa o deslocamento desse grupo (em km) em função do tempo (em horas)?

Ao percorrer 240 km em 12 horas, significa que este grupo pedala 20 km em 1 hora $\frac{240}{12}=20$ ou seja, sua velocidade média é de 20 km/h. Após essa constatação, basta expressar por meio de uma função esse deslocamento em relação ao tempo. Considerando o tempo x em horas, tendo a constante k = 20, pois eles percorrem 20 km a cada hora, podemos escrever a relação da distância f(x), em km, em função de x. Logo, $f(x) = 20x$.

6. A função linear é considerada o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. Escreva algumas características da função linear.

Seja y uma grandeza em função da grandeza x, ou seja, $y = f(x)$, dizemos que y é diretamente proporcional a x se as seguintes condições forem satisfeitas:
- y é uma função crescente;
- $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$, para todo valor de x e todo $n \in \mathbb{N}^*$

Do mesmo modo, y é inversamente proporcional a x:
- quando y é uma função decrescente;
- $f(n \cdot x) = \frac{1}{n} \cdot f(x)$, para todo valor de x e todo $n \in \mathbb{N}^*$

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 4: Professor, é provável que os estudantes se lembrem da relação velocidade e tempo das aulas de Física. Oriente-os a escrever essa relação em linguagem matemática. Professor, instigue os estudantes a analisarem qual é a relação proporcional entre velocidade e tempo.

FINALIZANDO

A finalização poderá ser feita com a correção das questões do Caderno do Estudante e com a elaboração de um resumo, complementando a questão 6. Consideramos que essa etapa assumirá um papel importante no processo de aprendizagem, pois permitirá que os estudantes sintetizem seus conhecimentos. Solicite que algum estudante compartilhe o seu resumo. Dessa forma, será possível identificar os que ainda apresentam fragilidades quanto aos objetos de conhecimento tratados para planejar possíveis estratégias em busca de esclarecer essas dúvidas.

AULAS 5 E 6 – GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em duplas produtivas, mas, em um período remoto, essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão, por meio de alguma plataforma, vinculados a você. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. Para as aulas 5 e 6 desta Sequência, é importante que os estudantes tenham sanado as possíveis dúvidas sobre os conteúdos das aulas anteriores, pois, nesta aula, serão estudadas situações que envolvam função quadrática. Espera-se que, ao final dessas aulas, os estudantes saibam diferenciar a função quadrática de uma função afim e resolver problemas que abordam a função quadrática.

DESENVOLVENDO

Pode-se começar explicando que o grafico de uma função quadratica pode possuir duas raízes reais distintas ou duas raízes reais iguais ou nenhuma raiz real e que isso depende do valor do delta (Δ). Complemente explicando que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola com concavidade voltada para cima se o valor do coeficiente a for maior que zero ($a > 0$) ou, então, com a concavidade voltada para baixo se $a < 0$. Se julgar pertinente, construa um gráfico de uma função quadrática utilizando um software de geometria dinâmica, mostrando os pontos de interseção no eixo x e no eixo y para os estudantes associarem que as raízes irão interceptar o eixo x e o valor do coeficiente c, o eixo y. Com essas orientações, os estudantes poderão responder todas as questões do Caderno do Estudante.

AULAS 5 E 6 – GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Objetivo das aulas:
- Resolver problemas e situações matemáticas que envolvem as raízes e gráfico da função quadrática.

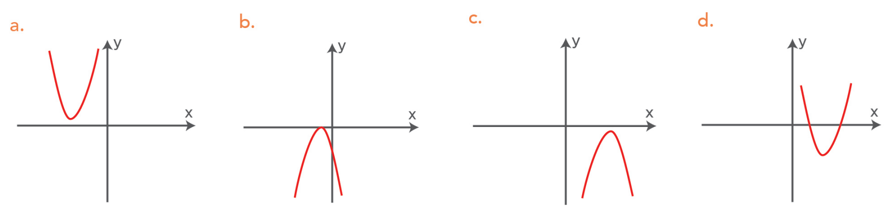
Nesta atividade, você será convidado a resolver problemas utilizando o conceito de função quadrática e a sua representação gráfica. Para isso, você deverá recordar a nomenclatura da função quadrática, os significados dos seus coeficientes, identificar se é uma parábola que tem a concavidade voltada para cima ou para baixo, determinar as raízes da função e saber construir o seu gráfico. Junte-se com sua dupla e bom trabalho!

1. Antes de começar a resolver a atividade, vamos estudar alguns pontos importantes de uma função quadrática.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **quadrática** quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$ definida como $f(x) = ax^2 + bx + c$.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola que pode ter a concavidade voltada para cima, se $a > 0$, ou ter a concavidade voltada para baixo, se $a < 0$. Para analisar em quantos pontos essa parábola vai cruzar o eixo x, você deve analisar o valor do **discriminante**, ou seja, tem que analisar o valor do delta expresso por $\Delta = b^2 - 4ac$. Quando $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ tem **duas raízes reais** diferentes o gráfico cruza o eixo x em dois pontos. Quando $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ **não tem raízes reais**, o gráfico não cruza o eixo x. Quando $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ tem **duas raízes reais iguais**, o gráfico cruza o eixo x em um único ponto.

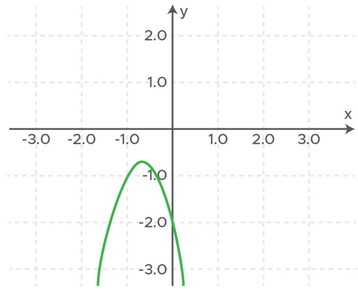
Agora, analise cada gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, descubra se $a < 0$ ou $a > 0$ e se $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ ou $\Delta = 0$.



Analisando os gráficos das funções quadráticas, temos que:
a) $a > 0$ e $\Delta > 0$ b) $a < 0$ e $\Delta = 0$
c) $a < 0$ e $\Delta < 0$ d) $a > 0$ e $\Delta < 0$

Note que, no item a a concavidade é voltada para cima ($a > 0$) e o gráfico cruza o eixo x em dois pontos diferentes ($\Delta > 0$). No item b, a concavidade da parábola é voltada para baixo ($a < 0$) e a parábola cruza o eixo x em um único ponto ($\Delta = 0$). No item c, a concavidade da parábola é voltada para baixo ($a < 0$) e a parábola não cruza o eixo x em nenhum ponto ($\Delta < 0$). No item d, a concavidade da parábola é voltada para cima ($a > 0$) e a parábola não cruza o eixo x em nenhum ponto ($\Delta < 0$).

2. (SARESP – 2009) A função y = f (x), em IR está representada graficamente por:



Fonte: Elaborado para fins didáticos

Pode-se afirmar que a função f:

a. tem raízes reais negativas.

b. possui valor mínimo.

c. tem raízes reais positivas.

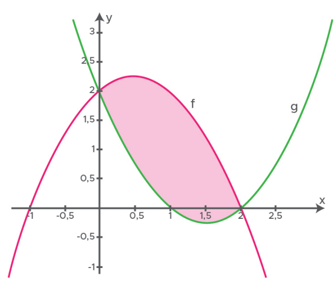
d. tem valor máximo igual a -1.

e. não possui raízes reais.

A parábola da função em questão não corta o eixo x, o que significa que não existe nenhum número real x que verifique f(x) = 0. Ou seja, esta função não tem raízes reais.

Alternativa E.

3. (SARESP – 2013 – adaptada) Observe os gráficos das funções f e g.



Fonte: Elaborado para fins didáticos

Determine a raiz em comum que essas duas funções têm.

De acordo com os gráficos, as raízes da função f, $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$; e da função g, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, consequentemente, a raiz comum é dada por x = 2.

As raízes de uma função quadrática são os pontos em que a parábola cruza com o eixo x. Pelo gráfico da função f e da função g, nota-se a existência de um único ponto em comum no eixo x.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 2: Professor, se necessário, peça aos estudantes para retomarem as características apresentadas na questão anterior.

FINALIZANDO

A finalização poderá ser feita com a elaboração de um mapa conceitual sobre as características da função quadrática. Consideramos que essa etapa assumirá um papel importante no processo de aprendizagem, pois permitirá que os estudantes sintetizem seus conhecimentos. Solicite que algum estudante compartilhe o seu mapa conceitual, explicando-o. Dessa forma, será possível identificar os que ainda apresentam fragilidades quanto aos objetos de conhecimento tratados para planejar possíveis estratégias em busca de esclarecer essas dúvidas.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 4: Professor, relembre que as raízes da função são os dois pontos de intersecção da parábola com o eixo x.

QUESTÃO 6: Professor, apesar dos pontos de máximo e mínimo ser conteúdo da próxima aula, relembre sobre o vértice da parábola para os estudantes colocarem essa informação no mapa conceitual.

4. (AAP – 2018 – adaptada) A trajetória de uma pedra lançada ao ar é dada por $y = -5x^2 + 20x$, com x e y em metros. Determine as raízes dessa função.

$-5x^2 + 20x = 0$

$x(-5x + 20) = 0$

$x = 0$ ou $-5x + 20 = 0 \rightarrow -5x = -20 \rightarrow x = 4$ Portanto as raízes da função é 0 e 4.

5. Você já ouviu falar na fórmula de Bhaskara?

Provavelmente você utilizou essa fórmula na resolução de equações do 2º grau no 9º ano do Ensino Fundamental. Para calcular as raízes da função quadrática $f(x)=ax + bx + c$, em $f(x) = 0$, além de calcular o discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$), você tem que calcular os valores de x_1 e x_2 dados por $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

Agora, determine as raízes das seguintes funções quadráticas e faça um esboço do gráfico de cada uma delas.

a. $f(x) = x^2 + 4x - 21$

b. $f(x) = -x^2 + 36$

a)Calculando as raízes da função $f(x) = x^2 + 4x - 21$ quando $f(x) = 0$, logo $x^2 + 4x - 21=0$:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-4\pm 10}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4+10}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-4-10}{2} = 7$$

O gráfico será uma parábola com a concavidade voltada para cima, intersectando o eixo x nos pontos – 7 e 3 e intersectando o eixo y no ponto – 21.

b) Calculando as raízes da função $f(x) = -x^2 + 36$:

$-x^2 + 36 = 0$

$-x^2 = -36$

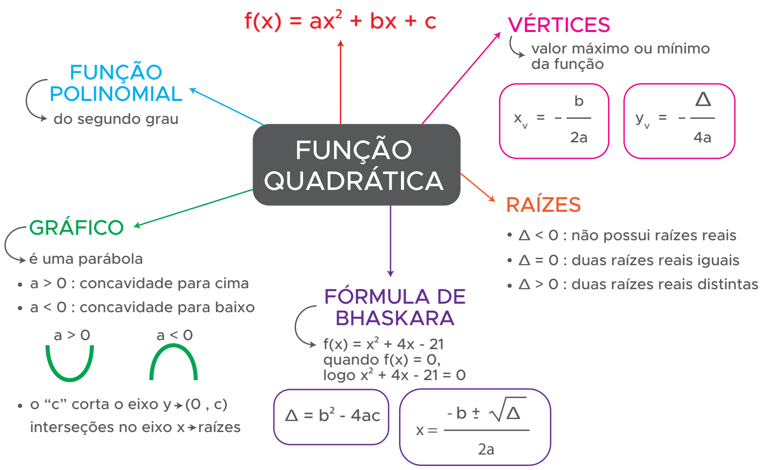
$x = \sqrt{36}$

$x = \pm 6$

O gráfico será uma parábola com a concavidade voltada para baixo, intersectando o eixo x nos pontos – 6 e 6, e intersectando o eixo y no ponto 36.

Note que, no item *a* a função está completa, pois possui todos os coeficientes (a, b e c), logo o cálculo das raízes ocorreu por meio da fórmula de Bhaskara quando f(x)=0. Já no item *b*, a função é incompleta, pois possui apenas os coeficientes a e c, por essa razão é possível calcular as raízes apenas extraindo a raiz quadrada do coeficiente *c*, mas nada impede de você utilizar a fórmula de Bhaskara.

6. Elabore um mapa conceitual sobre as características da função quadrática.



AULAS 7 E 8 – MÁXIMO, MÍNIMO E ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em duplas produtivas, mas, em um período remoto, essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão, por meio de alguma plataforma, vinculados a você. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. Para essas atividades, propomos uma retomada dos principais conceitos tratados no decorrer desta Sequência de Atividades. Além disso, é interessante começar uma conversa, informando que eles estudarão os pontos de máximo e mínimo da função quadrática, além de estudarem o seu sinal. Após essa breve introdução, os estudantes poderão realizar a leitura das questões do Caderno do Estudante.

DESENVOLVENDO

Com a leitura do Caderno, os estudantes deverão ter clareza de que, para responderem à questão, eles precisarão identificar os pontos de máximo e mínimo da função quadrática, além de saber analisar os sinais da função. Explore a demonstração das fórmulas dos vértices da parábola, pois é importante que os estudantes saibam chegar até elas evitando, assim, que as decorem. Para o estudo do sinal da função, seria interessante dar um exemplo para cada uma das seis possibilidades (concavidade voltada para cima: com duas raízes reais distintas, com duas raízes reais iguais e sem raízes reais; concavidade voltada para baixo: com duas raízes reais distintas, com duas raízes reais iguais e sem raízes reais). Com essas informações, os estudantes poderão resolver todas as questões do Caderno do Estudante. Para o segundo momento da aula, os estudantes deverão se envolver com as questões de 7 a 12, que são itens da AAP e do SARESP. A correção poderá se focar para a leitura aten-

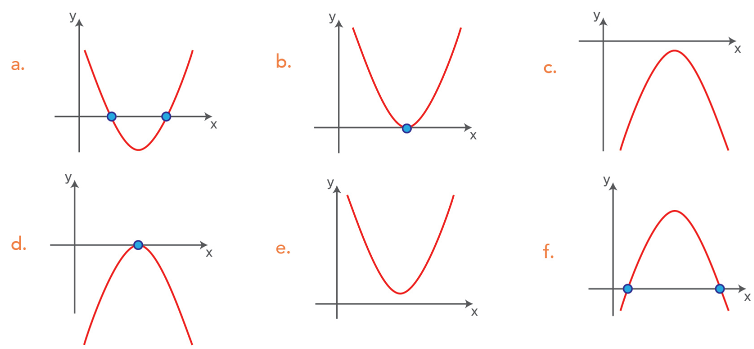
AULAS 7 E 8 – MÁXIMO, MÍNIMO E ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Objetivos das aulas:
- Resolver problemas que envolvem valor máximo e mínimo e ponto de máximo e de mínimo de uma função quadrática;
- Resolver problemas e situações que requerem o estudo do sinal da função quadrática.

