SP FAZ ESCOLA

CADERNO DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

Ensino Médio

1º SEMESTRE

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
Secretaria de Educação

SP FAZ ESCOLA

CADERNO DO PROFESSOR

3ª SÉRIE

ENSINO MÉDIO

MATEMÁTICA

1º SEMESTRE

SUMÁRIO

PREZADO PROFESSOR,

As sugestões de trabalho, apresentadas neste material, refletem a constante busca da promoção das competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo.

O tempo todo os jovens têm que interagir, observar, analisar, comparar, criar, refletir e tomar decisões. O objetivo deste material é trazer para o estudante a oportunidade de ampliar conhecimentos, desenvolver conceitos e habilidades que os auxiliarão na elaboração dos seus Projetos de Vida e na resolução de questões que envolvam posicionamento ético e cidadão.

Procuramos contemplar algumas das principais características da sociedade do conhecimento e das pressões que a contemporaneidade exerce sobre os jovens cidadãos, a fim de que as escolas possam preparar seus estudantes adequadamente.

Ao priorizar o trabalho no desenvolvimento de competências e habilidades, propõe-se uma escola como espaço de cultura e de articulação, buscando enfatizar o trabalho entre as áreas e seus respectivos componentes no compromisso de atuar de forma crítica e reflexiva na construção coletiva de um amplo espaço de aprendizagens, tendo como destaque as práticas pedagógicas.

Contamos mais uma vez com o entusiasmo e a dedicação de todos os professores para que consigamos, com sucesso, oferecer educação de qualidade a todos os jovens de nossa rede.

Bom trabalho a todos!

Coordenadoria Pedagógica – COPED
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo

INTEGRANDO O DESENVOLVIMENTO SOCIOEMOCIONAL AO TRABALHO PEDAGÓGICO

A educação integral exige um olhar amplo para a complexidade do desenvolvimento integrado dos estudantes e, também, para sua atuação na sociedade contemporânea e seus cenários complexos, multifacetados e incertos. Nesse sentido, o desenvolvimento pleno dos estudantes acontece quando os aspectos socioemocionais são trabalhados intencionalmente na escola, de modo integrado às competências cognitivas.

É importante ressaltar que a divisão semântica que se faz com o uso dos termos cognitivo e socioemocional não representa uma classificação dicotômica. É uma simplificação didática já que, na aprendizagem, essas instâncias (cognitiva e socioemocional) são simultaneamente mobilizadas, são indissociáveis e se afetam mutuamente na constituição dos sujeitos.

O QUE SÃO COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS?

As competências socioemocionais são definidas como as capacidades individuais que se manifestam de modo consistente em padrões de pensamentos, sentimentos e comportamentos. Ou seja, elas se expressam no modo de sentir, pensar e agir de cada um para se relacionar consigo mesmo e com os outros, para estabelecer objetivos e persistir em alcançá-los, para tomar decisões, para abraçar novas ideias ou enfrentar situações adversas.

Durante algum tempo, acreditou-se que essas competências eram inatas e fixas, sendo a primeira infância o estágio ideal de desenvolvimento. Hoje, sabe-se que as competências socioemocionais são maleáveis e quando desenvolvidas de forma intencional no trabalho pedagógico impactam positivamente a aprendizagem.

Além do impacto na aprendizagem, diversos estudos multidisciplinares têm demonstrado que as pessoas com competências socioemocionais mais desenvolvidas apresentam experiências mais positivas e satisfatórias em diferentes setores da vida, tais como bem-estar e saúde, relacionamentos, escolaridade e no mercado de trabalho.

QUAIS SÃO AS COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS E COMO ELAS SE ORGANIZAM

Ao longo de 40 anos, foram identificadas e analisadas mais de 160 competências sociais e emocionais. A partir de estudos estatísticos, chegou-se a um modelo organizativo chamado de Cinco Grandes Fatores que agrupa as características pessoais conforme as semelhanças entre si, de forma abrangente e parcimoniosa. A estrutura do modelo é composta por 5 macrocompetências e 17 competências específicas. Estudos em diferentes países e culturas encontraram essa mesma estrutura, indicando robustez e validade ao modelo.

MACRO COMPETÊNCIA	COMPETÊNCIA	DEFINIÇÃO
Abertura ao novo	Curiosidade para aprender	Capacidade de cultivar o forte desejo de aprender e de adquirir conhecimentos, ter paixão pela aprendizagem.
	Imaginação criativa	Capacidade de gerar novas maneiras de pensar e agir por meio da experimentação, aprendendo com seus erros, ou a partir de uma visão de algo que não se sabia.
	Interesse artístico	Capacidade de admirar e valorizar produções artísticas, de diferentes formatos como artes visuais, música ou literatura.
Resiliência Emocional	Autoconfiança	Capacidade de cultivar a força interior, isto é, a habilidade de se satisfazer consigo mesmo e sua vida, ter pensamentos positivos e manter expectativas otimistas.
	Tolerância ao estresse	Capacidade de gerenciar nossos sentimentos relacionados à ansiedade e estresse frente a situações difíceis e desafiadoras, e de resolver problemas com calma.
	Tolerância à frustração	Capacidade de usar estratégias efetivas para regular as próprias emoções, como raiva e irritação, mantendo a tranquilidade e serenidade.
Engajamento com os outros	Entusiasmo	Capacidade de envolver-se ativamente com a vida e com outras pessoas de uma forma positiva, ou seja, ter empolgação e paixão pelas atividades diárias e a vida.
	Assertividade	Capacidade de expressar, e defender, suas opiniões, necessidades e sentimentos, além de mobilizar as pessoas, de forma precisa.
	Iniciativa Social	Capacidade de abordar e se conectar com outras pessoas, sejam amigos ou pessoas desconhecidas, e facilidade na comunicação
Autogestão	Responsabilidade	Capacidade de gerenciar a si mesmo a fim de conseguir realizar suas tarefas, cumprir compromissos e promessas que fez, mesmo quando é difícil.
	Organização	Capacidade de organizar o tempo, as coisas e as atividades, bem como planejar esses elementos para o futuro.
	Determinação	Capacidade de estabelecer objetivos, ter ambição e motivação para trabalhar duro, e fazer mais do que apenas o mínimo esperado.
	Persistência	Capacidade de completar tarefas e terminar o que assumimos e/ou começamos, ao invés de procrastinar ou desistir quando as coisas ficam difíceis ou desconfortáveis.
	Foco	Capacidade de focar — isto é, de selecionar uma tarefa ou atividade e direcionar toda nossa atenção apenas à tarefa/atividade "selecionada".

MACRO COMPETÊNCIA	COMPETÊNCIA	DEFINIÇÃO
Amabilidade	Empatia	Capacidade de usar nossa compreensão da realidade para entender as necessidades e sentimentos dos outros, agir com bondade e compaixão, além do investir em nossos relacionamentos prestando apoio, assistência e sendo solidário.
	Respeito	Capacidade de tratar as pessoas com consideração, lealdade e tolerância, isto é, demonstrar o devido respeito aos sentimentos, desejos, direitos, crenças ou tradições dos outros.
	Confiança	Capacidade de desenvolver perspectivas positivas sobre as pessoas, isto é, perceber que os outros geralmente têm boas intenções e, de perdoar aqueles que cometem erros.

Você sabia?

O componente Projeto de Vida desenvolve intencionalmente as 17 competências socioemocionais ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Em 2019, foi realizada uma escuta com os professores da rede para priorizar quais competências seriam foco de desenvolvimento em cada ano/série. A partir dessa priorização, a proposta do componente foi desenhada, tendo como um dos pilares a avaliação formativa com base em um instrumento de rubricas que acompanha um plano de desenvolvimento pessoal de cada estudante.

COMO INTEGRAR AS COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS AO TRABALHO PEDAGÓGICO

Um dos primeiros passos para integrar as competências socioemocionais ao trabalho com os conteúdos do componente curricular é garantir a intencionalidade do desenvolvimento socioemocional no processo. Evidências indicam que a melhor estratégia para o trabalho intencional das competências socioemocionais se dá por meio de um planejamento de atividades que seja SAFE[1] – sequencial, ativo, focado e explícito:

SEQUENCIAL	ATIVO	FOCADO	EXPLÍCITO
Percurso com Situações de aprendizagem desafiadoras, de complexidade crescente e com tempo de duração adequado.	As competências socioemocionais são desenvolvidas por meio de vivências concretas e não a partir de teorizações sobre elas. Para isso, o uso de metodologias ativas é importante	É preciso trabalhar intencionalmente uma comptência por vez durante algumas aulas. Não é possível desenvolver todas as competências socioemocionais simultaneamente.	Para instaurar um vocabulário comum e um campo de sentido compartilhado com os estudantes, é preciso explicitar qual é competência foco de desenvolvimento e seu significado.

Desenvolver intencionalmente as competências socioemocionais não se refere a “dar uma aula sobre a competência”. Apesar de ser importante conhecer e apresentar aos estudantes quais são as competências trabalhadas e discutir com eles como elas estão presentes no dia a dia, o desenvolvimento de competências socioemocionais acontece de modo experiencial e reflexivo. Portanto, ao preparar a estratégia das aulas, é importante considerar como oferecer mais oportunidades para que os estudantes mobilizem a competência em foco e aprendam sobre eles mesmos ao longo do processo.

MATEMÁTICA

3ª SÉRIE – ENSINO MÉDIO
1° BIMESTRE

ORGANIZAÇÃO DAS GRADES CURRICULARES

Apresentamos a seguir uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais da Base Nacional Comum (BNCC) do Ensino Médio, além de algumas orientações pedagógicas, para as três séries que compõe o referido estágio de ensino da escolaridade básica.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

Currículo Oficial – BNCC - SP		Currículo Paulista – E.M.
Tema/Conteúdo	**Habilidades**	**Competência Geral**
Geometria/Relações • Geometria analítica. • Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos. • Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares. • Ponto e reta: distância. • Circunferência: equação • Reta e circunferência: posições relativas. • Cônicas: noções, equações, aplicações	• saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações; • saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas; • saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares. • saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas.	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Normalmente o desenvolvimento dos conceitos relativos à Geometria Analítica, inicia-se pelo estudo da equação da reta, apresentada de um modo peculiar, na qual se destaca certa classe de problemas cuja solução depende apenas de uma compreensão adequada da ideia de proporcionalidade subjacente. São os chamados problemas lineares entre os quais estão alguns problemas de máximos e mínimos muito interessantes.

Consideramos, que o tema das retas, com suas equações, propriedades e aplicações pode ser especialmente representativa do significado da Geometria Analítica como um método de abordagem dos problemas geométricos que contempla o ideal cartesiano – ou o "plano" de Descartes, que buscava uma aproximação efetiva entre a Geometria e a Álgebra.

Desta forma, é importante, que o Professor, tenha como objetivo, as seguintes características na abordagem deste conteúdo:

- consolidação do uso de sistemas de coordenadas cartesianas XOY, já iniciado em séries anteriores. Tal sistema será utilizado para representar pontos do plano, determinando-se, por exemplo, a distância entre dois pontos, o ponto médio e a inclinação do segmento determinado pelos dois pontos.
- consolidação da ideia de inclinação de um segmento, buscando a caracterização de segmentos paralelos quanto na condição de alinhamento de três pontos, uma vez que para três pontos (A, B e C) estarem alinhados, as inclinações das retas AB, BC e AC devem ser iguais.

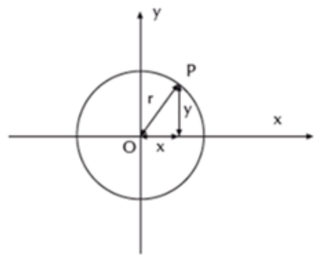
Com base nessas condições iniciais, é possível propor e resolver uma série de problemas geométricos simples, em que a aprendizagem do método analítico situa-se no centro das atenções.

Em continuidade, explora-se a representação de curvas por equações, iniciando-se com a reta. Os casos particulares das retas paralelas aos eixos coordenados, lembrando-se que neste caso, serão tratados diretamente, de modo simples. Para as retas inclinadas em relação aos eixos OX e OY, a qualidade comum a todos a seus pontos é o fato de que qualquer que seja o par de representantes que escolhamos, a inclinação do segmento correspondente é sempre a mesma: tal inclinação constante é o coeficiente angular da reta (m). Assim, facilmente se chega à equação **y = mx + h**, em que o coeficiente **m** representa a inclinação da reta, e **h** representa o ponto em que a reta corta o eixo OY. A caracterização de retas concorrentes e paralelas, com base nas inclinações correspondentes, é uma consequência natural.

Com relação à perpendicularidade de duas retas, estuda-se a inclinação de , de tal forma que se , então as retas serão perpendiculares. Um outro tópico importante no estudo analítico das retas é a forma geral da equação da reta, bem como, a representação de regiões do plano por meio de desigualdades.

Finalizando o estudo, tendo em vista a resolução de alguns problemas lineares, ou seja, problemas que envolvem apenas relações de proporcionalidade direta, incluindo-se alguns de problemas de máximos e mínimos. Apesar de problemas como esses não serem apresentados no Ensino Médio, pedimos ao professor que os leia com atenção, pois certamente perceberá que constituem situações simples em contextos interessantes.

Após o estudo das retas, o próximo conteúdo é a equação da circunferência com centro na origem do sistema de coordenadas. O tempo disponível pelo professor deverá determinar o nível de exploração de tal equação, deixando-se à escolha do professor o estudo das translações da equação ou da forma geral da equação da circunferência.



$$C: x^2 + y^2 = r^2$$

O próximo assunto referente ao estudo da equação da circunferência seria o cálculo da distância de um ponto a uma reta, baseado apenas na inclinação **m** da reta. Complementando tal cálculo, poderá ser feito um estudo simplificado das posições relativas entre retas e circunferências.

Encerrando os conteúdos relativos ao 1° bimestre letivo, estudamos as cônicas são apresentadas e caracterizadas por meio de propriedades de diversas maneiras. Além de constituírem intersecções de um plano com uma superfície cônica, o que lhes garante a denominação, a elipse é uma circunferência “achatada”; a hipérbole surge na representação de grandezas inversamente proporcionais; e a parábola, na representação de uma grandeza que é proporcional ao quadrado de outra. Complementarmente, as cônicas também são apresentadas pelas suas importantes propriedades características em relação aos focos.

As equações da elipse, da hipérbole e da parábola, são apresentadas em posições convenientes em relação aos eixos de coordenadas, de modo a simplificar os cálculos. Uma extensão de tal estudo, conduzindo a equações mais gerais, pode ser dispensada ou adiada para o momento, pois serão aprofundadas posteriormente.

Os tópicos apresentados podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem:

- **Situação de Aprendizagem 1**: A Geometria e o método das coordenadas, Vol.1, 3ª série do Ensino Médio, p. 12 a 21;
- **Situação de Aprendizagem 2**: A reta, a inclinação constante e a proporcionalidade, Vol.1, 3ª série do Ensino Médio, p. 22 a 33.
- **Situação de Aprendizagem 3**: Problemas lineares – Máximos e Mínimos, Vol. 1, 3ª série do Ensino Médio, p. 33 a 43.
- **Situações de Aprendizagem 4**: Circunferências e cônicas: significados, equações, aplicações, Vol.1, 3ª série do Ensino Médio, p. 43 a 59

Além das situações de aprendizagem, sugerimos alguns recursos audiovisuais, da plataforma Matemática Multimídia:

- Estradas para estação, disponível em **http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1015** (acesso em 18/03/2019);

- Montanhas geométricas, disponível em **http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1021** (acesso em 18/03/2019);

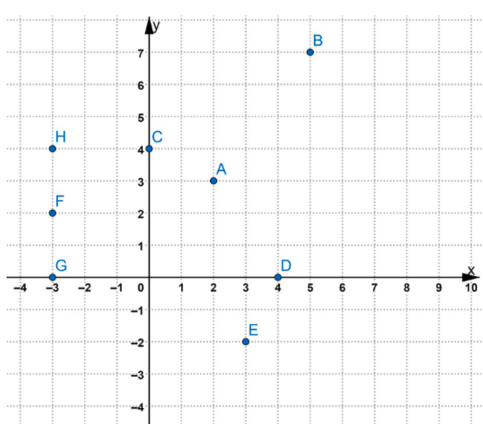
Tesouro cartesiano, disponível em **http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1183** (acesso em 18/03/2019).

ATIVIDADES

TEMA 1 – A GEOMETRIA E O MÉTODO DAS COORDENADAS

ATIVIDADE 1

Observe os pontos indicados no plano cartesiano, conforme mostra a figura a seguir:



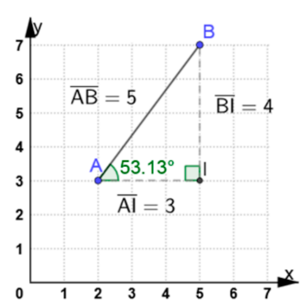
Fonte: Elaborada pelos autores

Preencha a tabela a seguir, conforme os dados informados na figura.

Pontos	Distância	Inclinação	Equação da reta
A e B	$(\overline{AB}) = 5$	$m = \frac{3}{4}$	$-\frac{4x}{3} + y - \frac{1}{3} = 0$
A e D	$(\overline{AD}) = \sqrt{13}$	$m = -\frac{3}{2}$	$\frac{3x}{2} + y - 6 = 0$
A e G	$(\overline{AG}) = \sqrt{34}$	$m = \frac{3}{5}$	$-\frac{3x}{3} + y - \frac{9}{5} = 0$
D e E	$(\overline{DE}) = \sqrt{5}$	m = 2	-2x + y + 8 = 0
E e G	$(\overline{EG}) = 4\sqrt{10}$	$m = -\frac{1}{3}$	$\frac{1x}{3} + y + 1 = 0$
F e A	$(\overline{FA}) = \sqrt{26}$	$m = \frac{1}{5}$	$-\frac{1x}{5} + y - \frac{13}{5} = 0$
H e C	$(\overline{HC}) = 3$	m = 0	y - 4 = 0
H e G	$(\overline{HG}) = 5$	Indefinido	x = –3

Resolução:

Pontos: A (2, 3) e B (5, 7)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{AB})^2 = (5-2)^2 + (7-3)^2$$
$$(AB)^2 = 3^2 + 4^2$$
$$(AB)^2 = 9 + 16$$
$$(\overline{AB})^2 = 25$$
$$\sqrt{(AB)^2} = \sqrt{25}$$
$$(\overline{AB}) = 5$$

Inclinação:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = \frac{CO}{CA}$$

$$tg\alpha = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$m = \frac{3}{4}$$

Equação da reta:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

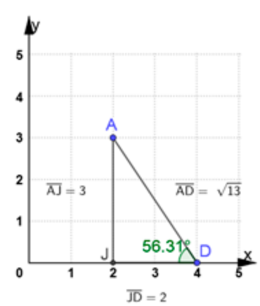
$$(y_1 - 7) = \frac{4}{3} \cdot (x_1 - 5)$$

$$y - 7 = \frac{4x}{3} - \frac{20}{3}$$

$$-\frac{4x}{3} + y - 7 + \frac{20}{3} = 0$$

$$-\frac{4x}{3} + y - \frac{1}{3} = 0$$

Pontos: A (2, 3) e D (4, 0)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{AD})^2 = (4-2)^2 + (3-0)^2$$

$$(\overline{AD})^2 = 2^2 + 3^2$$

$$(\overline{AD})^2 = 4 + 9$$

$$(\overline{AD})^2 = 13$$

$$\sqrt{(\overline{AD})^2} = \sqrt{13}$$

$$(\overline{AD}) = \sqrt{13}$$

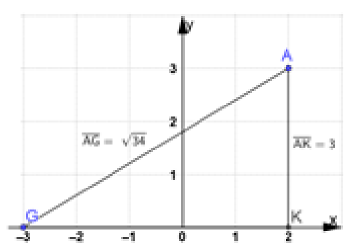
Inclinação:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = \frac{CO}{CA}$$
$$tga = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$
$$m = -\frac{3}{2}$$

Equação da reta:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 3) = -\frac{3}{2} \cdot (x_1 - 2)$$
$$y - 3 = -\frac{3x}{2} + \frac{6}{2}$$
$$y - 3 = -\frac{3x}{2} + 3$$
$$\frac{3x}{2} + y - 3 - 3 = 0$$
$$\frac{3x}{2} + y - 6 = 0$$

Pontos: A (2, 3) e G (-3,0)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{AG})^2 = (-3-2)^2 + (3-0)^2$$
$$(\overline{AG})^2 = (-5)^2 + 3^2$$
$$(\overline{AG})^2 = 25 + 9$$
$$(\overline{AG})^2 = 34$$
$$\sqrt{(\overline{AG})^2} = \sqrt{34}$$
$$(\overline{AG}) = \sqrt{34}$$

