



GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
Secretaria da Educação

Curriculo em Ação

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

SEGUNDA SÉRIE
ENSINO MÉDIO

CADERNO DO
PROFESSOR

VOLUME
1

Governo do Estado de São Paulo

Governador
João Doria

Vice-Governador
Rodrigo Garcia

Secretário da Educação
Rossieli Soares da Silva

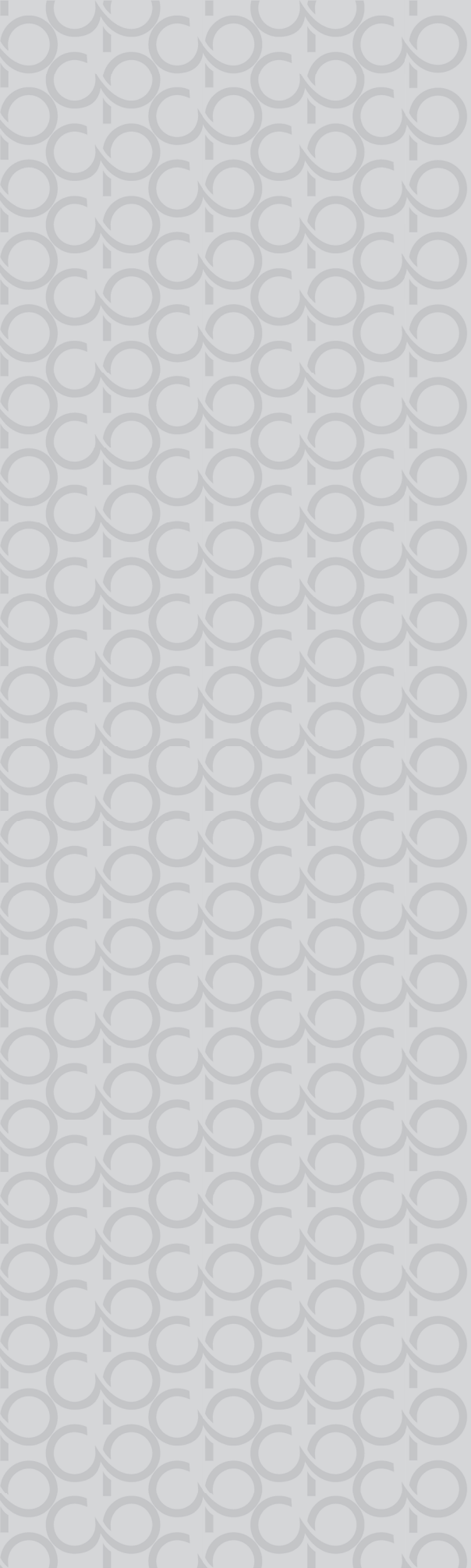
Secretária Executiva
Renilda Peres de Lima

Chefe de Gabinete
Henrique Pimentel Cunha Filho

Coordenador da Coordenadoria Pedagógica
Caetano Pansani Siqueira

Presidente da Fundação para o Desenvolvimento da Educação
Nourival Pantano Junior





Matemática



Sumário

As competências socioemocionais e o desenvolvimento pleno dos estudantes.....	1
Situação de Aprendizagem 1	7
Situação de Aprendizagem 2	28
Situação de Aprendizagem 3	44

AS COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS E O DESENVOLVIMENTO PLENO DOS ESTUDANTES

As competências socioemocionais são definidas como as capacidades individuais que se manifestam de modo consistente em padrões de pensamentos, sentimentos e comportamentos. Ou seja, elas se expressam no modo de sentir, pensar e agir de cada um para se relacionar consigo mesmo e com os outros, para estabelecer objetivos e persistir em alcançá-los, para tomar decisões, para abraçar novas ideias ou enfrentar situações adversas. Elas são maleáveis e quando desenvolvidas de forma intencional contribuem para a aprendizagem e o desenvolvimento pleno dos estudantes.

Além do impacto na aprendizagem, diversos estudos multidisciplinares¹ têm demonstrado que as pessoas com competências socioemocionais mais desenvolvidas apresentam experiências mais positivas e satisfatórias em diferentes aspectos da vida, tais como bem-estar e saúde, relacionamentos, escolaridade e no mercado de trabalho.

QUAIS SÃO AS COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS E COMO ELAS SE ORGANIZAM

Ao longo de 40 anos, foram identificadas e analisadas mais de 160 competências sociais e emocionais. A partir de estudos estatísticos, chegou-se a um modelo organizativo chamado de Cinco Grandes Fatores que agrupa as características pessoais conforme as semelhanças entre si, de forma abrangente e parcimoniosa. A estrutura do modelo é composta por 5 macrocompetências e 17 competências específicas. Estudos em diferentes países² e culturas encontraram essa mesma estrutura, indicando robustez e validade ao modelo.

MACRO COMPETÊNCIA	COMPETÊNCIA	DEFINIÇÃO
Abertura ao novo	Curiosidade para aprender	Capacidade de cultivar o forte desejo de aprender e de adquirir conhecimentos, ter paixão pela aprendizagem.
	Imaginação criativa	Capacidade de gerar novas maneiras de pensar e agir por meio da experimentação, aprendendo com seus erros, ou a partir de uma visão de algo que não se sabia.
	Interesse artístico	Capacidade de admirar e valorizar produções artísticas, de diferentes formatos como artes visuais, música ou literatura.
Resiliência Emocional	Autoconfiança	Capacidade de cultivar a força interior, isto é, a habilidade de se satisfazer consigo mesmo e sua vida, ter pensamentos positivos e manter expectativas otimistas.
	Tolerância ao estresse	Capacidade de gerenciar nossos sentimentos relacionados à ansiedade e estresse frente a situações difíceis e desafiadoras, e de resolver problemas com calma.
	Tolerância à frustração	Capacidade de usar estratégias efetivas para regular as próprias emoções, como raiva e irritação, mantendo a tranquilidade e serenidade.

¹ Para saber mais, acesse Teixeira e Brandão (2021). Benefícios das competências socioemocionais na vida. Disponível em:

<https://institutoayrtonsenna.org.br/content/dam/institutoayrtonsenna/documentos/instituto-ayrton-senna-avaliacao-socioemocional.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2021.

² Para conhecê-los, acesse: Primi et al (2016) Development of an Inventory Assessing Social and Emotional Skills in Brazilian Youth. Disponível em:

https://biblio.ugent.be/publication/7280734/file/7280735.pdf?_ga=2.186746408.1483762967.1636490055-1611021338.1633530040. Acesso em: 16 nov. 2021.

Engajamento com os outros	Entusiasmo	Capacidade de envolver-se ativamente com a vida e com outras pessoas de uma forma positiva, ou seja, ter empolgação e paixão pelas atividades diárias e a vida.
	Assertividade	Capacidade de expressar, e defender, suas opiniões, necessidades e sentimentos, além de mobilizar as pessoas, de forma precisa.
	Iniciativa Social	Capacidade de abordar e se conectar com outras pessoas, sejam amigos ou pessoas desconhecidas, e facilidade na comunicação
Autogestão	Responsabilidade	Capacidade de gerenciar a si mesmo a fim de conseguir realizar suas tarefas, cumprir compromissos e promessas que fez, mesmo quando é difícil.
	Organização	Capacidade de organizar o tempo, as coisas e as atividades, bem como planejar esses elementos para o futuro.
	Determinação	Capacidade de estabelecer objetivos, ter ambição e motivação para trabalhar duro, e fazer mais do que apenas o mínimo esperado.
	Persistência	Capacidade de completar tarefas e terminar o que assumimos e/ou começamos, ao invés de procrastinar ou desistir quando as coisas ficam difíceis ou desconfortáveis.
	Foco	Capacidade de focar — isto é, de selecionar uma tarefa ou atividade e direcionar toda nossa atenção apenas à tarefa/atividade "selecionada".
Amabilidade	Empatia	Capacidade de usar nossa compreensão da realidade para entender as necessidades e sentimentos dos outros, agir com bondade e compaixão, além de investir em nossos relacionamentos prestando apoio, assistência e sendo solidário.
	Respeito	Capacidade de tratar as pessoas com consideração, lealdade e tolerância, isto é, demonstrar o devido respeito aos sentimentos, desejos, direitos, crenças ou tradições dos outros.
	Confiança	Capacidade de desenvolver perspectivas positivas sobre as pessoas, isto é, perceber que os outros geralmente têm boas intenções, e de perdoar aqueles que cometem erros.

Você sabia? O componente Projeto de Vida desenvolve intencionalmente as 17 competências socioemocionais ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Entre maio e setembro 2019, foram realizadas oficinas uma escuta com os profissionais da rede para priorizar quais competências seriam foco de desenvolvimento em cada ano/série. A partir dessa priorização, a proposta do componente foi desenhada, tendo como um dos pilares a avaliação formativa com base em um instrumento de rubricas que acompanha um plano de desenvolvimento pessoal de cada estudante.

COMO INTEGRAR AS COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS AO TRABALHO PEDAGÓGICO

Um dos primeiros passos para integrar as competências socioemocionais ao trabalho com os conteúdos do componente curricular é garantir a intencionalidade do desenvolvimento socioemocional no processo. Evidências indicam que a melhor estratégia para o trabalho

intencional das competências socioemocionais se dá por meio de um planejamento de atividades que seja **SAFE**³ – sequencial, ativo, focado e explícito:

SEQUENCIAL	ATIVO	FOCADO	EXPLÍCITO
<i>Percurso com Situações de aprendizagem desafiadoras, de complexidade crescente e com tempo de duração adequado.</i>	<i>As competências socioemocionais são desenvolvidas por meio de vivências concretas e não a partir de teorizações sobre elas. Para isso, o uso de metodologias ativas é importante.</i>	<i>É preciso trabalhar intencionalmente uma competência por vez, durante algumas aulas. Não é possível desenvolver todas as competências socioemocionais simultaneamente.</i>	<i>Para instaurar um vocabulário comum e um campo de sentido compartilhado com os estudantes, é preciso explicitar qual é a competência foco de desenvolvimento e o seu significado.</i>

Desenvolver intencionalmente as competências socioemocionais não se refere a “dar uma aula sobre a competência”. Apesar de ser importante conhecer e apresentar aos estudantes quais são as competências trabalhadas e discutir com eles como elas estão presentes no dia a dia, o desenvolvimento de competências socioemocionais acontece de modo experiencial e reflexivo. Portanto, ao preparar a estratégia das aulas, é importante considerar como oferecer mais oportunidades para que os estudantes mobilizem a competência em foco e aprendam sobre eles mesmos ao longo do processo.

Conheça sugestões de competências socioemocionais para articular em cada Situação de Aprendizagem utilizando a estratégia SAFE feitas a partir das temáticas e metodologias propostas.

Situação de Aprendizagem	Tema da Situação de Aprendizagem	Competência Socioemocional em Foco
1	Matemática Financeira	Foco
2	Sistemas de Medidas	Tolerância ao Estresse
3	Razões Trigonométricas	Persistência

Agora é mergulhar no planejamento das aulas! Bom trabalho!

³ Segundo estudo meta-analítico de Durlak e colaboradores (2011), o desenvolvimento socioemocional apresenta melhores resultados quando as situações de aprendizagem são desenhadas de modo SAFE: sequencial, ativo, focado e explícito. DURLAK, J. A., WEISSBERG, R. P., DYMNICKI, A. B., TAYLOR, R. D., & SCHELLINGER, K. (2011). The impact of enhancing students' social and emotional learning: A meta-analysis of school-based universal interventions. *Child Development*, 82, 405-432.

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 1 – APROFUNDANDO E APLICANDO ALGUNS CONCEITOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Introdução

Competência Específica 2

Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

A competência 2 tem como característica principal promover a inclusão do estudante em sua comunidade local e no mundo globalizado. Nesse sentido, é importante ressaltar o aprimoramento da capacidade de pesquisa e de investigação por parte do estudante, o que pressupõe a observação dos desafios presentes em sua comunidade local/global, a elaboração de hipóteses que as descrevam, o tratamento dos dados associados à situação envolvida, a análise dos resultados obtidos e, por fim, a tomada de decisão a partir das conclusões obtidas. Ao desenvolver essa competência, pode-se afirmar que o estudante avança em relação ao entendimento de que os Projetos de Vida não são apenas no âmbito profissional, mas também nas dimensões pessoal e social/cidadã.

Habilidade

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Essa habilidade implica na utilização de recursos da tecnologia para a aplicação de conhecimentos matemáticos que envolvem desenvolvimento de projetos e ações de projeto ou de participação em pesquisas. O registro e a simulação de resultados utilizando aplicativos e planilhas eletrônicas fazem parte do letramento matemático e de saber usar softwares, aplicativos entre outras ferramentas, como extensão da capacidade de cálculo. O conhecimento de recursos tecnológicos, bem como saber utilizá-los, favorece o olhar abrangente para um grande conjunto de dados, com otimização de tempo e esforços, de modo que o foco esteja na interpretação e na ação a partir dos dados compilados.