Nas últimas aulas, você estudou as características da função quadrática, o cálculo das suas raízes, analisou quando a parábola tem concavidade voltada para cima e quando tem a concavidade voltada para baixo, entre outros conteúdos.

Nessas aulas, você aprenderá a analisar os pontos de máximo e mínimo da função quadrática e a calcular o x e o y do vértice da parábola.

1. (AAP – 2019 – adaptada) **Observe as representações de funções quadráticas a seguir e circule aquelas que podem ser estudadas para a determinação de mínimos.**



Devem ser circulados os itens a, b e e.

Analisando a concavidade da parábola, é possível notar que, quando é voltada para cima, existem valores maiores que o ponto de vértice e, quando é voltada para baixo, existe valores menores que o ponto de vértice. Portanto, para determinar o mínimo de uma função quadrática, basta que ela tenha a concavidade voltada para cima, não importando sua posição em relação ao eixo x. E para determinar o máximo, basta que ela tenha a concavidade voltada para baixo.

2. (AAP – 2019 – adaptada) Uma empresa quer reduzir o custo de produção das peças que fabrica. Se o custo dessas peças é definido pela seguinte função $C(x) = x^2 - 80x + 3000$, então qual é a quantidade x de unidades produzidas para que o custo seja mínimo?

O valor de x que minimiza custo C de produção é a abscissa do ponto mínimo da função ou, em outras palavras, do vértice da parábola que representa graficamente a função dada. Vamos, então, calcular a abscissa do vértice da parábola para a função $C(x) = x^2 - 80x + 3000$, que tem como coeficientes $a = 1$, $b = -80$ e $c = 3000$.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-80)}{(2 \cdot 1)} = \frac{80}{2} = 40$$

Portanto, é necessário produzir 40 peças para que o custo seja mínimo.

Para responder essa questão, você precisa lembrar que as coordenadas do vértice são dadas por $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ Mas nem sempre será preciso calcular as duas coordenadas, vai depender do que é pedido na questão. Fique atento a isso!

Nesse caso, como é pedido a quantidade x, terá que ser calculado apenas o x do vértice (x_v).

3. (AAP – 2019 – adaptada) Em uma apresentação aérea, aviões em competição tentam atingir o ponto mais alto em uma ascensão rápida, descrevendo um arco no formato de parábola. Um desses aviões seguiu a função $y = -2x^2 + 80x$. Determine a altura máxima, em metros, atingida por esse competidor.

Para determinar a altura máxima, vamos calcular a ordenada do vértice da parábola para a função $y = -2x^2 + 80x$, que tem como coeficientes $a = -2$, $b = 80$ e $c = 0$.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{80^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0}{4 \cdot (-2)} = \frac{6400}{-8} = 800$$

Portanto, a altura máxima atingida pelo competidor é de 800 m.

4. (SARESP – 2014 – adaptada) Sobre a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$, é correto afirmar que

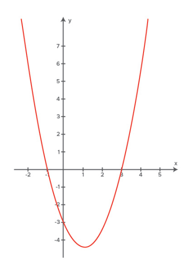
a. seus valores são negativos para qualquer valor de x.

b. se $x < -1$ ou $x > 3$, então $f(x) > 0$.

c. tem somente valores positivos para $x > 0$.

d. se $x < -1$ ou $x > 3$, então $f(x) < 0$.

e. seu menor valor ocorre quando $x = -1$.



Fonte: Elaborado para fins didáticos

ciosa de cada item e compartilhando as diferentes estratégias de resolução.

FINALIZANDO

Por fim, ressaltamos que esse encontro tem um importante papel quanto à verificação do desenvolvimento das habilidades assumidas para o trabalho com esta Sequência de Atividades. Nesse sentido, o encerramento, a partir das resoluções das questões propostas para as aulas 7 e 8, deverá se articular no sentido de sistematizar os conceitos estudados sobre funções de 1º e 2º grau. Destacamos a relevância do envolvimento ativo dos estudantes nesses momentos.

A simples leitura do gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ permite afirmar que:
- se $x = -1$ ou $x = 3$, então $f(x) = 0$;
- se $x < -1$ ou $x > 3$, então $f(x) > 0$;
- se $-1 < x < 3$, então $f(x) < 0$. Alternativa B.

5. Estudar o sinal da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ significa determinar os valores reais de x para os que f(x) é nula ($f(x) = 0$), f(x) é positiva ($f(x) > 0$), e f(x) é negativa ($f(x) < 0$). Para isso, você deve calcular as raízes da função e analisar os seguintes casos:

1º caso: $\Delta > 0$ ($x_1 \neq x_2$)

- Para $a > 0$, tem-se:
$f(x) = 0 \Rightarrow x = x_1$ ou $x = x_2$
$f(x) > 0 \Rightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$
$f(x) < 0 \Rightarrow x_1 < x < x_2$

- Para $a < 0$, tem-se:
$f(x) = 0 \Rightarrow x = x_2$ ou $x = x_1$
$f(x) > 0 \Rightarrow x_1 < x < x_2$
$f(x) < 0 \Rightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$

2º caso: $\Delta = 0$ ($x_1 = x_2$)
- Para $a > 0$, tem-se:
$f(x) = 0 \Rightarrow x = x_1 = x_2$
$f(x) > 0 \Rightarrow x \neq x_1$ ou $x \neq x_2$

- Para $a < 0$, tem-se:
$f(x) = 0 \quad x = x_1 = x_2$
$f(x) < 0 \quad x \neq x_1$ ou $x \neq x_2$

3º caso: $\Delta < 0$ (não tem raiz real)
- Para $a > 0$, tem-se:
$f(x) > 0$ para todo x real

- Para $a < 0$, tem-se:
$f(x) < 0$ para todo x real

Agora, discuta o sinal da função $f(x) = -x^2 + 4x$.

Calculando as raízes da função, temos que:
$-x^2 + 4x = 0$
$x(-x + 4) = 0$
$x = 0$ ou $-x + 4 = 0 \rightarrow x = 4$
Como o coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$), a parábola tem concavidade voltada pra baixo. Logo:
- se $x = 0$ ou $x = 4$, então $f(x) = 0$;
- se $0 < x < 4$, então $f(x) > 0$;
- se $x < 0$ ou $x > 4$, então $f(x) < 0$.

6. Escreva qual é a situação em que uma função é negativa para qualquer valor de x, com $x \in \mathbb{R}$

A única situação em que uma função é negativa para qualquer valor de x, com $x \in \mathbb{R}$ é quando a concavidade da parábola é para baixo ($a < 0$) e quando essa função não possui nenhuma raiz real.

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

ANOTAÇÕES

3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

OLÁ, PROFESSOR!

Nesta Sequência de Atividades falamos diretamente com você, que está aí, na sala de aula, no convívio direto com os estudantes, os quais terão a oportunidade, nesse momento, de se envolverem com atividades que possibilitem a retomada de conceitos, propriedades e procedimentos essenciais para o desenvolvimento de seus conhecimentos e capacidades em matemática.

A Sequência de Atividades deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração. Além disso, as socializações das atividades, por parte dos estudantes, são percebidas aqui como oportunidades de serem desenvolvidas habilidades e competências que dizem respeito à cooperação, à empatia, à argumentação, à comunicação, entre outras.

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de compreender as propriedades das funções trigonométricas, além de saberem construir os gráficos dessas funções.

Habilidades a serem desenvolvidas nas aulas: Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o seno, o cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos, e aplicá-los em diversos contextos; Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx) + c$ a partir do gráfico de $y = \text{sen}\, x$, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c.

Aula/tempo	Tema da aula
1ª e 2ª/ 90 min	Função seno
3ª e 4ª/ 90 min	Função cosseno
5ª e 6ª/ 90 min	Resolução de problemas sobre função seno e cosseno
7ª e 8ª/ 90 min	Função tangente

Sabemos que as atividades por si só não ensinam. Por isso, professor, a sua atuação é tão importante em cada uma das situações propostas aqui, cujo objetivo é recuperar as aprendizagens e desenvolver as habilidades esperadas para a 3ª série do Ensino Médio. Para isso, este caderno deverá servir como mais uma ferramenta que o auxiliará no processo de ensino, sendo necessário, portanto, que você considere outras possibilidades de discussão e recursos em seu replanejamento, para além daqueles sugeridos nesta Sequência de Atividades. Para ajudá-lo nessa ação, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenalmente acerca das Sequências de Atividades, nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPCs). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

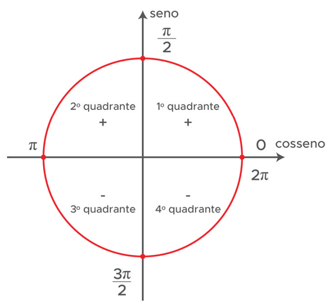
AULAS 1 E 2 – FUNÇÃO SENO

Objetivos das aulas:
- Compreender a definição e as propriedades da função seno;
- Construir o gráfico da função seno;
- Compreender o significado dos coeficientes da função seno.

Nesta atividade, você será convidado a resolver problemas utilizando o conceito da função seno e a sua representação gráfica. Para isso, vamos recordar a nomenclatura da função seno, os significados dos seus coeficientes, identificar quando a função é crescente ou decrescente e aprender como construir o seu gráfico.

A função seno é definida como f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número x ao seu seno, isto é, f(x) = sen (x).

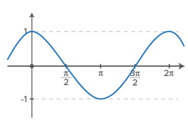
O ciclo trigonométrico é dividido em quatro quadrantes. No primeiro e no segundo quadrantes o sinal da função seno é positivo. No terceiro e no quarto quadrantes o sinal da função é negativo. Além disso, no 1° e 4° quadrantes a função f é crescente, e no 2° e 3° quadrantes a função f é decrescente.

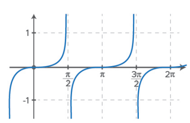


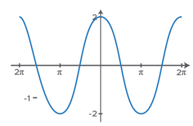
Fonte: Elaborado para fins didáticos

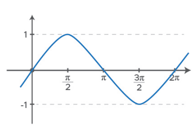
Agora que você relembrou algumas características da função seno, já pode tentar fazer as atividades. Bom trabalho!

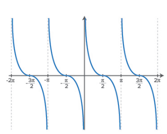
1. (AAP – 2019) O gráfico da função y = sen x é:

a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

Fonte: Elaborado para fins didáticos

Para responder esta questão, é preciso que o estudante tenha conhecimento sobre os valores máximo, mínimo e zeros da função seno. Alternativa D.

AULAS 1 E 2 – FUNÇÃO SENO

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em fileiras, em formato de U ou em círculo.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em fileiras, em formato de U ou em círculo, mas em um período remoto essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão, por meio de alguma plataforma, vinculados a você. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. É interessante começar as **Aulas 1 e 2** desta Sequência de Atividades com uma conversa com os estudantes informando que, nas próximas aulas, estudarão as funções trigonométricas, com o destaque para as atividades iniciais, que abordarão conteúdos sobre a função seno. É interessante encaminhar a discussão no sentido de orientá-los quanto à importância do estudo de funções para o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático. Após essa breve introdução, os estudantes poderão realizar a leitura das questões no Caderno do Estudante.

DESENVOLVENDO

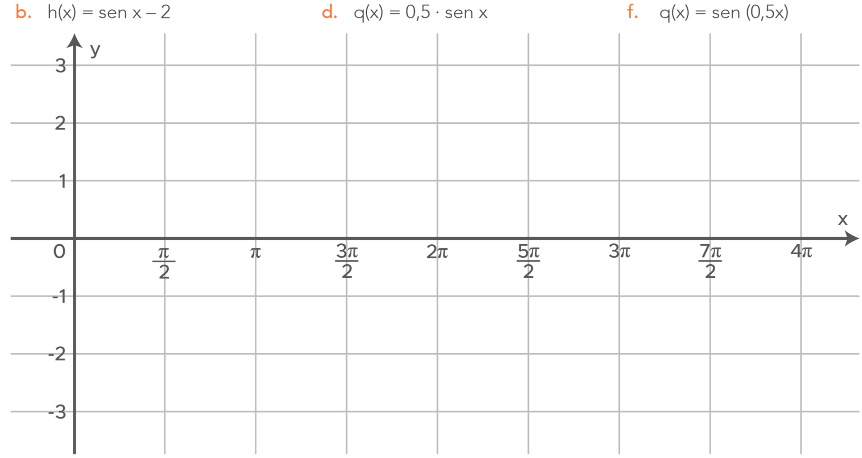
Para começar, pode-se fazer o levantamento do conhecimento dos estu-

2. Escreva algumas características da função seno, como: período, amplitude, domínio, imagem, quando é crescente, quando é decrescente, entre outras.