Inclinação:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{CO}{CA}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{(y_1-y_0)}{(X_1-x_0)}$$

$$m=\frac{3}{5}$$

Equação da reta:

$$(y_1-y_0)=m(x_1-x_0)$$

$$(y_1-3)=\frac{3}{5}\cdot(x_1-2)$$

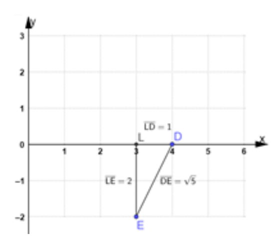
$$y-3\ =\frac{3x}{5}-\frac{6}{5}$$

$$-\frac{3x}{5}\ +y-3\ +\frac{6}{5}=0$$

$$-\frac{3x}{5}+y-\frac{15}{5}+\frac{6}{5}=0$$

$$-\frac{3x}{5}\ +y-\frac{9}{5}\ =0$$

Pontos: D (4, 0) e E (3, –2)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{DE})^2=(4-3)^2+(0-(-2))^2$$

$$(\overline{DE})^2=(1)^2+2^2$$

$$(\overline{DE})^2=1+4$$

$$(\overline{DE})^2=5$$

$$\sqrt{(\overline{DE})^2}=\sqrt{5}$$

$$(\overline{DE})=\sqrt{5}$$

Inclinação:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = \frac{CO}{CA}$$

$$tg\alpha = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$m = \frac{2}{1}$$

$$m = 2$$

Equação da reta:

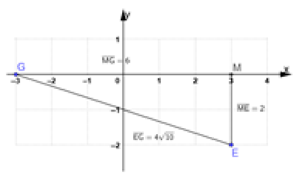
$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

$$(y_1 - 0) = 2 \cdot (x_1 - 4)$$

$$y = 2x - 8$$

$$-2x \ + y + 8 = 0$$

Pontos: E (3, -2) e G (–3, 0)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{EG})^2 = (-3 - 3)^2 + (-2 - 0)^2$$

$$(\overline{EG})^2 = (-6)^2 + (-2)^2$$

$$(\overline{EG})^2 = 36 + 4$$

$$(\overline{EG})^2 = 40$$

$$\sqrt{(\overline{EG})^2} = \sqrt{40}$$

$$(\overline{EG}) = 4\sqrt{10}$$

Inclinação:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = \frac{CO}{CA}$$

$$tga = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$m = -\frac{2}{6}$$

$$m = -\frac{1}{3}$$

Equação da reta:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

$$(y_1 - (-2)) = -\frac{1}{3} \cdot (x_1 - 3)$$

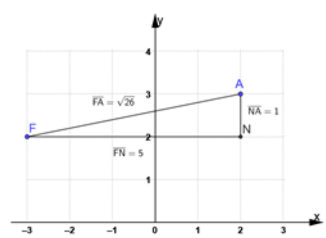
$$y + 2 = -\frac{1x}{3} + \frac{3}{3}$$

$$y + 2 = -\frac{1x}{3} + 1$$

$$\frac{1x}{3} + y + 2 - 1 = 0$$

$$\frac{1x}{3} + y + 1 = 0$$

Pontos: F (–3, 2) e A (2, 3)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{FA})^2 = (-3 - (2))^2 + (2 - 3)^2$$

$$(\overline{FA})^2 = (-5)^2 + (-1)^2$$

$$(\overline{FA})^2 = 25 + 1$$

$$(\overline{FA})^2 = 26$$

$$\sqrt{(\overline{FA})^2} = \sqrt{26}$$

$$(\overline{FA}) = \sqrt{26}$$

Inclinação:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\alpha = \frac{CO}{CA}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{(y_1 - y_0)}{(X_1 - x_0)}$$

$$m = \frac{1}{5}$$

Equação da reta:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$

$$(y_1 - 3) = \frac{1}{5} \cdot (x_1 - 2)$$

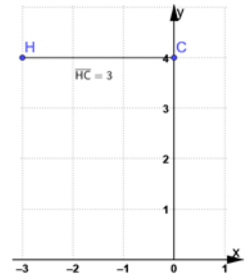
$$y - 3 = \frac{1x}{5} - \frac{2}{5}$$

$$-\frac{1x}{5} + y - 3 + \frac{2}{5} = 0$$

$$-\frac{1x}{5} + y - \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = 0$$

$$-\frac{1x}{5} + y - \frac{13}{5} = 0$$

Pontos: H (–3, 4) e C (0, –4)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{HC})^2 = (-3-0)^2 + (0)^2$$

$$(\overline{HC})^2 = (-3)^2$$

$$(\overline{HC})^2 = 9$$

$$\sqrt{(\overline{HC})^2} = \sqrt{9}$$

$$(\overline{HC}) = 3$$

Inclinação:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = \frac{CO}{CA}$$

$$tg\alpha = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

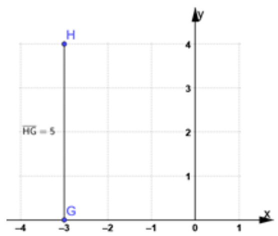
$$m = \frac{0}{3}$$

$$m = 0$$

Equação da reta:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 4) = 0 \cdot (x_1 - (-3))$$
$$y - 4 = 0$$

Pontos: H (–3,4) e G (–3,0)



Fonte: Elaborada pelos autores

Distância:

$$(\overline{HG})^2 = (0)^2 + (0-5)^2$$
$$(\overline{HG})^2 = (-5)^2$$
$$(\overline{HG})^2 = 25$$
$$\sqrt{(HG)^2} = \sqrt{25}$$
$$(\overline{HG}) = 5$$

Inclinação:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = \frac{CO}{CA}$$
$$tga = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$
$$m = \frac{4}{0}$$
$$m = indefinido$$

Equação da reta:

$$X = -3$$

ATIVIDADE 2

Na tabela a seguir, são informadas na primeira linha e, coluna algumas equações de reta. Indique nas células de interseção da linha com a coluna se as retas são concorrentes ou paralelas.

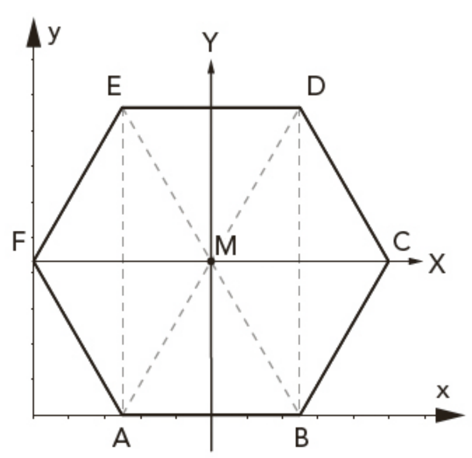
	$y = 2x - 2$	$y = 3x$	$y = {}^1/_4\,x$
$y = 2x - 1$	Paralelas	Concorrentes	Concorrentes
$y = {}^1/_4\,x + 2$	Concorrentes	Concorrentes	Paralelas
$y = 2x$	Paralelas	Concorrentes	Concorrentes

Fonte: Elaborada pelos autores

Quando os coeficientes angulares são iguais as retas serão paralelas ($m_1 = m_2$)
Quando os coeficientes angulares são diferentes as retas serão concorrentes ($m_1 \neq m_2$)

ATIVIDADE 3

O hexágono regular ABCDEF tem centro M, como mostra a figura a seguir, e cada lado tem 10 unidades de comprimento. Utilizando os sistemas de coordenadas xOy e XMY.



Fonte: Elaborada pelos autores

Determine:

a. as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E e F;
b. as coordenadas do ponto M, centro do hexágono;
c. a inclinação dos segmentos AD e BE;
d. as coordenadas do ponto médio dos segmentos: AE e BD;

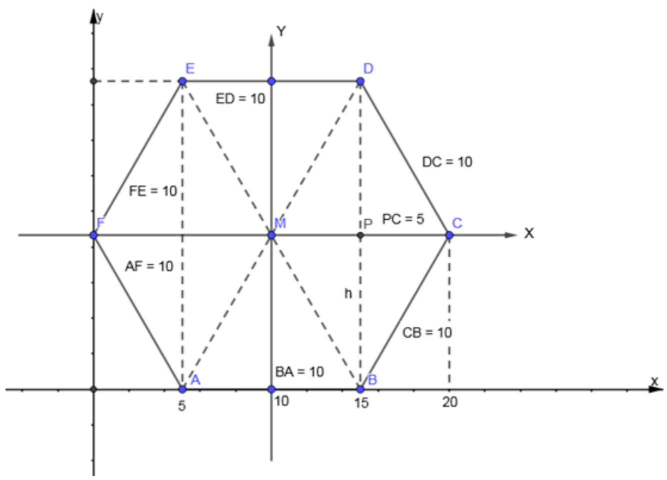
Resolução:

a. Como o hexágono é regular ele é formado por seis triângulos equiláteros, logo a distância entre 2 2 m^2, sendo assim as coordenadas dos pontos são:

Ponto A = (5, 0);

Ponto B = (15, 0);

Para o ponto C, é preciso considerar que a coordenada y do ponto é igual a altura do triangulo MBC, considerando essa altura igual a h temos:



Fonte: Elaborada pelos autores

$$h^2 + 5^2 = 10^2$$
$$h^2 = 100 - 25 \Rightarrow h^2 = 75$$
$$h = \sqrt{75} \Rightarrow h = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

A partir desse resultado, para o sistema xOy, temos:

Para ponto C, temos que o segmento FC mede 20 unidades, e dista verticalmente da origem na altura h, então as coordenadas deste ponto será representada da seguinte maneira: C (20, $5\sqrt{3}$)

Temos que, se h é a altura do triângulo MCB, então, existe um ponto médio (P) ao segmento MC, de tal forma que $\overline{MP} = \overline{PC} = 5$. Portanto , a abscissa do ponto D, será a composição da medida do segmento FM = 10 unidades e do segmento MP, de medida 5, resultando no segmento FP com medida de 15 unidades.

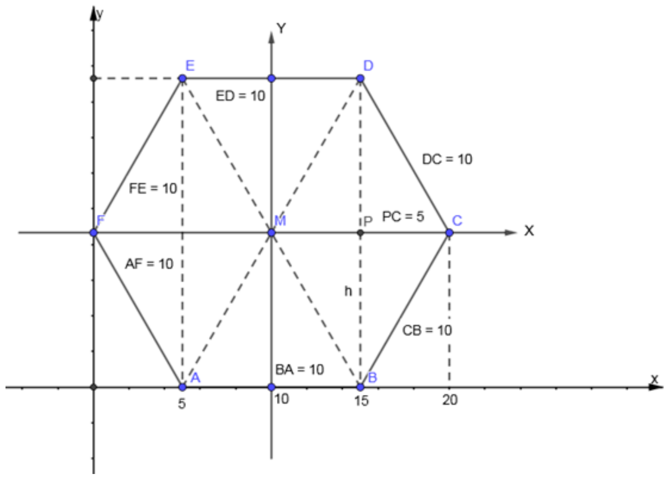
Se o polígono ABCDE é um hexágono, então, temos que ele possui 6 triângulos equiláteros, então temos que: $\Delta MCB \equiv \Delta MCD \therefore \overline{PB} = \overline{PD} = 5\sqrt{3}$, sabendo-se disto, temos que o segmento BD mede $10\sqrt{3}$ unidades.

Portanto, as coordenadas do ponto D será: D (15, $10\sqrt{3}$)

Utilizando o mesmo raciocínio, obtemos as coordenadas dos pontos E e F, conforme segue: E (5, $10\sqrt{3}$ e F (0, $5\sqrt{3}$).

b. O ponto M Tem como coordenada o par (10, $5\sqrt{3}$)

O gráfico a seguir , mostra as coordenadas dos pontos, solicitados:



Fonte: Elaborada pelos autores

c. a inclinação dos segmentos AD e BE;

Segmento AD

A (5, 0) e D (15, 10,$\sqrt{3}$)

$$m_{\overline{AD}} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{10\sqrt{3} - 0}{15 - 5} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$$

A inclinação calculada, corresponde à tangente do ângulo de 60°.

Segmento BE

B (15, 0) e E (5, 10)

$$m_{\overline{BE}} = \frac{y_E - y_B}{x_E - x_B} = \frac{10\sqrt{3} - 0}{5 - 15} = \frac{10\sqrt{3}}{-10} = -\sqrt{3}$$

d. as coordenadas do ponto médio dos segmentos: AE e BD

A (5, 0); E (5, 10$\sqrt{3}$); B (15, 0) e D (15, 10$\sqrt{3}$)

Segmento AE

$$x_M = \frac{x_A + x_E}{2} = \frac{5+5}{2} = 5$$

$$y_M = \frac{y_A + y_E}{2} = \frac{0 + 10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$M_{\overline{AE}} = (5, 5\sqrt{3})$$

Segmento BD

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{15+15}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$y_M = \frac{0+10\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$M_{\overline{BD}} = (15, 5\sqrt{3}$$

Observem que os dois pontos médios estão na mesma altura, alterando a coordenada do eixo x.

ATIVIDADE 4

Dados os pontos A (1, 3), B (3, 7) e C (4, k):

a. determine o valor de k para que esses pontos estejam alinhados.

b. determine o valor de k para que a área do triângulo ABC seja igual a zero.

c. sendo k = 3, desenhe o triângulo ABC e calcule sua área

Resolução:

a. Para que três pontos, no caso, A, B e C, estejam alinhados, necessariamente temos que considerar: $m_{\overline{AB}} = m_{\overline{BC}}$

Então:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-3}{3-1} = 2$$

$$m_{\overline{BC}} = \frac{y_C - y_b}{x_c - x_b} = \frac{k-7}{4-3} = k-7$$

$$\text{Como } m_{\overline{AB}} = m_{\overline{BC}} \Rightarrow 2 = k-7 \Rightarrow k = 9$$

Como

Podemos também utilizar a seguinte definição:

Três pontos são colineares (alinhados) quando o determinante da matriz formada pelas coordenadas desses pontos for igual a zero, ou seja:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & k & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & k & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \\ 4 & k \end{matrix}$$

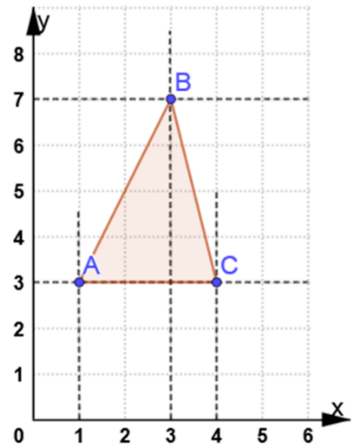
$$-28 \quad -k \quad -9 \qquad +7 \ +12 \ +3k$$

$$-37 - k + 19 + 3k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -18 + 2k = 0 \Rightarrow 2k = 18 \Rightarrow k = 9$$

b. A área do triângulo ABC será nula quando os três pontos estiverem alinhados, ou seja, quando k = 9. É interessante aproximar essas duas informações, sempre que três pontos estão alinhados, a área do triângulo formado por eles é nula e vice-versa.

c. O triângulo ABC, será representado graficamente no plano cartesiano da seguinte maneira:



Fonte: Elaborada pelos autores

Observando a figura, verificamos que o segmento AC mede 3 unidades e a altura relativa a este segmento mede 4 unidades, logo a área do triângulo ABC será igual a 6 unidades quadradas, ou seja,

$$\text{Área}_{\Delta_{ABC}} = \frac{3 \cdot 4}{2} =$$

$$= \frac{12}{2} = 6 \text{ unidades quadradas}$$

Outra maneira de se resolver a mesma atividade, consiste na utilização do cálculo de determinante no cálculo de áreas de triângulos, conforme segue:

Sendo k≠9 os três pontos, não são colineares, ou seja, não estão alinhados, assim sendo, a disposição dos três pontos nos permite delimitar uma área triangular e sua área é igual a metade do módulo do determinante da matriz formada pelas coordenadas dos três pontos.

$$\frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$\frac{1}{2}|-40+28| = \frac{1}{2}|-12| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ unidades quadradas}$$

TEMA 2 – A RETA, A INCLINAÇÃO CONSTANTE E A PROPORCIONALIDADE

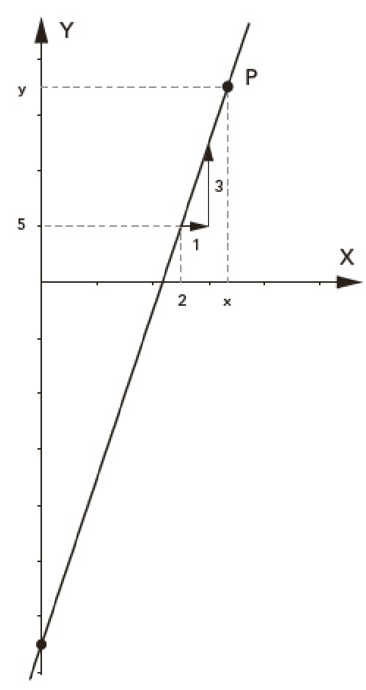
ATIVIDADE 1

Na equação y = 473,5 x + 12,879, se x variar uma unidade, passando, por exemplo, de 2008 para 2009, de quanto será o aumento de y? Tente responder a essa questão sem efetuar cálculos.

Nesta atividade o aluno deve ser capaz de compreender que o coeficiente de x é 473,5 e que isso significa que para cada unidade x o resultado final é acrescido de 473,5 unidades.

ATIVIDADE 2

Determine a equação da reta que passa pelo ponto A (2; 5) e tem inclinação m = 3.



Fonte: Elaborada pelos autores

Resolução:

A equação da reta e do tipo y = mx + h, ou seja, e y = 3x + h

Como o ponto (2; 5) pertence a reta, então: 5 = 3 · 2 + h

Logo, h = –1, e a equação é y = 3x –1

2ª solução

Sendo (x, y) um ponto genérico da reta , devemos ter:

$$m = \frac{y-5}{x-2} = 3$$

Logo, y – 5 = 3 (x – 2),ou seja,y = 3x – 1

3ª solução

Dado um ponto e a inclinação da reta é possível determinar a equação geral da reta pela equação fundamental da reta.

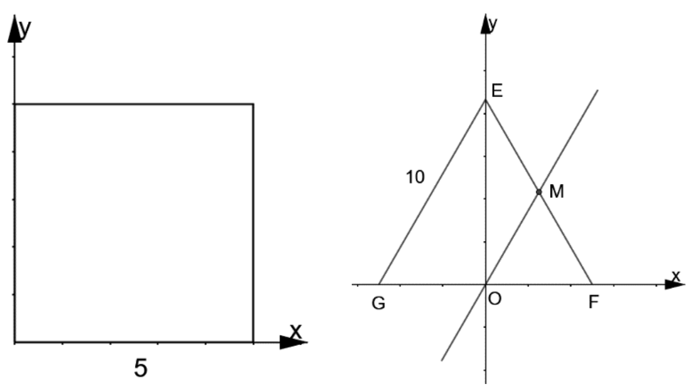
$(y_1 - y_0) = m\,(x_1 - x_0)$

Dados os pontos: A (2,5) e P (x, y) e m = 3, temos que:

$$(y-5) = 3\,(x-2) \Rightarrow y-5 = 3x-6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = 3x-1$$

ATIVIDADE 3

Considere o quadrado ABCD, cujo lado mede 5 unidades, e o triângulo equilátero EFG, cujo lado mede 10 unidades, representados no sistema cartesiano.



Fonte: Elaborada pelos autores

a. escolha um sistema de coordenadas que considere mais adequado e escreva as equações das retas AB, BC, CD, DA, AC e BD.

b. escolha um sistema de coordenadas que considere mais adequado e escreva as equações das retas EF, FG, GE e OM, onde M é o ponto médio do lado EF e O é o ponto médio do lado GF.

Resolução:

a. As retas AB e DC são paralelas ao eixo x (constantes) portanto suas equações, respectivamente, são:

$$y = 5 \ \text{ e } y = 0$$

permanece 5. O mesmo raciocínio é valido para a reta DC, para qualquer valor de x o valor de y = 0.

As retas DA e BC são paralelas ao eixo y portanto suas equações, respectivamente, são:

$$X=0 \text{ e } x=5$$

Nesses casos em que a reta é vertical, ou seja, não é possível determinar o coeficiente angular sua equação é definida pelo ponto onde a reta cruza o eixo da abscissa.

A reta AC, coincide com a diagonal do quadrado ABCD, logo, estão a 45° graus em relação ao eixo x.

Sabendo que $m=tg\,\alpha$ é possível determinar o coeficiente angular da reta ($m=tg45°=1$) considerando qualquer ponto pertencente a reta e o seu coeficiente angular é possível por meio da equação fundamental da reta determinar sua equação:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 5) = 1\,(x_1 - 5)$$
$$y - 5 = x - 5$$
$$y - 5 + 5 = x$$
$$y = x$$

A reta AC encontra-se em situação semelhante a reta BD, porém é decrescente portanto seu coeficiente angular é negativo. O ângulo formado entre a reta e o eixo x é de 135° ($m = tg135° = -1$)

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 0) = -1\,(x_1 - 5)$$
$$y = -x + 5$$

b. Dado o triangulo equilátero, seus ângulos internos são todos de 60° graus. Sendo assim o ângulo formado pela reta GE é igual a 60°, ($m = tg60°= \sqrt{3}$). Tomando um ponto pertencente a reta GE (ponto G) é possível usar a equação fundamental e determinar a equação da reta.