Unidade Temática
Números e Álgebra

Objetos de conhecimento

- Conceitos de matemática financeira (juros simples e juros compostos);
- Alguns sistemas de amortização e noções de fluxo de caixa;
- Funções exponenciais e logarítmicas.

Pressupostos metodológicos

- ▶ Predizer, com base no cálculo de juros simples ou compostos, o valor final obtido num determinado investimento com taxa fixa após um determinado período.
- ▶ Calcular a taxa de juros final que representa um aumento salarial após sucessivos acréscimos percentuais (constantes ou variáveis).
- ▶ Diferenciar, a partir da leitura de panfletos e peças publicitárias, a taxa de juros efetiva envolvida no parcelamento de um determinado bem de consumo.
- ▶ Decidir, entre dois sistemas de amortização, qual é o mais adequado para a aquisição de um bem de consumo de acordo com as receitas mensais de uma família.

Orientações gerais sobre a Situação de Aprendizagem 1

Nesta Situação de Aprendizagem, iniciaremos com atividades que retomam conceitos da Matemática Financeira, bem como o aprofundamento por meio de situações-problema que favoreçam seu uso no dia a dia.

Você já parou para pensar que utilizar o dinheiro de maneira adequada, gastando mensalmente uma quantia menor do que se ganha, e economizar parte dessa remuneração, são fatores importantes para uma vida financeira equilibrada? Por isso, estudar Juros, acréscimos e descontos, que são elementos fundamentais da matemática financeira, é de extrema importância.

Momento 1: Recordando Conceitos

ATIVIDADE 1 - CONCEITOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA: JUROS SIMPLES E COMPOSTOS.

Sabemos que, quando uma pessoa faz um empréstimo no banco, essa deve pagar, além do valor emprestado, um valor a mais, que é o juro, ou seja, um tipo de aluguel referente ao período em que o dinheiro foi emprestado. O mesmo acontece quando o pagamento de um

boleto é efetuado em atraso, sobre o valor, é acrescido o juro correspondente ao tempo de atraso.

Relembrando o cálculo dos Juros Simples

$$J = C \cdot i \cdot t \quad \left\{ \begin{array}{l} J = \text{Juro} \\ C = \text{Capital} \\ i = \text{taxa} \\ t = \text{período} \end{array} \right.$$

Para calcular o montante de uma aplicação no sistema de Juros Simples, usamos a seguinte fórmula:

$$M = C + J$$

$$M = C + (C \cdot i \cdot t)$$

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

Relembrando o cálculo do Juros Compostos

$$M = C \cdot (1 + i)^t \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \text{Montante} \\ C = \text{Capital} \\ i = \text{taxa} \\ t = \text{período} \end{array} \right.$$

Professor, a ideia principal dessa atividade é retomar alguns conceitos sobre Juros Simples e Juros compostos, de maneira que o estudante consiga resolver situações parecidas em seu dia a dia.

1.1 Calcule o rendimento de um capital de R\$ 750,00, aplicado a regime de juros simples a uma taxa de:

- a) 3% a.m, durante 5 meses.
- b) 4,5% a.m., durante 1 ano.
- c) 0,06% a.d. (ao dia), durante 1 mês.

a)

$$\text{Dados do problema} \begin{cases} C = \text{R\$ } 750,00 \\ i = 3\% = \frac{3}{100} = 0,03 \\ t = 5 \text{ meses} \end{cases}$$

$$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 750 \cdot 0,03 \cdot 5 \Rightarrow J = 112,50$$

O rendimento de um capital de R\$ 750,00, considerando um período de 5 meses a uma taxa de juros simples de 3% a.m., será de R\$ 112,50.

b)

$$\text{Dados do problema} \begin{cases} C = \text{R\$ } 750,00 \\ i = 4,5\% \text{ a.m} = \frac{4,5}{100} = 0,045 \text{ a.m} \\ t = 12 \text{ meses} \end{cases}$$

$$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 750 \cdot 0,045 \cdot 12 \Rightarrow J = 405,00$$

O rendimento de um capital de R\$ 750,00, considerando um período de 12 meses a uma taxa de juros simples de 4,5% a.a., será de R\$405,00.

c)

$$\text{Dados do problema} \begin{cases} C = \text{R\$ } 750,00 \\ i = 0,06\% \text{ a.d (ao dia)} = 0,06 \cdot 30 \text{ dias} = 1,8\% \text{ a.m} = \\ = \frac{1,8}{100} = 0,018 \text{ a.m} \\ t = 1 \text{ mês} \end{cases}$$

$$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 750 \cdot 0,018 \cdot 1 \Rightarrow J = 13,50$$

O rendimento de um capital de R\$ 750,00, considerando um período de 1 mês a uma taxa de juros simples de 0,06% a.d., será de R\$ 13,50

1.2 Fernando aplicou um capital de R\$ 540,00, a um regime de juro simples com uma taxa de 0,2% a.m. Quanto será o juro gerado após 8 meses?

$$\text{Dados do problema} \begin{cases} C = R\$ 540,00 \\ i = 0,2\% \text{ a.m (juros simples)} = \frac{0,2}{100} = 0,002 \text{ a.m} \\ t = 8 \text{ meses} \end{cases}$$

$$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 540 \cdot 0,002 \cdot 8 \Rightarrow J = 8,64$$

O juro da aplicação de Fernando será de R\$ 8,64.

1.3 Carlos estava procurando um refrigerador para comprar e, ao passar em frente a uma loja de eletrodomésticos, visualizou a seguinte promoção. Carlos comprou o refrigerador em 2 parcelas iguais, sendo a primeira de R\$ 2 100,00, no ato da compra, e a segunda após 30 dias, acrescida de juro.

- Determine a taxa de juro mensal cobrada por essa loja.
- Quanto reais Carlos economizaria se pagasse o valor total à vista, sabendo que, no pagamento à vista, o consumidor tem 8 % de desconto?



Fonte: encurtador.com.br/rEHR6. Acesso em: 13 ago.2021.

- Seja p o valor de cada parcela, M o montante obtido a partir do saldo devedor $C = 4\,100 - p$, i a taxa de juros e o tempo em meses $t = 1$, temos:

$$M = C + J \Rightarrow M = C + (C \cdot i \cdot t) \Rightarrow M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$\begin{aligned} p &= (4100 - p) \cdot (1 + i \cdot 1) \Rightarrow 2100 = (4100 - 2100) \cdot i = \\ &= 2100 = 2000 \cdot i \Rightarrow i = \frac{2100}{2000} \Rightarrow i = 0,05 \text{ ou } 5\% \end{aligned}$$

- Calculando o valor do refrigerador com 8% de desconto:

$$V_1 = 4100 \cdot (1 - 0,08) \Rightarrow V_1 = 4100 \cdot 0,92 = 3772$$

Portanto, o valor do refrigerador com 8% de desconto é de R\$ 3772,00

Cálculo do valor a ser economizado por Carlos ao adquirir o refrigerador com desconto de 8%.

Valor a ser pago por Carlos pelo refrigerador: $2 \cdot 2100 = R\$ 4.200,00$

Subtraindo do Valor a Prazo de R\$ 4200,00 o valor à vista de R\$ 3772,00, temos:

$$4200 - 3772 = 428$$

Ou seja, Carlos economizaria R\$ 428,00 comprando o refrigerador à vista.

1.4 Paulo aplicou R\$ 700 000,00 a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês. Qual será o valor obtido por ele após 6 meses de aplicação?

(Professor (a), nessa atividade, sugere-se que o estudante utilize a calculadora.)

$$\text{Dados do problema} \left\{ \begin{array}{l} C = R\$ 700\,000,00 \\ i = 2\% \text{ a.m} = 0,02 \text{ a.m} \\ t = 6 \text{ meses} \\ M = ? \\ \text{Regime de capitalização composto} \end{array} \right.$$

$$M = C \cdot (1+i)^t$$

$$M = 700000 \cdot (1+0,02)^6 = 700.000 \cdot 1,02^6 = 700.000 \cdot (1,1261624193) \Rightarrow M = 788.313,69$$

O valor obtido por Paulo, será de R\$ 788.313,69

1.5 Determine o valor a ser aplicado hoje, a uma taxa de juros composto de 2% a.m., para que uma pessoa receba R\$ 9 000,00 ao final de 6 meses.

$$\text{Dados do problema} \left\{ \begin{array}{l} C = ? \\ i = 2\% \text{ a.m} = 0,02 \text{ a.m} \\ t = 6 \text{ meses} \\ M = 9\,000,00 \\ \text{Regime de capitalização composto} \end{array} \right.$$

$$M = C \cdot (1+i)^t$$

$$9.000,00 = C \cdot (1+0,02)^6 \Rightarrow C = \frac{9000}{(1,1261624193)} \Rightarrow C \cong 7991,74$$

O valor a ser aplicado será de aproximadamente R\$ 7.9991,74

Momento 2: Juros simples e compostos e suas

ATIVIDADE 2 – VAMOS FALAR UM POUCO SOBRE JUROS?

Você conhece cartão de crédito?

O cartão de crédito é um meio de pagamento pós-pago, que possui um limite de crédito predefinido. Com ele, você pode pagar suas compras com o valor à vista, e ainda pode parcelá-las. Você também pode pagar qualquer valor a partir do valor mínimo informado na fatura, e deixar o saldo restante para o próximo mês. Porém, se isso acontecer, haverá incidência de juros, tarifas e impostos sobre o saldo devedor que não foi pago, é o que chamamos de crédito rotativo.

Para saber mais um pouco sobre a história do cartão de crédito, acesse:

<https://museudocartao.com.br/museu.php> . Acesso em: 13 ago.2021.



2.1 Faça uma pesquisa sobre o que é o crédito rotativo, oferecido por alguns cartões de crédito, e como ele funciona.

A resposta será de acordo com a pesquisa realizada pelos estudantes.

2.2 Luiz Fernando, após receber a fatura de seu cartão de crédito no valor de R\$ 432,91, resolveu fazer o pagamento mínimo, fixado em 15% pelo emissor do cartão, que será de R\$ 64,94. Considerando que a taxa de juros do rotativo e os demais encargos seja, no total, de 14,90%, qual será o valor a ser pago por Luiz Fernando na fatura do próximo mês, supondo que não há outras compras ou taxas a serem cobradas?

[<03 IM PR EM S A 1 AT 2 2 PG 07.svg>](#)

TITULAR: Luiz Fernando da Silva		
CARTÃO: 3322.XXXX.XXXX.0002		
LANÇAMENTOS: COMPRAS E SAQUES		
O TOTAL DA SUA FATURA É:		R\$ 432,91
VENCIMENTO:		09/12/2021
PAGAMENTO MÍNIMO:		R\$ 64,94
DATA	ESTABELECIMENTO	VALOR
01/10	COMPRA MAIS 09/09	136,32
15/08	FARMA SAQUE 04/04	39,22
02/09	PET PRATA 04/06	257,37
TOTAL GERAL		432,91
ENCARGOS COBRADOS NESSA FATURA		
JUROS ROTATIVOS E DEMAIS ENCARGOS:		14,90%
		

Professor, nesse momento é necessário que o aluno compreenda que, para calcular o valor da próxima fatura, ele deve considerar o seguinte cálculo:

Total da fatura: 432,91

Valor mínimo = 64,94 (equivalente a 15% do valor da fatura)

Pagando o valor mínimo do cartão no valor de R\$ 64,94, temos:

$432,91 - 64,94 = 367,97$

Considerando que os juros do rotativo e demais encargos seja no valor de 14,90%.

Então, deve-se calcular 14,90% de 367,97

$$\frac{14,90}{100} \cdot 367,97 = \frac{5482,75}{100} \cong 54,83$$

Portanto, para a próxima fatura Luiz Fernando terá que pagar o valor de $367,97 + 54,83 = 422,80$ reais.

2.3 Um investidor aplicou um capital (C) de R\$ 12 000,00 em dezembro de 2020 a uma taxa de juros (i) de 2% a.m. Ao final de dezembro de 2021, ele verificou seu extrato. Considerando os montantes obtidos do regime de juros compostos e do regime de juros simples, qual foi a diferença, em reais, entre os montantes no mês de dezembro? Na sequência, construa o gráfico que represente os montantes de acordo com o tempo.

Professor, nessa atividade você pode sugerir que o aluno resolva por meio de planilhas eletrônicas do Google, ou utilize calculadora científica.

Primeiro o estudante deve calcular o montante a juros simples, e depois o montante a juros compostos, mês a mês.