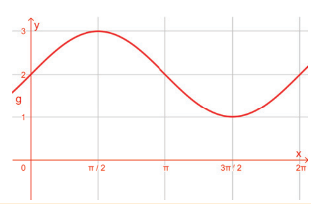
A função seno é uma função periódica, seu período é 2π e a amplitude é 1. Ela é expressa por f(x) = sen x e o gráfico da função é uma curva chamada de senoide.
No círculo trigonométrico, o sinal da função seno é positivo quando x pertence ao 1º e 2º quadrantes, e negativa no 3º e 4º quadrantes. Além disso, no 1º e 4º quadrantes a função f é crescente, e no 2º e 3º quadrantes a função f é decrescente. O domínio da função seno são os reais (R). O conjunto imagem corresponde ao intervalo [- 1, 1], ou seja, - 1 ≤ sen x ≤ 1.

3. Construa os gráficos das funções a seguir e escreva o que mudou em relação à função f(x) = sen x.

a. g(x) = sen x + 2
b. h(x) = sen x – 2
c. p(x) = 3 · sen x
d. q(x) = 0,5 · sen x
e. r(x) = sen (4x)
f. q(x) = sen (0,5x)



Fonte: Elaborado para fins didáticos



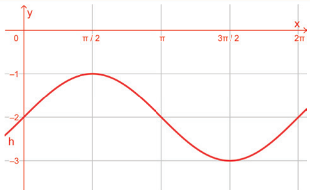
Em relação a função f(x) = sen x temos que:
a) O gráfico da função g(x) = sen x + 2 foi deslocado para cima em relação ao eixo das ordenadas somando duas unidades em todos os pontos da imagem.

dantes em relação ao ciclo trigonométrico, pois as características em relação ao seno serão de grande importância para o entendimento da função seno e a construção de seu gráfico. As **questões 1 e 2** do Caderno do Estudante podem ser a base para explorar as características do gráfico da função seno, quando é crescente ou decrescente, qual é o período, qual é a amplitude, entre outras características. Se julgar pertinente, faça um ciclo trigonométrico e, a partir dele, oriente os estudantes a construírem o gráfico da função seno.

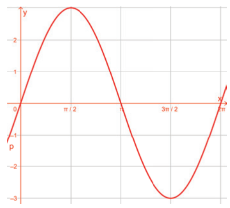
A **questão 3** do Caderno do Estudante pode ser realizada utilizando um software de geometria dinâmica. Oriente os estudantes a plotarem o gráfico da função y = sen x, e a partir dela, efetuar a comparação com os gráficos das funções de cada item para assim eles compreenderem o que foi alterado. Para as **questões 4 e 5** do Caderno do Estudante, retome o que foi visto na **questão 3**, pois os estudantes precisarão saber o significado de cada coeficiente da função seno. A **questão 6** do Caderno do Estudante é uma ótima oportunidade para sintetizar o aprendizado sobre as características da função seno e o comportamento de seu gráfico.

FINALIZANDO

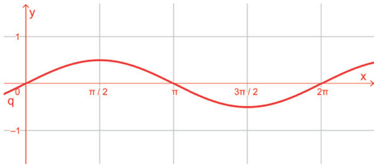
Para finalizar a aula, sugerimos a correção das questões do Caderno do Estudante. Incentive a participação dos estudantes de modo que possíveis dúvidas sejam esclarecidas e peça que compartilhem as resoluções, com o objetivo de explorar as diferentes estratégias existentes para resolver uma determinada questão.



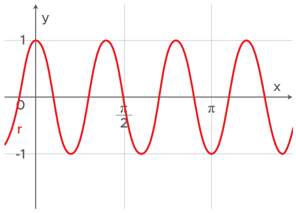
b) O gráfico da função h(x) = sen x – 2 foi deslocado para baixo em relação ao eixo das ordenadas subtraindo duas unidades em todos os pontos da imagem.



c) O gráfico da função p(x) = 3 · sen x é esticado, ou seja, a amplitude é alterada. No caso a amplitude é três vezes maior que a amplitude do gráfico da função f(x) = sen x.

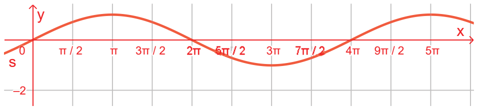


d) O gráfico da função q(x) = 0,5 · sen x é achatado, ou seja, a amplitude é alterada. No caso a amplitude é metade da amplitude do gráfico da função f(x) = sen x.



e) No gráfico da função r(x) = sen (4x) é alterado o período, que no caso passa a ser π/2

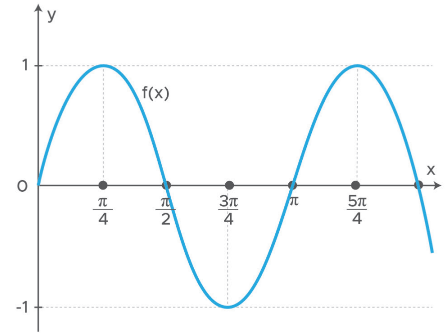
(2π ÷ 4 = π ÷ 2)



f) No gráfico da função q(x) = sen (0,5x) é alterado o período, que no caso passa a ser 4π

(2π ÷ 0,5 = 4π).

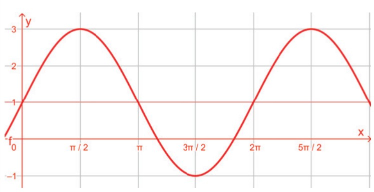
4. (ADE – 2020 – adaptada) Observe o gráfico abaixo e escreva a função a que ele corresponde.



Fonte: Elaborado para fins didáticos

Professor, se julgar pertinente, retome a questão anterior com os estudantes de modo a esclarecer que o período da função y = sen x é 2π. Se o período da função representada no gráfico é π, significa que o período 2π foi dividido por 2 e, portanto, a função correspondente ao gráfico é f(x) = sen (2x).

5. (AAP – 2014) Esboce o gráfico de f(x) = 1 + 2 sen (x).



Vamos calcular a imagem da função f(x) = 1 + 2 sen (x). A imagem é obtida a partir dos valores máximo e mínimo de sen x, isto é, 1 e – 1. Dessa forma, são valores extremos de f(x): 1 + 2 . (1) = 1 + 2 = 3 e 1 + 2 . (- 1) = 1 - 2 = - 1. Logo Im f = [-1,3]. O eixo de simetria da onda localiza-se sobre a reta y = 1 e a amplitude da onda mede 2.

6. Faça um resumo simples e explicativo sobre os significados dos coeficientes a, b e c na função f(x) = a · sen (bx) + c.

O coeficiente a se refere a amplitude do gráfico da função. Se – 1 < a < 1, com a ≠ 0, a amplitude diminui. Se a < – 1 ou a > 1, a amplitude aumenta.
O coeficiente b se refere ao período. Se b > 1 o período é menor em relação ao período da função y = sen x. Se b < 1, o período é maior. Se b < -1, o período também será maior, pois é admitido o valor absoluto do b.
O coeficiente c se refere ao deslocamento vertical do gráfico da função. Se c > 0 o deslocamento é para cima. Se c < 0 o deslocamento é para baixo.

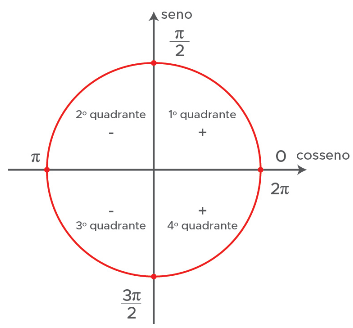
AULAS 3 E 4 – FUNÇÃO COSSENO

Objetivos das aulas:
- Compreender a definição e as propriedades da função cosseno;
- Construir o gráfico da função cosseno;
- Compreender o significado dos coeficientes da função cosseno.

Nesta atividade, você será convidado a resolver problemas utilizando o conceito da função cosseno e a sua representação gráfica. Para isso, vamos recordar a nomenclatura da função cosseno, os significados dos seus coeficientes, identificar quando a função é crescente ou decrescente e saber construir o seu gráfico.

A função cosseno é definida como f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada número x ao seu cosseno, isto é, f(x) = cos (x).

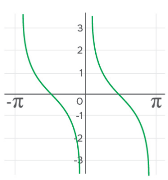
O ciclo trigonométrico é dividido em quatro quadrantes. No primeiro e no quarto quadrantes, a função cosseno é positiva. No segundo e no terceiro quadrantes, a função é negativa. Além disso, no primeiro e no segundo quadrantes, o gráfico da função é decrescente. No terceiro e no quarto quadrantes, o gráfico da função é crescente.

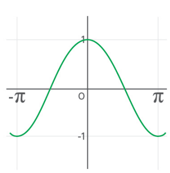


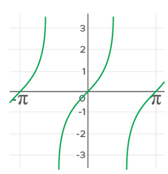
Fonte: Elaborado para fins didáticos

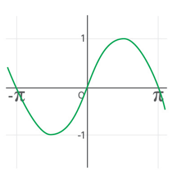
Agora que você relembrou algumas características da função cosseno, já pode tentar fazer as atividades. Bom trabalho!

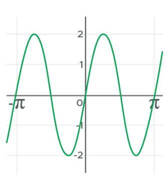
1. (AAP – 2018) Dentre os gráficos apresentados, qual corresponde à função y = cos x?

a.


b.


c.


d.


e.


Fonte: Elaborado para fins didáticos

Para responder esta questão, é preciso que o estudante identifique no gráfico os valores do cosseno correspondentes aos arcos 0, - π e π. Alternativa B.

AULAS 3 E 4 – FUNÇÃO COSSENO

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em fileiras, em formato de U ou em círculo.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em fileiras, em formato de U ou em círculo, mas em um período remoto essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão, por meio de alguma plataforma, vinculados a você. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. Para as **Aulas 3 e 4** desta Sequência de Atividades, é importante que os estudantes tenham sanado as possíveis dúvidas sobre os conteúdos das aulas anteriores sobre a função seno, pois servirá como base para abordar os assuntos dessas aulas. Se julgar necessário, faça uns exemplos com o objetivo de relembrar alguns conceitos.

DESENVOLVENDO

Para começar, pode-se fazer o levantamento do conhecimento dos estudantes em relação ao ciclo trigonométrico, pois as características em relação ao cosseno serão de grande importância para o entendimento da função cosseno e a construção de seu gráfico. As **questões 1 e**

2 do Caderno do Estudante podem ser a base para explorar as características do gráfico da função cosseno, quando é crescente ou decrescente, qual é o período, qual é a amplitude e outras características. Se julgar pertinente, faça um ciclo trigonométrico e, a partir dele, oriente os estudantes a construírem o gráfico da função cosseno. A **questão 3** do Caderno do Estudante pode ser realizada utilizando um software de geometria dinâmica. Oriente os estudantes a plotarem o gráfico da função y = cos x e, a partir dela, efetuar a comparação com os gráficos das funções de cada item, para assim eles compreenderem o que foi alterado. Para as **questões 4 e 5** do Caderno do Estudante, retome o que foi visto na **questão 3**, pois os estudantes precisarão saber o significado de cada coeficiente da função cosseno. A **questão 6** do Caderno do Estudante é uma ótima oportunidade para sintetizar o aprendizado sobre as características da função cosseno e o comportamento de seu gráfico.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, sugerimos a correção das questões do Caderno do Estudante. Incentive a participação dos estudantes, de modo que possíveis dúvidas sejam esclarecidas, e peça que compartilhem as resoluções com o objetivo de explorar as diferentes estratégias existentes para resolver uma determinada questão.

2. Escreva algumas características da função cosseno, como: período, amplitude, domínio, imagem, quando é crescente, quando é decrescente, entre outras.

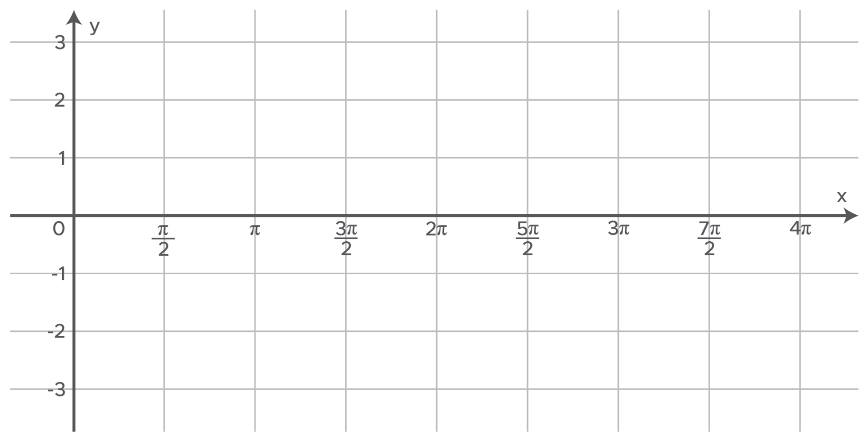
A função cosseno é uma função periódica, seu período é 2π e a amplitude é 1. Ela é expressa por f(x) = cos x e o gráfico da função é uma curva chamada de cossenoide.

No círculo trigonométrico, o sinal da função cosseno é positivo quando x pertence ao 1° e 4° quadrantes, e negativa no 2° e 3° quadrantes. Além disso, no 1° e 2° quadrantes a função f é decrescente, e no 3° e 4° quadrantes a função f é crescente.

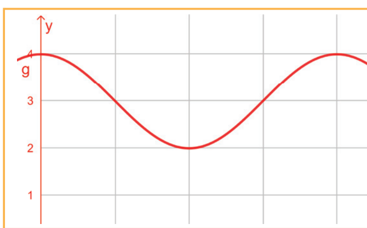
O domínio da função cosseno são os reais (R). O conjunto imagem corresponde ao intervalo [- 1, 1], ou seja, $-1 \leq \cos x \leq 1$.