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 0) = \sqrt{3}(x_1 - (-5))$$
$$y = x\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$

A reta EF forma com o eixo x um ângulo de 120° graus, possibilitando o cálculo de seu coeficiente angular; $m=tg120°= -\sqrt{3}$. Tomando um ponto pertencente a reta EF (ponto F) é possível determinar a equação da reta.

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 0) = \sqrt{3}(x_1 - 5)$$
$$y = -x\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$

A reta EF forma com o eixo x um ângulo de 120° graus, possibilitando o cálculo de seu coeficiente angular; $m=tg120°= -\sqrt{3}$. Tomando um ponto pertencente a reta EF (ponto F) é possível determinar a equação da reta.

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 0) = 0(x_1 - 5)$$
$$y = 0$$

Obs. Foi evitado usar o ponto E no item anterior por comodidade evitando calcular a sua ordenada.

A reta FG é constante (paralela ao eixo x) e coincidente com a abscissa. Seu coeficiente angular é igual a zero (m=0), tomando o ponto F pertencente a reta FG temos:

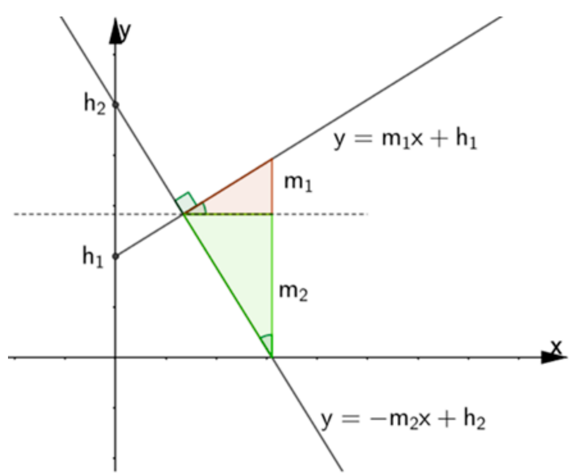
$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 0) = 0\ (x_1 - 5)$$
$$y=0$$

O ponto médio M divide o segmento EF ao meio e o ponto O divide o segmento GF também ao meio, formando um novo triângulo equilátero OMF, assim a reta OM forma com a abscissa o ângulo de 60°, possibilitando calcular seu coeficiente angular m=tg60°= $\sqrt{3}$. Tomando o ponto O como ponto de referencia pertencente a reta OM, temos:

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 0) = \sqrt{3}(x_1 - 0)$$
$$y = x\sqrt{3}$$

PERPENDICULARISMO ENTRE DUAS RETAS

Se duas retas inclinadas em relação aos eixos coordenados r_1 e r_2 são perpendiculares, então suas inclinações m_1 e m_2 tem sinais opostos e são inversas, isto é, $m_1 \cdot m_2 = -1$, como é possível perceber pela análise da figura seguinte:



Os ângulos assinalados nos dois triângulos retângulos são congruentes. Isto nos permite afirmar que   (note que, como $m_2 < 0$, o segmento que corresponde ao lado do triângulo tem comprimento igual a $-m_2$). Sendo assim, concluímos que $m_1 \cdot m_2 = -1$

ATIVIDADE 4

Considerando os apontamentos teóricos anteriormente citados, determine a equação da reta t que passa pelo ponto **A** e é perpendicular à reta r, nos seguintes casos

A	r	t
(0; 0)	y = 4 – 3x	$y=\frac{1}{3}x$
(0; 4)	y =2x – 5	$y=-\frac{1}{2}x+2$
(0; –3)	y = 0,2x + 7	y = -5x - 15
(0; 7)	$y=-\sqrt{3}x+2$	$y=\sqrt{3}x-\frac{7\sqrt{3}}{3}$
(1; 2)	y = 3x + 7	$y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

Resolução:

Como visto anteriormente, se duas retas são perpendiculares entre si, então m1.m2= -1. Identificado o coeficiente angular da reta r é possível calcular o coeficiente angular da reta t de modo que ele seja o oposto inverso do coeficiente angular de r, garantindo o perpendicularismo.

Para a coordenada (0;0) temos a reta r dada pela equação

$$y = 4 - 3x$$

O coeficiente angular da reta r, $m_r = -3$, sabendo o coeficiente angular de r calcula-se o coeficiente angular de t,

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$
$$m_t = -\frac{1}{m_r}$$
$$m_t = -\frac{1}{-3}$$
$$m_t = \frac{1}{3}$$

Sabendo o coeficiente angular da reta t, é possível saber a equação da reta t.

$$(y_1 - y_0) = m(x_1 - x_0)$$
$$(y_1 - 0) = \frac{1}{3}(x_1 - 0)$$
$$y = \frac{1}{3}x$$

Usa-se do mesmo raciocínio para as demais coordenadas.

Problemas lineares: Máximos e Mínimos

ATIVIDADE 1

Em uma fábrica que produz um só tipo de produto, o custo **C** da produção de **x** unidades é a soma de um custo fixo $\mathbf{C_0}$ com custo variável $\mathbf{C_1}$, que é proporcional a **x**, então $C_1 = Kx$, onde **k** representa o custo de cada unidade do produto.

Em uma fábrica como a descrita acima, tem-se: **C = 3000 + 150x** (x é o número de artigos; C é o custo da produção em reais).

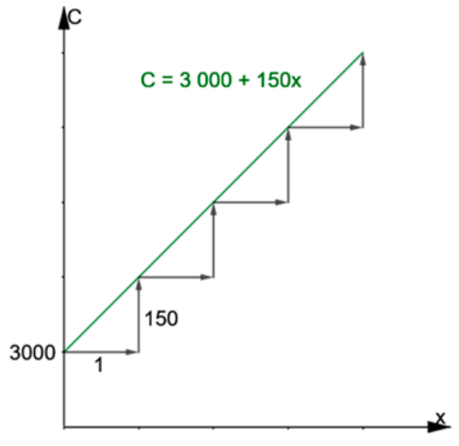
a. esboce o gráfico de C em função de x.

b. Para qual valor de x o custo fixo se iguala ao custo variável?

c. a partir de qual valor de x o custo fixo passa a representar menos de 10% do custo total da produção?

Resolução:

a.



Fonte: Elaborada pelo autor

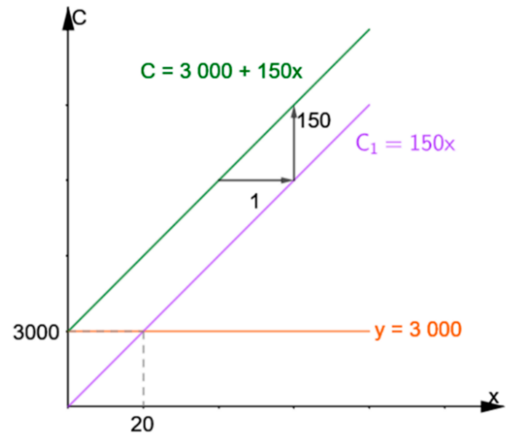
b. O custo fixo é de 3000, o custo variável é representado por 150x, então:

$$3000 = 150x$$

$$x = \frac{3000}{150}$$

$$x = 20$$

Graficamente, temos a seguinte situação:



Fonte: Elaborada pelos autores

c. O custo fixo passará a corresponder a 10% do custo total na seguinte situação:

$$3000 = 10\% \text{ de } (3000 + 150x)$$

ou seja, na seguinte situação:

$$3000 = 0{,}1 \cdot (3000 + 150x)$$
$$3000 = 300 + 15x$$
$$2700 = 15x$$
$$x = \frac{2700}{15} = 180$$

ATIVIDADE 2

Um pequeno fazendeiro dispõe de 8 alqueires para plantar milho e cana. Ele deve decidir quanto plantar de milho e quanto de cana, em alqueires, de modo que seu rendimento total seja o maior possível. Cada alqueire de milho plantado deve resultar em um rendimento líquido de R$ 20 mil, e cada alqueire de cana deverá render R$ 15 mil. No entanto, cada alqueire de milho requer 20 000 L de água para irrigação e cada alqueire de cana requer 10 000 L de água, sendo que, no período correspondente, a quantidade de água disponível para tal fim é 120 000 L.

Considere x e y as quantidades de alqueires plantados de milho e cana, respectivamente.

a. como se pode representar, em termos de x e y, o rendimento total **R** a ser recebido pelo fazendeiro, supondo que venda a totalidade de sua produção?

b. qual a relação entre x e y que traduz a exigência de que o total de alqueires plantados não pode ser maior que 8? Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) que satisfazem essa relação.

c. qual é a relação entre x e y que traduz a exigência de que o total de água a ser utilizado não pode superar os 120 000L? Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) que satisfazem essa relação

d. represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos que satisfazem, simultaneamente, as duas exigências expressas nos itens (B) e (C) (lembrando que devemos ter $x \geq 0, y \geq 0$).

e. determine o conjunto dos pontos (x; y) do plano que correspondem ao rendimento R_1 = 75 mil, e os que correspondem ao rendimento R_2 = 120 mil.

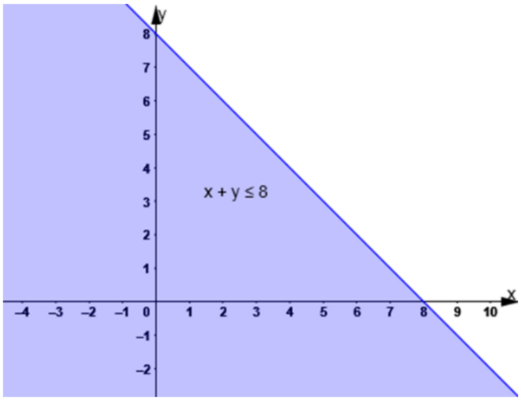
f. mostre que, quanto maior o rendimento **R**, maior a ordenada do ponto em que a reta que o representa o eixo OY.

g. determine o ponto da região do item d que corresponde ao rendimento total máximo.

Resolução:

a. Cada alqueire de milho renderá 20.000, logo, se plantar x alqueires, o rendimento será 20.000x. Cada alqueire de cana renderá 15.000, logo, se plantar y alqueires de cana, o rendimento será 15.000y. O rendimento total será R = 20.000x + 15.0000y.

b. Sendo x a quantidade de alqueires a ser plantados de milho e y a quantidade de alqueires plantados de cana, a soma x + y não pode ultrapassar os 8 alqueires disponíveis, ou seja $x + y \leq 8$

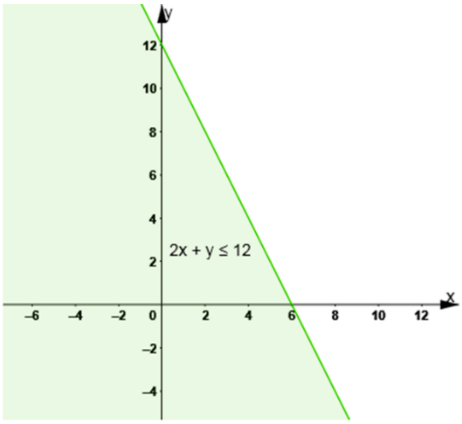


Fonte: Elaborada pelos autores.

c. Como cada alqueire de milho requer 20.000L de água, x alqueires requererão 20.000x L, da mesma forma, y alqueires cana utilizarão 10.000y L de água. Assim o total de litros de água utilizados será 20.000x + 10.000y, e não poderá ultrapassar o limite de 120.000, ou seja, $20.000x + 120.000 \leq 120.000$, isso corresponde aos pontos situados abaixo da reta ou na reta 20.000 x + 10.000y = 120.000.

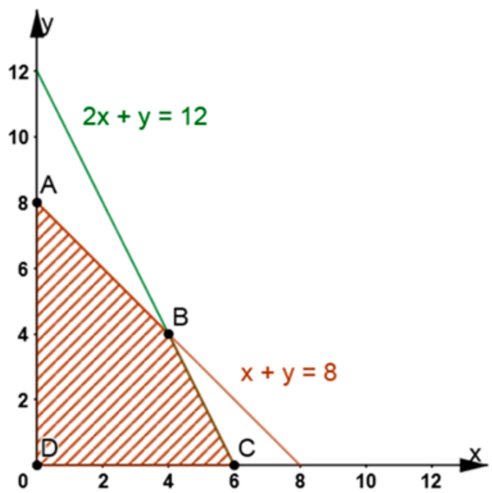
Para representar a reta podemos simplificar os coeficientes, obtendo 2x + y = 12

- para x = 0, temos y = 12;
- para y = 0, temos x = 6



Fonte: Elaborada pelos autores

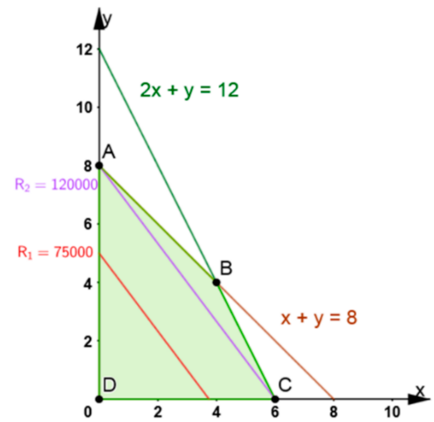
d. Os pontos do plano que satisfazem simultaneamente as duas restrições são os pontos situados abaixo ou na reta x + y =8 e abaixo ou na reta 2x + y = 12. Formam o quadrilátero ABCD indicado na representação a seguir.



Fonte: Elaborada pelos autores

e. Os pontos (x, y) que correspondem ao rendimento R_1 = 75 000 reais são os pontos da reta r_1 de equação 75 000 = 20 000x + 15 000y, ou seja, simplificando os coeficientes, 4x + 3y = 15

Os pontos que correspondem ao rendimento R_2 =120 000 são os pontos da reta r_2 de equação 120 000 = 20 000x + 15 000y, ou seja, simplificando os coeficientes, 24 = 4x + 3y. As duas retas são paralelas e estão representadas a seguir:



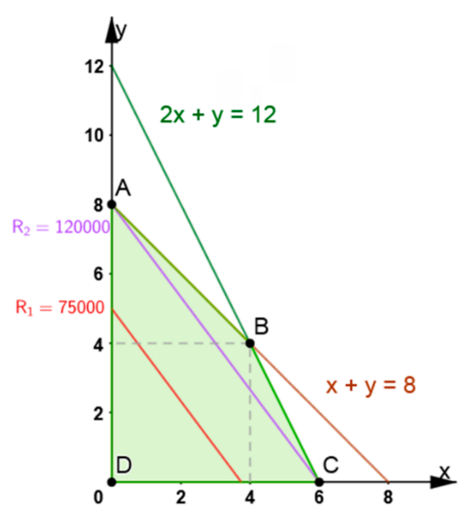
Fonte: Elaborada pelos autores

$$r_1 = 4x + 3y = 15$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 5$$
$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{4}$$

$$r_1 = 4x + 3y = 24$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 8$$
$$y = 0 \Rightarrow x = 6$$

f. Para cada valor fixado do rendimento R, a reta R = 20 000x + 15 000y corta o eixo OU no ponto em que x = 0, ou seja, em que $y = \frac{R}{15000}$. Isso significa que quanto maior o rendimento, maior é a ordenada do ponto em que a reta que o representa intercepta o eixo y.

g. Aqui, vamos identificar o ponto da região de viabilidade do problema, ou seja, que foi determinado no item d, no qual o rendimento total R é o maior possível. O maior valor possível para a reta R = 20 000x + 15 000y cortar o eixo y sem sair da região de viabilidade corresponde à reta que passa pelo ponto de interseção das retas x + y = 8 e 2x + y = 12. Calculando tal ponto, obtemos x = 4 e y = 4. No ponto (4, 4), portanto, o valor de R é o maior possível, respeitadas as condições de $x + y \leq 8$ e $2x + y \leq 12$. Calculando o valor de R nesse ponto, obtemos R = 20 000 · 4 + 15 000 · 4, ou seja, R = 140.000 reais.

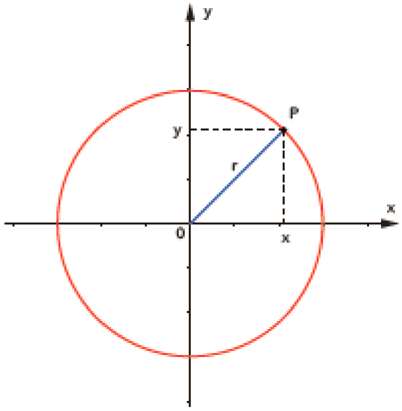


Fonte: Elaborada pelos autores

TEMA 3 – CIRCUNFERÊNCIAS E CÔNICAS SIGNIFICADOS E EQUAÇÕES.

CIRCUNFERÊNCIA:

A propriedade característica da circunferência é a de que seus pontos são todos equidistantes de um ponto interior chamado centro; a distância comum de cada um de seus pontos ao centro é o raio da circunferência. Assim, se o centro for a origem do sistema de coordenadas e **P** (x; y) um ponto de uma circunferência de raio r, a equação que relaciona as coordenadas de um ponto qualquer da circunferência é:

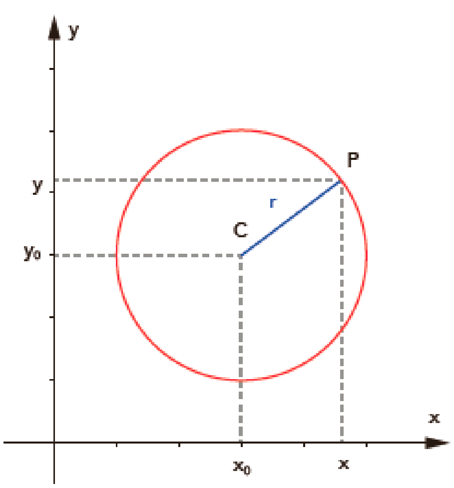


Fonte: Elaborada pelos autores

d(P; O) = r

ou seja, $\sqrt{x^2 + y^2} = r$;

ou ainda, $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$



Fonte: Elaborada pelos autores

Se o centro **C** for o ponto (x_0 ; y_0), então da igualdade característica d(P; C) = r resultará:

ou seja:

$(\mathbf{x - x_0})^2 + (\mathbf{y - y_0})^2 = \mathbf{r^2}$

ATIVIDADE 1

Sabendo que uma circunferência de centro **C (y;– y_0)** e raio **r** tem equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, considere a circunferência de centro (4; 4) e de raio 4.

a. Represente-a no plano cartesiano a seguir e determine sua equação.

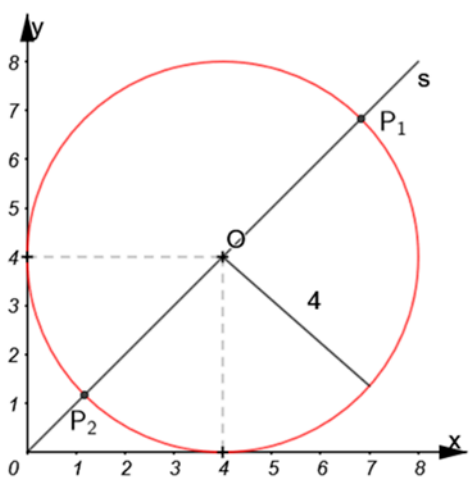
b. Determine a equação da reta **s** que passa pela origem e pelo centro da circunferência.

c. Calcule as coordenadas dos pontos P_1 e P_2, de interseção da reta **s** com a circunferência dada.

d. Calcule a distância entre P_1 e P_2

Resolução:

a. A equação da circunferência é $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$, com a seguinte representação gráfica:



Fonte: Elaborada pelos autores

b. Dados dois pontos pertencentes a reta s (0,0) e (4,4) é possível determinar a equação da reta usando a condição de alinhamento de três pontos, em que o determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos é igual a zero. Usando os pontos por onde é sabido que a reta s passa (4,4) centro da circunferência; (0,0) origem e (x,y) um ponto genérico pertencente a essa reta temos:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \\ x & y \end{matrix}$$

$$0 \quad -4y \quad 0 \qquad 0 \quad 4x \quad 0$$

$$4x - 4y = 0$$
$$x - y = 0$$
$$x = y$$

c. P_1 e P_2 são pontos comuns tanto a circunferência quanto a reta s, ou seja, são pontos que satisfazem as duas equações simultaneamente formando um sistema:

$$\begin{cases} x = y \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16 \Rightarrow \end{cases}$$
$$\Rightarrow (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(y-4)^2 = 16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\left(y^2 - 8y + 16\right) = 16 \Rightarrow$$
$$2y^2 - 16y + 32 = 16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2 - 8y + 8 = 0$$
$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$
$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 32}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} =$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{16 \cdot 2}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$
$$y_1 = 4 + 2\sqrt{2} \quad y_2 = 4 - 2\sqrt{2}$$
$$x_1 = 4 + 2\sqrt{2} \quad x_2 = 4 - 2\sqrt{2}$$
$$P_1 = (4 + 2\sqrt{2}; 4 + 2\sqrt{2})$$
$$P_2 = (4 - 2\sqrt{2}; 4 - 2\sqrt{2})$$

d. A distância entre os pontos de intersecção é igual ao diâmetro (d) da circunferência.

d = 2 · r (r igual ao raio da circunferência)

d = 2 · 4

d = 8

Professor:

Outros exercícios poderiam ser propostos, articulando o reconhecimento da equação da circunferência e os resultados já conhecidos sobre retas. Em virtude da limitação do espaço do Caderno do Aluno, deixamos tal tarefa para o discernimento e a disponibilidade do professor.