Resolução:

Montante (M) a juros simples no mês de dezembro:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t) \Rightarrow M = 12000 \cdot (1 + 0,02 \cdot 12) \Rightarrow M = 14880,00$$

Montante (M) a juros compostos no mês de dezembro:

$$M_2(t) = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M = 12000 \cdot (1 + 0,02)^{12} \Rightarrow M = 15218,90$$

Diferença entre os montantes a juros compostos e simples no mês de dezembro:

$$\text{Diferença} = 15218,90 - 14880,00 = \text{R\$ } 338,90$$

Para a representação gráfica, indicaremos os seguintes montantes em função do tempo:

Cálculo dos montantes aplicados a juros simples:

$$\text{Janeiro: } M_1 = 12000 \cdot (1 + 0,02 \cdot 1) = 12000 \cdot 1,02 = 12240,00$$

$$\text{Fevereiro: } M_2 = 12000 \cdot (1 + 0,02 \cdot 2) = 12000 \cdot 1,04 = 12480,00$$

$$\text{Março: } M_3 = 12000 \cdot (1 + 0,02 \cdot 3) = 12000 \cdot 1,06 = 12720,00$$

Processo análogo para as demais situações

Cálculo dos montantes aplicados à juros compostos:

$$\text{Janeiro: } M_1 = 12000 \cdot (1 + 0,02)^1 = 12000 \cdot 1,02^1 = 12000 \cdot 1,02 = 12240,00$$

$$\text{Fevereiro: } M_2 = 12000 \cdot (1 + 0,02)^2 = 12000 \cdot 1,02^2 = 12000 \cdot 1,0404 = 12484,80$$

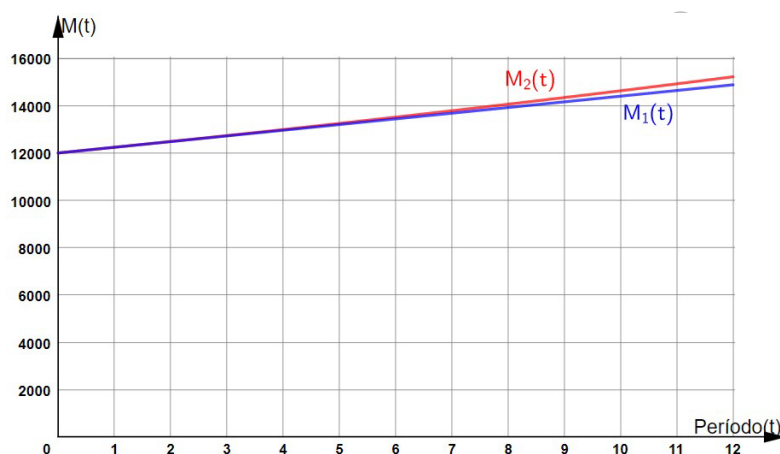
$$\text{Março: } M_3 = 12000 \cdot (1 + 0,02)^3 = 12000 \cdot 1,02^3 = 12000 \cdot 1,061208 = 12734,50$$

Processo análogo para as demais situações

Observa-se que a função representada por $M_1(t)$ é uma função polinomial do primeiro grau, e a função representada por $M_2(t)$ é uma função exponencial, e a representação gráfica das duas funções será representada conforme a figura a seguir:

$$M_1(t) = 240t + 12000$$

$$M_2(t) = 12000 \cdot (1,02)^t$$



Fonte: Elaborado pelos autores

A tabela a seguir mostra os valores referentes aos montantes calculados sob taxa a juros simples e compostos em função do período t .

Mês	Período (t)	Montante (M_1) a juros simples	Montante (M_2) a juros compostos
Janeiro	1	R\$ 12 240,00	R\$ 12 240,00
Fevereiro	2	R\$ 12 480,00	R\$ 12 484,80
Março	3	R\$ 12 720,00	R\$ 12 734,50
Abril	4	R\$ 12 960,00	R\$ 12 989,19
Maio	5	R\$ 13 200,00	R\$ 13 248,97
Junho	6	R\$ 13 440,00	R\$ 13 513,95
Julho	7	R\$ 13 680,00	R\$ 13 784,23
Agosto	8	R\$ 13 920,00	R\$ 14 059,91
Setembro	9	R\$ 14 160,00	R\$ 14 341,11
Outubro	10	R\$ 14 400,00	R\$ 14 627,93
Novembro	11	R\$ 14 640,00	R\$ 14 920,49
Dezembro	12	R\$ 14 880,00	R\$ 15 218,90

Fonte: Elaborado pelos autores

Professor, se achar conveniente, você pode solicitar aos estudantes calcular todos os valores constantes na tabela.

Dicas para o professor:

Professor, caso queira utilizar o recurso de uma planilha eletrônica para efetuar os cálculos dos montantes a juros simples e compostos, na planilha de cálculo Excel, acesse o QR Code e veja o passo a passo para realizar os cálculos.

<https://bityli.com/sigPbIt>



O modelo a seguir mostra a elaboração de uma planilha para efetuar os cálculos dos montantes a juros simples e compostos na internet por meio, da Planilha Google.

<https://docs.google.com/presentation/d/1HRXMwfMnIjb9edLaYOdhyAASgezIo7rm/edit?usp=sharing&ouid=105648726348531718735&rtpof=true&sd=true>



2.4 Observe o boleto bancário a seguir:

Banco Verde		001-6		00182.60007.52103.658743 02316.111111 5 22220000000200	
Local de pagamento Pagável em qualquer branco até o vencimento. Após, atualize o boleto no site do banco.				Data de Vencimento 16/11/2021	
Nome do beneficiário/CNPJ/CPF Belos Doces ME – CNPJ 00000111115555				Agência/Código de Beneficiário 11111-5/00006666-4	
Data do documento 12/11/2021	Nº do Documento NF 2 2/2	Espécie DOC	Data do Processamento 12/11/2021	Carteira/Nosso número 05/0000000002020-5	
Uso do Banco	Carteira 05	Espécie R\$	(x) Valor	(x) Valor do Documento R\$ 1000,00	
Instruções Para pagamento até 05/11, conceder desconto de 10%. Para pagamento após 16/11, multa de 2% fixa e juro de 1% ao mês. Não receber após 31/12/2021.				Descontos/abatimentos	
				Mora/Multa	
				Outros acréscimos	
Pagador – Fernando Fernandes R: Flor de Lis, 331 – CEP: 11332-552 Centro				Valor cobrado	
Sacado Belos Doces ME – CNPJ 00000111115555					



Fonte: Elaborado pelos autores

O valor pago pelo atraso no pagamento é com base no sistema de juros compostos. Sabendo que o valor desse boleto é R\$ 1.000,00, determine:

- Qual é valor para o pagamento realizado até 05/11?
- Calcule o valor, em reais, da multa para pagamento em atraso.
- Qual é o valor para pagamento com atraso de 3 meses?

Resolução:

a) Considerar o desconto de 10% para o pagamento até 05/11, temos:

$$\text{Valor a pagar} = 1000 \cdot (1 - 0,1) = 900,00$$

Portanto, o valor a pagar em 05/11 será de R\$ 900,00.

b) Como consta nas informações do boleto, após 16/11, incidirá uma multa fixa de 2%, então

$$\text{temos: } 2\% \text{ de } 1000 = \frac{2}{100} \cdot 1000 = 20,00$$

O valor da multa para o pagamento em atraso é de R\$ 20,00.

c) Calculando o montante relativo aos três meses de atraso, com juro de 1% a.m.:

$$M = 1000 \cdot (1 + 0,01)^3 = 1000 \cdot (1,01)^3 = 1000 \cdot 1,030301 = 1030,30$$

A esse montante, incidirá a taxa fixa de 2% sobre o valor do boleto, que é de R\$ 20,00, então o valor a ser pago em atraso será de: $1030,30 + 20,00 = \text{R\$ } 1.050,30$.

2.5 Fernanda pretende aplicar R\$ 14 000,00 por 7 meses seguidos, em algum investimento. Ela está em dúvida se aplica no sistema de juros simples, com taxa de 11% ao ano, ou no sistema de juros composto, com taxa de 9% ao ano. Qual das duas opções é a mais rentável? Represente graficamente.

Professor, nessa atividade, sugere-se que o estudante calcule por meio de planilhas eletrônicas ou calculadora científica. Para a realização do gráfico, pode se utilizar os aplicativos Geogebra, Excel...

Resolução:

Considerando A o sistema de juros simples e B o sistema de juros compostos, temos:

Sistema de Juros Simples

$$t = 0 \Rightarrow M_A(0) = 14000 \cdot (1 + 0,11 \cdot 0) = 14000 \cdot 1 = 14000,00$$

$$t = 1 \Rightarrow M_A(1) = 14000 \cdot (1 + 0,11 \cdot 1) = 14000 \cdot 1,11 = 15540,00$$

$$t = 3 \Rightarrow M_A(3) = 14000 \cdot (1 + 0,11 \cdot 3) = 14000 \cdot 1,33 = 18620,00$$

Processo análogo para as demais situações.

Sistema de Juros Compostos

$$t = 0 \Rightarrow M_B(0) = 14000 \cdot (1 + 0,09)^0 = 14000 \cdot 1 = 14000,00$$

$$t = 1 \Rightarrow M_B(1) = 14000 \cdot (1 + 0,09)^1 = 14000 \cdot (1,09)^1 = 14000 \cdot 1,09 = 15260,00$$

$$t = 2 \Rightarrow M_B(2) = 14000 \cdot (1 + 0,09)^2 = 14000 \cdot (1,09)^2 = 14000 \cdot 1,1881 = 16633,40$$

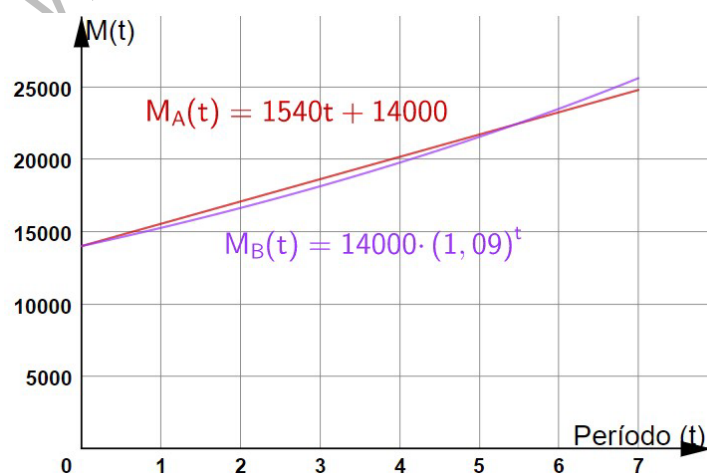
Processo análogo para as demais situações.

t	$M_A(t)$	$M_B(t)$
0	R\$ 14 000,00	R\$ 14 000,00
1	R\$ 15 540,00	R\$ 15 260,00
2	R\$ 17 080,00	R\$ 16 633,40
3	R\$ 18 620,00	R\$ 18 130,41
4	R\$ 20 160,00	R\$ 19 762,14
5	R\$ 21 700,00	R\$ 21 540,74
6	R\$ 23 240,00	R\$ 23 479,40
7	R\$ 24 780,00	R\$ 25 592,55

Fonte: Elaborada pelos autores

A expressão matemática que representa o montante A aplicado a juros simples em função do tempo será dado por: $M_A(t) = 1540t + 14000$, e a expressão matemática que representa o montante B, em função do tempo aplicado a juros compostos será $M_B(t) = 14000 \cdot (1,09)^t$.

E a representação gráfica de ambas as funções será:



Fonte: Elaborado pelos autores

Após realizar todos os cálculos, confira o resultado obtido, digitando os valores informados no enunciado da atividade, realizando a leitura do *QR CODE*, ou acessando o *link*, conforme segue:

<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1AHZDvujqnv8uyz5jtKA9nziOnL9OL9rH0uJicqYNUqg/edit#gid=0>



Momento 3: Alguns sistemas de amortizações

ATIVIDADE 3 – SISTEMAS DE AMORTIZAÇÕES

Você já realizou uma compra e pagou em prestações?

O pagamento à vista geralmente costuma ser a melhor opção para compra de bens de consumo, pois não há juros, e, em alguns casos, podem oferecer descontos.

Porém, quando se necessita de montantes maiores, como para a compra de imóveis, automóveis, entre outros, muitas vezes precisamos obter crédito junto às instituições financeiras. Ou seja, precisa-se realizar um empréstimo – que também é conhecido como financiamento.

Essa é uma forma de se adquirir bens e pagar o valor financiado por meio de prestações, ou pagamentos mensais.

3.1 Sugestão de pesquisa:

Quais são os sistemas de créditos utilizados hoje pelo mercado financeiro?

Existem diferentes tipos de financiamento, neles, costumam aparecer alguns elementos como:

- Quantia financiada (valor do crédito obtido);
- Juro (quantia paga pelo “aluguel” do crédito obtido);
- Taxa de juro (percentual de juro pago no financiamento em certo período);
- Quantidade de prestações (número de prestações a serem pagas);
- Valor da prestação (quantia paga em cada prestação);
- Saldo devedor (quantia correspondente à dívida total durante o período do financiamento);
- Amortização (parte do valor da prestação paga correspondente à quantia a ser reduzida do saldo devedor);
- Pagamento parcelado, ou em uma única vez?
- Parcelas fixas, ou variáveis?

- Amortização constante, ou ao fim do período?