3. Construa os gráficos das funções a seguir e escreva o que mudou em relação à função f(x) = cos x.

a. g(x) = cos x + 3
b. h(x) = cos x – 3
c. p(x) = 4 · cos x
d. q(x) = 0,5 · cos x
e. r(x) = cos (5x)
f. s(x) = cos (0,5x)

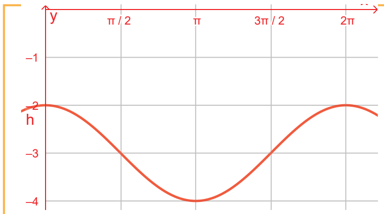


Fonte: Elaborado para fins didáticos

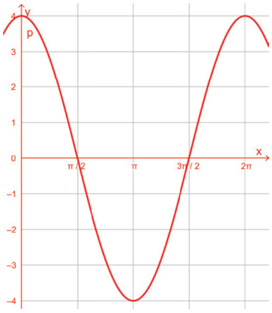


Em relação a função f(x) = cos x temos que:

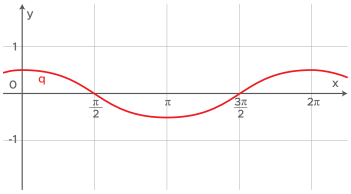
a) O gráfico da função g(x) = cos x + 3 foi deslocado para cima em relação ao eixo das ordenadas somando três unidades em todos os pontos da imagem.



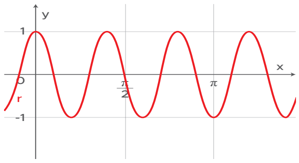
b) O gráfico da função h(x) = cos x – 3 foi deslocado para baixo em relação ao eixo das ordenadas subtraindo três unidades em todos os pontos da imagem.



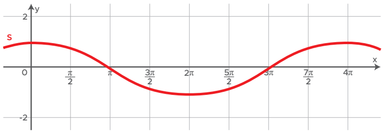
c) O gráfico da função p(x) = 4 · cos x é esticado, ou seja, a amplitude é alterada. No caso a amplitude é quatro vezes maior que a amplitude do gráfico da função f(x) = cos x.



d) O gráfico da função q(x) = 0,5 · cos x é achatado, ou seja, a amplitude é alterada. No caso a amplitude é metade da amplitude do gráfico da função f(x) = cos x.

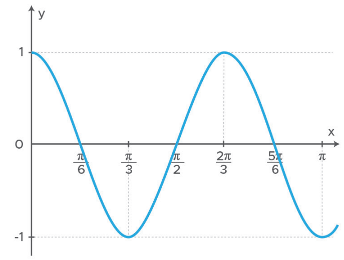


e) No gráfico da função r(x) = cos (5x) é alterado o período, que no caso passa a ser 2π/5



f) No gráfico da função q(x) = cos (0,5x) é alterado o período, que no caso passa a ser 4π
(2π ÷ 0,5 = 4π).

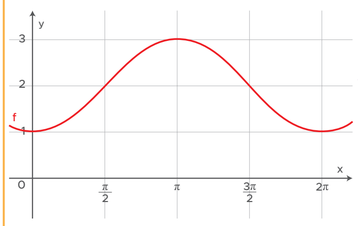
4. Observe o gráfico abaixo e escreva a função a que ele corresponde.



Fonte: Elaborado para fins didáticos

Professor, se julgar pertinente, retome a questão anterior com os estudantes de modo a esclarecer que o período da função y = cos x é 2π. Se o período da função representada no gráfico é $\frac{2\pi}{3}$, significa que foi o período 2π dividido por 3 e, portanto, a função correspondente ao gráfico é f(x) = cos (3x).

5. (ADE – 2020 – adaptada) Esboce o gráfico de f(x) = 2 – cos x.



Professor, se os estudantes tiverem dificuldades para resolver essa questão, oriente-os a esboçar primeiro o gráfico da função g(x) = cos x, depois esboçar o gráfico da função h(x) = 2 + cos para depois inverter os valores de máximo e mínimo da função.

Vamos calcular a imagem da função f(x) = 2 – cos x. A imagem é obtida a partir dos valores máximo e mínimo de cos x, isto é, 1 e – 1. Dessa forma, são valores extremos de f(x): 2 – 1 = 1 e 2 – (– 1) = 2 + 1 = 3. Logo Im f = [1, 3]. O fato de ser – cos x indica que a amplitude da função não é alterada, mas o gráfico da função é invertido, ou seja, os máximos da função cos x (que ocorrem para todo x = 2kπ) serão transformados em mínimos e os mínimos transformados em máximos.

6. Faça um resumo simples e explicativo sobre os significados dos coeficientes a, b e c na função f(x) = a · cos (bx) + c.

O coeficiente a se refere a amplitude do gráfico da função. Se – 1 < a < 1, com a ≠ 0, a amplitude diminui. Se a < – 1 ou a > 1, a amplitude aumenta.

O coeficiente b se refere ao período. Se b > 1 o período é menor em relação ao período da função y = cos x. Se b < 1, o período é maior. Se b < -1, o período também será maior, pois é admitido o valor absoluto do b. O coeficiente c se refere ao deslocamento vertical do gráfico da função. Se c > 0 o deslocamento é para cima. Se c < 0 o deslocamento é para baixo.

AULAS 5 E 6 – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE FUNÇÃO SENO E COSSENO

Objetivos das aulas:

- Resolver problemas que podem ser modelados por meio da função seno;
- Resolver problemas que podem ser modelados por meio da função cosseno.

1. (ENEM – 2014 – adaptada) Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a \cdot \text{sen}\,[b\,(x + c)]$, em que os parâmetros a, b, c são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda.

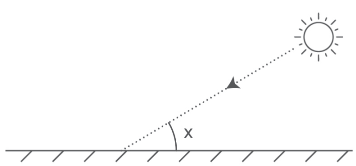
Qual(ais) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s)?

Na função $y = a\,.\,\text{sen}\,[b(x + c)]$, temos que

a: define apenas a amplitude da onda; b: define o período; c: define apenas a fase inicial da onda

Portanto, a pessoa que deseja tornar o som mais agudo deve diminuir o período da onda, para isso o parâmetro que precisa ser alterado é o b.

2. (ENEM – 2017) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \text{sen}\,(x)$ sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0° e 90°.



Fonte: Elaborado para fins didáticos

Quando x = 30°, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

a. 33%

b. 50%

c. 57%

d. 70%

e. 86%

A intensidade será máxima quando sen x for máximo e para isso o ângulo deve ser de 90° quando o sol estiver a pino (aproximadamente às 12h). Temos que $I(x)_{máximo} = k \cdot \text{sen}\ 90° = k$.

E quando o ângulo for de 30°, temos

$I(x) = k \cdot \text{sen}\ 30° = k \cdot \frac{1}{2} = 50\% \cdot k$

Alternativa B.

AULAS 5 E 6 – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE FUNÇÃO SENO E COSSENO

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Caderno do Estudante.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em duplas produtivas, mas em um período remoto essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão, por meio de alguma plataforma, vinculados a você. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. Para as **Aulas 5 e 6** desta Sequência de Atividades, é importante que os estudantes tenham sanado as possíveis dúvidas sobre os conteúdos das aulas anteriores, pois nesta aula serão estudadas situações que envolvam as funções trigonométricas seno e cosseno. Espera-se que, ao final dessas aulas, os estudantes resolvam problemas que abordam essas funções em diversos contextos.

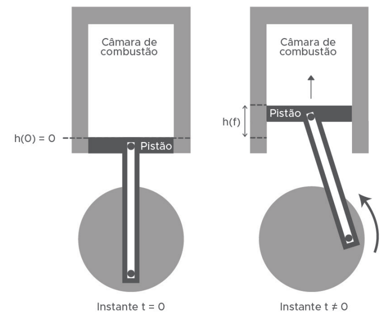
DESENVOLVENDO

Com a leitura do Caderno, os estudantes deverão ter clareza de que, para responderem os problemas, eles precisarão saber das características das funções seno e cosseno. Para começar, retome os conteúdos vistos nas aulas anteriores, construa o ciclo trigonométrico relembrando os valores do seno e do cosseno dos ângulos triviais, faça um esboço dos gráficos dessas funções relembrando os pontos de máximo e mínimo, o período e os significados de cada coeficiente da função. Se julgar conveniente, dê exemplos de funções em que o seno e o cosseno aparecem no denominador de uma fração e mostre aos estudantes que, para a função ser máxima, o denominador precisa ser mínimo, pois quanto menor o denominador, maior será o quociente da divisão, e vice-versa. Com essas informações, os estudantes poderão resolver todas as questões do Caderno do Estudante. Se julgar pertinente, circule pela sala de aula a fim de observar o raciocínio dos estudantes e sanar eventuais dúvidas.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, sugerimos a correção das questões do Caderno do Estudante. Incentive a participação dos estudantes, de modo que possíveis dúvidas sejam esclarecidas, e peça que compartilhem as resoluções. Dessa forma, será possível identificar os que ainda apresentam fragilidades quanto aos objetos de conhecimento tratados para planejar possíveis estratégias em busca de esclarecer essas dúvidas.

3. (ENEM – 2019 - adaptada) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.



A função (t) = $4 + 4\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para t ≥0 descreve como varia a altura h, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante t = 0), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

a. 1
b. 2
c. 4
d. 5
e. 8

De acordo com o enunciado, h(t) deve alcançar três vezes o valor de 6 cm, com isso, vamos estudar o que acontece quando h(t) = 6

$4 + 4\,\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 6 \qquad 4\,\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \qquad \text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Então, para h(t) = 6 o seno deve ser $\frac{1}{2}$. Como o enunciado informa que h(t) deve alcançar três vezes o valor de 6 cm, então o seno deve alcançar três vezes o valor $\frac{1}{2}$. A primeira vez será em $\frac{\pi}{6}$ a segunda em $\frac{5\pi}{6}$ e a terceira em $\frac{13\pi}{6}$.

Como h(t) deve atingir o valor de 6 cm pela terceira vez em menos de 4 segundos, então para t = 4, o ângulo deve ser maior que $\frac{13\pi}{6}$. Assim temos que:

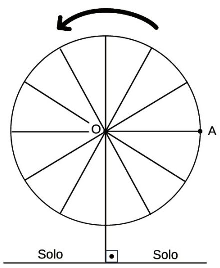
$$\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} > \frac{13\pi}{6}$$
$$\frac{\beta \cdot 4}{2} - \frac{3}{2} > \frac{13 \cdot 3}{6}$$

$$2\beta > \frac{39}{6} + \frac{3}{2}$$
$$2\beta > \frac{48}{6}$$
$$\beta > 4$$

Se β > 4 e se deve ser atribuído o menor valor inteiro a esse parâmetro, então β = 5.

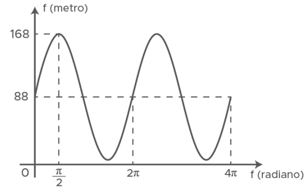
Alternativa D.

4. (ENEM – 2018) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t.

Após duas voltas completas, f no seguinte gráfico:



Fonte: Elaborado para fins didáticos

A expressão da função altura é dada por

a. $f(t) = 80 \text{ sen } (t) + 88$

b. $f(t) = 80 \cos (t) + 88$

c. $f(t) = 88 \cos (t)+168$

d. $f(t) = 168 \text{ sen } (t) + 88 \cos (t)$

e. $f(t) = 88 \text{ sen } (t)+ 168 \cos (t)$

Analisando o gráfico podemos verificar que f é uma função seno com período 2π, da forma $f(t) = A + B \cdot \text{sen}(t)$. Analisando os pontos, temos que:
$f(0) = 88$, logo $A = 88$. $f(\pi/2) = 168$, logo $B = 80$.
Portanto a função é $f(t) = 80 \text{ sen } (t) + 88$.
Alternativa A.

5. (ENEM – 2015 – adaptada) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função

$$P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$$

onde x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br em 2 ago. 2012 (adaptado)

Na safra, qual é o mês de produção máxima desse produto?

A produção máxima ocorre quando o preço é mais baixo. Como o cosseno de um ângulo varia entre 1 e -1, temos que

$$\cos\left(\frac{\pi \cdot x - \pi}{6}\right) = -1$$

$$\frac{\pi \cdot x - \pi}{6} = \pi$$

$$\pi \cdot x - \pi = 6\pi$$

$$\pi \cdot x = 6\pi + \pi$$

$$\pi \cdot x = 7\pi \qquad x = 7$$

Logo, julho foi o mês de produção máxima.

6. (ENEM – 2010 – adaptada) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15 \cdot \cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representada por S. Qual é o valor da soma S?

Como o cosseno de um ângulo varia entre 1 e –1, temos que analisar quando r será máximo e quando será mínimo. Como a função é uma fração, então quanto menor é o denominador, maior será o numerador e vice-versa. Logo r será máximo quando cosseno for –1 e será mínimo quando o cosseno for 1.

$$r(t)_{máximo} = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15 \cdot (-1)} = \frac{5\,865}{0{,}85} = 6\,900$$

$$r(t)_{mínimo} = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15 \cdot (1)} = \frac{5\,865}{1{,}15} = 5\,100$$

$S = r_{máximo} + r_{mínimo} = 6\,900 + 5\,100 = 12\,000$ Portanto, a soma do apogeu e do perigeu é 12 000 km.

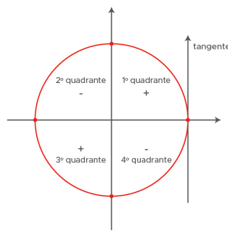
AULAS 7 E 8 – FUNÇÃO TANGENTE

Objetivos das aulas:
- Compreender a definição e as propriedades da função tangente;
- Construir o gráfico da função tangente;
- Interpretar gráficos das funções tangente.