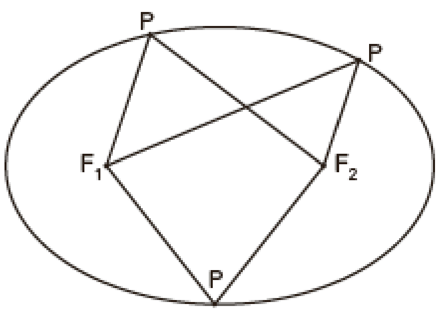
CÔNICAS

As cônicas (elipses, hipérboles e parábolas) são curvas que podem ser representadas no plano cartesiano e cuja propriedade obedecida pelos seus pontos pode ser descrita por meio de uma equação de duas variáveis.

Fonte: Elaborada pelos autores

ELIPSE

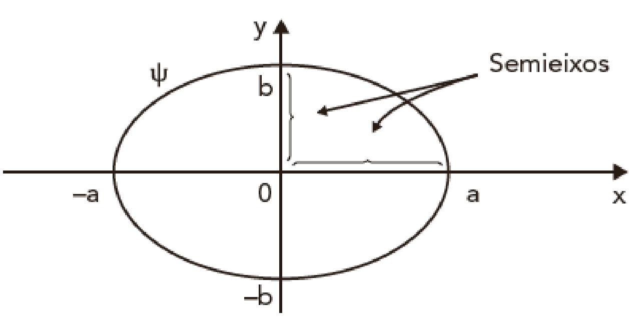
Uma propriedade fundamental pode ser utilizada para caracterizar uma elipse: qualquer ponto da elipse é tal que a soma das distâncias até esses dois pontos fixados, que são os focos, é constante, como mostra a figura a seguir:



Fonte: Elaborada pelos autores

$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \text{constante}$

A elipse apresenta dois eixos de simetria: o semieixo maior costuma ser representado por **a**, e o menor por **b**. Assim, os dois eixos são 2a e 2b.

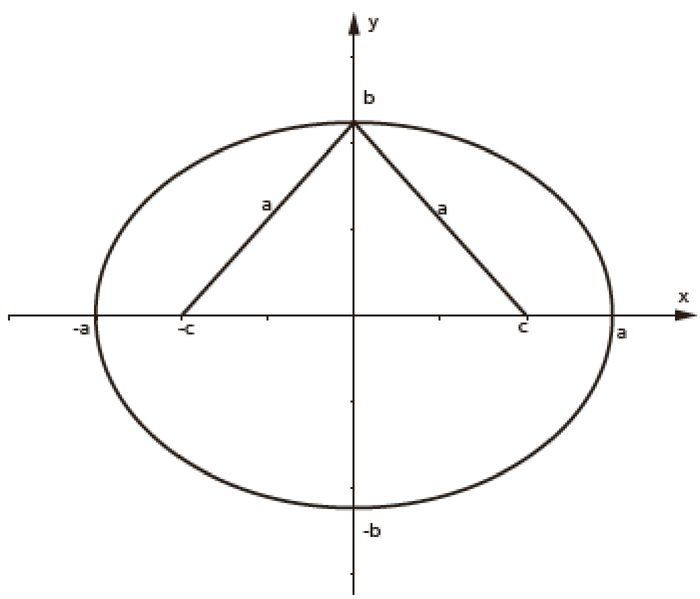


Fonte: Elaborada pelos autores

Desta forma, podemos dizer que uma elipse é a curva obtida quando reduzimos (ou ampliamos) na mesma proporção todas as cordas perpendiculares a um diâmetro dado, cuja equação será representada da seguinte maneira:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Em uma elipse com centro na origem e semieixo maior **a** no eixo OX, os pontos (0; b) e (0; –b) distam do centro menos do que **a**. Os pontos do eixo OX que estão a uma distância **a** de (0; b) e (0; –b) têm coordenadas (c; 0) e (–c; 0), são particularmente importantes, sendo chamados **focos** da elipse. O valor **c** é chamado de distância focal da elipse. Por construção, a soma das distâncias dos pontos (0; b) e (0; –b) até os focos é igual a **2a**. É possível mostrar que, para todo ponto **P** (x; y) do plano, se $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=1$, então a soma das distâncias de **P** até os focos (c; 0) e (–c; 0) é igual a **2a**. A razão $\frac{c}{a}$ é chamada excentricidade da elipse, sendo representada pela letra **e**.



Fonte: Elaborada pelos autores

ATIVIDADE 2

De acordo com os fundamentos teóricos apresentados:

a. Mostre que, entre **a**, **b** e **c**, vale a relação $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$**;**

b. Mostre que, fixado o valor de **a**, quanto menor for o valor de **b**, mais a excentricidade se aproxima de 1 e a elipse se aproxima de um segmento de reta; e quanto mais próximo de **a** for o valor de **b**, mais a excentricidade se aproxima de zero e a elipse se aproxima de uma circunferência.

Resolução:

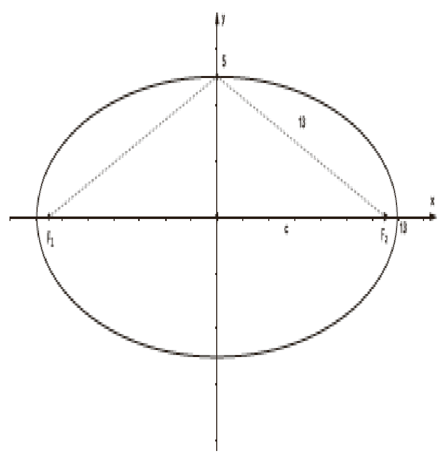
a. Observando o triângulo retângulo formado na figura, de hipotenusa a e catetos b e c, concluímos que $a^2 = b^2 + c^2$

b. Como $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ notamos que, sendo fixado o valor de a, quanto maior for o valor de b, menor será c, e portanto, menor a excentricidade, e mais a elipse se aproxima de uma circunferência; quanto menor o valor de b, mais próximo de a é o valor de c, e portanto, maior é a excentricidade, que se aproxima do valor 1.

Professor:
É possível verificar a mudança de excentricidade acessando o link a seguir:
Faça a leitura do "QR code" a seguir com seu smartphone ou acesse o link :
https://www.geogebra.org/m/uvu8rfwc

ATIVIDADE 3

Considere a elipse representada a seguir de centro na origem e semieixos a = 13 e b = 5.



Fonte: Elaborada pelos autores

Determine.

a. a equação da elipse;
b. a excentricidade da elipse;
c. os focos da elipse;
d. o valor de **k** para que o ponto **P** (5; k), do primeiro quadrante, pertença a elipse;
e. a soma das distâncias de **P** aos focos da elipse.

Resolução:

a. De acordo com os dados da atividade, temos que: a = 13 e b = 5, temos que:

Então, a equação da elipse será dada por:

$$\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

b. A excentricidade da elipse é dada por:

Sabemos que
$a^2 = b^2 + c^2$ então,

$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$$

Então:

$$c=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$$

Desta forma, a excentricidade da elipse será:

$$e=\frac{12}{13}\cong 0{,}92$$

c. Os focos da elipse são os pontos de coordenadas (c; 0) e (–c; 0), ou seja, são os pontos (12; 0) e (–12; 0).

d. Para que o ponto (5, k) pertença à elipse, devemos ter:

$$\frac{5^2}{13^2}+\frac{k^2}{5^2}=1$$

$$\frac{625+169k^2}{4225}=\frac{4225}{4225}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 625+169k^2=4225\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 169k^2=4225-625\Rightarrow$$

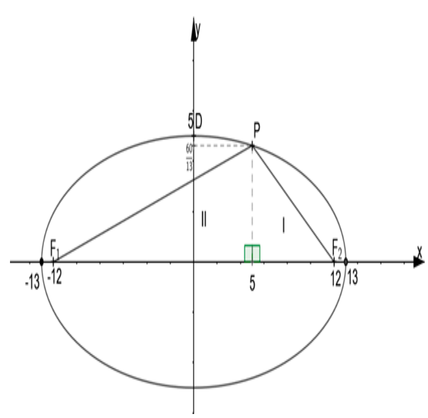
$$\Rightarrow 169k^2=3600\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2=\frac{3600}{169}\Rightarrow k=\sqrt{\frac{3600}{169}}\Rightarrow k=\pm\frac{60}{13}$$

Sendo P do primeiro quadrante, segue que

$$k=\frac{60}{13}$$

e. Seja a figura que representa a elipse a seguir:



Fonte: Elaborada pelos autores

Da figura temos que os triângulos I e II são retângulos, e portanto:

$$d_{\overline{PF_1}} = \sqrt{7^2 + \left(\frac{60}{13}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{49 + 21{,}30} = \sqrt{70{,}30} \cong 8{,}38$$
$$d_{\overline{PF_2}} = \sqrt{17^2 + \left(\frac{60}{13}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{289 + 21{,}30} = \sqrt{310{,}30} \cong 17{,}62$$

Então, a soma das distâncias de P aos focos da elipse, será:

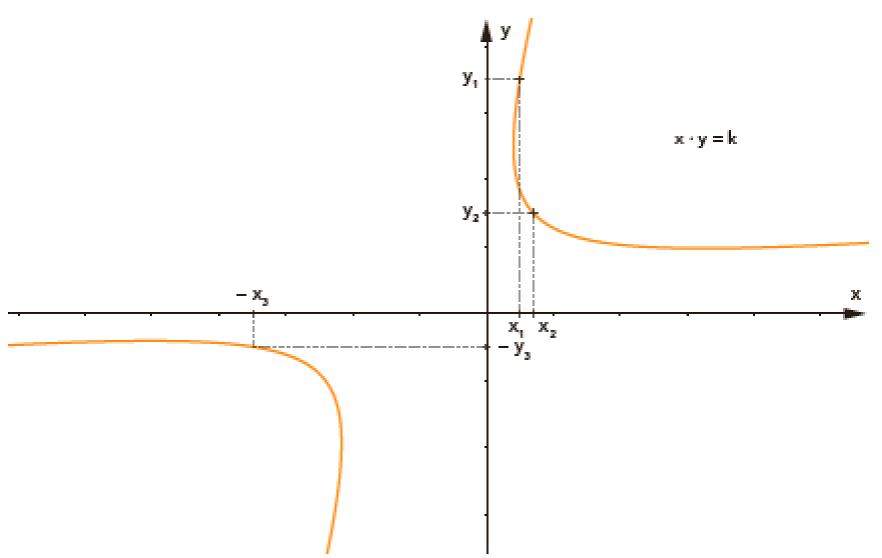
$$D = d_{\overline{PF_1}} + d_{\overline{PF_2}} = 8{,}38 + 17{,}62 \cong 26$$

Nota-se que tal resultado é numericamente equivalente a $2 \cdot a = 26$.

Professor:
Aqui seria interessante apresentar muitos exercícios de identificação dos dois semieixos de elipses dadas por equações na forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *com a correspondente representação no plano cartesiano, bem como exercícios de escrita das equações das elipses já representadas no plano, com o centro na origem do sistema e com os valores dos semieixos indicados sobre os eixos coordenados.*

HIPÉRBOLE

Quando representamos graficamente pares (x; y) de grandezas que são inversamente proporcionais, isto é, cujo produto **x · y** é constante e não nulo, a curva obtida é uma hipérbole.



Fonte: Elaborada pelos autores

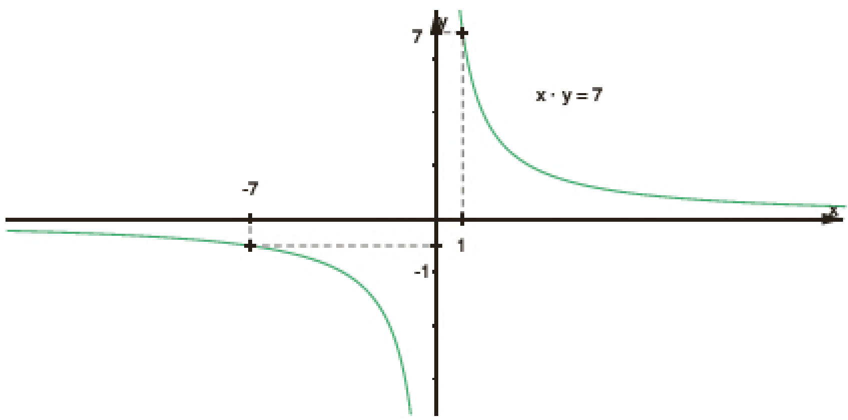
Eixos perpendiculares/sistema ortogonal

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = k \neq 0$$

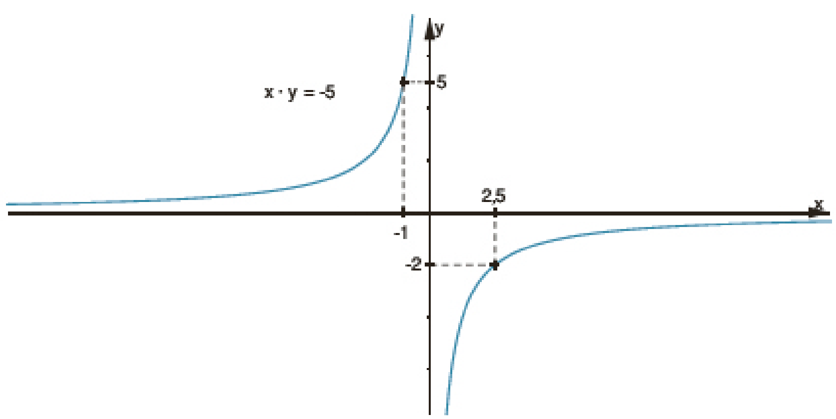
A hipérbole é obtida quando selecionamos um cone circular reto junto ao plano que forma com o plano da base, um ângulo maior do que aquele formado por uma geratriz do cone com a base.

Para escrever a equação da hipérbole, podemos partir da representação de grandezas inversamente proporcionais. No caso de um sistema XOY, em que os eixos cartesianos são ortogonais, a hipérbole é chamada equilátera e os dois ramos da curva se aproximam indefinidamente dos eixos coordenados são chamados, nesse caso, de assíntotas da hipérbole.

Por exemplo, as curvas formadas pelos pontos cujas coordenadas satisfazem as relações a seguir são hipérboles, tendo como assíntotas os eixos coordenados:



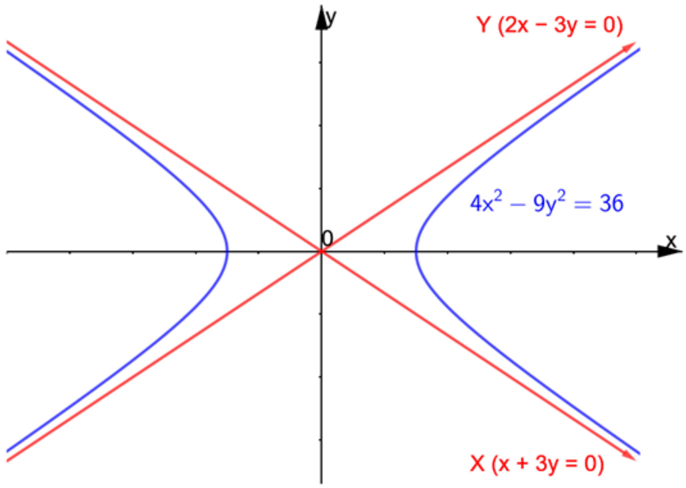
Fonte: Elaborada pelos autores.



Fonte: Elaborada pelos autores

ATIVIDADE 1

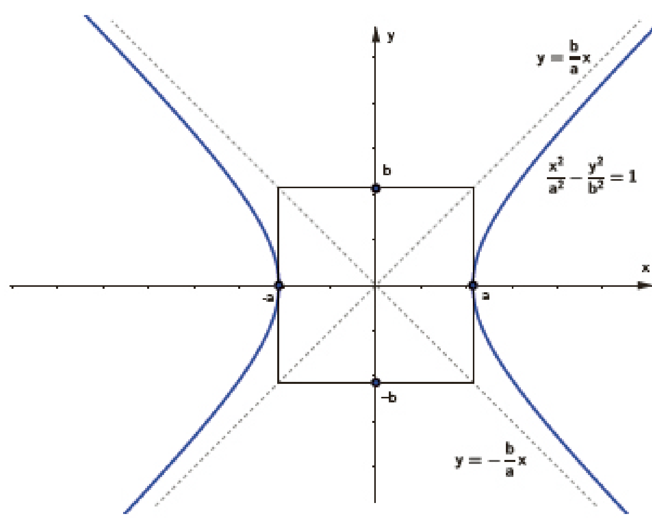
A equação $4x^2 - 9y^2 = 36$ pode ser considerada uma hipérbole. Fatore o primeiro membro e obtenha **X** e **Y** tal que **X · Y** = 36. Em seguida, determine as assíntotas e faça uma representação gráfica da hipérbole, obtendo $(2x - 3y) \cdot (2x + 3y) = 36$, ou seja, **X · Y** = 36.



Fonte: Elaborada pelos autores

ATIVIDADE 2

A equação de uma hipérbole representada no plano cartesiano, com centro na origem, é do tipo π , em que **a** é a soma do vértice da hipérbole, nas condições representadas na figura seguinte:



Fonte: Elaborada pelos autores

a. Sabendo isso, determine a equação da hipérbole que passa pelo ponto (3; 0) e tem como assíntotas as retas $y = \frac{4}{3}$ e $y = -\frac{4}{3}x$.

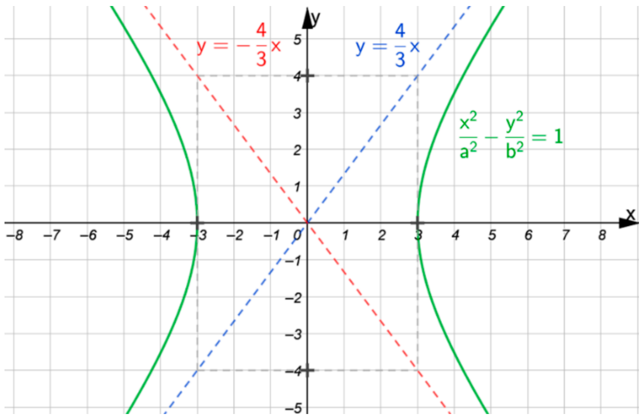
Resolução:

Dadas as assíntotas da hipérbole, constamos que: $\begin{cases} a = 3e - 3 \\ b = 4e - 4 \end{cases}$

Então, a equação da hipérbole será dada por:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

b. Faça a representação gráfica da hipérbole e de suas assíntotas.

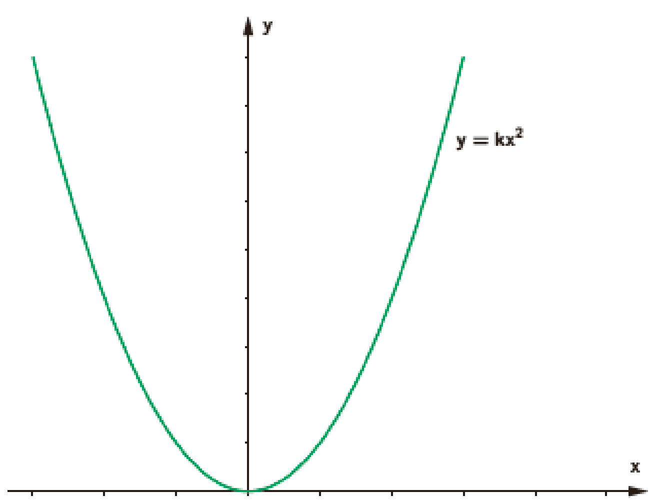


Fonte: Elaborada pelos autores

Professor:
Neste momento, seria interessante apresentar diversos exercícios de representação no plano cartesiano de hipérboles dadas por equações na forma apresentada anteriormente, sempre destacando as assíntotas, que podem ser obtidas pela simples fatoração da diferença de quadrados, característica da equação da hipérbole nessa forma

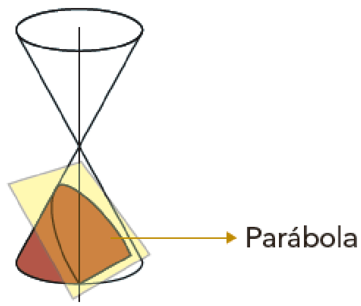
PARÁBOLA

Em geral, quando representamos graficamente pares (x; y) de grandezas tais que **y** é diretamente proporcional ao quadrado de **x** ($y = kx^2$, k constante e $k \neq 0$), a curva correspondente no plano cartesiano é uma parábola.