Quando se pensa em tomar alguma forma de crédito, deve-se ficar atento aos diferentes sistemas de amortização da dívida, pois eles responderão às questões acima.

Existem várias modalidades de financiamento, vamos analisar dois dos sistemas mais comuns de financiamento.

Sistemas de amortização constante (SAC)

O Sistema de Amortização Constante (SAC), ou Método Hamburguês, consiste na amortização constante da dívida com base em pagamentos periódicos decrescentes. Ou seja, quanto mais o tempo passa, menores ficam as parcelas de quitação do saldo devedor, enquanto o valor é amortizado de maneira constante em todos os períodos. Esse sistema é um dos mais utilizados em financiamentos imobiliários. Como, em modo geral, o financiamento costuma cobrar taxas das instituições financeiras, para os nossos exemplos, vamos utilizar apenas a cobrança dos juros.

Exemplo

Uma família pretende financiar o restante que falta para a compra de um apartamento que custa R\$ 250 000,00. Uma instituição financeira oferece aos seus clientes uma modalidade de financiamento pelo SAC com prestações mensais, com taxas de juros de 0,5% a.m e prazo de 20 anos (240 meses).

Se a família financiar R\$ 108 000,00, nas condições apresentadas no prazo máximo de pagamento, qual será o valor de cada prestação?

Nessa situação:

- a quantia financiada é de R\$ 108 000,00, ou seja, $c = 108000$
- a taxa de juro é de 0,5% a.m., ou seja, $i = 0,005$.
- a quantidade de prestações é igual a 240, ou seja, $n = 240$.

Para calcular o valor (**a**) da amortização em cada prestação desse financiamento, dividimos a quantia financiada pela quantidade de prestações:

$$a = \frac{c}{n} = \frac{108000}{240} \Rightarrow a = 450$$

No cálculo da primeira prestação, p_1 , adicionamos o valor da amortização e dos juros J_1 correspondentes, calculados sobre o saldo devedor do período anterior, correspondente a quantia financiada c .

$$p_1 = a + j_1 = a + i \cdot c$$

$$p_1 = 450 + 0,005 \cdot 108000$$

$$p_1 = 450 + 540 = 990$$

A primeira prestação será de R\$ 990,00.

O cálculo do saldo devedor é o valor financiado subtraído do valor da amortização.

Saldo devedor:

$$S_1 = 108000 - 450 = 107550$$

Portanto, o saldo devedor será de: R\$ 107.550,00.

De maneira análoga, calcularemos o valor da segunda prestação p_2 e do saldo devedor s_2 determinado após o pagamento dessa prestação.

$$p_2 = a + j_2 = a + i \cdot C$$

$$p_2 = 450 + 0,005 \cdot 107550$$

$$p_2 = 450 + 537,75 = 987,75$$

Assim, o valor da segunda prestação é R\$ 987,75, e o saldo devedor após o pagamento dessa prestação é R\$ 107,100,00

3.2 Utilizando o procedimento de cálculo para o Sistema de Amortização Constante, complete o quadro a seguir:

n	Amortização (a)	Juros (j)	Prestação (p)	Saldo Devedor (s)
1	R\$ 450,00	R\$ 540,00	R\$ 990,00	R\$ 107 550,00
2	R\$ 450,00	R\$ 537,75	R\$ 987,75	R\$ 107 100,00
3	R\$ 450,00	R\$ 535,50	R\$ 985,50	R\$ 106 650,00
4	R\$ 450,00	R\$ 533,25	R\$ 983,25	R\$ 106 200,00
5	R\$ 450,00	R\$ 531,00	R\$ 981,00	R\$ 105 750,00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
237	R\$ 450,00	R\$ 9,00	R\$ 459,00	R\$ 1 350,00
238	R\$ 450,00	R\$ 6,75	R\$ 456,75	R\$ 900,00
239	R\$ 450,00	R\$ 4,50	R\$ 454,50	R\$ 450,00
240	R\$ 450,00	R\$ 2,25	R\$ 452,25	R\$ 0,00

Fonte: Elaborado pelo autor

Resolução:

$$p_2 = 537,75 + 450,00 = 987,75$$

$$s_3 = 107100 - 450 = 106650,00$$

$$j_4 = 106650 \cdot 0,005 = 533,25$$

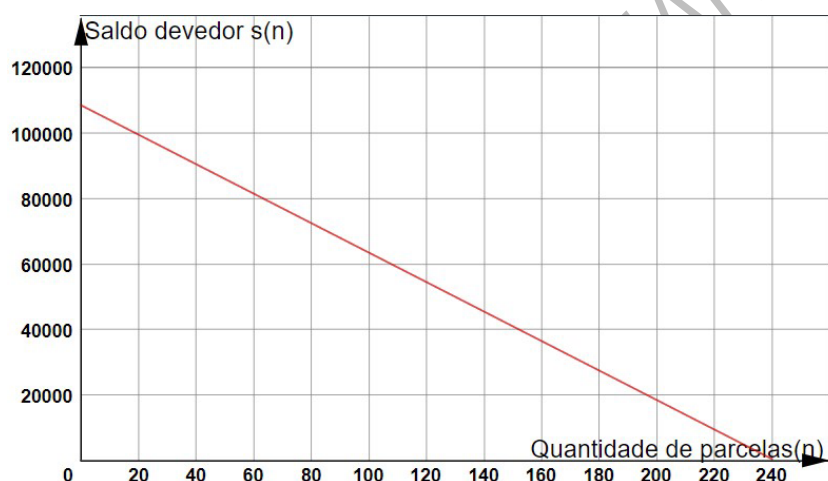
$$p_{237} = 450 + 9 = 459$$

$$p_{238} = 450 + 6,75 = 456,75$$

$$s_{239} = 900 - 450 = 450$$

A generalização dos valores referentes à quantidade de parcelas (n) e ao saldo devedor pode ser representada pela função: $s(n) = -450n + 108450$, e o esboço gráfico será representado da seguinte forma:

O gráfico a seguir representa a variação do saldo devedor para o financiamento em 240 meses:



Fonte: Elaborado pelos autores

3.3 Para adquirir um automóvel, Victor financiou o valor de R\$ 36.000,00, a ser quitado em 120 prestações mensais e consecutivas. A primeira prestação, no valor de R\$ 1.308,00, venceu um mês após a contratação do financiamento.

Se o sistema adotado foi o de Amortizações Constantes (SAC), a taxa de juros mensal efetiva aplicada a essa transação é:

- | | |
|----------|----------|
| (A) 3,0% | (D) 2,5% |
| (B) 2,8% | (E) 2,4% |
| (C) 2,7% | |

Resolução:

No sistema SAC - Sistema de Amortizações Constantes, a amortização será igual a:

$$a = \frac{c}{n} = \frac{36000}{120} = 300$$

Ao final do primeiro mês Gabriel pagará R\$ 300,00 (amortização) + juros de i em relação ao saldo devedor de R\$ 36.000,00.

$$\begin{aligned} p_1 &= a + j_1 = a + i \cdot C \\ 1308 &= 300 + i \cdot 36000 \\ i &= \frac{1008}{36000} = 0,0028 = 2,8\% \end{aligned}$$

Portanto, alternativa correta “B”.

3.4 Um automóvel foi adquirido no valor de R\$150 000,00 a ser pago de acordo com o SAC. A revendedora ofereceu um financiamento em 30 meses sem entrada, com juros de 1% a.m. Calcule o valor das amortizações e o valor da primeira parcela.

Resolução:

$$a = \frac{150000}{30} = 5000$$

O valor da amortização do valor do automóvel será de R\$ 5.000,00

$$P = a + (C \cdot j)$$

$$P = 5000 + (150000 \cdot 0,01)$$

$$P = 5000 + 1500$$

$$P = 6.500$$

O valor da primeira parcela será de R\$ 6.500,00

Sistema francês de amortização ou sistema Price

O modelo de amortização por Tabela Price é um dos mais conhecidos. Por ele, o montante total é amortizado ao longo do contrato e de forma crescente. Assim, o pagamento é feito através de um conjunto de prestações sucessivas e constantes.

Geralmente, as parcelas são pagas mensalmente em valores iguais, já com os juros embutidos. Também pode ser chamado de Sistema de Parcelas Fixas ou Sistema Francês.

Exemplo:

Um apaixonado por motocicletas observa uma propaganda que diz: Super Promoção: entrada de R\$ 4 000,00 mais 60 parcelas fixas, realize seu sonho de ter sua própria motocicleta.



Entrada de R\$ 4.000,00

60 parcelas

Taxa: 2% a.m

Fonte: encurtador.com.br/wHK36.

Acesso em: 19 ago. 2021.

Qual seria o valor de cada prestação?

Nessa situação:

- a quantia financiada é de R\$ 6 000,00, $C = R\$ 6\,000,00$;
- a taxa de juro é de 2% a.m., $i = 0,02$;
- a quantidade de prestações é igual a 60, $n = 60$.

Como as parcelas serão iguais, o sistema de amortização que será utilizado é o Sistema Price.

As parcelas podem ser calculadas da seguinte forma:

$$p = \frac{c \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

$$p = \frac{6000 \cdot 0,02}{1 - (1 + 0,02)^{-60}} = \frac{120}{1 - (1,02)^{-60}} = \frac{120}{1 - 0,3048}$$

$$p = \frac{120}{0,6952} = 172,61$$

Assim, o valor de cada parcela será de R\$ 172,61.

3.5 Para acompanhar o saldo devedor, pode ser elaborado um quadro que apresente os dados, da seguinte forma. Aproveite para completar os espaços em branco.

n	Prestação (p)	Juro (j) $J = C \cdot i$	Amortização (a) $a = p - j$	Saldo devedor (s) $S = C - a$
1	R\$ 172,61	R\$ 120,00	R\$ 52,61	R\$ 5 947,39
2	R\$ 172,61	R\$ 118,95	R\$ 53,66	R\$ 5 893,73
3	R\$ 172,61	R\$ 117,87	R\$ 54,74	R\$ 5 838,99
4	R\$ 172,61	R\$ 116,78	R\$ 55,83	R\$ 5 783,16
5	R\$ 172,61	R\$ 115,68	R\$ 56,95	R\$ 5 762,21

Fonte: Elaborado pelos autores.

Resolução:

$$s_2 = s_1 - a_2 = 5947,39 - 53,66 = \text{R\$ } 5\,893,73$$

$$a_3 = p - j_3 = 172,61 - 117,87 = \text{R\$ } 54,74$$

$$j_4 = s_3 \cdot \left(\frac{2}{100}\right) = 5838,99 \cdot 0,02 = \text{R\$ } 116,78$$

$$s_5 = s_4 - a_5 = 5783,16 - 56,95 = \text{R\$ } 5\,726,21$$

3.6 Agora é sua vez.

Construa uma planilha eletrônica, tomando como referência o quadro anterior, que apresente o valor do saldo devedor das 60 prestações.

Professor, disponibilizamos, a seguir, um link em que se apresenta uma planilha, baseada em uma planilha eletrônica, que pode servir de modelo para o desenvolvimento da atividade proposta.



3.7 Pesquise, em panfleto de loja ou na internet, algum produto que esteja sendo anunciado sem a cobrança de juro no pagamento a prazo, e com desconto no pagamento à vista. Com base nas informações pesquisadas, calcule a taxa de juro que pode ser considerada na compra a prazo desse produto em relação à compra à vista.

3.8 Quais das informação a seguir são características de financiamentos no modelo Price?

- a) Apresenta um valor fixo nas prestações.
- b) O saldo devedor decai linearmente.
- c) O valor das prestações é crescente.
- d) O valor da amortização aumenta a cada prestação.
- e) As prestações consecutivas apresentam o mesmo intervalo de tempo.
- f) O saldo devedor é decrescente no período.
- g) O valor das prestações é decrescente no período.

Resolução:

Informações corretas: “a”, “d”, “e” e “f”.

Momento 4: Atividade diagnóstica

ATIVIDADE 4 - QUESTÕES DO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO (ENEM)

4.1 (ENEM 2019) - Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R\$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R\$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado.

O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de:

- (A) 398,02 **(B) 400,00** (C) 401,94 (D) 404,00 (E) 406,02

Professor, essa atividade foi desenvolvida no caderno da 1ª Série do Ensino Médio – 4º Bimestre.

Valor da nota fiscal no primeiro pagamento:

$$\text{Dados: } \begin{cases} M_1 = 202,00 \\ n = 1 \text{ mês} \\ i = 1\% = 0,01 \\ C_1 = ? \end{cases}$$

$$M_1 = C_1 \cdot (1 + i)^n \Rightarrow 202 = C_1 \cdot (1 + 0,01)^1 \Rightarrow 202 = 1,01 \cdot C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{202}{1,01} = 200$$

O valor da nota fiscal no primeiro pagamento será de R\$ 200,00.