Nesta atividade, você será convidado a resolver problemas utilizando o conceito da função tangente e a sua representação gráfica. Para isso, vamos recordar a nomenclatura da função tangente, os significados dos seus coeficientes, identificar quando a função é crescente ou decrescente e saber construir o seu gráfico.

A função tangente é definida como f: $\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; K \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada número x à sua tangente, isto é, f(x) = tg (x).

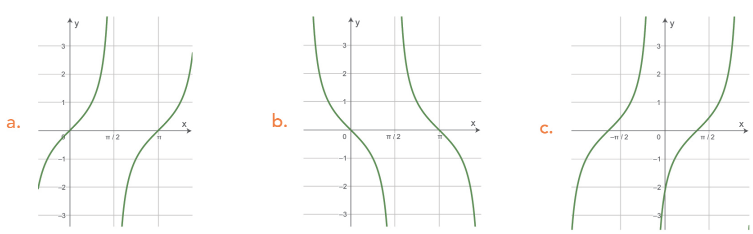
O ciclo trigonométrico é dividido em quatro quadrantes. No primeiro e no terceiro quadrantes, a função tangente é positiva. No segundo e no quarto quadrantes, a função é negativa. Além disso, o gráfico da função é crescente em todos os quadrantes.



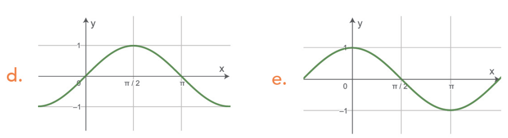
Fonte: Elaborado para fins didáticos

Agora que você relembrou algumas características da função tangente, já pode tentar fazer as atividades. Bom trabalho!

1. Dentre os gráficos apresentados, qual corresponde à função y = tg x?



Fonte: Elaborado para fins didáticos



Para responder esta questão, é preciso que o estudante identifique no gráfico os valores da tangente correspondentes aos arcos 0, $\frac{\pi}{2}$ e π. Alternativa A.

AULAS 7 E 8 – FUNÇÃO TANGENTE

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em fileiras, em formato de U ou em círculo.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em fileiras, em formato de U ou em círculo, mas em um período remoto, essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão, por meio de alguma plataforma, vinculados a você. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. Para essas atividades, propomos uma retomada dos principais conceitos tratados no decorrer desta Sequência de Atividades. Além disso, é interessante começar uma conversa, informando que eles estudarão a função tangente e seu gráfico. Após essa breve introdução, os estudantes poderão realizar a leitura das questões do Caderno do Estudante.

DESENVOLVENDO

Com a leitura do Caderno, os estudantes deverão ter clareza de que, para responder à questão, eles precisarão saber das características da função tangente no ciclo trigonométrico. Se julgar necessário, faça uma retomada desse conteúdo abordando as características dessa função e dando ênfase nos pontos em que ela é definida. Para explorar o gráfico da função tangente, se possível, peça aos alunos para plotarem alguns gráficos em um software de geometria dinâmica e analisarem quais foram as alterações que os gráficos sofreram em relação ao gráfico da função f(x) = tg x.

Com essas informações, os estudantes poderão resolver todas as questões do Caderno do Estudante. Para o segundo momento da aula, os estudantes deverão se envolver com as **questões de 5 a 9**, que são itens da AAP e do ENEM. A correção poderá focar na leitura atenciosa de cada item e no compartilhamento das diferentes estratégias de resolução.

FINALIZANDO

Por fim, ressaltamos que esse encontro tem um importante papel quanto à verificação do desenvolvimento das habilidades assumidas para o trabalho com esta Sequência de Atividades. Nesse sentido, o encerramento, a partir das resoluções das questões propostas para as **Aulas 7 e 8**, deverá se articular para sistematizar os conceitos estudados sobre funções trigonométricas. Destacamos a relevância do envolvimento ativo dos estudantes nesses momentos.

2. Escreva algumas características da função tangente, como: período, amplitude, domínio, imagem, quando é crescente, quando é decrescente, entre outras.

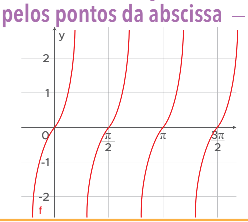
A função tangente é uma função periódica, seu período é π e a amplitude é] - ∞,∞ [. Ela é expressa por f(x) = tg x e o gráfico da função é uma curva chamada de tangentoide.
No círculo trigonométrico, o sinal da função tangente é positivo quando x pertence ao 1º e 3º quadrantes, e negativa no 2º e 4º quadrantes. Além disso, a função f(x) = tg x é crescente em todos os quadrantes do círculo trigonométrico.
O domínio da função tangente é definido como D= $\left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$ e o conjunto imagem corresponde aos $\mathbb{R}$.

3. Explique o que é assíntota vertical e porque a função tangente não é definida em $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Assíntotas verticais são as retas verticais que passam pelo pontos de abscissa, $\cdots -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots$ que não tem ponto comum com o gráfico da função f(x) = tg x. Quando x se aproxima dessas retas, a distância entre essa reta e o gráfico tende a zero.
A função f(x) = tg x não é definida em $\frac{\pi}{2} + k\pi$ porque a tangente nesses pontos não existe.

4. Esboce o gráfico da função f(x) = tg 2x e escreva qual é o seu período.

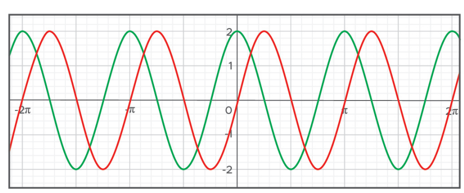
Para essa questão oriente os estudantes a montarem uma tabela atribuindo alguns valores para x, calcular a função f(x) = tg 2x com esses valores e fazer o esboço do gráfico.
Nesse caso a função não está definida em $x = -\frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{\pi}{4}$, logo, duas assíntotas verticais passam pelos pontos da abscissa $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$.



Se o período da função y = tg x é 2π, então o período da função f(x) = tg 2x é π, $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

Fonte: Elaborado para fins didáticos

5. (AAP – 2019 - adaptada) Os gráficos a seguir representam as funções y = 2 sen (2x) e y = 2 cos (2x).



A partir desses gráficos podemos afirmar que:

a. O período das funções é de 2π e o máximo dessas funções é 1.

b. O período das funções é de π e o máximo dessas funções é 1.

c. O período das funções é de π e o máximo dessas funções é - 2.

d. O período das funções é de π e o máximo dessas funções é 2.

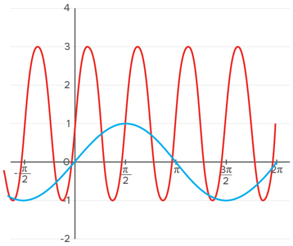
e. O período das funções é de π - 2 e o máximo dessas funções é 2.

Observando os dois gráficos das funções, podemos perceber que o período de ambas é π e que máximo dessas funções é 2.
Alternativa D.

6. (AAP – 2014 – adaptada) Qual é o conjunto imagem do gráfico da função y = 2 cos x no intervalo [0, 2π]?

Nesse exercício os estudantes podem elaborar uma tabela atribuindo alguns valores para x e calculando o valor de y para depois esboçar o gráfico. Com o esboço do gráfico será possível verificar que o mínimo é – 2 e o máximo 2. Logo, o conjunto imagem da função é
$\{y \in R \mid -2 \leq y \leq 2\}$.

7. (AAP – 2014 – adaptada) Escreva quais funções trigonométricas os gráficos a seguir representam.



Fonte: Elaborado para fins didáticos

Nessa questão o estudante deve identificar a função y = sen x e reconhecer que houve um deslocamento vertical da função de 1 unidade para cima, teve seu período diminuído 4 vezes e sua amplitude dobrada.
Logo, as funções presentes nos gráficos são y = sen (x) e y = 1 + 2 sen (4x).

8. (ENEM – 2015) Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right)$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite ($0 \leq h \leq 24$) e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26 °C, a mínima 18 °C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

a. A = 18 e B = 8

b. A = 22 e B = - 4

c. A = 22 e B = 4

d. A = 26 e B = - 8

e. A = 26 e B = 8

Como o seno de um ângulo varia entre 1 e –1, para que tenhamos a temperatura máxima, temos que o seno deve ser igual a 1 e para mínima, seno igual a –1, assim:

$$\begin{cases} A + \cancel{B} = 26 \\ A - \cancel{B} = 18 \end{cases}$$

2A = 44

A = 22

Se A = 22, então B = 4, mas teríamos o período da tarde sendo mais quente, como queremos o período da manhã sendo mais quente, então B = –4. Alternativa B.

9. (ENEM – 2017) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B \cdot \cos(kt)$ em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função P(t) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

a. $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(3\pi t)$

b. $P(t) = 78 + 42 \cdot \cos(3\pi t)$

c. $P(t) = 99 + 21 \cdot \cos(2\pi t)$

d. P(t) = 99 + 21 · cos (t)

e. P(t) = 78 + 42 · cos (t)

Como o cosseno de um ângulo varia entre 1 e –1, vamos substituir na expressão da função para determinar os valores máximo e mínimo.

Para a pressão máxima temos cos (kt) = 1 e para pressão mínima temos cos (kt) = –1. Assim,

$$\begin{cases} A + \cancel{B} = 120 \\ A - \cancel{B} = 78 \end{cases}$$

2A = 198

A = 99

Se A = 99, então B = 21.

Como são 90 batimentos a cada 60 segundos, temos $\frac{60}{90} = \frac{2}{3}$ de batimentos por segundo.

De acordo com o enunciado, o tempo entre dois valores máximos é o tempo de 1 batimento, portanto o período é 2/3 .

Então, $\frac{2\pi}{k} = \frac{2}{3} \rightarrow k = 3\pi$

Logo, a função é P(t) = 99 + 21 · cos (3πt)

Alternativa A.

ANOTAÇÕES

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

ANOTAÇÕES

3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO - SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

OLÁ, PROFESSOR!

Nesta Sequência de Atividades (SA), falamos diretamente com você, que está aí na sala de aula, no convívio direto com os estudantes, os quais terão a oportunidade de se envolver com atividades que possibilitam a retomada de conceitos, propriedades e procedimentos essenciais para o desenvolvimento de seus conhecimentos e capacidades em matemática.

A Sequência de Atividades deve ser desenvolvida considerando os protocolos de higiene e distanciamento social, favorecendo a interação, o compartilhamento de conhecimentos e a colaboração. Além disso, as socializações das atividades por parte dos estudantes são percebidas como oportunidades de desenvolver habilidades e competências que dizem respeito à cooperação, à empatia, à argumentação, à comunicação, entre outras.

Vale ressaltar que os estudantes devem chegar ao final da Sequência de Atividades sendo capazes de resolver problemas envolvendo distância entre dois pontos, ponto médio e equação da reta.

A habilidade a ser desenvolvida nas aulas: Saber usar, de modo sistemático, sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações e equações;

Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes e as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas.

Aula/Tempo	Atividade
1ª e 2ª/ 90 min	Calculando a distância entre dois pontos
3ª e 4ª/ 90 min	Pontos alinhados sobre uma única reta
5ª e 6ª/ 90 min	Calculando o valor do ângulo entre duas retas
7ª e 8ª/ 90 min	Retas paralelas ou perpendiculares entre si?

Sabemos que as atividades por si só não ensinam. Por isso, professor, a sua atuação é tão importante em cada uma das situações propostas aqui, cujo objetivo é recuperar as aprendizagens e desenvolver as habilidades esperadas para a 3ª série do Ensino Médio. Para isso, este Caderno deverá servir como mais uma ferramenta que o auxiliará no processo de ensino, sendo necessário, portanto, que você considere em seu replanejamento outras possibilidades de discussão e recursos, para além daqueles sugeridos nesta Sequência de Atividades. Para ajudá-lo nessa ação, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo fornecerá, por meio do Centro de Mídias, formação continuada quinzenal acerca das Sequências de Atividades nos momentos das Aulas de Trabalho Pedagógico Coletivo (ATPCs). Desejamos a você e a nossos estudantes um ótimo trabalho!

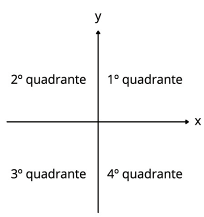
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

AULAS 1 E 2 – CALCULANDO A DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Objetivos das aulas:
- Relembrar a ideia de plano cartesiano e de distância entre pontos;
- Construir figuras geométricas no plano cartesiano, utilizando as coordenadas cartesianas dos pontos que representam seus vértices;
- Resolver problemas envolvendo o conceito de distância no plano cartesiano.

Nesta atividade, você será convidado a resolver problemas utilizando o conceito de distância no plano cartesiano. Para isso, você deverá recordar como se localiza um ponto no plano cartesiano e como calcular a distância entre dois pontos. Junte-se com sua dupla e vamos lá!

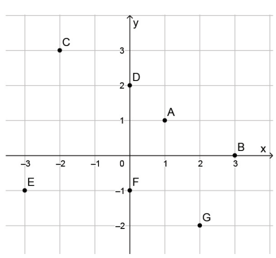
1. O plano determinado por dois eixos, x e y, orientados perpendiculares em 0 (zero) é chamado de **plano cartesiano**. Cada parte do plano dividida pelos eixos é chamada de **quadrante**. Veja a imagem a seguir.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

- O eixo x (ou eixo 0x) é chamando de **eixo das abscissas**.
- O eixo y (ou eixo 0y) é chamado de **eixo das ordenadas**.
- O ponto 0 é a origem do plano cartesiano.
- As coordenadas de um ponto são indicadas pelo **par ordenado** (x, y).

Agora que você relembrou as características do plano cartesiano, escreva as coordenadas de cada ponto do plano a seguir.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

A(1, 1), B(3, 0), C(-2, 3), D(0, 2), E(-3, -1); F(0, -1) e G(2, -2).