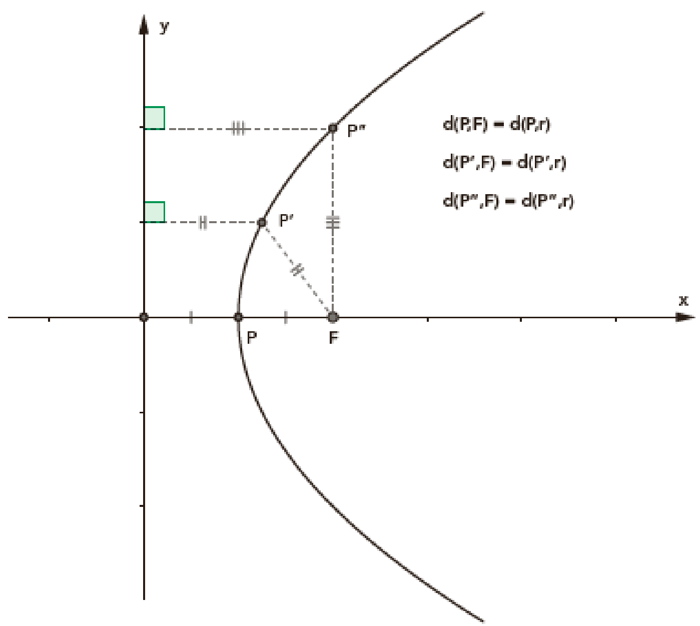
Fonte: Elaborada pelos autores

Quando seccionamos um cone circular reto por um plano que forma com a base um ângulo exatamente igual ao que uma geratriz do cone forma com a base, obtemos também uma parábola



Fonte: Elaborada pelos autores

A parábola tem certas propriedades características que podem ser utilizadas para defini-la. Uma delas é a existência de um ponto F, fixado, e de uma reta r, fixada, tais que a distância de cada ponto P da parábola até F é igual à distância de P até r. F é o foco da parábola e r é sua diretriz.



Fonte: Elaborada pelos autores

ATIVIDADE 1

Determine o foco e a diretriz das parábolas que podem ser representadas no plano cartesiano por equações do tipo:

a) y = kx^2
a) y = ky^2
b) y = kx^2 = h

Resolução:

Consideremos a parábola .

Se o foco for o ponto F(0, c), então a diretriz r será a reta y = –c, pois o ponto (0, 0) pertence à parábola e a distância dele ao foco deve ser a mesma que a distância dele à diretriz.

Sendo P(x, y) um ponto qualquer da parábola, a distância de P ao foco deve ser igual à distância de P ao foco deve ser igual à distância até a diretriz, ou seja:

$$d(P,F) = \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = y + c = d(P,r)$$

Logo, $x^2 + (y - c)^2 = (y + c)^2$

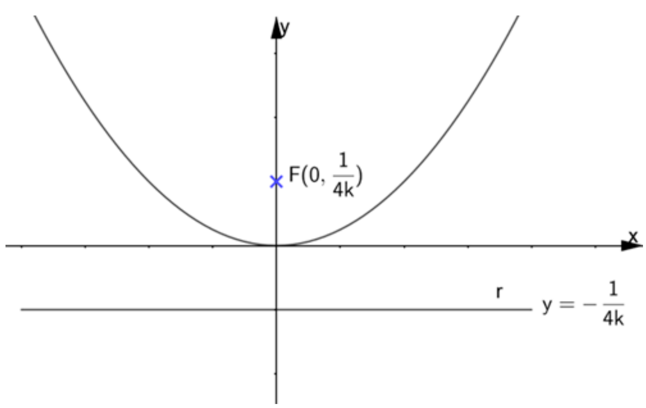
Substituindo y por e efetuando os cálculos, obtemos;

$$x^2 + \left(kx^2 - c\right)^2 = (kx + c)^2$$
$$x^2 + k^2x^4 + c^2 - 2kx^2c = k^2x^4 + c^2 + 2kcx^2$$
$$x^2(1 - 4kc) = 0$$

Sendo assim, concluímos que, para a igualdade valer para todo x, devemos ter:

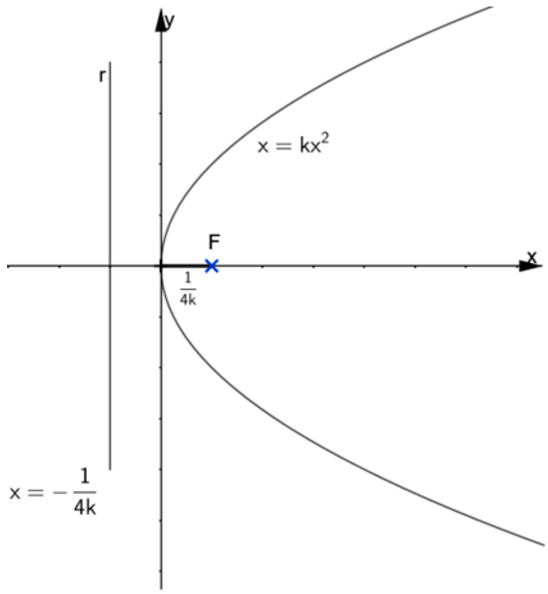
$$c = \frac{1}{4k}$$

Logo, o foco é o ponto $\left(0, \frac{1}{4k}\right)$, e a diretriz é a reta y = - $\frac{1}{4k}$.



Fonte: Elaborada pelos autores

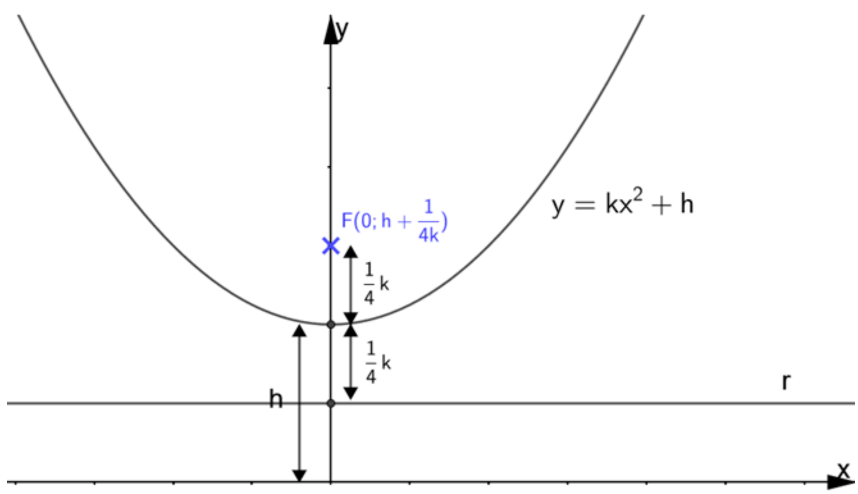
Da mesma maneira, se a parábola fosse x = ky^2, teríamos: foco $\left(\frac{1}{4k}; 0\right)$ e diretriz x = - $\frac{1}{4k}$



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para uma parábola de equação y = kx² + h, o foco e a diretriz seriam transladados na direção do eixo Ou de um valor h, ou seja teríamos:

$$F\left(0;h+\frac{1}{4k}\right) \text{ e r: } y=h-\frac{1}{4k}$$



Fonte: Elaborada pelos autores.

MATEMÁTICA

3ª SÉRIE – ENSINO MÉDIO
2° BIMESTRE

1. ORGANIZAÇÃO DAS GRADES CURRICULARES

Apresentamos a seguir uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática, vigente e sua respectiva relação com algumas das Competências Gerais da Educação Básica, da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), além de algumas orientações pedagógicas, para cada série que compõe o Ensino Médio.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

Desta forma, os quadros apresentados destacam as habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes em cada unidade. Tais habilidades traduzem, de modo operacional, as ações que os alunos devem ser capazes de realizar, ao final de um determinado estágio de aprendizagem, após serem apresentados aos conteúdos curriculares listados.

1.1. GRADE CURRICULAR DA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO.

Currículo Oficial – BNCC - SP		Currículo Paulista – E.M.
Tema/Conteúdo	**Habilidades**	**Competência Geral**
Números • Equações algébricas e números complexos. • Equações polinomiais; • Números complexos: operações e representação geométrica; • Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial; • Relações de Girard.	• Compreender a história das equações, com o deslocamento das atenções das fórmulas para as análises qualitativas • Conhecer as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica; • Saber reduzir a ordem de uma equação a partir do conhecimento de uma raiz; • Saber expressar o significado dos números complexos por meio do plano de Argand-Gauss; • Saber expressar o significado dos números complexos por meio do plano de Argand-Gauss;	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

1.1.1 ESTUDO FUNCIONAL DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS E O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS.

De forma geral, as equações polinomiais são instrumentos fundamentais para a representação das relações de interdependência entre grandezas, conforme foram desenvolvidos durante a aprendizagem dos alunos no aprendizado da Matemática em sua trajetória de estudos.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, já foram apresentados aos alunos diversos problemas, em diferentes contextos, cuja solução conduz a equações do primeiro e do segundo graus. O aluno já está acostumado a resolver equações de 1º grau ($ax + b = 0$, com $a \neq 0$) e de 2º grau ($ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$). Trata-se agora de enfrentar equações correspondentes a situações um pouco mais enredadas, que conduzem a equações de 3º, 4º e 5º graus.

A história da busca de soluções para tais equações, chamadas equações algébricas, é muito instrutiva, pois, com base nela, compreendemos mais facilmente as sucessivas ampliações nos conjuntos numéricos, dos números naturais até os números complexos, que viabilizam a atribuição de significado à raiz quadrada de um número negativo. Aprendemos também com a história que, com as equações de 3º grau, a busca por uma fórmula envolvendo radicais que nos forneça as raízes, do mesmo tipo da que nos dá as soluções de uma equação de 2º grau $\left(x=\frac{-b\pm\sqrt{b2-4ac}}{2a}\right)$, não costuma ser o melhor caminho para resolver as equações de graus 3 e 4, e é um caminho impossível de ser trilhado para equações de grau maior ou igual a 5.

O caminho mais conveniente, nesses casos, é uma análise qualitativa da pergunta que cada equação representa, extraindo da própria pergunta informações relevantes sobre s raízes.

Portanto, é muito importante sempre, e é decisivo em muitos casos, pensar efetivamente em uma equação como se pensa em uma pergunta, aprendendo a examiná-la criticamente para se chegar à sua resposta. Mais do que mera intenção de ensinar técnicas de solução, nosso objetivo aqui é a plena compreensão desse fato.

Em relação aos números complexos, a ênfase não será posta nos cálculos algébricos, mas sim no significado de tais números responsável por uma notável expansão dos conjuntos numéricos já conhecidos. As possibilidades de representação geométrica de um número complexo z no plano de Argand-Gauss, que tem como imagem um ponto no plano, como um par (x; y) de números reais, ou pode ser escrito na forma z = x + yi.

Assim, como a reta foi necessária e suficiente para se incluir todos os números reais, racionais e irracionais, desta forma, com a inclusão de números que possam ser raízes quadradas de números negativos, será necessário (e suficiente) todo o plano cartesiano, que servirá de inspiração para a construção do plano complexo, suporte para a representação de todos os números complexos. A unidade imaginária i, que representa o novo número cujo quadrado é igual a –1, serve de padrão para a representação no eixo vertical de números como 2i, 6i, –4i etc.

TEMA 1 – INTRODUÇÃO AO CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os estudos sobre complexos avançou graças à grande contribuição do matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576), antes deles os matemáticos julgavam não ser possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. Posteriormente Friedrich Gauss (1777-1855) foi o responsável pela sua formalização. Com maior cardinalidade por conter todos os demais conjuntos e possuir uma representação geométrica, sendo necessário compreender os processos das operações (aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo os elementos dos números complexos. A expressão $i^2 = -1$ aparece na definição de números complexos, assunto que gera muita dúvida, por isso é importante compreender o motivo de tal igualdade.

A seguir, partindo da definições estabelecidas abaixo temos:

1. Admitimos como número complexo o ordenado (x, y) no plano de Argand Gauss.
2. Os números complexos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são iguais se, e somente se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$
3. A adição e a multiplicação de números complexos são definidas por:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Os números complexos (x, y) se comportam como números reais para adição e produto, assim podemos estabelecer a seguinte relação: (x, 0) = x

Usaremos o símbolo i para representar o número complexo (0, 1), podendo escrever qualquer número complexo (x, y) da maneira a seguir:

$$\mathbf{(x, y) = (x, 0) + (0,1) \cdot (y, 0) = x + iy}$$

Assim como (x, 0) é igual a x, (–1, 0) é igual –1.

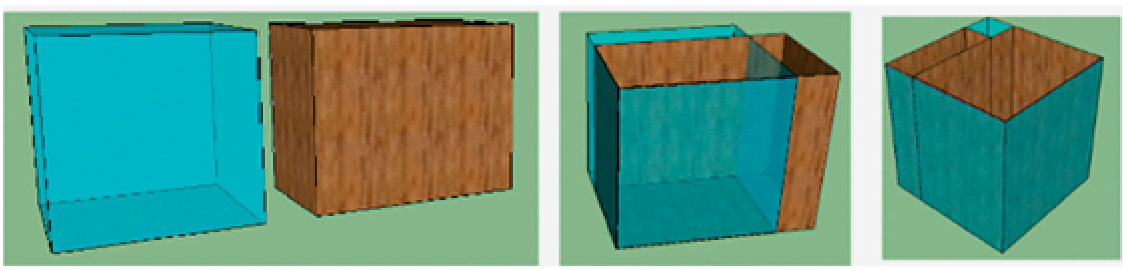
$$(-1, 0) = -1$$

$$i^2 = (-1, 0)$$

$$\mathbf{i^2 = -1}$$

UM PROBLEMA INTERESSANTE...

Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta x, outra com a forma de um paralelepípedo com a base retangular, de lados 3 dm e 5 dm, e de altura igual à altura do cubo. O valor de x deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja 4 dm^3 maior que o do paralelepípedo.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Escrevendo uma equação que traduz a exigência a ser satisfeita pelo valor de x no problema acima, podemos pensar:

- O volume do cubo de aresta x é igual a x^3 ;
- O volume do paralelepípedo de base 15 dm^2 e aresta x é igual a 15 x;
- O volume do cubo ser 4 dm^3 maior do que o do paralelepípedo;
- A equação $x^3 = 15x + 4$, ou seja, $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Agora que temos a equação que representa a situação descrita no problema, precisamos achar um jeito de resolvê-la e uma das maneiras muito curiosa, mas não muito usual seria recorrer à história da matemática e a origem dos Números Complexos.

Para saber mais sobre os conceitos sobre os números complexos, consulte o site:
https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/iniciodoprojeto/origem-dos-numeros-complexos., *Acesso em 22/04/2019*

Em uma das passagens da História da Matemática ocorre um fato muito curioso, entre Niccolò Fontana, conhecido como Tartaglia e Girolano Cardano.

> " ...chega aos ouvidos de Girolamo Cardano que Tartaglia sabia resolver tal tipo de equação. Cardano implorou a "fórmula" para resolver estas equações. Tartaglia recusou e acabou sendo acusado de mesquinho e egoísta. Com a insistência de Cardano e jurando que não divulgaria o resultado, Tartaglia revelou a solução. Porém, Cardano não cumpriu com sua palavra, e em 1545 fez a publicação no livro Ars Magna com o seguinte problema: "Determinar dois números cuja soma seja 10 e o produto seja 40", e o resolve através dos radicais de maneira similar as equações de 2° grau. Ele somente fez uma menção de Tartaglia na sua obra e até hoje a fórmula é conhecida como "Fórmula de Cardano". Esta descoberta foi tão inusitada que ficou conhecida como o início da matemática moderna[1]"

A Fórmula de " Cardano -Tartaglia" para determinar as raízes da equação do 3° grau do tipo , ficou da seguinte forma:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{N}{2}+\sqrt{\frac{N^2}{4}+\frac{M^3}{27}}+\sqrt[3]{-\frac{N}{2}-\sqrt{\frac{N^2}{2}+\frac{M^3}{27}}}}$$

Caso tenha interesse em saber como é possível chegar na fórmula, a mesma se encontra no caderno do Professor, volume 1, da 3ª série do Ensino Médio.

$$X=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}}$$

E agora, com fica a solução? Pela fórmula, parece não existir raiz da equação, uma vez que deparamos, nos cálculos, com a raiz quadrada de um número negativo, porém quando verificamos o valor 4 para x, temos:

- O volume do cubo de aresta 4 dm, é igual a 43 = 64 dm^3;
- O volume do paralelepípedo de base 15 dm^2 e aresta 4 dm é igual a 60 ;
- O volume do cubo ser 4 maior do que o do paralelepípedo;
- A equação $x^3 = 15x + 4$, ou seja $x^3 – 15x – 4 = 0 \Leftrightarrow 4^3 - 15 \cdot (4) – 4 = 0$" (verdadeiro).

Observe que podemos escrever 121 = 121 · (–1) e raiz quadrada de 121 é 11, só falta saber a raiz quadrada de -1. Como –1 não tem raiz real, vamos considerar que sua raiz é um número imaginário e o representaremos por i, Assim, i é um número tal que $i^2 = – 1$

Podemos agora escrever: $\sqrt{-121}=\sqrt{121}\cdot\sqrt{-1} = 11 \cdot i$

Substituindo $\sqrt{-121}$ por 11i na expressão

$$X=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}}$$, obtemos

$$X=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}$$

Usando o fato de que a raiz cúbica de um número é outro número que, elevado ao cubo, reproduz o primeiro, mostre que 2 + i é uma raiz cúbica de 2 + 11i. Ou seja, mostre que $(2 + i)^3 = 2 + 11i$

De fato, temos:

$(2 + i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot i +3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3$

$(2 + i)^3 = 8 + 12 \cdot i + 6 \cdot i^2 + i^2 \cdot i$

Como $i^2 = –1$,então::

$(2 + i)^3 = 8 + 12i + 6 \cdot (–1) + (–1) \cdot i$

Ou seja, $(2 + i)^3 = 2 + 11i$

Substituindo os valores das raízes cúbicas encontradas, temos:

$$X=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}$$, ou seja,

$$x = 2 + i + 2 – i = 4$$

Assim, reconciliamos a fórmula com o **fato** de que a equação tinha x = 4 como uma de suas raízes

PENSANDO NAS EQUAÇÕES DO 2º GRAU.

Normalmente quando resolvemos uma equação do 2º grau completa, usamos a "Fórmula de Bháskara", onde inevitavelmente nos deparamos com a extração de raiz quadrada, o que não é muito complicado para chegar ao resultado. O problema surge quando essa raiz é de um número negativo e então, temos que recorrer a outros "métodos" para resolver a questão.

Veja o exemplo abaixo:

$$x^2-6x+10=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot10}}{2\cdot1}=$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}$$

Note que:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{-1\cdot4}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4}$$

Sabendo-se que:

$$-1=i^2$$

Então,

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4}=\sqrt{i^2}\cdot\sqrt{4}=i\cdot2$$

A solução foi representar a raiz quadrada de –1 como um número imaginário "i", e finalmente a resposta para a equação é:

$$x=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{6\pm2i}{2}\Rightarrow x'=3+i \text{ e } x''=3-i$$

ATIVIDADE 1

Considerando os números complexos como recurso para dar sentido ao cálculo de equações algébricas, composto por parte real x e parte imaginária **yi**, sendo i = $\sqrt{-1}$, encontre os valores das raízes a seguir:

a. $\sqrt{-25}$

b. $\sqrt{-16}$

c. $\sqrt{-49}$

d. $\sqrt{x^2+y^2}=r;$

Resolução

a. $(\overline{AB})=5$

b. $(\overline{AD}) = \sqrt{13}$

c. $(\overline{AG}) = \sqrt{34}$

d. $(\overline{DE}) = \sqrt{5}$

ATIVIDADE 2

Vamos supor que possamos continuar a operar com os números complexos como se opera com os números reais, respeitando-se apenas a novidade que decorre do fato de termos $i^2 = -1$. Determine as soluções para as situações a seguir:

a. i^7
b. $i^5 + i^8$
c. $i^4 + i^9 - i^6$
d. $(-1 + i)^3$

Resolução:

a. $i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i$
$= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot i =$
$= (+1) \cdot (-1) \cdot i =$
$= (+1) \cdot (-1) \cdot i =$

b. $i^5 = i^2 \cdot i^2 \cdot i = (-1) \cdot (-1) \cdot i = +1i = i$
$i^8 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$
$i^5 + i^8 = i + 1$

c. $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = +1$
$i^9 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i =$
$= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot i$
$= (+1) \cdot i = i$
$i^6 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) . (-1) = -1$
$i^4 + i^9 - i^6 = +1 + i - (-1) = 2 + i$

d. $(-1 + i)^3 =$
$(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 \cdot i + 3 \cdot (-1) \cdot i^2 + i^3 =$
$= -1 + 3i - 3i^2 + i^3 = -1 + 3i - 3i^2 + (i^2 \cdot i) =$

$= -1 + 3i - 3 \cdot (-1) + ((-1) \cdot i) =$

$= -1 + 3 + 3i - i = 2 + 2i$

ATIVIDADE 3

Efetue as operações a seguir, supondo que são válidas as propriedades das operações com números reais para os números formados por uma parte real e uma parte imaginária:

a. $(5 - 3i) + (-3 + 4i)$

b. $(7i - 5) - (-2 + 8i)$

c. $(2i - 4) \cdot (3 + 6i)$

c. $(8 + i) \cdot (8 - i)$

Resolução:

a. $(5 - 3i) + (-3 + 4i)$

$5 - 3i - 3 + 4i = 5 - 3 - 3i + 4i = \mathbf{2 + i}$

b. $(7i - 5) - (-2 - 8i)$

$7i - 5 + 2 + 8i = -5 + 2 + 8i + 7i = \mathbf{-3 + 15i}$

c. $(2i - 4) \cdot (3 + 6i)$

$6i + 12i^2 - 12 - 24i = 12i^2 - 18i - 12 =$

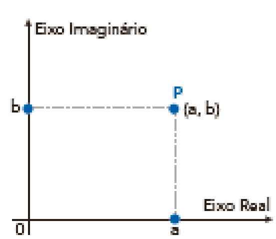
$12 \cdot (-1) - 18i - 12 = \mathbf{-24 - 18i}$

d. $(8 + i) \cdot (8 - i)$

$(64 - i^2) = 64 - (-1) = 65$

PLANO DE ARGAND – GAUSS

A representação geométrica de um número complexo foi associada aos estudos dos matemáticos Wessel, Argand e Gauss, os números a e b do número complexo a + bi (sendo "a" parte real e "b" parte imaginária) são associados a coordenadas de um ponto no plano, criando assim uma representação geométrica para o complexo.