Valor da nota fiscal no segundo pagamento:

$$\text{Dados: } \begin{cases} M_2 = 204,00 \\ n = 2 \text{ meses} \\ i = 1\% = 0,01 \\ C_2 = ? \end{cases}$$

$$M_2 = C_2 \cdot (1 + i)^n \Rightarrow 204 = C_2 \cdot (1 + 0,01)^2 \Rightarrow 204 = C_2 \cdot 1,01^2 \Rightarrow 204 = C_2 \cdot 1,0201 \Rightarrow \\ \Rightarrow C_2 = \frac{204}{1,0201} \cong 200$$

Somando o capital do primeiro mês com o capital do segundo mês, temos:

$$M = C_1 + C_2 = 200 + 200 \Rightarrow M = 400$$

O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de R\$ 400,00

Portanto, a alternativa “B” está correta.

4.2 (ENEM 2015) Um casal realiza um financiamento imobiliário de R\$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R\$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R\$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso. Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de:

- (A) 2.075,00 (B) 2.093,00 (C) 2.138,00 **(D) 2.255,00** (E) 2.300,00

Resolução:

Para calcular quanto será a décima parcela, devemos considerar que o saldo devedor é reduzido em R\$500,00.

Sendo assim, quando pagarem a nona prestação, eles terão quitado $9 \times R\$500 = R\$4.500,00$, e estarão com uma dívida de R\$175 500,00 ($180\,000 - 4.500$).

Com isso, podemos concluir que o valor a ser pago na décima prestação será:

$$500 + \frac{0,01 \cdot 175500}{1755} = 500 + 1755 = 2255$$

Dessa forma, pode-se concluir que, na décima prestação, o valor a ser pago será de R\$ 2.255,00.

Portanto, a alternativa “D” está correta.

Considerações sobre a avaliação:

Ao final desse percurso de aprendizagem, a expectativa é de que os estudantes compreendam alguns conceitos de Matemática Financeira relacionados a seu cotidiano, como:

- ▶ Calcular Juros Simples e Juros compostos e utilizar uma planilha eletrônica para fazer a projeção de montante de uma aplicação financeira;
- ▶ Resolver problemas que envolvem os juros do cartão de crédito;
- ▶ Resolver problemas envolvendo os sistemas de amortização SAC e Price.

Orientações para a recuperação

Professor (a), para os estudantes que apresentaram maior dificuldade no desenvolvimento da habilidade trabalhada nessa situação de aprendizagem e necessitam de recuperação, sugere-se

que os conceitos propostos não sejam alterados, mas sim as metodologias que serão desenvolvidas. Assim, sugerimos que você:

- ▶ Prepare atividades que contemplem habilidades estruturantes já trabalhadas anteriormente, e que apoiem o desenvolvimento dos conceitos da Matemática Financeira. O professor poderá recorrer ao material Aprender Sempre, às questões da AAP e do SARESP de anos anteriores.
- ▶ Procure trabalhar com atividades contextualizadas que envolvam situações-problema relacionadas ao dia a dia, que levem o estudante a participar ativamente (por meio de agrupamentos e das duplas produtivas), possibilitando o debate e a socialização de suas ideias.

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 2 – O SISTEMA INTERNACIONAL E OUTROS SISTEMAS DE MEDIDAS LIGADOS AOS AVANÇOS TECNOLÓGICOS

Competência Específica 1

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

A competência 1 apresenta a Matemática como um corpo de conhecimentos a serviço de outras áreas do conhecimento e, por isso, colabora para a formação integral do estudante. O conhecimento de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, sempre levando em consideração o contexto em que a situação está inserida, está associado ao domínio da competência. A compreensão do que se deseja determinar de acordo com cada situação exige a combinação de vários conhecimentos de modo apropriado, para que seja possível colocar esse conjunto de ideias em ação, monitorando estratégias selecionadas em cada situação e analisando sua eficiência; e a leitura e interpretação de textos verbais, desenhos técnicos, gráficos e imagens. É uma competência relacionada à preparação dos jovens para construir e realizar Projetos de Vida. Vale destacar a relação dessa competência com a Competência Geral 2 da BNCC, no que se refere ao exercício da curiosidade intelectual que utiliza o conhecimento para investigar, refletir e criar soluções em diferentes situações.

Habilidade

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos, ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas, e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

Essa habilidade implica um aprofundamento das unidades de medida do sistema métrico decimal relacionadas às grandezas de comprimento, área, volume, capacidade e massa. Há uma ampliação do sentido das unidades de medidas de tempo e grandezas combinadas (como densidade de um corpo e velocidade média), bem como de unidades relacionadas à tecnologia da informação. Se espera a identificação e a leitura das diferentes grandezas e suas unidades que se apresentam no cotidiano, assim como a realização das conversões mais usuais para solucionar situações diversas. O desenvolvimento dessa habilidade está diretamente relacionado à construção da Competência Geral 7 do Currículo Paulista do Ensino Médio, no sentido de aprender a argumentar e posicionar-se com base em fatos e informações de diferentes áreas.

Unidade temática

Geometria e Medidas

Objetos de conhecimento

- Sistema Internacional de Medidas: principais unidades e conversões. Bases de sistemas de contagem (base decimal, base binária, base sexagesimal etc.);
- Principais unidades de armazenamento de dados na informática (bit, byte, kilobyte, megabyte, gigabyte etc.) e transferência de dados (Mbps, Kbps, Gbps etc.).

Pressupostos metodológicos

- ▶ Identificar, em um determinado contexto, a grandeza envolvida em um processo de medição;
- ▶ Relacionar duas grandezas de naturezas diferentes em um dado contexto, para obter uma unidade de medida do Sistema Métrico Decimal (espaço e tempo, temperatura e comprimento, massa e volume etc.);
- ▶ Comparar diferentes unidades de armazenamento e transmissão de dados em diferentes dispositivos eletrônicos (físicos e virtuais) a partir da leitura de manuais técnicos, reportagens e/ou peças publicitárias (panfletos, anúncios etc.).

Orientações gerais sobre a Situação de Aprendizagem 2

Nessa Situação de Aprendizagem, procura-se ampliar o conhecimento dos estudantes sobre o Sistema de Medidas, interpretando, convertendo e compreendendo textos científicos ou divulgados pelas mídias. Desta forma, espera-se que, com o desenvolvimento dessa Situação de Aprendizagem, o estudante compreenda as representações gráficas e algébricas de diferentes unidades de medida. Sistema Internacional de Medidas: principais unidades e

conversões. Bases de sistemas de contagem (base decimal, base binária, base sexagesimal etc.). Principais unidades de armazenamento de dados na informática (bit, byte, kilobyte, megabyte, gigabyte etc.) e transferência de dados (Mbps, Kbps, Gbps etc.). Desta forma, é possível fazer com que os estudantes percebam a utilização e conversões das unidades de medidas dependendo da situação envolvida.

Momento 1: Recordando Conceitos

ATIVIDADE 1 – O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (S.I)

Professor, a fim de realizar o levantamento dos conhecimentos já adquiridos na habilidade EF09MA18¹; e avançar nas aprendizagens, iniciaremos esta atividade com uma leitura compartilhada do texto a seguir.

O que muda no Sistema Internacional de Unidades

Disponível em:

<https://portal.if.usp.br/ifusp/pt-br/not%C3%ADcia/o-que-muda-no-sistema-internacional-de-unidades>. Acesso em: 09 ago.2022.



Professor, ao longo da leitura realize momentos de parada e reflexão sobre o conhecimento dos alunos sobre situações cotidianas em que precisamos utilizar as unidades de medidas para realizar ou interpretar as medidas existentes. Buscando reforçar a ideia da importância histórica de uma medida padrão, recorde os estudantes que a grandeza é tudo que pode ser medido, e que há coisas que não podem ser medidas. Importante retomar o conhecimento dos estudantes sobre as unidades de medidas padrão e não padrão, os múltiplos e submúltiplos, por meio do conhecimento cotidiano de receitas caseiras.

Nesse momento, destaque a história do sistema de medida como uma construção histórica humana, e a importância da existência de um sistema de unidades de medida padronizado mundialmente.

Ao longo da leitura, registre em lousa as palavras desconhecidas, as ideias centrais do texto e os apontamentos dos alunos, utilizando as palavras deles. Ao final, organize as ideias e construa com os alunos um texto coletivo, como resumo dos conceitos que foram retomados.

¹ Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distâncias entre planetas e sistemas solares, tamanhos de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.

ATIVIDADE 2 – APERFEIÇOANDO OS CONHECIMENTOS SOBRE OS SISTEMAS DE MEDIDAS.

Professor, nesta atividade os estudantes deverão entrar em contato com textos científicos em pequenos grupos, visando a trabalhar as estratégias de leitura, assim refletindo sobre o uso do sistema de medida, múltiplos e submúltiplos, retomando os conceitos potência e notação científica.

De posse dos textos abaixo, seja na forma impressa, seja na forma virtual, os alunos devem receber o seguinte comando:

2.1 Nessa atividade, você poderá trabalhar em dupla, para realizar a leitura de artigos e colunas, por meio de sites de divulgação científica e de tecnologia da informação, conforme o quadro a seguir, realize a leitura de todos o material indicado e responda o que se pede.

Texto científico	Link / QR CODE
Medindo aqui e ali	http://chc.org.br/coluna/medindo-aqui-e-ali/ Acesso em: 09 ago.2021. 
Explorando medidas	 http://chc.org.br/artigo/explorando-medidas/ . Acesso em: 09 ago.2021.
Metro, para começo de conversa	http://chc.org.br/coluna/metro-para-comeco-de-conversa/ . Acesso em: 09 ago.2021. 
Muito espaço lá embaixo	 http://chc.org.br/coluna/muito-espaco-la-embaixo/ . Acesso em: 09 ago.2021.
Viagem em torno do sol	http://chc.org.br/viagem-em-torno-do-sol/ . Acesso em: 09 ago.2021. 
Experimento comestível	 http://chc.org.br/experimento-comestivel/ . Acesso em: 09 ago.2021.

Tamanho astronômico	http://chc.org.br/artigo/tamanho-astronomico/ >. Acesso em: 09 ago.2021. 
Do bit ao Yottabyte: conheça os tamanhos dos arquivos digitais [infográfico]	 https://www.tecmundo.com.br/infografico/10187-do-bit-ao-yottabyte-conheca-os-tamANHOS-dos-arquivos-digitais-infografico-.htm > . Acesso em 09 ago.2021.

Fonte: Elaborado pelos autores

- Transcreva as palavras desconhecidas no caderno.
- Faça um resumo de até 5 linhas do assunto principal do texto.
- Transcreva as medidas que foi possível encontrar ao longo da leitura.
- Qual a grandeza medida e a sua unidade padrão?

Professor, auxilie os alunos a levantar hipóteses sobre a palavra desconhecida dentro do contexto lido e, ao final, confirme (ou não) a hipótese com o auxílio do dicionário físico ou online.

O Resumo deve ser lido aos demais integrantes da sala, para que todos possam ter conhecimento do que cada grupo pesquisou.

*Em lousa, faça um quadro para que os alunos possam redigir as medidas encontradas. Nesse momento, observe como eles recuperam os conceitos aprendidos no ensino fundamental sobre **potência e notação científica**. Caso haja erros, não corrija nesse momento. Primeiro, faça uma revisão e, depois, questione os estudantes se eles percebem alguma incoerência.*

Por fim, faça o segundo quadro, abaixo, em lousa, para que se destaque as grandezas encontradas nos textos.

Grandeza	Nome da unidade	Símbolo da unidade
Tempo	segundo	s
Comprimento	metro	m
Preencha com as demais grandezas destacadas pelos alunos		

Fonte: Elaborado pelos autores

Professor, é possível que seja necessário que se realize uma retomada das propriedades de potência e de notação científica, sugerimos o quadro abaixo:

Revisando as propriedades de potência.

- ▶ 1ª propriedade: se a é um número real não nulo, e m e n são números inteiros, então:
 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, desde que $a \neq 0$ se $m \leq 0$ ou $n \leq 0$.
- ▶ 2ª propriedade: se a é um número real não nulo, e m e n são números inteiros, então:
 $a^m \div a^n = a^{m-n}$.
- ▶ 3ª propriedade: se a e b são números reais, e m é um número inteiro, então:
 $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, desde que $a \cdot b \neq 0$ se $m \leq 0$.
- ▶ 4ª propriedade: se a e b são números reais, com $b \neq 0$, e m é um número inteiro, então:
 $(a \div b)^m = a^m \div b^m$, desde que $a \neq 0$ se $m \leq 0$.
- ▶ 5ª propriedade: propriedade: se m e n são números inteiros, e a é um número real, então: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, se $m \leq 0$ ou $n \leq 0$.

Notação científica

Na notação científica, os números são dados na forma $a \cdot 10^n$, em que a é um número real, maior ou igual a um e menor do que 10, ou seja, $1 \leq a < 10$, enquanto n é um número inteiro.

Professor, caso tenha percebido concepções equivocadas no exercício anterior, nesse momento havendo necessidade, questione os alunos sobre os erros encontrados, a fim de colocar em conflito cognitivo, e realizando os ajustes necessários.