AULAS 1 E 2 – CALCULANDO A DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em duplas produtivas, mas, em um período remoto, essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estão vinculados a você por meio de alguma plataforma. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. É interessante começar as Aulas 1 e 2 com uma conversa, informando aos estudantes que, nas próximas aulas, estudarão pontos e retas, com o destaque de que as atividades iniciais abordarão conteúdos sobre localização de pontos no plano cartesiano, construção de figuras no plano cartesiano, utilizando os pontos como vértices, cálculo de distância entre dois pontos no plano cartesiano e cálculo de coordenadas do ponto médio de um segmento. Após essa breve introdução, os estudantes poderão realizar a leitura das questões no Caderno do Estudante.

DESENVOLVENDO

Para começar, pode-se fazer o levantamento do conhecimento prévio dos estudantes sobre em que contexto usamos o conceito de localização de ponto no plano cartesiano e a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 2: Professor, esse momento é oportuno para relembrar o conceito de módulo. Explique que não existe distância negativa, e por isso existe o módulo na expressão. E a diferença elevada ao quadrado segue o mesmo motivo.

A questão 1 do Caderno do Estudante pode ser a base para relembrar as características do plano cartesiano, o nome dado para os eixos x e y, onde é localizado a origem do plano, como localizar as coordenadas de um ponto, entre outras características. Na questão 2 do Caderno do Estudante, pode-se explorar os três casos de como calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano. Se julgar pertinente, demonstre cada um dos casos até chegar na expressão de cálculo da distância em cada um deles. Chame a atenção para o uso do módulo e da diferença ao quadrado, pois é uma forma de garantir que o resultado sempre será positivo, visto que não existe uma distância negativa. Para as questões 3 e 4 do Caderno do Estudante, oriente os estudantes a localizarem os pontos no plano cartesiano, ligando os pontos em ordem alfabética sem esquecer de ligar o último ponto com o primeiro, formando, assim, uma figura fechada. Depois, oriente os estudantes a calcular as medidas dos lados, utilizando as expressões de cálculo da distância entre dois pontos para, só então, efetuar a soma e calcular o perímetro da figura encontrada na questão 3. A questão 5 do Caderno do Estudante aborda a distância do centro de uma circunferência a um ponto pertencente a ela, e essa distância é chamada de raio. Para calcular o diâmetro, é preciso calcular primeiro

Quando a ordenada de um ponto é nula, ele pertence ao eixo das abscissas. Assim, para todo ***a*** ℝ, o ponto (a, 0) pertence ao eixo x.

Quando a abscissa de um ponto é nula, ele pertence ao eixo das ordenadas. Assim, para todo ***b*** ℝ, ponto (0, b) pertence ao eixo y.

2. A distância entre dois pontos distintos A e B do plano cartesiano é a medida do segmento de reta que tem esses dois pontos como extremidades. Há três casos para calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

1º caso: Quando o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo x, a distância entre A e B é calculada pelo módulo da diferença entre as abscissas de A e B: $d_{AB} = | x_A - x_B |$.

2º caso: Quando o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo y, a distância entre A e B é calculada pelo módulo da diferença entre as ordenadas de A e B: $d_{AB} = | y_A - y_B |$.

3º caso: Quando o segmento $\overline{AB}$ não é paralelo a nenhum desses eixos, a distância entre A e B é calculada por: $d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

Agora, calcule a distância entre os pontos dos itens a seguir:

a. A(-1, 2) e B(5, 2).

b. A(4, 1) e B(4, -3).

c. A(2, 3) e B(5, 1).

a) $d_{AB} = |x_A - x_B| = |-1-5| = |-6| = 6$

b) $d_{AB} = |y_A - y| = |1-(-3)| = |1+3| = |4| = 4$

c) $d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} =$

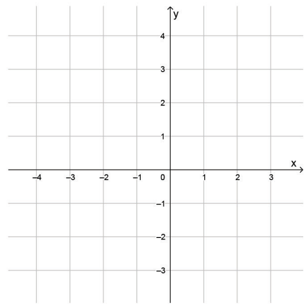
$= \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Perceba que, no item a, a ordenada dos pontos A e B são iguais, o que configura o segmento de reta como paralelo ao eixo x. Já no item b, a abscissa dos pontos A e B são iguais, o que significa que o segmento de reta é paralelo ao eixo y. Já no item c, todas as coordenadas são diferentes, então o segmento de reta não é paralelo a nenhum dos eixos.

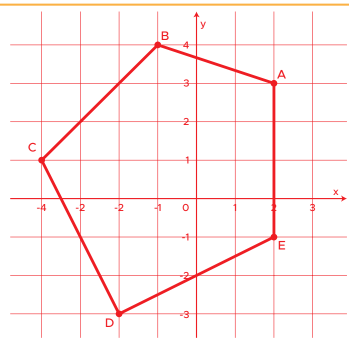
Olhando para os três casos, você consegue notar a importância do módulo no 1º e no 2º caso, e a importância da diferença elevada ao quadrado? Como os pontos A e B formam uma distância em diagonal com os eixos x e y, usando o Teorema de Pitágoras para projetar o triângulo retângulo no plano, é possível calcular a distância pelas coordenadas dos pontos do triângulo.

3. Nesta questão, você terá que localizar os pontos no plano cartesiano e desenhar o polígono ligando os vértices. Mas tenha cuidado, pois é preciso ligar os pontos seguindo a ordem alfabética, e não se esqueça de ligar o último ponto com o primeiro para fechar o polígono.

Pontos: A(2, 3), B(-1, 4), C(-4, 1), D(-2, -3), E(2, -1).



Fonte: Elaborado para fins didáticos.



4. Essa atividade será baseada na resolução da atividade anterior. Depois de ligar os pontos, é possível observar que foi desenhado um pentágono não regular, isto é, um pentágono com os lados de medidas diferentes.

Observe o desenho formado e as coordenadas dos pontos e calcule o perímetro do pentágono. Lembre-se que perímetro é a soma de todos os lados.

$$d_{AB} = \sqrt{\left(2-(-1)\right)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$d_{BC} = \sqrt{\left(-1-(-4)\right)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$d_{CD} = \sqrt{\left(-4-(-2)\right)^2 + \left(1-(-3)\right)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d_{DE} = \sqrt{(-2-2)^2 + \left(-3-(-1)\right)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d_{EA} = |3-(-1)| = 4$$

Perímetro $= \sqrt{10} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 4$

esclarecidas, e peça que compartilhem as resoluções com o objetivo de explorar as diferentes estratégias existentes para resolver uma determinada questão.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 4: Professor, questione os estudantes como calcular a medida dos lados do pentágono. Espera-se que eles respondam que devem ser calculadas por meio das expressões da distância entre dois pontos, e depois efetuar a soma para calcular o perímetro.

o valor do raio e dobrar o seu valor, já que o diâmetro é o dobro do raio. A questão 6 aborda o ponto médio de um segmento de reta e como efetuar o cálculo para obter as coordenadas desse ponto. Demostre, junto com os estudantes, os cálculos até obter a expressão das coordenadas do ponto médio.

FINALIZANDO

Para finalizar a aula, sugerimos a correção das questões do Caderno do Estudante. Incentive a participação dos estudantes, de modo que possíveis dúvidas sejam

Repare que, em alguns casos, terá que deixar indicado a soma do perímetro, pois não será possível efetuar a soma em si por causa da raiz quadrada, a menos que o exercício dê o valor da raiz quadrada e peça para substituir.

5. O centro de uma circunferência é o ponto (2, 1). Sabendo que o ponto (3, 4) pertence à circunferência, determine a medida de seu diâmetro. Lembre-se que diâmetro é o dobro da medida do raio.

Chamando o ponto do centro de C, e o ponto pertencente à circunferência de A, temos:
C(2, 1) e A(3, 4)

$$d_{CA} = \sqrt{(2-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Portanto, o diâmetro é $2\sqrt{10}$.

A distância do centro da circunferência até ao ponto pertencente a ela é a medida do raio que foi calculada pela distância entre esses dois pontos. Como a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio, temos que d = 2r.

6. Você lembra o que é ponto médio de um segmento de reta?

Ponto médio de um segmento de reta é o ponto que separa o segmento em duas partes com medidas iguais. Sendo assim, é possível obter as coordenadas do ponto médio entre dois pontos dados pela expressão $M\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right)$.
Agora, calcule as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$, em que A(3, -2) e B(5, -2).

$$M\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+(-2)}{2}\right) \rightarrow M(4, -2)$$

AULAS 3 E 4 – PONTOS ALINHADOS SOBRE UMA ÚNICA RETA

Objetivos das aulas:
- Compreender a condição de alinhamento de três pontos;
- Compreender os diferentes tipos de equações de reta.

Nas últimas aulas, trabalhou-se localização de pontos no plano cartesiano e distância entre dois pontos.

Para estas aulas, você será convidado a compreender a condição de alinhamento de três pontos e os diferentes tipo de equações de reta. Mas, para isso, você terá que relembrar como calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem 3.

A regra de Sarrus é um método utilizado para calcular o determinante de uma matriz de ordem 3. É necessário seguir alguns passos, e o primeiro deles é duplicar as duas primeiras colunas no final da matriz.

Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ seu determinante será:

AULAS 3 E 4 – PONTOS ALINHADOS SOBRE UMA ÚNICA RETA

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

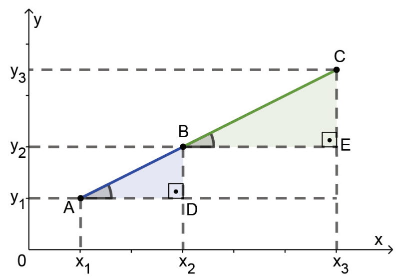
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$.

Agora que você relembrou como calcular o determinante utilizando a regra de Sarrus, vamos estudar qual é a condição de alinhamento de três pontos. Junte-se com sua dupla e vamos lá!

1. Para que três pontos distintos sejam colineares, ou seja, estejam alinhados, suas coordenadas devem obedecer a uma condição que pode ser deduzida com a imagem a seguir, na qual

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão na mesma reta.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Sabendo que os triângulos retângulos BCE e ABD são semelhantes, utilize o conceito de semelhança de triângulos para deduzir a condição de alinhamento de três pontos.

Pela proporção $\frac{BE}{AD} = \frac{CE}{BD}$, temos que:

$\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}$

$(x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y_1) = (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_2)$

$x_3y_2 - x_3y_1 - x_2y_2 + x_2y_1 = x_2y_3 - x_2y_2 - x_1y_3 + x_1y_2$

$x_3y_2 - x_3y_1 - \cancel{x_2y_2} + x_2y_1 - x_2y_3 + \cancel{x_2y_2} + x_1y_3 - x_1y_2 = 0$

Multiplicando por -1, temos:

$-x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_1y_3 + x_1y_2 = 0$

$x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 = 0$

Essa última expressão pode ser escrita na forma de determinante: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Portanto, para três pontos distintos serem colineares, precisamos calcular: $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 1: Professor, se julgar pertinente, circule pela sala de aula a fim de verificar a resolução dos alunos e sanar as possíveis dúvidas. É provável que os estudantes tenham dificuldades em observar que é possível escrever a expressão em forma de determinante. Auxilie-os nesse momento.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em duplas produtivas, mas, em um período remoto, essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão vinculados a você por meio de alguma plataforma. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. Para as Aulas 3 e 4, é importante que os estudantes tenham sanado as possíveis dúvidas sobre os conteúdos das aulas anteriores sobre distância entre dois pontos, pois servirá como base para abordar os assuntos destas aulas. Se julgar necessário, faça uns exemplos com o objetivo de relembrar alguns conceitos.

DESENVOLVENDO

Para começar, pode-se fazer o levantamento do conhecimento prévio dos estudantes sobre pontos colineares. É possível que eles não se lembrem dessa palavra, então explique que são pontos que estão alinhados em uma mesma reta. Aproveite o momento para relembrar o cálculo do determinante utilizando a regra de Sarrus, pois ela será usada para verificar a condição de alinhamento de três pontos. Apresente a questão 1 do Caderno do Estudante e oriente os estudantes a utilizarem a proporção de triângulo para deduzir a condição de alinhamento de três pontos. Provavelmente, alguns estudantes não conseguirão notar que é possível escrever a expressão na forma de determinante. Portanto, sugerimos que circule pela sala a fim de sanar as dificuldades deles e orientá-los a como escrever em forma de determinante. As questões 2 e 3 do Caderno do Estudante tem como objetivo verificar se o estudante adquiriu o conhecimento da condição de alinhamento de três pontos e se consegue aplicá-lo em uma determinada situação. Para as questões 4, 5 e 6 do Caderno do Estudante, sugerimos que oriente os estudantes a prestar atenção nos diferentes tipos de equação da reta e como cada uma delas é obtida. Para essas questões, será necessário relembrar a tangente no ciclo trigonométrico; portanto, antes de os estudantes resolverem as questões, sugerimos que faça um ciclo trigonométrico e relembre os valores da tangente dos ângulos convencionais.

2. Verifique se os pontos A(-3, 4), B(2, 9) e C(1, 8) são colineares.

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} -3 & 4 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 9 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 8 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right|$$

D = - 27 + 4 + 16 - 9 + 24 - 8 = 0

Portanto, os pontos A, B e C são colineares.

3. Determine o valor de m, de modo que os pontos (-2, -1), (0, m) e (2, 7) sejam alinhados.

$$D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

-2m - 2 - 2m + 14 = 0

- 4m = - 12

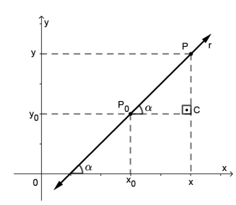
m = 3

Assim, os pontos (-2, -1), (0, 3) e (2, 7) pertencem a uma única reta.