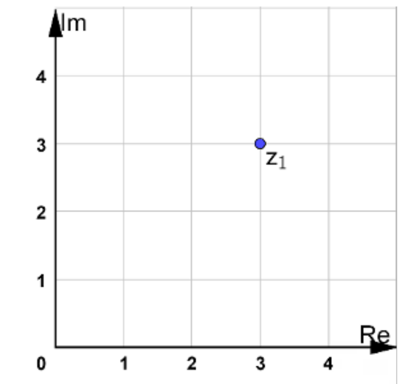


Fonte: Elaborada pelos autores

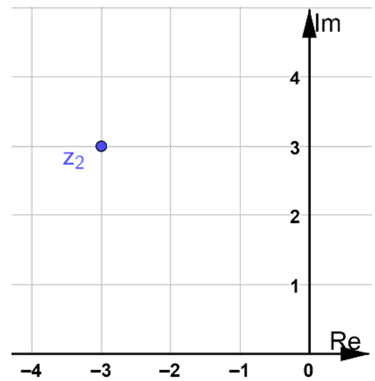
ATIVIDADE 4

Dados os complexos a seguir, represente-os no plano complexo.

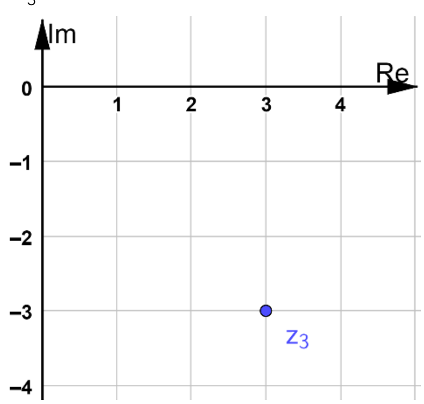
a. $Z_1 = 3 + 3i$



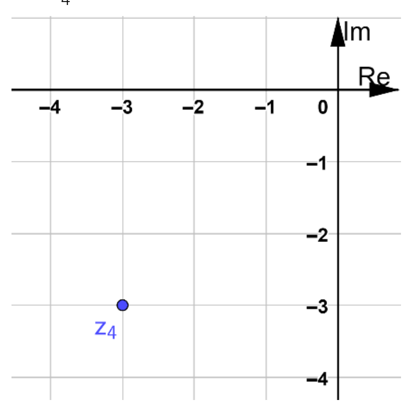
b. $Z_2 = -3 + 3i$



c. $Z_3 = 3 - 3i$



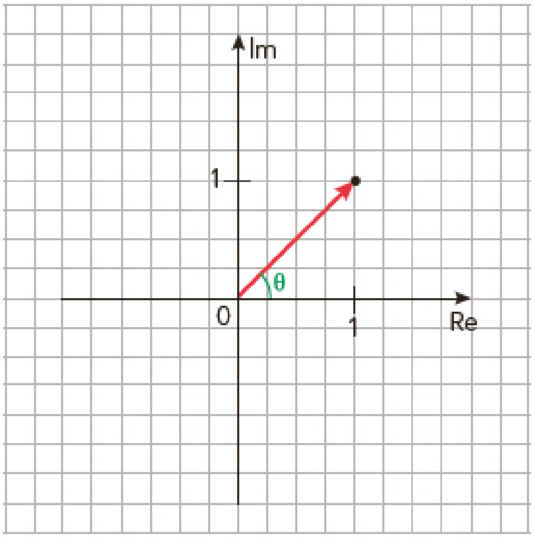
d. $Z_4 = -3 - 3i$

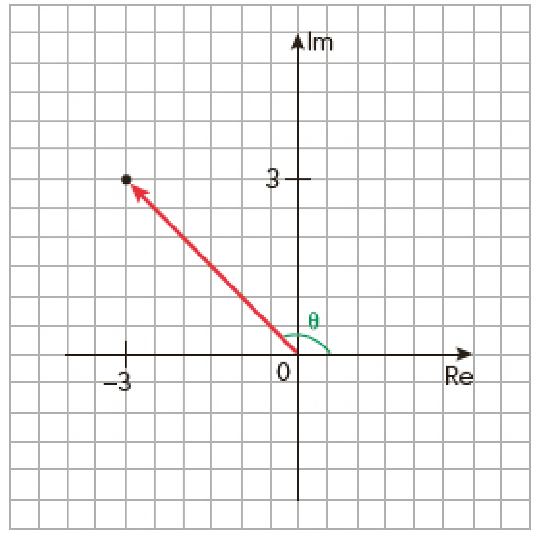


Fonte: Elaborada pelos autores

ATIVIDADE 5

Observe os números complexos $a + b_i$ representados no plano de *Argand – Gauss* e determine, para cada um, a medida do ângulo θ e do segmento que une o ponto (a; b) à origem do sistema.





Fonte: Elaborada pelos autores

Resolução:

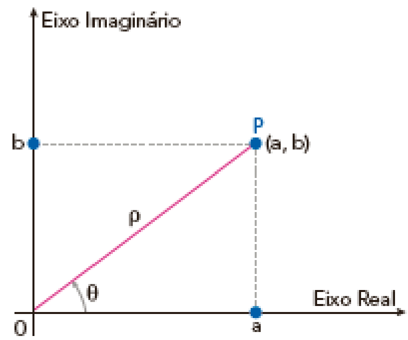
a.
$$z = 1 + i$$
$$p^2 = a^2 + b^2$$
$$p^2 = 1^2 + 1^2$$
$$p^2 = 1 + 1$$
$$p = \sqrt{2}$$
$$\theta = Arg(z)$$
$$tg\theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$
$$tg\theta = \frac{1}{1} = 1$$

Assim sendo, $\Theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$rad

b.
$$z = -3 + 3i$$
$$p^2 = a^2 + b^2$$
$$p^2 = (-3)^2 + 3^2$$
$$p^2 = 9 + 9$$
$$p = \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} \Rightarrow p = 3\sqrt{2}$$
$$\Theta = Arg(z)$$
$$tg\Theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$
$$tg\Theta = \frac{-1}{1} = -1$$

Assim sendo, $\Theta = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$rad

O ponto “P” e a imagem geométrica ou afixo do número complexo (a + bi)



Fonte: Elaborada pelos autores

Na imagem acima foi evidenciada a distância de P até origem O representada pela letra grega ρ (Rho). Esse segmento ρ representa o módulo do número complexo (a + bi) e pode ser encontrado usando o Teorema de Pitágoras, em que a e b representam os catetos do triângulo e ρ a hipotenusa. O ângulo formado entre o Eixo Real e o seguimento ρ, aqui representado pela letra grega θ(theta) é o argumento do número complexo (a + bi). Determinado o triângulo retângulo aOP podemos fazer uso das razões trigonométricas estudadas nos anos anteriores, mais especificamente sen θ e cos θ e tg θ.

$$sen\theta = \frac{b}{\rho}; \cos\theta = \frac{a}{\rho}; ta\theta = \frac{a}{b}$$

Possibilitando a representação trigonométrica ou polar do complexo (a + bi), temos:

$$\rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta)$$

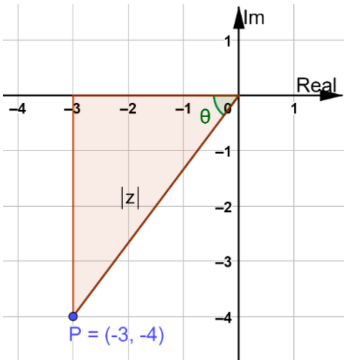
ATIVIDADE 6

Determine o argumento do número complexo $z = -3 - 4i$.

θ	**tg θ**
50°	1,1918
51°	1,2349
52°	1,2799
53°	1,3333
54°	1,3764
55°	1,4281
56°	1,4826

Fonte: Elaborada pelos autores

Resolução



Fonte: Elaborada pelos autores

Para determinar o argumefnto do número complexo z = –3 –4i , precisamos calcular o valor de , assim como a = –3 e b = –4, teremos:

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Segue que:

$$sen\Theta = \frac{b}{|z|} = \frac{-4}{5}$$

$$sen\Theta = \frac{a}{|z|} = \frac{-3}{5}$$

$$tg\Theta = \frac{sen\Theta}{\cos\Theta} = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{-3}{5}} =$$

$$= \frac{-4}{5} \cdot \frac{5}{-3} = \frac{-4}{-3} = 1{,}3333...$$

Portanto, o argumento θ(, será o arco cuja tangente é 1,3333, que é aproximadamente a 53,13°.

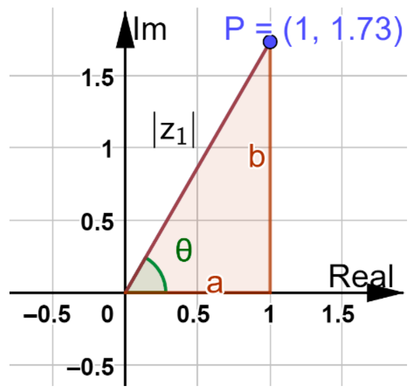
ATIVIDADE 7

Represente no plano complexo os números a seguir e, em seguida, escreva-os na forma trigonométrica:

a. $Z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$
b. $Z_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$
c. $Z_3 = -\sqrt{3} + 3i$
d. $Z_4 = \sqrt{3} - 3i$

Resolução:

a. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$



Fonte: Elaborada pelos autores

$$|z_1| = \left|\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}\right| = |\sqrt{1+3}| = |\sqrt{4}| = 2$$

$$sen\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

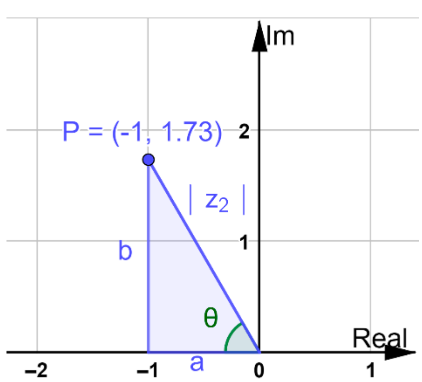
$$sen\Theta = \frac{1}{2}$$

$$tg\Theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \Theta = 60^\circ$$

$$\text{ou } \Theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\therefore z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i sen\frac{\pi}{3}\right)$$

b. $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$



Fonte: Elaborada pelos autores

$$|z_2| = \left|\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}\right| = |\sqrt{1+3}|$$

$$= \left|\sqrt{4}\right| = 2$$

$$sen\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\Theta = -\frac{1}{2}$$

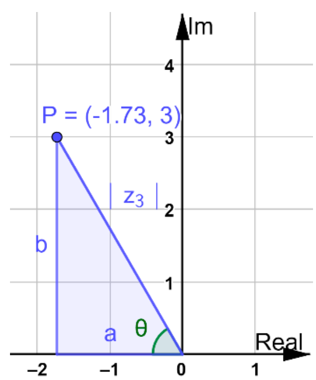
$$tg\Theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot -\frac{2}{1} =$$

$$\sqrt{3}\ (3^\circ\ quadrande) \Rightarrow \Theta = 60^\circ$$

$$\text{ou } \Theta = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\therefore z_2 = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3}\right)$$

c. $z_3 = -\sqrt{3} + 3i$



Fonte: Elaborada pelos autores

$$|z_3| = \left|\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2}\right| =$$

$$|\sqrt{3+9}| = |\sqrt{12}| = 3\sqrt{2}$$

$$sen\Theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\Theta = \frac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

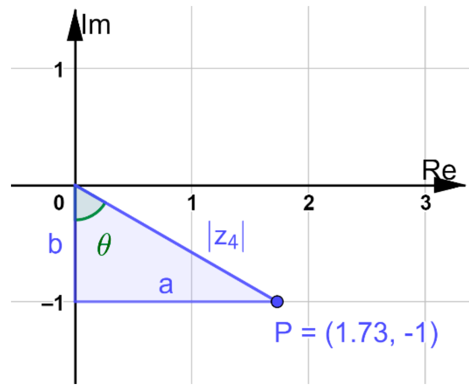
$$tg\Theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{-\sqrt{3}} = \frac{6}{-2\sqrt{3}} =$$

$$-\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}\left(2^{\circ}\text{ quadrante}\right) \Rightarrow \Theta = 60$$

$$= \frac{2\pi}{3}\text{rad}$$

$$\therefore z_3 = 3\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

d. $z_4 = \sqrt{3} - i$



Fonte: Elaborada pelos autores

$$|z_4| = \left|\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}\right| = |\sqrt{3+1}| = |\sqrt{4}| = 2$$

$$sen\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen\Theta = \frac{1}{2}$$

$$tg\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot -\frac{2}{1} =$$

$$-\sqrt{3}\left(4^{\circ}\text{ quadrante}\right) \Rightarrow \Theta = 60^{\circ} = \frac{5\pi}{3}\text{ rad}$$

$$\therefore z_4 = 2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$$

TEMA 2 – DAS FÓRMULAS À ANÁLISE QUANTITATIVA – COEFICIENTES E RAÍZES

Uma equação de 1° grau com uma raiz igual a p pode ser assim escrita:

$$x - p = 0.$$

Uma equação de 2º grau com uma raiz igual a p e outra raiz igual a m pode ser assim escrita:

$$(x - p) \,.\, (x - m) = 0$$

Escrita dessa maneira, dizemos que a equação está em sua forma fatorada. Aplicando a propriedade distributiva nessa expressão, obtemos:

$$x^2 - \underbrace{(p + m)}_{\text{Soma de raízes}} x + \underbrace{pm}_{\text{Produto de raízes}} = 0$$

Exemplos práticos

Considere a equação do 2º grau , $x^2 - 5x + 6 = 0$. Não é difícil verificar que os valores 2 e 3 são raízes da equação, pois satisfazem a "igualdade"

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \Rightarrow 10 - 10 = 0$$

$$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0 \Rightarrow 15 - 15 = 0$$

As raízes 2 e 3 quando somadas dão resposta 5 e quando multiplicadas, dão resposta 6.

De forma reduzida podemos escrever:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Agora é com você.

Na equação $x^2 - 7x + 12 = 0$, quais seriam as raízes?

Resolução:

$4 + 3$ e $4 \cdot 3$

Formalizando:

Uma forma genérica de se escrever uma equação do 2º grau é $ax^2 + bx + c = 0$. Comparando a forma generalizada com a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, podemos estabelecer uma relação de correspondência, como a seguinte:

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 6$$

E pensando na soma e produto das raízes, temos que:

Atenção:

- Quando o valor do coeficiente **a** for diferente de 1 uma opção para a resolução do problema é dividir toda equação por a, obtendo assim a = 1;
- O coeficiente c é o produto das raízes, quando a = 1, então, as raízes são divisores de **c**;
- 6 tem como divisores inteiros (–1, 1, –2, 2, –3, 3, –6, 6), de fato, de todos os divisores de 6, temos 2 e 3 que são raízes da equação.

ATIVIDADE 1

Encontre ao menos uma raiz das seguintes equações de 3º grau:

a. $x^3 + x - 10 = 0$

b. $x^3 - 5x + 6x = 0$

c. $8 + x^3 = 0$

d. $2x^3 + 4x - 2x - 4 = 0$

Formas fatoradas de equações polinomiais de grau 2, 3 e 4

Resolução:

a. $x^3 + x - 10 = 0$

Pode-se constatar que a equação acima possui, apenas uma raiz, conforme segue:

Para $x = 2$,

temos: $2^3 + 2 - 10 = 8 + 2 - 10 = 0$

b. $x^3 - 5x + 6x = 0$

Agrupando os termos semelhantes, temos: $x^3 + x = 0$, desta forma a única raiz será $x = 0$

c. $8 + x^3 = 0$

a única raiz da equação será $x = -2$, pois:

$x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$

d. $2x^3 + 4x - 2x - 4 = 0$

Agrupando os termos semelhantes, temos: $2x^3 + 2x - 4$, e pode-se verificar que a soma dos coeficientes é igual a 0, então concluímos que $x = 1$ é a raiz da equação, pois: $2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 - 4 = 2 + 2 - 4 = 0$.

Formas fatoradas de equações polinomiais de grau 2, 3 e 4.

Você sabia que quando conhecemos as raízes de uma dada equação polinomial, podemos escrevê-la na forma fatorada?

Sim, no caso de uma equação polinomial de grau 2, $ax^2 + bx + c = 0$, de raízes r_1 e r_2, sabemos que, após a divisão de todos os coeficientes por **a**, ela pode ser escrita na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, que podemos imaginar fatorada e escrita na forma $(x - r_1) \cdot (x - r_2) = 0$, ou seja:

- $x^2 - (r_1 + r_2)\,x + r_1 \cdot r_2 = 0$, ou seja:
- $x^2 - S_1x + S_2 = 0$, onde $S_1 = r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ é a soma das raízes e $s_2 = r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$ é o produto das raízes.

No caso de uma equação de 3º grau, temos $ax^3 + bx^2\ cx + d = 0$. Mesmo sem conhecer fórmulas para as soluções, se a equação tiver como raízes r_1, r_2 e r_3, procedendo de maneira análoga ao que fizemos para a equação polinomial de grau 2, após a divisão por a de todos os seus coeficientes, ela pode ser escrita na forma $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$, que poderíamos imaginar na forma fatorada e escrita como:

$$(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) = 0$$

Efetuando as multiplicações indicadas e ordenando, os resultados, obtemos a forma equivalente:

$$x^3 - (r_1 + r_2 + r_3) \cdot x^2 + (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3)\,x - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$
$$x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$$

onde:

$S_1 = r_1 + r_3$ é a soma das raízes,

$S_2 = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3$ é a soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas

e $S_3 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ é a soma dos produtos das raízes tomadas três a três, ou seja, é o produto das raízes.

Por exemplo, se uma equação polinomial de grau 3, tiver como raízes 2, 3 e 5, então ela poderá ser escrita na forma:

$$(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 5) = 0$$

e ao efetuarmos as multiplicações, obtemos:

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0;$$

podemos notar que $S_1 = 2 + 3 + 5 = 10$,

$$S_2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 31$$

$$S_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

ou seja, a equação pode ser escrita na forma:

$$x^3 - S_1x - S_3 = 0$$

Se procedermos analogamente no caso de uma equação de 4° grau: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$", de raízes r_1, r_2, r_3 e r_4 chegaremos à forma equivalente:

$$x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$$

onde:

$$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

$$S_2 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4$$

$$S_3 = r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4$$

$$S_4 = r_1r_2r_3r_4$$

Tal relação pode ser generalizada para uma equação algébrica de grau **n**. É importante notar a alternância nos sinais das somas S: as somas das raízes tomadas de 1 em 1, de 3 em 3, de 5 em 5, aparecem como coeficientes na equação com o sinal trocado; as somas de 2 em 2, de 4 em 4, de 6 em 6, ... aparecem como coeficientes com o próprio sinal

Essas relações entre as raízes e sua forma fatorada são conhecidas como as Relações de Girard.

AATIVIDADE 2

Levando em consideração os apontamentos anteriormente descritos, e considerando o quadro de soma e produto das raízes, para equações polinomiais de graus maiores que 2, responda:

a. Escreva na forma fatorada uma equação de 3° grau com raízes **m**, **p** e **k.**

b. Escreva na forma fatorada de uma equação de 3° grau com raízes 2, 3 e 4.

c. Desenvolva a equação do item anterior, aplicando a propriedade distributiva, e identifique a soma e o produto das raízes na equação final.

d. Como foi descrito anteriormente uma equação polinomial de grau 3, pode ser escrita da seguinte maneira: $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$. Retome a equação do item c e responda quanto é, nessa equação:

$\frac{b}{a}$?

$\frac{c}{a}$?

$\frac{d}{a}$?