Visando a apresentar a matemática como um conhecimento humano construído, sugerimos que o professor distribua as unidades de medidas encontradas ao longo da leitura entre os alunos e proponha uma breve pesquisa sobre a história daquela unidade de medida, a ser apresentada oralmente aos colegas na próxima aula.

2.2 Turismo espacial



Devido aos avanços da tecnologia, além do turismo entre os diversos lugares do nosso planeta, pessoas comuns (não necessariamente astronautas) podem também escolher como destino “passear” na região orbital do nosso planeta por meio de uma simples passagem comercial.

Fonte: <https://pixabay.com/pt/illustrations/turismo-espacial-estrelas-nebulosa-2120059/>.

Acesso em: 06 ago. 2021.

Mais informações sobre Turismo Espacial no link:

<https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/guia-explica-turismo-espacial/>. Acesso em: 03 ago. 2021.



Vejam, no quadro 1, alguns números gerados em um passeio até o limite da órbita terrestre:

Quadro 1

COLUNA A	COLUNA B
Tempo (do início ao fim do passeio)	$\frac{1}{5}$ hora
Comprimento (altura máxima atingida)	328.084 pés
Velocidade (valor máximo atingido)	1025 m/s
Valor Monetário (Preço da passagem)	US\$ 250.000,00

Fontes: <https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/guia-explica-turismo-espacial/>,

<https://veja.abril.com.br/tecnologia/voo-bem-sucedido-bezos-inaugura-o-turismo-espacial-com-foguetes/>. Acesso em: 03 ago.2021.

a) Na Tabela 1, a coluna A representa:

() Constantes (☒) Grandezas () Taxas

b) Na Tabela 1, a coluna B representa:

() Grandezas (☒) Medidas () Coeficientes

c) Existe alguma unidade de medida na tabela 1 que você não conhece? Todas elas fazem parte do SI?

- d) Nem sempre as unidades do SI são utilizadas em nosso cotidiano, muitas vezes, utilizamos unidades de medidas fora do SI, pois se adequam melhor em situações específicas.

“Em todo caso, quando queremos fazer conversões entre unidades de medida, precisamos saber de alguma relação de igualdade existente entre elas.”

Propomos, no quadro 2, algumas relações de igualdade, você consegue completá-las? Complete a tabela e, caso não consiga, faça uma pesquisa para auxiliá-lo no preenchimento.

Quadro 2

GRANDEZA	RELAÇÃO DE IGUALDADE ENTRE AS UNIDADES DE MEDIDA
Tempo	1 hora equivale a (60) minutos
Comprimento	1 pé equivale a (0,305) metros
Velocidade	1 m/s equivale a (3,6) km/h
Valor Monetário	1 U\$ (dólar) equivale a (1U\$ ²) R\$ (reais)

Fonte: Elaborada pelos autores

- e) Sabendo das relações entre as unidades de medida do item b), reescreva o **Quadro 1**, convertendo os valores para as unidades de medida propostas no **Quadro 2**.
- f) Para finalizar, construa um algoritmo ou mapa mental para o processo de conversão de unidades de medida.

Resolução:

Professor, esse item pode ter mais de uma forma de responder, segue apenas uma sugestão de resolução:

- a) *Vide resposta na atividade proposta.*
- b) *Vide resposta na atividade proposta.*
- c) *Primeira parte: resposta pessoal. Na segunda parte, a única unidade de medida da tabela que faz parte do SI é m/s (grandeza velocidade).*
- d) *Vide respostas na Tabela 2*
- e)

² Professor, a relação entre o dólar e o real pode variar de acordo com o mercado financeiro.

<i>COLUNA A</i>	<i>COLUNA B</i>
<i>Tempo (do início ao fim do passeio)</i>	<i>12 minutos</i>
<i>Comprimento (altura máxima atingida)</i>	<i>100 000 metros</i>
<i>Velocidade (valor máximo atingido)</i>	<i>3690 km/h</i>
<i>Valor Monetário (Preço da passagem)</i>	<i>R\$ 1 282 500,00³</i>

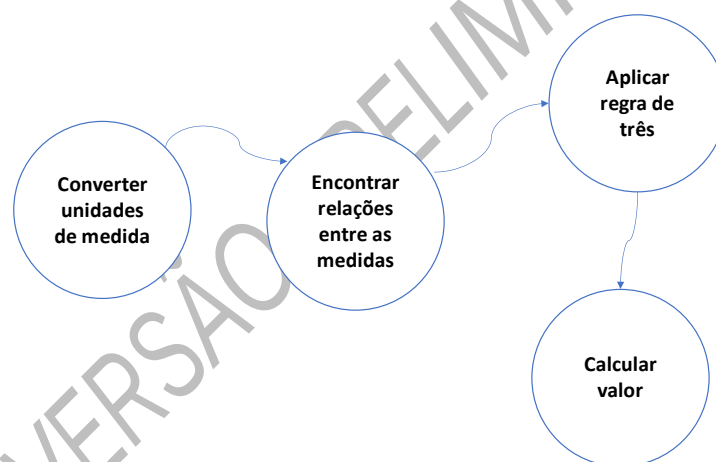
Algoritmo

1º passo: encontrar a relação entre as medidas;

2º passo: relacionar as razões, utilizando a regra de 3 (proporcionalidade);

3º passo: calcular o valor desconhecido.

Mapa mental



Fonte: Elaborada pelos autores

2.3 Dragão: o supercomputador da Petrobrás

Em 01 de junho de 2021, a estatal Petrobrás iniciou as operações com um supercomputador, batizado com o nome de Dragão. Com 20 toneladas de massa, 34 metros de comprimento, 200 TB (terabytes) de memória RAM e uma capacidade de transferência de 100 Gbps. A Petrobrás pretende utilizá-lo para o processamento de dados geofísicos, contribuindo na redução dos

³ Professor, a relação entre o dólar e o real pode variar de acordo com o mercado financeiro.

riscos em projetos de exploração de petróleo e de gás, gerando economia por meio do aumento da eficiência de seus projetos⁴.

Usando as especificações do texto sobre o supercomputador, responda as perguntas a seguir, para ilustrarmos a relação dele com aparelhos do nosso dia a dia.

- Um notebook convencional tem cerca de 2kg, o supercomputador equivale à massa de quantos notebooks?
- A memória do supercomputador pode ser equiparada a memória de quantos computadores convencionais com 8 GB de memória RAM?
- O supercomputador se equipara a quantos smartphones com 250 Mbps de capacidade de transmissão de dados?

Professor, caso observe que ainda há necessidade de a sua turma entrar em contato com mais atividades a fim de recuperar e/ou aprofundar os conceitos de potência, notação científica, múltiplos e submúltiplos das medidas, selecione atividades do livro didático da turma. Ao final, durante a correção, questione as respostas a fim de que os alunos reflitam, retomando os conceitos e aplicando os conhecimentos aprendidos.

f) Temos que 1 tonelada equivale a 1000 kg, podemos fazer a multiplicação: $20 \cdot 1000 \text{ kg} = 20\,000 \text{ kg}$, dividindo esse valor por 2 kg, que é a massa do notebook, temos $20.000 \text{ kg} \div 2 \text{ kg} = 10\,000$. Portanto, a massa do supercomputador equivale a 10 mil notebooks.

g) Temos que 1 TB equivale a 1000 GB, podemos fazer a multiplicação: $200 \cdot 1000 \text{ TB} = 200\,000 \text{ GB}$, dividindo esse valor por 8 GB, que é a memória do computador, temos $200\,000 \text{ GB} \div 8 \text{ GB} = 25\,000$. Portanto, a memória do supercomputador equivale a 25 mil computadores convencionais.

h) Temos que 1 Gbps equivale a 1000 Mbps, podemos fazer a multiplicação:

$100 \cdot 1000 \text{ Mbps} = 100\,000 \text{ Mbps}$, dividindo esse valor por 250 Mbps, que é a capacidade de transferência do smartphone, temos $100\,000 \text{ Mbps} \div 250 \text{ Mbps} = 400$. Portanto, a capacidade de transferência de dados do supercomputador equivale a 400 smartphones.

Momento 2: Explorando problemas

ATIVIDADE 3 – MEDIÇÕES DIRETAS E INDIRETAS

3.1 A dieta (re)certada

⁴ Disponível em: https://www.agenciapetrobras.com.br/Materia/ExibirMateria?p_materia=983607. Acesso em: 03 ago.2021.

Acesse o material indicado no link ou realize a leitura do QRCODE, realize a leitura do conteúdo exposto e aguarde as orientações de seu professor.

<https://cienciahoje.org.br/artigo/a-dieta-reacertada/> Acesso em: 10 ago. 2021.



>

Professor, para o desenvolvimento dos conceitos de medições diretas, indiretas e de razões entre grandezas, propomos a leitura do texto.

*Ao final da leitura, retome com os alunos a distinção entre os conceitos massa e peso. Destaque que **massa** é a quantidade de matéria e **peso** é a medida da força de atração gravitacional sobre um objeto. Ou seja: $p = m \cdot g$, sendo assim, são grandezas diretamente proporcionais e, quanto maior a massa de um corpo, maior será o seu peso. Para se aferir a massa, há uma **medição direta**, que consiste em comparar diretamente a grandeza a medir com outra da mesma espécie, e cujo valor se escolheu para unidade.*

*Em seguida, destaque que o cálculo do índice de massa corpórea (IMC) é uma **medição indireta**, pois a medida da grandeza é obtida por cálculo matemático de outras grandezas medidas diretamente, como **massa (em kg) dividida pela altura (em metros) elevada ao quadrado**.*

Assim como o IMC, grandezas como densidade, velocidade e aceleração também são exemplos de grandezas de medição indireta. Dessa forma, questione os estudantes se esses conceitos já foram abordados nas aulas de Ciências da Natureza.

3.2 Trocando calor com o ambiente

A Capacidade Térmica é a grandeza que mede a quantidade de calor (energia térmica) necessária para variar a temperatura de um determinado corpo. Sua medição é feita de forma indireta através da razão entre a quantidade de calor e a variação da temperatura, por exemplo, se um corpo possui capacidade térmica de $12 \text{ cal/}^\circ\text{C}$, significa que, se ele receber 12 calorias do ambiente, sua temperatura aumenta em 1°C , ou, se ele ceder 12 calorias para o ambiente, sua temperatura diminui em 1°C . Algebricamente, podemos escrever a fórmula $C = \frac{Q}{\Delta t}$.⁵

⁵ Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/capacidade-termica/>; e <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/fisica/o-que-e-capacidade-termica.htm> . Acesso em: 10 ago. 2021

- a) Calcule a capacidade térmica de um recipiente de vidro que precisa de 2 kcal para aumentar sua temperatura em 20°C (use: 1 kcal = 1000 cal).
- b) Se o recipiente do item a) fosse de alumínio, com capacidade térmica de 40 cal/°C, ele esquentaria mais rápido? Justifique sua resposta.
- c) Como desafio, calcule a quantidade de calor, em kcal, que o recipiente de alumínio do item b) precisa receber para aumentar sua temperatura em 100°C.

a) *Primeiro, vamos converter 2 kcal para calorias (multiplicando por 1000), encontrando o valor de 2000 cal, agora aplica-se a razão, para determinar a capacidade térmica:*

$$C = \frac{2000 \text{ cal}}{20^\circ \text{C}} = 100 \text{ cal/}^\circ\text{C}$$

b) *Sim, ele esquentaria mais rápido, porque a capacidade térmica do alumínio é menor, necessitando de menos energia para esquentar (mudar sua temperatura).*

c) *Temos a informação no enunciado do item b), que a capacidade térmica do alumínio é $C = 40 \text{ cal/}^\circ\text{C}$, e temos dado o valor da variação da temperatura $T = 100^\circ\text{C}$, determinamos a quantidade de calor, resolvendo a equação $40 = Q / 100$, que implica $Q = 40 \cdot 100 = 4000 \text{ cal}$, para converter para kcal dividimos $4000 \div 1000 = 4$, e a resposta será 4 kcal.*

3.3 Tempo de download

Chamamos de tempo de *download* o tempo previsto para transferir uma certa quantidade de dados que está na internet para algum dispositivo eletrônico (aparelhos móveis em geral e computadores pessoais). Ele é calculado pela razão entre o tamanho do arquivo (normalmente em múltiplos de bytes: KB, MB, GB, TB etc.) e a velocidade da conexão com a internet (normalmente em múltiplos de bits por segundo: Kbps, Mbps, Gbps etc.).

Observação: *é importante lembrar que, nos cálculos, é necessário converter todos os valores para bytes(B) ou bits(b), para que a resposta esteja correta, dado que 1 byte = 8 bits.*

Vamos praticar! Suponha que a velocidade da conexão com a internet seja de 30 Mbps:

- a) Qual o tempo gasto para baixar 200 fotos de 1,5 MB?
- b) Qual o tempo gasto para baixar um vídeo de 350 MB?
- c) Escreva uma função que relacione a quantidade de dados transferidos em função do tempo de download.
- d) Esboce um gráfico que represente essa função no plano cartesiano.