Nas próximas atividades, você vai aprender a deduzir os diferentes tipos de equações da reta. Mas, para isto, terá que partir da equação **fundamental da reta r**.

O **coeficiente angular** ou a **declividade** da reta *r* é o número real *m* que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α, ou seja, m = tg α. De acordo com a imagem a seguir, considerando o ponto P(x, y) sobre a reta r e tg α = m, temos:

$$\mathrm{tg}_{\alpha} = \frac{d(P,C)}{d(C,P_0)} \Rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m\,(x - x_0)$$



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Para deduzir a **equação reduzida da reta**, partindo da equação fundamental da reta, ao invés de considerar $P_0(x_0, y_0)$, considere um ponto particular (0, n).

O número n é a ordenada do ponto que corta o eixo y. Ele é chamado de **coeficiente linear da reta**.

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$

$y - n = m\,(x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow y = \underbrace{m}_{\text{coeficiente angular}}x + \underbrace{n}_{\text{coeficiente linear}}$

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 3: Professor, relembre que a tangente é obtida dividindo o cateto oposto pelo cateto adjacente.

FINALIZANDO

A finalização poderá ser feita com a correção das questões do Caderno do Estudante. Consideramos que essa etapa assumirá um papel importante no processo de aprendizagem, pois permitirá que os estudantes sintetizem seus conhecimentos. Solicite que alguns estudantes compartilhem suas resoluções, e, se possível, que vão até a lousa para fazer a correção e explicar a resolução para os demais. Dessa forma, será possível identificar os que ainda apresentam fragilidades quanto aos objetos de conhecimento tratados e planejar possíveis estratégias em busca de esclarecer essas dúvidas.

4. Escreva a equação reduzida da reta que passa pelo ponto (1, -4) e tem inclinação de 135°.

Cálculo do coeficiente angular: m = tg α = tg 135° = -1
Substituindo m = -1 e o ponto (1, -4) em y - y0 = m (x - x0)
y - (-4) = -1 (x - 1)
y + 4 = -x + 1 y = -x - 3 Portanto, a equação reduzida da reta é y = -x - 3.

Agora, considerando a reta r que não passa por (0, 0), mas que intersecta o eixo x no ponto A(a, 0) e o eixo y em B(0, b), esta possui o seguinte coeficiente angular:

$$m = \frac{0-b}{a-0} \Rightarrow m = -\frac{b}{a}$$

Substituindo $m = -\frac{b}{a}$ e n = b na equação reduzida y = mx + n, temos:

$$y = -\frac{b}{a}x + b \Rightarrow ay = -bx + ab \Rightarrow bx + ay = ab$$

Dividindo os dois membros por ab (a ≠ 0 e b ≠ 0), tem-se:

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Essa é a forma segmentária da equação da reta.

5. Escreva a equação reduzida da questão anterior na forma segmentária.

Equação reduzida: y = -x - 3
Equação segmentária:

$$y = -x - 3 \Rightarrow x + y = -3 \Rightarrow -\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1$$

Pode-se observar que toda reta do plano possui uma equação da forma:

ax + by + c = 0

em que a, b e c são constantes e a ≠ 0 e b ≠ 0. Essa equação é chamada equação geral da reta.

6. Escreva a equação reduzida da questão 4 na forma geral.

Equação reduzida: y = -x - 3
Equação geral:
Y = -x - 3 ⇒ x + y + 3 = 0

AULAS 5 E 6 – CALCULANDO O VALOR DO ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em duplas produtivas, mas, em um período remoto, essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão vinculados a você por meio de alguma plataforma. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. Para as Aulas 5 e 6, é importante que os estudantes tenham sanado as possíveis dúvidas sobre os conteúdos das aulas anteriores, pois nestas aulas serão trabalhados os significados dos coeficientes da equação da reta e o ângulo formado entre duas retas no plano. Espera-se que, ao final destas aulas, os estudantes saibam diferenciar o coeficiente angular do coeficiente linear e determinar o valor do ângulo formado entre duas retas.

DESENVOLVENDO

Pode-se começar explicando as características do coeficiente angular (m) e do coeficiente linear (n) da reta. Explore as características de cada caso, para m > 0, m < 0 e m = 0. Relembre o conteúdo das aulas passadas de como calcular o coeficiente angular. Pergunte aos estudantes se eles lembram onde localizar o coeficiente linear na reta desenhada no plano, relembre que esse ponto é dado pelas coordenadas (0, n) e que, portanto, o coeficiente linear é o ponto que intersecta o eixo y. Após esse momento, explore os casos de ângulo formado por duas retas no plano quando elas são coincidentes e não perpendiculares, e quando uma delas é perpendicular ao eixo x. Ajude os estudantes a deduzirem as fórmulas em cada caso e comente que não existe tangente de 90º, e, portanto, não é possível definir o coeficiente angular de uma reta perpendicular ao eixo x. Com essas orientações, os estudantes poderão responder a todas as questões

AULAS 5 E 6 – CALCULANDO O VALOR DO ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS

Objetivos das aulas:
- Reconhecer o significado dos coeficientes da equação da reta;
- Determinar o ângulo formado por duas retas no plano.

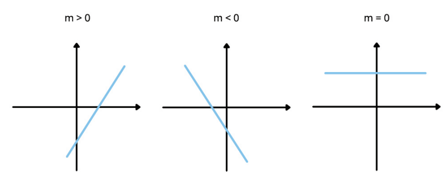
Nas aulas anteriores, foram trabalhados diferentes tipos de equação de reta.

Para estas aulas, você será convidado a compreender os significados dos coeficientes da equação da reta e determinar o ângulo formado por duas retas no plano. Para isso, você deverá recordar a nomenclatura da equação reduzida da reta e a tangente no ciclo trigonométrico. Junte-se com sua dupla e bom trabalho!

1. A equação reduzida da reta é dada por y = mx + n, em que m é o **coeficiente angular** e n é o **coeficiente linear**, com m e n $\in \mathbb{R}$.

Com o coeficiente angular (m), é possível analisar a inclinação da reta e verificar se ela é crescente, decrescente ou constante. Assim,

$m > 0$, a reta será crescente ($0° < \alpha < 90°$);
$m < 0$, a reta será decrescente ($90° < \alpha < 180°$);
$m = 0$, a reta será constante ($\alpha = 0°$).



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

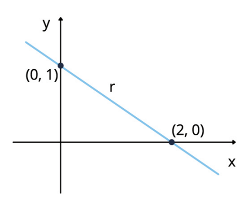
Quanto maior for o coeficiente angular, maior será o ângulo entre a reta e o eixo x, no sentido anti-horário.

Para calcular o coeficiente angular, pode-se usar m = tg α, para quando o valor do ângulo for dado, ou então $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$,quando dois pontos pertencentes à reta forem dados.

O coeficiente linear (n) é o valor de y para o ponto em que a reta intercepta o eixo y, pois o valor da abscissa é igual a zero. Portanto, as coordenadas do ponto serão (0, n).

Agora que você viu os significados dos coeficientes da equação da reta, responda à questão a seguir:

(AAP – 2019 – adaptada) Observe a reta r do gráfico abaixo, indique o coeficiente angular e o coeficiente linear.



essas dúvidas.

Coeficiente angular:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{1 - 0}{0 - 2} = -\frac{1}{2}$$

Coeficiente linear: n = 1.

2. Qual é o coeficiente linear e o coeficiente angular da reta crescente que passa pelo ponto (3, 3) e faz um ângulo de 45° com o eixo x?

Cálculo do coeficiente angular: $m = tg\ \alpha \rightarrow m = tg\ 45° \rightarrow m = 1$

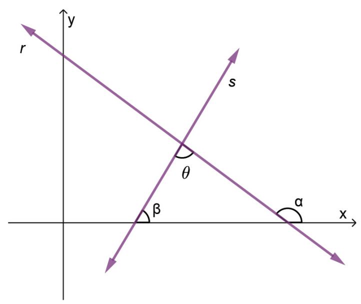
Cálculo do coeficiente linear: Se $m = 1$ e a reta passa pelo ponto (3, 3), substituindo, na equação reduzida, teremos: $y = mx + n$ $\quad 3 = 1 \cdot 3 + n \quad$ $n = 0$.

3. Determine o coeficiente angular da reta que faz um ângulo de 90° com o eixo x.

Não é possível definir o coeficiente angular da reta que faz um ângulo de 90° com o eixo x, pois tangente de 90° não existe.

Até aqui você estudou o ângulo formado por uma reta no plano. Mas como será que se calcula o ângulo formado por duas retas? Neste momento iremos relembrar as transformações trigonométricas, principalmente a que envolve a tangente, pois serão necessárias para os estudantes compreenderem as expressões para determinar o ângulo formado por duas retas.

Considere duas retas concorrentes, ou seja, que se cruzam, r e s, oblíquas aos eixos x e y e não perpendiculares entre si, em que os coeficientes angulares são m1 e m2, respectivamente, com um ângulo θ formado entre elas.



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Em um triângulo, pelo teorema do ângulo externo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes a ele, tem-se:

do Caderno do Estudante.

FINALIZANDO

A finalização poderá ser feita com a correção das questões do Caderno do Estudante. Consideramos que essa etapa assumirá um papel importante no processo de aprendizagem, pois permitirá que os estudantes sintetizem seus conhecimentos. Solicite que alguns estudantes compartilhem suas resoluções e, se possível, que vão até a lousa para fazer a correção e explicar a resolução para os demais. Dessa forma, será possível identificar os que ainda apresentam fragilidades quanto aos objetos de conhecimento tratados, a fim de planejar possíveis estratégias em busca de esclarecer

$$\alpha = \theta + \beta \Rightarrow \theta = \alpha - \beta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow tg\theta = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Para θ agudo, temos:

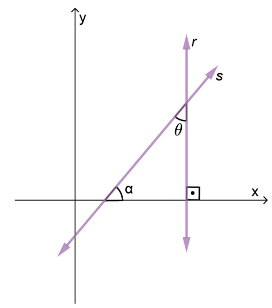
$$tg\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2}\right|$$

Devemos analisar a expressão para os seguintes casos:

1° caso: se r e s forem paralelas, $m_1 = m_2$ e $\theta = 0°$.

2° caso: se r e s forem perpendiculares, $m_1 \cdot m_2 = -1$ e $\theta = 90°$.

3° caso: se uma das retas for vertical, temos:



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

$$90° = \theta + \alpha \Rightarrow \theta = 90° - \alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow tg\theta = tg(90° - \alpha) = \frac{tg90° - tg\alpha}{1 + tg90° \cdot tg\alpha} = \frac{-tg\alpha}{1} = cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{m}$$

Para θ agudo, temos:

$$tg\theta = \left|\frac{1}{m}\right|$$

4. Qual é o valor do ângulo agudo formado pelas retas y – 4 = 2(x – 5) e y = –3x – 6?

$y - 4 = 2(x - 5) \rightarrow m_1 = 2$

$y = -3x - 6 \rightarrow m_2 = -3$

Logo:
$$tg\theta = \left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2 \cdot (-3)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = |-1| = 1 \Rightarrow \theta = 45°$$

5. Determine a medida θ do ângulo agudo formado pelas retas x – 4y + 3 = 0 e x – 3 = 0.

$$x - 4y + 3 \rightarrow m_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$$

x - 3 = 0 → x = 3, logo y = 0 e, portanto, m_2 não define, pois essa reta é vertical ao eixo x.

Temos que:

$$\text{tg}\theta = \left|\frac{1}{m}\right| = \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

Portanto, $\theta = \text{arctg}\frac{1}{4}$

AULAS 7 E 8 – RETAS PARALELAS OU PERPENDICULARES ENTRE SI?

Objetivos das aulas:
- Compreender as condições de paralelismo e perpendicularidade entre retas;
- Resolver problemas que envolvem situações que podem ser representadas por retas paralelas e perpendiculares.

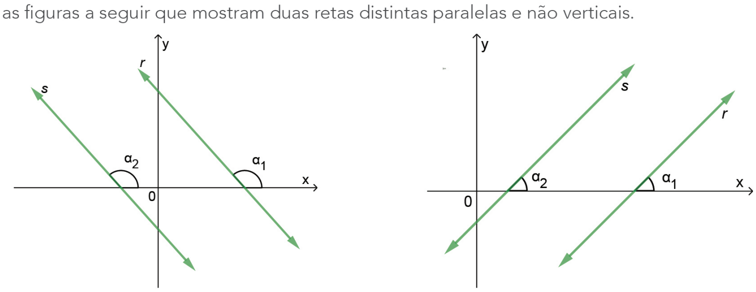
Nas últimas aulas, você estudou as características e os tipos de equação da reta, significados dos coeficientes da equação da reta, ângulo formado entre duas retas no plano, entre outros conteúdos.

Nestas aulas, você aprenderá as condições de paralelismo e perpendicularidade entre retas.

Você sabe explicar quando duas retas distintas que estão no mesmo plano são paralelas?

Duas retas distintas contidas no mesmo plano são paralelas quando não há nenhum ponto em comum entre elas, isto é, elas nunca se cruzam.

Observe as figuras a seguir que mostram duas retas distintas paralelas e não verticais.



Fonte: Elaborado para fins didáticos

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

AULAS 7 E 8: Professor, comente que o símbolo || significa que as retas são paralelas. Professor, explore o caso de as retas serem distintas e verticais. Comente que as retas são paralelas, mas que m1 e m2 não existem.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

QUESTÃO 5: Professor, comente que quando não é possível determinar o valor do ângulo, pelo fato da tangente não ter os valores convencionais. E se uma tabela para consulta não for fornecida, o valor do ângulo é escrito como arc tg.

AULAS 7 E 8 – RETAS PARALELAS OU PERPENDICULARES ENTRE SI?