Resolução;

a. $(x - m) \cdot (x - p) \cdot (x - k) = 0$

b. (x – 2) · (x – 3) · ("x – 4) = 0

c. $x^3 - (2 + 3 + 4)\,x^2 + (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4)x - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0$

$$x^3 - \underbrace{9x^2}_{\text{Soma das raízes}} + 26x - \underbrace{24}_{\text{Produto das raízes}}$$

d. $\frac{b}{a}$: é igual à soma das raízes da equação com "sinal trocado".

$\frac{c}{a}$: é igual à soma das raízes da equação com "sinal trocado".

$\frac{d}{a}$: é igual ao produto das raízes com o "sinal trocado".

ATIVIDADE 3

Já vimos que uma equação polinomial de grau 3: **$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$** pode ser escrita da forma:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

E também que, se essa equação tiver como raízes , ela pode ser fatorada e escrita na forma:

$$(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) = 0$$

Efetuando as multiplicações indicadas e ordenando os resultados, obtemos a forma equivalente:

$$x^3 - \underbrace{(r_1 + r_2 + r_3)}_{s_1}x^2 + \underbrace{(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)}_{S_2}x - \underbrace{(r_1r_2r_3)}_{p} = 0$$

onde $s_1 = r_1 + r_2 + r_3$ é a soma das raízes, $s_2 = r_1 \cdot r_2 + r_1\, r_3 + r_2 \cdot r_3$ é a soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas e $P = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ é a soma dos produtos das raízes tomadas três a três, ou seja, é o produto das raízes.

Se uma equação polinomial de grau 3 tem como raízes –2, 3 e 4, calcule $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$ e **P**.

a. Escreva a equação na forma fatorada.

b. Aplicando a propriedade distributiva e eliminando os parênteses na equação do item anterior, qual será a forma final da equação obtida?

Resolução:

a. $S_1 = r_1 + r_2 + r_3 = -2 + 3 + 4 = 5$

$S_2 = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 4 = -6 - 8 + 12 = -2$

$P = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -2 \cdot 3 \cdot 4 = -24$

b. $(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

c. $x^3 - 5\,x^2 - 2x + 24 = 0$

ATIVIDADE 4

Uma equação polinomial de grau 3 tem como raízes 2, 3 e 5. Escreva essa equação na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Resolução:

$$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 = 2 + 3 + 5 = 10$$

$$S^2 = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 =$$

$$= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 =$$

$$= 6 + 10 + 15 = 31$$

$$P = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Equação: $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$

ATIVIDADE 5

Escreva na forma fatorada uma equação algébrica de grau 4 cujas raízes são:

a. 2, 3, 4 e 5;

b. –2, 3, 4 e –5;

c. 1, 0, 3 e 7.

Resolução:

a. $(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) \cdot (x - 5) = 0$

b. $(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) \cdot (x + 5) = 0$

c. $(x - 1) \cdot x \cdot (x - 3) \cdot (x - 7) = 0$

ATIVIDADE 6

Escreva todas as equações da Atividade 5, na forma: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Para isso faça as multiplicações que forem indicadas.

Resolução:

Da equação: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, vamos dividir todos os coeficientes por a, então temos:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$$

onde:

$$\frac{b}{a} = -(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$$

$$\frac{c}{a} = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4 + r_3 \cdot r_4$$

$$\frac{d}{a} = -(r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_3 \cdot r_4)$$

$$\frac{e}{a} = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4$$

Aplicando aos itens da atividade anterior, teremos:

a. Calculando as somas das raízes tomadas 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3 e 4 a 4, temos

$S_1 = -(2 + 3 + 4 + 5) = -14$

$S_2 = (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5) = (6 + 8 + 10 + 12 + 15 + 20) = 71$

$S_3 = -(2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5) = -(24 + 30 + 40 + 60) = -154$

$S_4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

A equação cujas raízes são: 2, 3, 4 e 5 será dada por: $x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$

b. Da mesma maneira, temos:

$S_1 = -(-2 + 3 + 4 - 5) = 0$

$S_2 = (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-5) + 3 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot (-5) =$

$= (-6) + (-8) + 10 + 12 + (-15) + (-20) = -27$

$S_3 = -((-2) \cdot 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 + (-5) + (-2) \cdot 4 \cdot (-5) + 3 \cdot 4 \cdot (-5)) =$

$= -((-24) + 30 + 40 + (-60)) = -(-14) = 14$

$S_4 = (-2) \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-5) = 120$

A equação cujas raízes são: -2, 3, 4 e -5 será dada por: $x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 =$

c. Efetuando os cálculos temos:

$S_1 = -(1 + 0 + 3 + 7) = -11$

$S_2 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 3 + 7 + 21 = 31$

$S_3 = -(1 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 7 + 0 \cdot 3 \cdot 7) = -21$

$S_4 = 1 \cdot 0 \cdot 3 \cdot 7 = 0$

A equação cujas raízes são: 1, 0, 3 e 7 será dada por: $x^4 - 11x^3 + 71x^2 - 21x = 0$

ATIVIDADE 7

Dada a equação polinomial $x^3 - 8x^2 + kx - 24 = 0$, responda:

a. Quais são as possíveis raízes inteiras da equação?

b. Se a equação tiver duas raízes simétricas, qual será a terceira raiz?

c. Se uma das raízes for o inverso da outra, qual será a terceira raiz?

d. É possível que a equação tenha uma raiz nula?

Resolução:

a. Observando os coeficientes, concluímos que 24 é igual ao produto das três raízes. Logo, os divisores de 24 são possíveis raízes inteiras da equação, ou seja, $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12$ e ±24. Naturalmente, dependendo do valor de **k,** tal equação pode não admitir qualquer um desses divisores como raiz; o que se pode afirmar é precisamente o fato de que, se houver raiz inteira, ela terá de ser um dos divisores de 24.

b. Como a soma das raízes simétricas é zero e a soma das três raízes é 8, então a terceira raiz deverá ser igual a 24.

c. Como o produto das duas raízes inversas é igual a 1 e o produto das três raízes é 24, então a terceira raiz deverá ser igual a 24.

d. Não é possível que a equação tenha raiz nula, pois, nesse caso, o produto das raízes seria zero, e já vimos que o produto das raízes é igual a 24.

ATIVDADE 8

Considere a equação polinomial $3x^4 - 12x^3 + kx^2 - 6x + 3 = 0$

a. Quais são as possíveis raízes inteiras da equação?

b. Quais são os valores de **k** que fazem com que a equação proposta tenha raízes inteiras?

Resolução:

a. Dividindo os coeficientes da equação por 3, que é o coeficiente do termo de maior grau, obtemos a equação equivalente (com as mesmas raízes) expressa na forma:

$$x^4 - 4x^3 + \frac{k}{3}x^2 - 2x + 1 = 0$$

Comparando com a forma $x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$, concluímos que o produto das raízes da equação é igual a $S_4 = 1$. Logo, as possíveis raízes inteiras da equação são os divisores de 1, ou seja, +1 ou –1.

b. Para que a equação tenha raízes inteiras, ou seja, para que ela tenha +1 ou –1 como raízes, quando substituirmos os valores de **x** por +1 ou por –1 no primeiro membro da equação, o resultado deve ser igual ao segundo membro, ou seja, zero.

Para x = 1, temos

$$1^4 - 4 \cdot 1^3 + \frac{k}{3} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$$

ou seja, k = 12

Para x = –1, temos:

$$(-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 + \frac{k}{3} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1$$

ou seja, k = 24

ATIVIDADE 9

Sabendo que 1 é raiz da equação $x^3 + 7x^2 + kx - 15 = 0$, determine o valor de **k** e encontre as outras raízes.

Como 1 é raiz, substituindo **x** por 1 devemos ter a igualdade verdadeira, logo, 1 + 7 + k – 15 = 0, e então k = 7.

Como a soma das três raízes é igual a –7, sendo uma delas igual a 1, a soma das outras duas deve ser igual a –8.

Como o produto das três raízes é igual a 15, sendo uma delas igual a 1, o produto das outras duas é igual a 15.

Logo, além da raiz dada $r_1 = 1$, as outras duas raízes da equação são tais que sua soma é –8 e seu produto é 15, elas são portanto, as raízes da equação de segundo grau $x^2 + 8x + 15 = 0$.

Resolvendo tal equação, obtemos $r_2 = -3$ e $r_3 = -5$.

Concluímos que a equação proposta no enunciado tem como raízes os números reais 1, –3 e –5.

Observação:

Outras atividades como as anteriores podem ser propostas, mas lembramos que não interessa tanto, nesse caso, a realização de muitos cálculos, quanto, por exemplo, a percepção do fato de que, conhecendo uma raiz da equação, é possível reduzi-la a uma equação mais simples, ou seja, a pesquisa sobre as possíveis raízes inteiras pode resultar na solução da equação.

Equações e polinômios: divisão por x – k e redução do grau de uma equação polinomial.

Como se sabe, um polinômio de grau **n** é uma expressão algébrica do tipo:

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$,com $a_0 \neq 0$

Então, uma equação algébrica também pode ser chamada uma equação polinomial, uma vez que ela pode ser escrita na forma P(x) = 0, sendo P(x) um polinômio.

Dessa forma, se o valor de P(x) para x = k, que indicaremos por P(k), for igual a zero, ou seja P(k) = 0, então isso significa que **k** é uma raiz da equação polinomial P(x) = 0.

Sendo $P_1(x)$ um polinômio e $P_2(x)$ outro polinômio, podemos ter o caso de $P_1(x) = P_2(x)$ para alguns valores particulares de x e $P_1(x) \neq P_2(x)$ para outros valores de x.

Por exemplo:

$P_1(x) = x^2 + 3x - 1$ e $P_2(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 13$, então temos:

$P_1(2) = 9$ e $P_2(2) = 9$, mas $P_1(0) = -1$ e $P_2(0) = 13$

Quando dois polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são tais que, para todos os valores possíveis para x, temos $P_1(x) = P_2(x)$, então dizemos que os polinômios são idênticos, e escrevemos $P_1(x) = P_2(x)$.

Sendo $P_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}x + \ldots + a_n$ um polinômio de grau n e $P_2(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + b_3x^{m-3} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$ outro polinômio de grau m, para termos $P_1(x) = P_2(x)$, ou seja, para os dois polinômios serem iguais para todos os valores de x, tal como, $a_n = b_m$, pois $a_n = P_1(0)$ e $b_m = P_2(0)$ Podemos mostrar que a igualdade entre os dois polinômios para todos os valores de x obriga a igualdade de todos os coeficientes dos termos de mesmo grau, ou seja:

$a_n = b_m$; $a_{n-1} = b_{m-1}$; $a_{n-2} = b_{m-2}$, e assim por diante.

Em consequência, dois polinômios idênticos devem ser sempre do mesmo grau, uma vez que, se forem de graus diferentes, os coeficientes dos termos de maior grau serão distintos (um deles é zero e o outro, diferente de zero).

Por exemplo, podemos ter $P_1(x) = x^2 + 3x - 1$ e $P_2(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 13$ iguais para alguns valores de x, ou seja, não é verdade que $P_1(x) = P_2(x)$, nesse caso, pois os termos de grau 3 são distintos (1 em $P_2(x)$) e 0 em $P_1(x)$).

Operações com polinômios.

Para somar, subtrair e multiplicar polinômios, basta operar com as expressões algébricas que compõem suas parcelas, que são os monômios. Assim, é necessário realizar as operações indicadas, recorrendo à propriedade distributiva, quando for o caso, e reunir os termos que correspondem a potências de **x** de mesmo grau (chamados "termos semelhantes").

ATIVIDADE 1

Considere os polinômios $A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

a. Calcule A(1) e B(1)

b. Calcule **x** para que A(x) = 0

c. Se **a**, **b** e **c** forem raízes de B(x), quanto é o produto de $a \cdot b \cdot c$?

d. É possível termos A(x) = B(x)?

e. É possível termos $A(x) \equiv B(x)$

Resolução:

a. $A(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 \Rightarrow A(1) = 0$

$B(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = B(1) = -2$

b. $A(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

c. O produto das raízes (a, b e c) do polinômio B(x) é –2.

d. Sim, é possível.

Resolvendo a equação algébrica A(x) = B(x), temos: $x^2 - 3x + 2 = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$; logo, Fatorando, obtemos $x \cdot x \cdot (x - 3) = 0$, portanto, para o produto ser nulo, um dos fatores deve ser nulo, ou seja, ou x = 0, ou x = 0 (0 é uma raiz dupla), ou então x = 3. Logo, a equação A(x) = B(x) tem como raízes 0 e 3. Para todos os valores de **x** diferentes de 0 e de 3, os polinômios A(x) e B(x) assumem valores distintos.

e. Não. Os polinômios têm graus diferentes. Em consequência, os coeficientes de x^3 são diferentes em A(x) e B(x).

ATIVIDADE 2

Considere os polinômios $A(x) = x^3 - 3x + 2$ e $B(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10$.

a. É possível termos A(x) = B(x)?

b. É possível termos A(x) B(x)?

Resolução:

a. Sim. Basta resolver a equação correspondente: $x^3 - 3x + 2 = x^3 - 2x^2 - 3x + 10$. Efetuando os cálculos, obtemos: $2x^2 = 8$ e então, $x = \pm 2$.

b. Não, pois os coeficientes de x^2 são diferentes nos dois polinômios.

ATIVIDADE 3

Considere os polinômios:

$P_1(x) = ax^5 - 11x^4 - 2x^3 + 7x^2 + bx + d$

$P_2(x) = bx^5 + bx^4 + cx^3 - 2x^3 + 7x^2 - \sqrt{3}x + d$

a. Determine os valores de **a**, **b** e **c**, de modo que os polinômios sejam idênticos.

b. Calcule o valor de **d,** sabendo que –1 é raiz da equação $P_1(x) = 0$.

Resolução:

a. Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau, temos:

b. Se ¬1 é raiz da equação P_1 (x) =0, então devemos ter P_1 (x) =0. Logo, substituindo **x** por –1, e igualando o resultado a zero, obtemos:

$$-\sqrt{3} \cdot (-1)^5 - 11 \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 - \sqrt{3} \cdot (-1) + d = 0$$

Concluímos, efetuando os cálculos, que $d = 2 - 2\sqrt{3}$

ATIVIDADE 4

Considere o polinômio:

a. Mostre que $x = 1$ é raiz da equação $P(x) = 0$

b. Calcule o quociente da divisão de $P(x)$ pelo binômio $x - 1$.

Resolução:

a. Basta substituir **x** por 1 em $P(x)$ e verificar que o resultado é zero, ou seja, que temos $P(1) = 0$. Isso significa que $P(x)$ pode ser fatorado e apresenta $x - 1$ como um fator, ou seja, é divisível por $x - 1$. Podemos, então, escrever:

$P(x) \equiv (x - 1) \cdot Q(x)$ sendo $Q(x)$ o quociente da divisão de $P(x)$ por $x - 1$.

b. O quociente da divisão será um polinômio de grau 4, podendo ser escrito na forma geral $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Devemos ter a identidade:

$3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12 \equiv (x - 1) \cdot (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$.

Efetuando as operações indicadas no segundo membro, obtemos:

$3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12 \equiv ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e$

Agrupando os termos semelhantes do segundo membro, obtemos:

$$3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12$$

$$\equiv$$

$$\overbrace{a}x^5 + \overbrace{(b - a)}x^4 + \overbrace{(c - b)}x^3 + \overbrace{(d - c)}x^2 + \overbrace{(e - d)}x - \overbrace{e}$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau nos dois membros da identidade temos:

$$3 = a$$
$$-2 = b - a$$
$$5 = c - b$$
$$-11 = d - c$$
$$-7 = e - d$$
$$12 = -e$$

Logo concluímos que $a = 3$, $b = 1$, $c = 6$, $d = -5$, $e = -12$ e, em consequência, $Q(x) = 3x^4 + x^3 + 6x^2 - 5x - 12$

Assim, para resolver a equação $P(x) = 0$, sabendo que uma de suas raízes é $x = 1$, obtemos o quociente de $P(x)$ por $x - 1$, chegando ao quociente $Q(x)$; as demais raízes de $P(x) = 0$ são as raízes de $P(x) = 0$ são as raízes da equação $Q(x) = 0$.

Reduzindo o grau da equação. Divisão por (x – k)

Na equação $2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$ podemos descobrir que uma possível raiz utilizando os conceitos apresentados, primeiro dividimos a equação toda pelo "coeficiente a", que resulta em: , resultando $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$, o que nos leva a supor que uma de suas raízes seria um de seus divisores (–1, 1, –2, 2) e por verificação podemos chegar nos números (–2, –1, 1), pois:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$(-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 2 = 0$$

$$10 - 10 = 0$$

Do mesmo modo podemos verificar que -1 e 1 também satisfazem a igualdade, sendo assim raízes da equação.

Podemos escrever, então, que o polinômio $P(x) = 2x^3 + 4x - 2x - 4$" tem uma de suas raízes –2 , pois, $P(-2) = 0$, ou seja, substituindo o valor – 2 na variável x, verificamos que a igualdade se estabelece.

Ampliando essa ideia, podemos dizer que se um polinômio P(x) tem como raiz o número k, então a divisão de P(x) por (x – k) dá resto zero, além de obtermos uma equação (Quociente da divisão) com grau menor que P(x).

$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4; [x - (-2)]$

$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4; (x+2)$

$$\begin{array}{lll|l}
2x^3 + 4x^2 & -2x - 4 & & x + 2 \\ \cline{4-4}
-2x^3 - 4x^2 & & & 2x^2 - 2 \\ \cline{1-1}
0 \quad 0 & -2x - 4 & & \\
 & +2x + 4 & & \\ \cline{2-2}
 & 0 & &
\end{array}$$

ATIVIDADE 5

Agora descubra as raízes das seguintes equações polinomiais:

a. $x^3 + x - 10 = 0$

b. $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c. $8 + x^3 = 0$

Resolução:

a. O número 10 tem como divisores (±1;±2;±5;±10) sendo qualquer um desses divisores uma de suas possíveis raízes.

Teste de raízes do polinômio: $x^3 + x - 10$

Para x=1

$1^3 + 1 - 10 = 0$

1 + 1 – 10 = 0

–8 ≠ 0

∴não é raiz

Para x=5

$5^3 + 5 - 10 = 0$

125 + 5 – 10 = 0

120 ≠ 0

∴não é raiz

Dividindo o polinômio por (x-raiz) = (x – 2); teremos:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \cancel{x^3} + x - 10 & x - 2 \\ \cline{3-3}
- & (\cancel{x^3} - 2x^2) & x^2 - 2x + 5 \\ \cline{1-2}
 & -\cancel{2x^2} + x - 10 & \\
- & (-\cancel{2x^2} + 4x) & \\ \cline{1-2}
 & \cancel{5x} - \cancel{10} & \\
 & -(\cancel{5x} - \cancel{10}) & \\ \cline{1-2}
 & 0x+0 &
\end{array}
$$

Encontrando as raízes da equação quociente:

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$a = 1; b = -2; c = 5$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Como não existem raízes reais para a equação quociente, concluímos que a única raiz do Polinômio é 2.

b. Como o polinômio não possui termo independente, conclui-se que uma de suas raízes é zero. Dividindo o polinômio por (x – raiz) = (x – 0), teremos:

$$
\begin{array}{rrr|l}
\cancel{x^3} & -5x^2 & +6x & x \\ \cline{4-4}
-(\cancel{x^3}) & & & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{1-3}
 & -\cancel{5x^2} & +6x & \\
 & -(-\cancel{5x^2}) & & \\ \cline{1-3}
 & & \cancel{6x} & \\
 & & -\cancel{6x} & \\ \cline{1-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

Encontrando as raízes da equação quociente temos:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$a = 1; b = -5; c = 6$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x' = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x'' = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

As raízes do polinômio $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$; são (0, 2, 3)

c. Neste caso a única raiz do polinômio é –2, pois $x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$

Algoritmo de Briot – Ruffini

Uma das maneiras de se obter o quociente de um polinômio por um binômio, seria a aplicação do algoritmo de Briot – Rufini, cujas características principais são destacadas a seguir:

Tomando-se como exemplo, calcularemos o quociente de $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x - 46$ pelo binômio $x - 2$.

Sendo $Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$:

- O coeficiente **a** é igual ao coeficiente de $\mathbf{x^5}$ em P(x): **a = 3**
- O coeficiente **b** é obtido somando-se ao coeficiente de $\mathbf{x^4}$ em P(x) o produto de 2 por a: **b = –2 + 2a**;
- O coeficiente **c** é obtido somando-se ao coeficiente de $\mathbf{x^3}$ em P(x) o produto de 2 por b: **c = 5 + 2b**;

- O coeficiente **d** é obtido somando-se ao coeficiente de $\mathbf{x^2}$ em P(x) o produto de 2 por e: **d = –11 + 2c**;
- O coeficiente **d** é obtido somando-se ao coeficiente de $\mathbf{x^1}$ em P(x) o produto de 2 por e: **d = –11 + 2c**;

Esses cálculos podem ser organizados no algoritmo seguinte, conhecido como algoritmo de Briot-Rufini, para a divisão de um polinômio por um binômio da forma x – k.