Observação: professor, no item d), ao pedir que os estudantes esbocem um gráfico, discuta com eles a relação de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas e o tipo de função gerada.

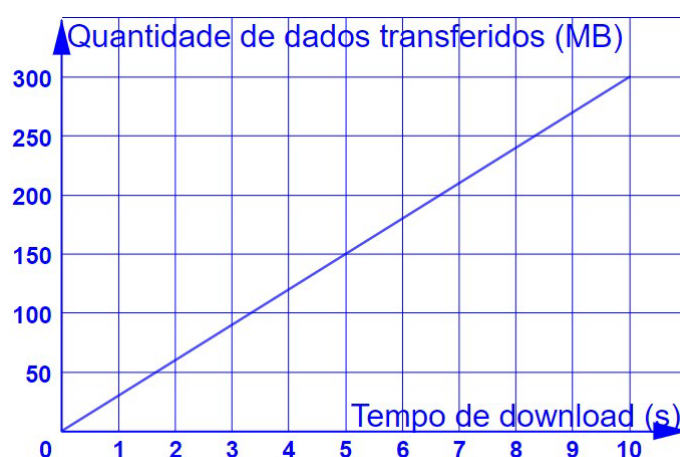
a) *Fazendo a multiplicação: $200 \cdot 1,5 \text{ MB} = 300 \text{ MB}$, temos que 200 fotos equivalem a 300 MB, convertendo de bytes (B) para bits (b,) multiplicando $300 \text{ MB} \cdot 8 = 2400 \text{ Mb}$,*

encontramos o tamanho das fotos em bits. E determinamos o tempo pela divisão $2400 \div 30 = 80$ segundos.

b) Primeiro convertemos de bytes (B) para bits (b), multiplicando $350 \text{ MB} \cdot 8 = 2800 \text{ Mb}$, encontramos o tamanho do vídeo em bits. E determinamos o tempo pela divisão $2800 \div 30 = 93,33$ segundos.

c) A função será do tipo afim, com $f(x) = 30 \cdot x$, em que $f(x)$ representa quantidade de dados transferidos e x representa o tempo de download.

d)



Fonte: Elaborado pelos autores

Momento 3: Verificando conhecimentos

ATIVIDADE 4 – QUESTÕES DO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO (ENEM)

4.1 (ENEM – 2017) Uma padaria fabrica biscoitos que são embalados em pacotes com 10 unidades, e cada pacote pesa 85 gramas. Na informação ao consumidor lê-se : "A cada 15 g de biscoito correspondem 90 quilocalorias ". Quantas quilocalorias tem um desses biscoitos?

- (A) 6 (B) 14 (C) 51 (D) 60 (E) 510

Resolução:

Massa de um biscoito: $\frac{85}{10} = 8,5 \text{ g}$

Cálculo das quilocalorias de um biscoito

$$15g \rightarrow 90kcal$$

$$8,5g \rightarrow xkcal$$

$$x = \frac{90 \cdot 8,5}{15} \Rightarrow x = 6 \cdot 8,5 = 51kcal$$

4.2 (ENEM 2019) O Sistema Métrico Decimal é o mais utilizado atualmente para medir comprimentos e distâncias. Em algumas atividades, porém, é possível observar a utilização de diferentes unidades de medida. Um exemplo disso pode ser observado no quadro.

Unidade	Equivalência
Polegada	2,54 centímetros
Jarda	3 pés
Jarda	0,9144 metros

Fonte: ENEM – 2019

Assim, um pé, em polegada, equivale a

- (A) 0,1200 (B) 0,3048 (C) 1,0800 **(D) 12,0000** (E) 36,0000

Resolução:

Conversão das medidas de pés para jardas:

Pés Jardas

$$3 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow x$$

$$x = \frac{1}{3}, \text{logo, } 1 \text{ pé equivale a } \frac{1}{3} \text{ de jardas}$$

Conversão das medidas em jardas para metros:

Jardas Metros

$$1 \rightarrow 0,9144$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow x$$

$$x = \frac{0,9144}{3} = 0,3048, \text{logo, } \frac{1}{3} \text{ jardas} = 1 \text{ pé equivale a } 0,3048 \text{ m ou } 30,48 \text{ cm}$$

Conversão das medidas em pés para polegadas

Polegadas Centímetros

$$1 \rightarrow 2,54$$

$$x \rightarrow 30,48$$

$$x = \frac{30,48}{2,54} = 12, \text{ logo, } 1 \text{ pé} = 30,48 \text{ cm equivale a } 12 \text{ polegadas}$$

4.3 (ENEM 2016) - Densidade absoluta (d) é a razão entre a massa de um corpo e o volume por ele ocupado. Um professor propôs à sua turma que os alunos analisassem a densidade de três corpos: d_A , d_B e d_C . Os alunos verificaram que o corpo A possuía 1,5 vez a massa do corpo B, e esse, por sua vez, tinha $3/4$ da massa do corpo C. Observaram, ainda, que o volume do corpo A era o mesmo do corpo B e 20% maior do que o volume do corpo C.

Após a análise, os alunos ordenaram corretamente as densidades desses corpos da seguinte maneira

(A) $d_B < d_A < d_C$

(B) $d_B = d_A < d_C$

(C) $d_C < d_B = d_A$

(D) $d_B < d_C < d_A$

(E) $d_C < d_B < d_A$

Professor, essa atividade tem como objetivo propor ao estudante um resgate dos conhecimentos já estabelecidos, e, ainda, interpretar a situação-problema e extrair todos os dados apresentados, e assim propor uma resolução plausível da situação apresentada. Na devolutiva da atividade proposta, discuta as possíveis estratégias obtidas pelos estudantes.

Resolução:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_A = \text{Massa do corpo A} \\ M_B = \text{Massa do corpo B} \\ M_C = \text{Massa do corpo C} \\ V_A = \text{Volume do corpo A} \\ V_B = \text{Volume do corpo B} \\ V_C = \text{Volume do corpo C} \\ d_A = \text{Densidade do corpo A} \\ d_B = \text{Densidade do corpo B} \\ d_C = \text{Densidade do corpo C} \end{array} \right. \quad \text{Dados do problema} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_A = 1,5 \cdot M_B \text{ (I)} \\ M_B = \frac{3}{4} \cdot M_C \text{ (II)} \\ V_A = V_B \text{ (III)} \\ V_A = \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot V_C \Rightarrow V_A = 1,2 \cdot V_C \text{ (IV)} \end{array} \right.$$

Da equação (II), temos:

$$M_B = \frac{3}{4} \cdot M_C \Rightarrow M_C = \frac{M_B}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \boxed{M_C = M_B \cdot \frac{4}{3} (V)}$$

Da equação (IV), temos:

$$V_A = 1,2 \cdot V_C \Rightarrow \boxed{V_C = \frac{V_A}{1,2} (VI)}$$

Da igualdade (III), temos que:

$$\boxed{V_C = \frac{V_B}{1,2} (VII)}$$

Determinando as densidades de cada corpo apresentado na situação problema, temos:

Densidade do corpo A

$$\boxed{d_A = \frac{M_A}{V_A} = \frac{1,5 \cdot M_B}{V_B} = 1,5 \cdot d_B (VIII)}$$

Densidade do corpo C

$$\boxed{d_C = \frac{M_C}{V_C} = \frac{\frac{4}{3} \cdot M_B}{\frac{V_B}{1,2}} = \frac{4}{3} \cdot M_B \cdot \frac{1,2}{V_B} = 0,4 \cdot 4 \cdot \frac{M_B}{V_B} \Rightarrow d_C = 1,6 \cdot d_B (IX)}$$

De (VIII) e (IX), podemos concluir que:

$$d_B < d_A < d_C \text{ (Alternativa "A")}$$

Considerações sobre a avaliação

Ao final deste percurso de aprendizagem, a expectativa é de que os estudantes interpretem e compreendam textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empreguem unidades de medida de diferentes grandezas e realizem as conversões possíveis entre elas, adotando ou não o Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

Orientações para recuperação

A avaliação de aprendizagem deve ser um processo contínuo realizado ao longo da utilização deste material. Durante a realização das atividades, o professor deve estar atento para eventuais dificuldades dos estudantes.

Essa observação é fundamental para que consiga propor, ao longo do processo, atividades de recuperação que ajudem o estudante a acompanhar melhor o curso e obter sucesso na realização das atividades. Para isso, é necessário que o professor dedique um tempo de sua aula para a discussão dos erros mais frequentes encontrados no processo, questionando os alunos sobre suas respostas, causando conflitos cognitivos e avanço nas aprendizagens.

Destaca-se, também, a correta identificação da natureza da dificuldade apresentada pelos estudantes: se está relacionada a alguma defasagem anterior (erros em operações básicas), ou se está ligada à especificidade de um determinado conceito ou procedimento operatório.

Por fim, cabe ressaltar, também, que se os estudantes forem envolvidos em atividades contextualizadas, nas quais eles sejam os protagonistas, muitas das dificuldades podem ser superadas, e os objetivos de aprendizagem, plenamente atingidos.

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 3 – RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS E SUAS APLICAÇÕES

Competência Específica 3

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

A competência 3, em essência, está relacionada ao chamado “fazer matemático”, ou seja, está intimamente ligada à essência da Matemática, que é a ação de resolver situações-problema, a qual é o centro da atividade matemática. Por esse motivo, deixa claro que os conceitos e procedimentos matemáticos somente terão significado caso os estudantes possam utilizá-los para solucionar os desafios com que se deparam. É importante frisar que a referida competência não se restringe apenas à resolução de problemas, mas também trata de sua elaboração. Isso revela uma concepção da resolução de problemas além da mera aplicação de um conjunto de regras. Outro grande destaque refere-se à modelagem matemática como a construção de modelos matemáticos que sirvam para generalizar ideias ou para descrever situações semelhantes. Essa competência tem estreita relação com a Competência Geral 2 da BNCC, no sentido da capacidade de formular e resolver problemas, e com a Competência Geral 4, que reforça a importância de saber utilizar as diferentes linguagens para expressar ideias e informações para a comunicação mútua.

Habilidade

(EM13MAT308) *Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno, ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.*

Essa habilidade refere-se à utilização dos conceitos trigonométricos para realizar medições, sobretudo em contextos em que não é possível acessá-las diretamente. Dessa maneira, os estudantes terão mais recursos para pensar sobre o entorno onde residem e fazer as intervenções de acordo com suas necessidades locais. Essa habilidade também amplia o trabalho iniciado nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e aprofundado nos Anos Finais do Ensino Fundamental, relativo ao estudo da Geometria das Transformações, em particular aquele referente ao uso da homotetia como forma de o estudante pensar em triângulos semelhantes e, com isso, resolver problemas para determinar medidas desconhecidas. No desenvolvimento dessa habilidade, pode existir uma inter-relação envolvendo o componente curricular de Física, ao desenvolver estudos associados à dinâmica, mais particularmente ao estudo de sistemas de forças e a determinação da força resultante atuante no sistema, o que permite uma organização integrada entre as aulas desses dois componentes.

Unidade temática

Geometria e Medidas

Objetos de conhecimento

- ▶ Lei dos senos e lei dos cossenos;
- ▶ Congruência e semelhança de triângulos (por transformações geométricas – isometrias);

Pressupostos metodológicos

- Utilizar instrumentos de medida, como réguas, trenas, transferidores e teodolitos rudimentares para medição e resolução de situações-problema.
- Medir, a partir da posição de três elementos não colineares, a distância (inacessível) entre dois deles conhecendo as distâncias entre os outros elementos e os ângulos adjacentes a eles.
- Reconhecer, com o uso de instrumentos de medição (régua e transferidor) e auxílio de calculadora científica ou comum, que a razão entre as medidas dos lados de um triângulo qualquer e o valor do seno do ângulo oposto a ele é constante.
- Aplicar as relações métricas para o cálculo da altura de um monumento, torre ou qualquer outra edificação inacessível, utilizando triângulos semelhantes.

- Utilizar as razões trigonométricas em outras áreas, como na obtenção da força resultante num corpo em que é aplicado um sistema composto por duas forças de intensidade conhecidas e o ângulo formado entre elas.

Orientações gerais sobre a Situação de Aprendizagem 3

Caro professor, para desenvolver a habilidade **EM13MAT308**, propomos o seguinte percurso: na atividade 1, um caminho de reconstrução dos conceitos das relações métricas e trigonométricas nos triângulos retângulos; na atividade 2, apresentaremos situações-problema em contextos variados; na atividade 3, apresentaremos duas relações importantes entre lados e ângulos para triângulos não retângulos: a da proporcionalidade entre lados e senos, (Lei dos Senos), e a generalização do teorema de Pitágoras (Lei dos Cossenos); e, na atividade 4, propomos algumas atividades para a verificação da aprendizagem dos estudantes. Ressaltamos, neste momento, que você, professor(a) tem a possibilidade de ampliar as atividades com outras que considerar necessárias, desde que promovam o desenvolvimento da habilidade em questão.