ORGANIZAÇÃO DA TURMA

Estudantes organizados em duplas produtivas.

MATERIAL NECESSÁRIO

Caderno do Estudante.

INICIANDO

Professor, sugerimos que os estudantes sejam organizados em duplas produtivas, mas, em um período remoto, essa organização deve ser alterada para contemplar os estudantes que estarão vinculados a você por meio de alguma plataforma. Portanto, promova uma dinâmica que permita que todos se sintam envolvidos com as atividades desenvolvidas. Para essas atividades, propomos uma retomada dos principais conceitos tratados no decorrer desta Sequência de Atividades. Além disso, é interessante começar uma conversa informando que eles estudarão as condições de paralelismos e perpendicularidade entre duas retas. Após essa breve introdução, os estudantes poderão realizar a leitura das questões do Caderno do Estudante.

DESENVOLVENDO

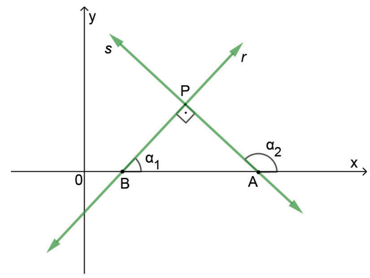
Com a leitura do Caderno, os estudantes deverão ter clareza de que, para responderem às questões, eles precisarão identificar o coeficiente angular das retas para verificar se elas são paralelas ou perpendiculares entre si. Explore a demonstração para as condições de paralelismo e as condições de perpendicularidade entre duas retas. Aborde a nomenclatura para representar quando duas retas são paralelas e quando são perpendiculares entre si. Retome o conceito de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico e transformações trigonométricas, pois será necessário para compreender a demonstração das fórmulas. Além disso, se julgar necessário, retome o conceito de cotangente como sendo o inverso da tangente, pois esse conceito será utilizado para deduzir a condição de perpendicularidade entre duas retas. Com essas informações, os estudantes poderão resolver todas as questões do Caderno do Estudante. Para o segundo momento da aula, os estudantes deverão se envolver com as questões de 4 a 6, que são itens da AAP e do SARESP. A correção poderá focar na leitura atenciosa de cada item e no compartilhamento das diferentes estratégias de resolução.

É possível notar que as retas possuem o mesmo coeficiente angular (m), pois elas têm a mesma inclinação. Logo:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\alpha_1 = \mathrm{tg}\alpha_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow r||s, \text{com } \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ entre } 0° \text{ e } 180°.$$

Resumindo: duas retas distintas e não verticais são paralelas se, e somente se, $m_1 = m_2$.

Agora, observe a figura a seguir:



Fonte: Elaborado para fins didáticos.

Na figura, temos duas retas perpendiculares, a reta r com inclinação α_1 ($m_1 = \mathrm{tg}\ \alpha_1$) e a reta s com inclinação α_2 ($m_2 = \mathrm{tg}\ \alpha_2$).

Pelo teorema do ângulo externo, tem-se $\alpha_2 = \alpha_1 + 90° \rightarrow \mathrm{tg}\ \alpha_2 = \mathrm{tg}\ \alpha_1 + 90°$.

$$tg\ \alpha_2 = \frac{sen\ (\alpha_1 + 90°)}{\cos\ (\alpha_1 + 90°)} = \frac{sen\ \alpha_1 \cdot\ \cos 90° + sen\ 90° \cdot cos\ \alpha_1}{cos\ \alpha_1 \cdot\ \cos 90° - sen\ \alpha_1 \cdot sen\ 90°}$$

Como sen 90° = 1 e cos 90° = 0, tem-se que:

$$tg\ \alpha_2 = \frac{0 + cos\ \alpha_1}{0 - \mathrm{sen}\ \alpha_1} = \frac{cos\ \alpha_1}{-sen\ \alpha_1} = -cotg\ \alpha_1 = -\frac{1}{tg\ \alpha_1}$$

Ou seja, $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ com m_1 e $m_2 \neq 0$. Por consequência, $r \perp s \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$.

Resumindo: duas retas distintas e não verticais são perpendiculares entre si se, e somente se, $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ ou $m_1 \cdot m_2 = -1$

Agora que você estudou o paralelismo e o perpendicularismo entre duas retas, junte-se a um colega e resolva as questões a seguir. Bom trabalho!

1. Determine a posição relativa das retas r e s das equações r: – x – y + 2 e s: – x – y – 3.

r: $-x - y + 2 \rightarrow y = -x + 2 \rightarrow m_1 = -1$ e $n_1 = 2$

s: $-x - y - 3 \rightarrow y = -x - 3 \rightarrow m_2 = -1$ e $n_2 = -3$

Portanto, $m_1 = m_2 = -1 \rightarrow$ r e s são paralelas. Como $n_1 \neq n_2$, as retas são paralelas distintas.

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, comente que o símbolo ⊥ significa que as retas são perpendiculares.

2. Determine a posição relativa das retas r e s das equações r: 7x + 14y – 28 e s: $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$

$$r: 7x + 14y - 28 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + 2 \longrightarrow m_1 = -\frac{1}{2} \; e \; n_1 = 2$$

$$s: \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x + 2y}{4} = \frac{4}{4} \Rightarrow x + 2y = 4 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + 2 \longrightarrow m_2 = -\frac{1}{2} \; e \; n_2 = 2$$

Portanto, $m_1 = m_2 = -\frac{1}{2} \longrightarrow$ r e s são paralelas.

Como $n_1 = n_2 = 2$, as retas são paralelas coincidente.

3. Verifique, em cada item, se as retas são perpendiculares entre si.

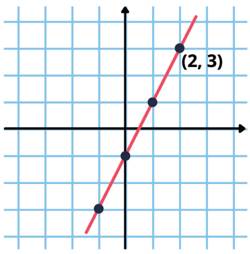
a. r: y = 0,5x + 4 e s: y = – 2x – 11

b. t: y = 5x – 3 e u: y = – 7,5x + 4,5

a) r: $y = 0{,}5x + 4 \rightarrow m_1 = 0{,}5$
s: $y = -2x - 11 \rightarrow m_2 = -2$
$m_1 \cdot m_2 = 0{,}5 \cdot (-2) = -1$ Portanto, as retas r e s são perpendiculares.
b) t: $y = 5x - 3 \rightarrow m_1 = 5$
u: $y = -7{,}5x + 4{,}5 \rightarrow m_2 = -7{,}5$
$m_1 \cdot m_2 = 5 \cdot (-7{,}5) = -37{,}5 \neq -1$ Portanto, as retas t e u não são perpendiculares.

Nesta segunda parte da aula estão reunidas 3 questões que foram retiradas da AAP e do SARESP. Para resolvê-las, será necessário relembrar tudo que você viu até aqui sobre ponto e reta; então, reúna-se com sua dupla e mãos à obra!

4. (SARESP – 2015 – adaptada) Observe a figura e escreva a equação da reta representada no plano.



FINALIZANDO

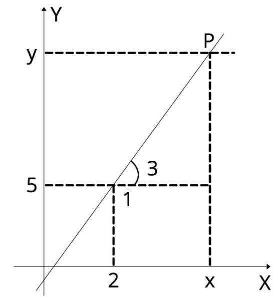
Por fim, ressaltamos que esse encontro tem um importante papel quanto à verificação do desenvolvimento das habilidades assumidas para o trabalho com esta Sequência de Atividades. Nesse sentido, a partir das resoluções das questões propostas para as Aulas 7 e 8, o encerramento das atividades deverá se articular no sentido de sistematizar os conceitos estudados sobre ponto e reta. Destacamos a relevância do envolvimento ativo dos estudantes nesses momentos.

Sabe-se que um dos pontos pertencentes a reta é (2, 3). Onde intersecta o eixo y é o valor do coeficiente linear (n), logo o ponto de intersecção é (0, – 1). Portanto, n = – 1.

Calculando o valor do coeficiente angular (m): $m = \frac{3-(-1)}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$

Logo, a equação da reta é y = 2x – 1

5. (AAP – 2016 – adaptada) Observe a reta P representada no gráfico que passa pelo ponto A(2,5) e tem inclinação m = 3. Determine a equação da reta P.

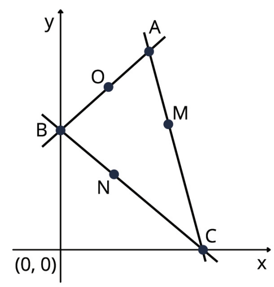


Dado m = 3, tem-se que:

$$3 = \frac{y-5}{x-2} \Rightarrow 3 \cdot (x-2) = y-5 \Rightarrow 3x-6 = y-5 \Rightarrow y = 3x-1$$

Portanto, a equação da reta é y = 3x – 1

6. (AAP – 2014 – adaptada) No triângulo ABC, M = (a, a) é o ponto médio do segmento AC, N é o ponto médio do segmento BC e O é o ponto médio do segmento AB, sendo que, os vértices A, B e C, são representados pelas coordenadas: A (2, 6), B (0, a) e C (c, 0), conforme a figura apresentada abaixo:



Verifique se o quadrilátero BOMN é um paralelogramo. (Dado: $\sqrt{13} \cong 3{,}6$)

CONVERSANDO COM O PROFESSOR

Professor, para a resolução desta questão, pergunte aos estudantes quais são as características de um paralelogramo.

De acordo com o enunciado M(a,a), A(2,6), B(0,a) e C(c,0). Além disso, os pontos M, N e O são pontos médios.

Cálculo das coordenadas de M, ponto médio do segmento AC:

$$\mathrm{M}\left(\frac{2+c}{2},\frac{6+0}{2}\right)$$

$$\mathrm{M}\left(\frac{2+c}{2},3\right)$$

a = 3

$$a=\frac{2+c}{2}$$

$$3=\frac{2+c}{2}$$

c = 4

Portanto, M(3, 3), B(0, 3) e C(4, 0).

Cálculo das coordenadas de N, ponto médio do segmento BC:

$$\mathrm{N}\left(\frac{0+4}{2},\frac{3+0}{2}\right)$$

$$\mathrm{N}\left(2,\frac{3}{2}\right)$$

Cálculo das coordenadas de O, ponto médio do segmento AB:

$$\mathrm{O}\left(\frac{2+0}{2},\frac{6+3}{2}\right)$$

$$\mathrm{O}\left(1,\frac{9}{2}\right)$$

Cálculo do coeficiente angular (m_1) do segmento MN:

$$m_1=\frac{\frac{3}{2}-3}{2-3}=\frac{-\frac{3}{2}}{-1}=\frac{3}{2}$$

Cálculo do coeficiente angular (m2) do segmento BO:

$$m_2 = \frac{\frac{9}{2} - 3}{1 - 0} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

Cálculo do coeficiente angular (m_3) do segmento BN:

$$m_3 = \frac{\frac{3}{2} - 3}{2 - 0} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$$

Cálculo do coeficiente angular (m_4) do segmento OM:

$$m_4 = \frac{3 - \frac{9}{2}}{3 - 1} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$$

Observando os quatro últimos cálculos, tem-se que:

$m_1 = m_2 \Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{BO}$

$m_3 = m_4 \Rightarrow \overline{BN} \parallel \overline{OM}$

Até aqui, sabe-se que BOMN é um quadrilátero com os lados opostos paralelos.
Para saber se é um paralelogramo, vamos calcular as seguintes distâncias:

$$d_{MN} = \sqrt{(3-2)^2 + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} \cong 1{,}8$$

$$d_{BO} = \sqrt{(0-1)^2 + \left(3 - \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \cong 1{,}8$$

$$d_{BN} = \sqrt{(0-2)^2 + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$d_{OM} = \sqrt{(1-3)^2 + \left(\frac{9}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

A partir dos cálculos das distâncias entre os pontos, tem-se que:

$d_{MN} = d_{BO}$ e $d_{BN} = d_{OM}$

Logo, é possível concluir que o quadrilátero BOMN é um paralelogramo.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

COORDENADORIA PEDAGÓGICA
Caetano Pansani Siqueira

DIRETORA DO DEPARTAMENTO DE
DESENVOLVIMENTO CURRICULAR
E DE GESTÃO PEDAGÓGICA
Viviane Pedroso Domingues Cardoso

DIRETORA DO CENTRO DE ENSINO MÉDIO – CEM
Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

ASSESSORIA TÉCNICA
Cassia Vassi Beluche
Deisy Christine Boscaratto
Isaque Mitsuo Kobayashi
Kelvin Nascimento Camargo
Luiza Helena Vieira Girão
Silvana Aparecida de Oliveira Navia
Valquiria Kelly Braga
Vinicius Gonzalez Bueno

EQUIPE CURRICULAR DE MATEMÁTICA -
ENSINO MÉDIO
Ana Gomes de Almeida
Otávio Yoshio Yamanaka
Sandra Pereira Lopes

EQUIPE DE ELABORAÇÃO
Raph Gomes Alves
Abadia de Lourdes Cunha
Eliel Constantino da Silva
Luciana Vieira Andrade
Sirlene Neves de Andrade
Isadora Lutterbach Ferreira Guimaraes
Tatiane Valéria Rogério de Carvalho
Elisa Rodrigues Alves
Giovanna Reggio
Veridiana Rodrigues Silva Santana

REVISÃO DE LÍNGUA
Vozes da Educação

PROJETO GRÁFICO E DIAGRAMAÇÃO
André Coruja
Sâmella Arruda
Alice Brito
Amanda Pontes
Ana Gabriella Carvalho
Cristall Hannah Boaventura
Emano Luna
Julliana Oliveira
Kamilly Lourdes
Lucas Nóbrega
Perazzo Freire
Rayane Patrício
Wellington Costa

SUPORTE A IMAGEM
Lays da Silva Amaro
Otávio Coutinho

SÃO PAULO
GOVERNO DO ESTADO

Secretaria de Educação