Coeficientes de P(x)

	3	–2	5	–11	–7	–46
Raiz 2		$3 \cdot 2$	$4 \cdot 2$	$13 \cdot 2$	$15 \cdot 2$	$23 \cdot 2$
	3	4	13	15	23	0

Resto da divisão

Coeficientes de Q(x)

$$Q(x) = 3x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 15x + 23$$

ATIVIDADE 6

a. Para verificar o entendimento do conteúdo apresentado, construa o algoritmo de Briot--Rufini para determinar o quociente de $P(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x + 57$ por $x - 3$.

b. Calcule o resto da divisão de $P(x) = 3x^5 + x^4 + 3x^3 - 7x + \pi$ pelo binômio $x + 3$.

Resolução:

a.

Coeficientes de P(x)

	1	-2	-7	3	8	57
Raiz 3		$1 \cdot 3$	$1 \cdot 3$	$-4 \cdot 3$	$-9 \cdot 3$	$-19 \cdot 3$
	1	1	-4	-9	-19	0

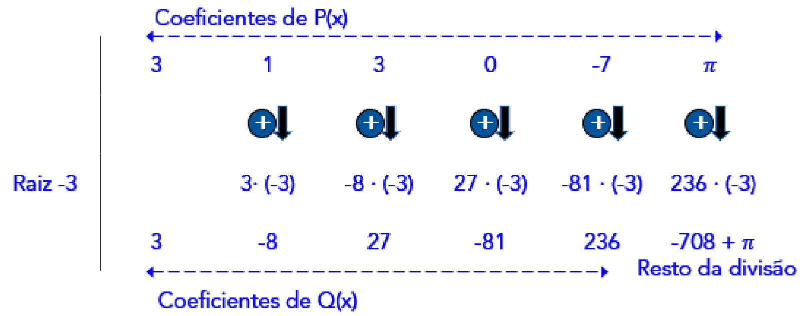
Resto da divisão

Coeficientes de Q(x)

$$Q(x) = 1x^4 + 1x^3 - 4x^2 - 9x - 19$$

Fonte: Elaborada pelos autores.

b.



$Q(x) = 3x^4 - 8x^3 - 27x^2 - 81x + 236$

Fonte: Elaborada pelos autores

ATIVIDADE 7

Responda às seguintes questões:

a. Mostre que a equação $2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$ apresenta raízes inteiras.

b. Resolva a equação do item anterior.

Resolução:

a. Dividindo os coeficientes por 2, obtemos a equação equivalente:

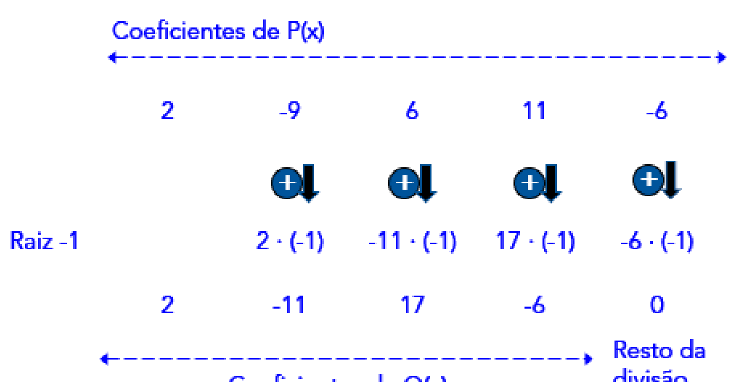
$$x^4 - \frac{9}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{11}{2}x - 3 = 0$$

Escrita nessa forma, já vimos que os divisores de –3 serão possíveis raízes inteiras, pois esse coeficiente representa o produto das raízes da equação. Calculando os valores numéricos do polinômio do primeiro membro da equação para $x = \pm 1$ e $x = \pm 3$, concluímos que –1 e 3 são raízes da equação dada.

b. A equação dada é, portanto, equivalente à equação:

Para encontrar o trinômio $mx^2 + nx + p$, e descobrir as outras raízes da equação, basta dividir o polinômio do primeiro membro sucessivamente por $(x + 1)$ e $(x - 3)$, conforme indicamos a seguir:

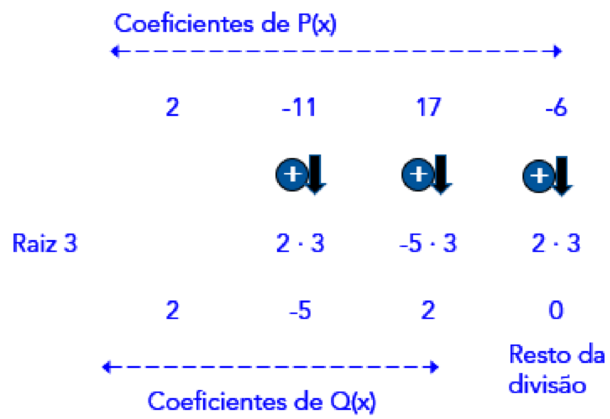
$2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6 \equiv (x - 1) \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d)$



$Q(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$

$$2x^4 - 9x^3 + 6\,x^2 + 11x - 6 \equiv (x + 1) \cdot (2x^3 - 11x^2 + 17x - 6)$$

Dividindo-se agora $Q_1(x)$ por $(x - 3)$,obtemos $Q_2(x)$:



$$Q(x) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$(2\,x^3 - 11x^2 + 17x - 6) \equiv (x - 3) \cdot (2x^2 - 5x + 2)$$

Sendo assim, concluímos que:

$$2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6 \equiv (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (2x^2 - 5x + 2)$$

Resolvendo a equação de 2º grau $2x^2 - 5x + 2 = 0$, obtemos as raízes: $r_3 = 2$ e $r_4 = \frac{1}{2}$

Logo, as raízes da equação dada inicialmente são:

$$r_1 = -1, r_2 = 3, r_3 = 2 \text{ e } r_4 = \frac{1}{2}$$

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

COORDENADORIA PEDAGÓGICA – COPED

Coordenador
Caetano Pansani Siqueira

Diretora do Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica – DECEGEP
Viviane Pedroso Domingues Cardoso

Diretora do Centro de Ensino Médio – CEM
Ana Joaquina Simoes Sallares de Mattos Carvalho

Diretora do Centro de Anos Finais do Ensino Fundamental – CEFAF
Patrícia Borges Coutinho da Silva

ÁREA DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
BIOLOGIA
Aparecida Kida Sanches – Equipe Curricular de Biologia; Beatriz Felice Ponzio – Equipe Curricular de Biologia; Airton dos Santos Bartolotto – PCNP da D.E. de Santos; Evandro Rodrigues Vargas Silverio – PCNP da D.E. de Apiaí; Ludmila Sadokoff – PCNP da D.E. de Caraguatatuba; Marcelo da Silva Alcantara Duarte – PCNP da D.E. de São Vicente; Marly Aparecida Giraldelli Marsulo – PCNP da D.E. de Piracicaba; Paula Aparecida Borges de Oliveira – PCNP da D.E. Leste 3.

FÍSICA
Carolina dos Santos Batista Murauskas – Equipe Curricular de Física; Fabiana Alves dos Santos – Equipe Curricular de Física; Ana Claudia Cossini Martins – PCNP D.E. José Bonifácio; Carina Emy Kagohara – PCNP D.E. Sul 1; Debora Cintia Rabello – PCNP D.E. Santos; Dimas Daniel de Barros – PCNP D.E. São Roque; Jefferson Heleno Tsuchiya – PCNP D.E. Sul 1; Jose Rubens Antoniazzi Silva – PCNP D.E. Tupã; Juliana Pereira Thomazo – PCNP D.E. São Bernardo do Campo; Jussara Alves Martins Ferrari – PCNP D.E. Adamantina; Sara dos Santos Dias – PCNP D.E. Mauá; Thaís de Oliveira Muzel – PCNP D.E. Itapeva; Valentina Aparecida Bordignon Guimarães – PCNP DE Leste 5.

QUÍMICA
Alexandra Fraga Vazquez – Equipe Curricular de Química; Regiane Cristina Moraes Gomes - Equipe Curricular de Química; Cristiane Marani Coppini – PCNP D.E. São Roque; Gerson Novais Silva – PCNP D.E. São Vicente; Laura Camargo de Andrade Xavier – PCNP D.E. Registro; Natalina de Fatima Mateus – PCNP D.E. Guarulhos Sul; Wilian Guirra de Jesus – PCNP D.E. Franca; Xenia Aparecida Sabino – PCNP D.E. Leste 5.Revisão Conceitual (Área de Ciências da Natureza): Edson Grandisoli.

ÁREA DE CIÊNCIAS HUMANAS
GEOGRAFIA
Andreia Cristina Barroso Cardoso – SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia; Mariana Martins Lemes - SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia; Milene Soares Barbosa - SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia; Sergio Luiz Damiati – SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia; André Baroni – PCNP da D.E. Ribeirão Preto; Alexandre Cursino Borges Junior – PCNP da D.E. Guaratinguetá; Beatriz Michele Moco Dias – PCNP da D.E. Taubaté; Bruna Capoia Trescenti – PCNP da D.E Itu; Camilla Ruiz Manaia – PCNP da D.E. Taquaritinga; Cleunice Dias de Oliveira – PCNP da D.E. São Vicente; Cristiane Cristina Olimpio – PCNP da D.E. Pindamonhangaba; Daniel Ladeira Almeida – PCNP da D.E. São Bernardo do Campo; Dulcinea da Silveira Ballestero – PCNP da D.E. Leste 5; Elizete Buranello Perez – PCNP da D.E. Penápolis; Maria Julia Ramos Sant'Ana – PCNP da D.E Adamantina; Marcio Eduardo Pedrozo – PCNP da D.E. Americana; Patricia Silvestre Águas – PCNP da D.E. Piraju; Regina Célia Batista - PCNP da D.E. Piraju; Roseli Pereira de Araújo - PCNP da D.E. Bauru; Rosenei Aparecida Ribeiro Liborio – PCNP da D.E. Ourinhos; Sandra Raquel Scassola Dias - PCNP da D.E. Tupã; Sheila Aparecida Pereira de Oliveira – PCNP da D.E. Leste 2;Shirley Schweizer – PCNP da D.E. Botucatu; Simone Regiane de Almeida Cuba – PCNP da D.E. Caraguatatuba; Telma Riggio – PCNP da D.E. Itapetininga; Viviane Maria Bispo – PCNP da D.E. José Bonifácio.

FILOSOFIA
1º BIMESTRE - 2ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); Erica C. Frau (PCNP da DRE Campinas Oeste). 3ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); Erica C. Frau (PCNP da DRE Campinas Oeste). 2º BIMESTRE - 2ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); Erica C. Frau (PCNP da DRE Campinas Oeste). 3ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); Erica C. Frau (PCNP da DE Campinas Oeste). Organização e revisão: 2ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); 3ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC). Revisão Conceitual: Joelza Ester Domingues.

HISTÓRIA
1º BIMESTRE - 2ª SÉRIE: Viviane Pedroso Domingues Cardoso (COPED – SEDUC). 3ª SÉRIE: Clarissa Bazzanelli Barradas (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC). 2º BIMESTRE - 2ª SÉRIE: Clarissa Bazzanelli Barradas (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC); Tadeu Pamplona Pagnossa – PCNP da D.E. de Guaratinguetá. 3ª SÉRIE: Clarissa Bazzanelli Barradas (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC); Rodrigo Costa Silva – PCNP da D.E. de Assis. Organização e revisão: Clarissa Bazzanelli Barradas (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC); Edi Wilson Silveira (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC); Viviane Pedroso Domingues Cardoso (COPED – SEDUC). Revisão Conceitual: Joelza Ester Domingues.

SOCIOLOGIA
Emerson Costa, Marcelo Elias de Oliveira – SEDUC/COPED/CEM - Equipe Curricular de Ciências Humanas; Ilana Henrique dos Santos – PCNP de Sociologia - D.E. Leste 1. Revisão: Emerson Costa, Marcelo Elias de Oliveira – SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas; Ilana Henrique dos Santos – PCNP de Sociologia - D.E. Leste 1. Organização: Emerson Costa, Marcelo Elias de Oliveira – SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas.

ÁREA DE LINGUAGENS
ARTE
Carlos Eduardo Povinha – Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC; Daniela de Souza Martins Grillo - Equipe Curricular de Arte/SEDUC/COPED; Eduardo Martins Kebbe – Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC; Evania Rodrigues Moraes Escudeiro - Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC; Adriana Marques Ursini Santás - PCNP da D.E Santos; Ana Maria Minari de Siqueira – PCNP da D.E. São José dos Campos; Debora David Guidolin – PCNP da D.E. Ribeirão Preto; Djalma Abel Novaes – PCNP da D.E. Guaratinguetá; Eliana Florindo – PCNP da D. E. Suzano; Elisangela Vicente Prismit – PCNP da D.E. Centro Oeste; Madalena Ponce Rodrigues – PCNP da D.E. Botucatu; Marilia Marcondes de Moraes Sarmento e Lima Torres – PCNP da D. E. São Vicente; Patricia de Lima Takaoka - PCNP da D.E Caraguatatuba; Pedro Kazuo Nagasse – PCNP da D. E. Jales; Renata Aparecida de Oliveira dos Santos – PCNP da D.E. Caieiras; Roberta Jorge Luz – PCNP da D. E. Sorocaba; Rodrigo Mendes – PCNP da D.E. Ourinhos; Silmara Lourdes Truzzi – PCNP da D.E. Marília; Sonia Tobias Prado - PCNP da D.E Lins.

EDUCAÇÃO FÍSICA
Elaboração: Luiz Fernando Vagliengo - Equipe Curricular de Educação Física; Marcelo Ortega Amorim - Equipe Curricular de Educação Física; Mirna Léia Violin Brandt - Equipe Curricular de Educação Física; Sandra Pereira Mendes - Equipe Curricular de Educação Física; Adriana Cristina David Pazian - PCNP da DE São Carlos; Diego Diaz Sanchez - PCNP da DE Guarulhos Norte; Érika Porrelli Drigo - PCNP da DE Capivari; Felipe Augusto Lucci- PCNP da DE Itu; Flavia Naomi Kunihira Peixoto - PCNP da DE Suzano; Gislaine Procópio Querido- PCNP da DE São Roque; Isabela Muniz dos Santos Cáceres -PCNP da DE Votorantim; Janice Eliane Ferreira Bracci - PCNP da DE José Bonifácio; Joice Regina Simões - PCNP da DE Campinas Leste; Jose Carlos Tadeu Barbosa Freire - PCNP da DE Bragança Paulista; Katia Mendes Silva - PCNP da DE Andradina; Lígia Estronioli de Castro- PCNP da DE Bauru; Meire Grassmann Guido Estigaribia - PCNP da DE Americana; Nabil José Awad - PCNP da DE Caraguatatuba; Neara Isabel de Freitas Lima- PCNP da DE Sorocaba; Roseane Minatel de Mattos - PCNP da DE Adamantina; Sueli Aparecida Galante - PCNP da DE Sumaré; Tiago Oliveira dos Santos- PCNP da DE Lins; Thaisa Pedrosa Silva Nunes- PCNP da DE Tupã. Revisão: Luiz Fernando Vagliengo - Equipe Curricular de Educação Física. Marcelo Ortega Amorim - Equipe Curricular de Educação Física; Mirna Léia Violin Brandt - Equipe Curricular de Educação Física; Sandra Pereira Mendes - Equipe Curricular de Educação Física. 2 série: Érika Porrelli Drigo - PCNP da DE Capivari; Meire Grassmann Guido Estigaribia - PCNP da DE Americana. 3 série: Janice Eliane Ferreira Bracci - PCNP da DE José Bonifácio; Neara Isabel de Freitas Lima- PCNP da DE Sorocaba.

INGLÊS
Catarina Reis Matos da Cruz – PCNP da DE Leste 2; Cíntia Perrenoud de Almeida – PCNP da DE Pindamonhangaba; Eliana Aparecida Burian – Professor PEB II da DE Norte 2; Emerson Thiago Kaishi Ono – COPED – CEM – LEM; Gilmara Aparecida Prado Cavalcante – PCNP da DE Mauá; Jucimeire de Souza Bispo – COPED – CEFAF – LEM; Liana Maura Antunes da Silva Barreto – COPED – CEFAF – LEM; Luiz Afonso Baddini – Professor PEB II da DE Santos; Marisa Mota Novais Porto – PCNP da DE Carapicuíba; Nelise Maria Abib Penna Pagnan – PCNP da DE Centro-Oeste; Pamella de Paula da Silva Santos – COPED – CEM – LEM; Renata Andreia Placa Orosco de Souza – PCNP da DE Presidente Prudente; Rosane de Carvalho – PCNP da DE Adamantina; Sérgio Antonio da Silva Teressaka – PCNP da DE Jacareí; Viviane Barcellos Isidorio – PCNP da DE São José dos Campos; Vlademir Oliveira Ismael – PCNP da DE Sul 1.

LÍNGUA PORTUGUESA
Alessandra Junqueira Vieira Figueiredo; Alzira Maria Sa Magalhaes Cavalcante; Andrea Righeto; Cristiane Alves de Oliveira; Daniel Carvalho Nhani; Daniel Venancio; Danubia Fernandes Sobreira Tasca; Eliane Cristina Goncalves Ramos; Igor Rodrigo Valerio Matias; Jacqueline da Silva Souza; Joao Mario Santana; Katia Alexandra Amancio Cruz; Leticia Maria de Barros Lima Viviani; Lidiane Maximo Feitosa; Luiz Fernando Biasi; Marcia Regina Xavier Gardenal; Martha Wassif Salloume Garcia; Neuza de Mello Lopes Schonherr; Patricia Fernanda Morande Roveri; Reginaldo Inocenti; Rodrigo Cesar Goncalves; Shirlei Pio Pereira Fernandes; Sonia Maria Rodrigues; Tatiana Balli; Valquiria Ferreira de Lima Almeida; Viviane Evangelista Neves Santos; William Ruotti Organização, adaptação/elaboração parcial e validação Katia Regina Pessoa; Leandro Henrique Mendes; Mary Jacomine da Silva; Mara Lucia David; Marcos Rodrigues Ferreira; Teonia de Abreu Ferreira.

MATEMÁTICA
Isaac Cei Dias – Equipe Curricular de Matemática; João dos Santos Vitalino – Equipe Curricular de Matemática; Marcos José Traldi – Equipe Curricular de Matemática; Otávio Yoshio Yamanaka – Equipe Curricular de Matemática; Rafael José Dombrauskas Polonio – Equipe Curricular de Matemática; Sandra Pereira Lopes – Equipe Curricular de Matemática; Vanderley Aparecido Cornatione – Equipe Curricular de Matemática; Lilian Silva de Carvalho – PCNP da D.E. de São Carlos; Marcelo Balduíno – PCNP da D.E. Guarulhos Norte; Maria Regina Duarte Lima – PCNP da D.E. José Bonifácio; Simone Cristina do Amaral Porto –PCNP da D.E. Guarulhos Norte; Talles Eduardo Nazar Cerizza – PCNP da D.E. Franca; Willian Casari de Souza – PCNP da D.E. Araçatuba.

PROJETO DE VIDA
Bruna Waitman Santinho – SEDUC/ COPED/ Assessora da Educação Integral; Cassia Moraes Targa Longo – SEDUC/ COPED/ CEM/ PEI; Claudia Soraia Rocha Moura - SEDUC/ COPED/CEM/ PEI; Helena Claudia Soares Achiles - SEDUC/ COPED/DECEGP; Instituto Ayrton Senna Instituto de Corresponsabilidade pela Educação; Instituto PROA Parceiros da Educação – Nadir do Carmo Silva Campelo; Simone Cristina Succi – SEDUC/ EFAPE Walter Aparecido Borges – SEDUC/ EFAPE; Rodiclay Germano – Ilustrações.

Colaboradore(a)s
Andreia Toledo de Lima – PCNP da D.E. Centro Sul; Cristina Inacio Neves – PCNP da D.E. Centro Sul; Elaine Aparecida Giatti – PCNP da D.E. Centro Sul; Lyara Araujo Gomes Garcia – PCNP da D.E. Taubaté; Marcel Alessandro de Almeida – PCNP da D.E. Araçatuba; Patricia Casagrande Malaguetta – PCNP da D.E. Piracicaba; Rosilaine Sanches Martins – PCNP da D.E. Jales; Ruanito Vomieiro de Souza – PCNP da D.E. Fernandópolis; Wanderlei Aparecida Grenchi – PCNP da D.E. São Vicente.

Assessoria Técnica
Alberto da Silva Seguro, Ariana de Paula Canteiro, Bruno Toshikazu Ikeuti, Denise Aparecida Acacio Paulino, Eleneide Gonçalves dos Santos, Inelice Aparecida Fraga Ferreira, Isaque Mitsuo Kobayashi, Márcio Roberto Peres e Vinicius Bueno

Revisão Língua Portuguesa
Lia Suzana de Castro Gonzalez

Impressão e Acabamento
Imprensa Oficial do Estado S/A – IMESP

Projeto Gráfico
Fernanda Buccelli

Diagramação
Beatriz Luanni, Julia Ahmed, Pamela Silva, Raquel Prado, Ricardo Issao Sato e Robson Santos | Tikinet

SÃO PAULO
GOVERNO DO ESTADO

Secretaria da Educação