Momento 1: Recordando Conceitos

ATIVIDADE 1 – RELAÇÕES MÉTRICAS E TRIGONOMÉTRICAS APLICADAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO.

Esta é uma atividade de retomada e sistematização de conceitos. Vamos aprofundar o olhar sobre o triângulo retângulo para relembrar relações existentes entre seus elementos. Sugerimos a metodologia de resolução de problemas, fazendo o uso de boas perguntas na discussão com os estudantes.

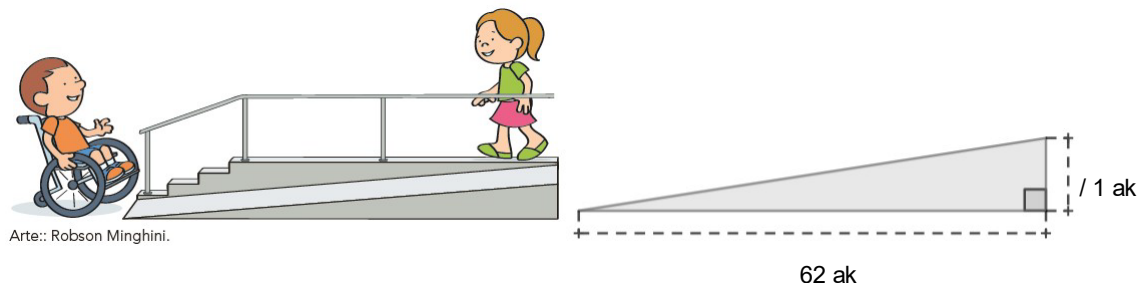
1.1 Qual é o problema da rampa?

Para retomar alguns conceitos que você já aprendeu, vamos resolver uma situação-problema importante para a garantia de um direito constitucional, que trata da igualdade de todos perante a lei, o direito à livre locomoção. Para a garantia desse direito, as rampas tornaram-se um importante meio facilitador de acesso às pessoas com deficiência, e é a trigonometria que dá o suporte para o cálculo da inclinação adequada a cada tipo de rampa.

A **inclinação da rampa** é chamada de **tangente do ângulo de subida**, isto é, a razão entre as distâncias percorridas vertical e horizontalmente, em cada trecho da rampa. Para que esteja adequada à acessibilidade, os valores obtidos em porcentagem, devem obedecer à **NBR 9050** estando **entre 5% e 8,33%**.

Vamos pensar sobre o que acontece se a medida do ângulo de inclinação de uma rampa for muito grande e sobre a importância de se ter uma norma para a construção de rampas?

O desenho a seguir apresenta o esboço de uma rampa para acessibilidade.

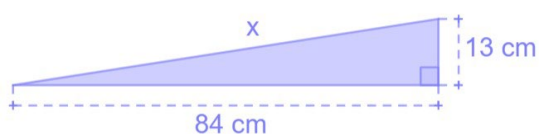


Fonte: Elaborado pelos autores

- A partir das informações apresentadas no esboço, determine o comprimento da rampa.
- Calcule a inclinação da rampa, e verifique se está adequada à NBR 9050.

Resolução:

a)



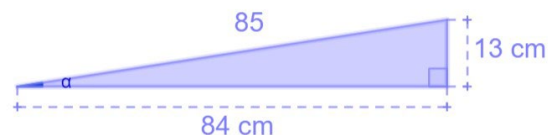
Fonte: Elaborado pelos autores

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} x^2 &= 13^2 + 84^2 \Rightarrow x^2 = 169 + 7056 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 = 7225 \Rightarrow x = \pm \sqrt{7225} \\ x &= \pm 85 \end{aligned}$$

A medida do comprimento deve ser um valor positivo, portanto o comprimento da rampa é de 85 cm.

b)



Fonte: Elaborada pelos autores

Seja α o ângulo de subida da rampa, como indicado na figura.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto (distância vertical)}}{\text{cateto adjacente (distância horizontal)}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{13}{84} \cong 0,15$$

Portanto, como a inclinação da rampa é de aproximadamente 0,15 ou 15%, concluímos que não está adequada à NBR 9050, pois não está entre 5% e 8,33%.

Desafio: construa um triângulo retângulo que represente uma rampa em sua escola ou na sua comunidade, e verifique se sua inclinação está de acordo com a NBR 9050. Caso descubra que não esteja, discuta com seu professor e colegas se há uma solução que possa torná-la adequada à NBR 9050.

Resolução: resposta pessoal.

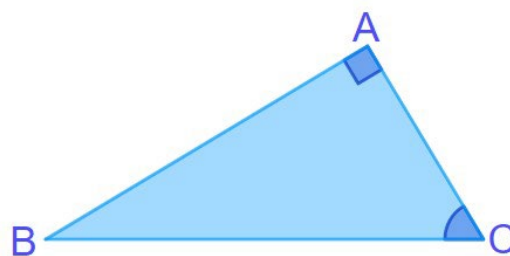
É importante orientar os estudantes para a construção do triângulo retângulo solicitado, usando instrumentos de desenho como régua, transferidor, esquadro, compasso ou ferramentas digitais, pois, dessa forma é oportunizada a aplicação de conceitos geométricos fundamentais estudados em anos anteriores.

A resolução do desafio proposto pode levar bastante tempo, cabendo ao professor planejar cuidadosamente as condições didáticas necessárias para a realização da atividade.

1.2 O que o triângulo retângulo tem?

O **triângulo** é uma figura geométrica elementar presente em nosso cotidiano. Um triângulo é chamado de retângulo quando tem um **ângulo reto**. Os lados que formam o ângulo reto são denominados **catetos** e o lado oposto ao ângulo reto, **hipotenusa**.

Vamos indicar os elementos do triângulo retângulo ABC a seguir.



Fonte: Elaborado pelos autores

a) Quais são os vértices de ABC?

Resolução:

b) Qual é o ângulo reto de ABC?

a) Vértices: A, B e C

c) Quais lados correspondem aos catetos de ABC?

b) Ângulo $\widehat{BAC}$ ou $\widehat{A}$.

d) Qual lado corresponde à hipotenusa de ABC?

c) Lados AB e AC

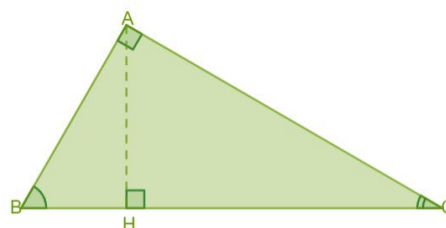
e) Quais são os ângulos agudos de ABC?

d) Lado BC

e) Ângulos: $\widehat{ABC}$ ou $\widehat{B}$ e $\widehat{ACB}$ ou $\widehat{C}$.

1.3 Relações métricas no triângulo retângulo - quando o foco do olhar é a medida de segmentos.

No triângulo ABC , retângulo em A , traçamos a altura $\overline{AH}$, relativa à hipotenusa $\overline{BC}$, determinando $\overline{BH}$, projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$, e $\overline{HC}$, projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$.



Fonte: Elaborado pelos autores

- a) Quais triângulos você identifica nesta figura?
- b) Recorte duas cópias de cada triângulo identificado no item “a” e encontre o triângulo semelhante aos triângulos dados no quadro abaixo. Faça seu registro colando os pares de triângulos semelhantes no espaço reservado.

Dica: Lembre-se de nomear os vértices no interior dos ângulos antes de recortar.

$$\triangle ABC \sim \triangle HAC$$

$$\triangle ABC \sim \triangle HBA$$

$$\triangle HBA \sim \triangle HAC$$

Resolução:

- a) Espera-se que os estudantes identifiquem 3 triângulos, $\triangle ABC$, $\triangle HAC$ e $\triangle HBA$.

b)

$$\triangle ABC \sim \triangle HAC$$



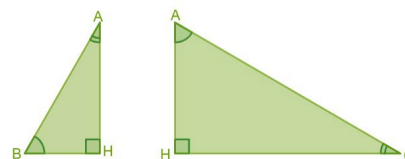
Fonte: Elaborado pelos autores.

$$\triangle ABC \sim \triangle HBA$$



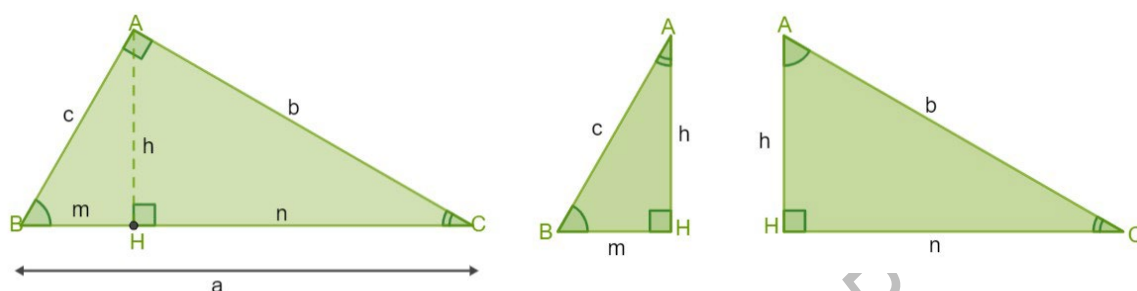
Fonte: Elaborado pelos autores.

$$\triangle HBA \sim \triangle HAC$$



Ao concluir que os triângulos são semelhantes, sabemos que seus ângulos são congruentes, e a medida de seus lados, proporcionais. A partir das proporções que envolvem as medidas dos lados e da altura dos triângulos, podemos estabelecer **relações métricas no triângulo retângulo**.

Observe as figuras a seguir, considerando a semelhança entre os triângulos formados, e complete as lacunas no quadro a seguir, obtendo as relações métricas:



Fonte: Elaborado pelos autores.

1. Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.				
$\Delta HAC \sim \Delta HBA$	$\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}$	$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} = \frac{b}{c}$	$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$	$h^2 = m \cdot n$
2. Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção do respectivo cateto sobre a hipotenusa.				
$\Delta ABC \sim \Delta HAC$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$	$\frac{c}{h} = \frac{b}{m} = \frac{a}{b}$	$\frac{b}{m} = \frac{a}{b}$	$b^2 = a \cdot m$
$\Delta ABC \sim \Delta HBA$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$	$\frac{c}{n} = \frac{b}{n} = \frac{a}{c}$	$\frac{c}{n} = \frac{a}{c}$	$c^2 = a \cdot n$
3. Em qualquer triângulo retângulo, o produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos catetos.				
$\Delta ABC \sim \Delta HAC$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$	$\frac{c}{h} = \frac{b}{m} = \frac{a}{b}$	$\frac{c}{h} = \frac{a}{b}$	$a \cdot h = b \cdot c$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Desafio: Considerando o triângulo retângulo ABC , a expressão que representa o Teorema de Pitágoras é dada por: $a^2 = b^2 + c^2$. Como você pode obter o Teorema de Pitágoras a partir das relações métricas apresentadas no quadro?

Resolução:

Sejam as igualdades: $\begin{cases} b^2 = a \cdot m & (I) \\ c^2 = a \cdot n & (II) \end{cases}$ e lembrando que $a = m + n$

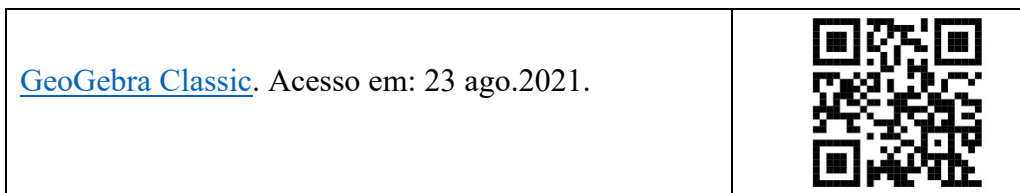
Adicionando as equações (I) e (II), temos que:

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (m + n) \stackrel{(m+n)=a}{\Rightarrow} b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

1.4 Relações trigonométricas no triângulo retângulo - quando os ângulos entram em foco.

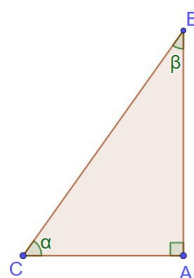
Agora vamos estudar algumas relações entre as medidas dos lados e dos ângulos do triângulo retângulo, são as **Relações Trigonométricas**.

Usando o software de geometria dinâmica *GeoGebra*, vamos construir o triângulo retângulo ABC da figura, a partir de um de seus ângulos agudos.



- ▶ Marcamos um ponto, origem do ângulo agudo, que chamamos de **C**;
- ▶ Com origem em **C**, traçamos duas semirretas, que formam o ângulo agudo de medida qualquer, que chamamos de α (sugerimos esconder os pontos obtidos na construção das semirretas);
- ▶ Construimos uma reta perpendicular a um dos lados do ângulo α , chamamos de **A** o ponto de interseção da perpendicular com o lado escolhido;
- ▶ Marcamos o ponto de interseção da perpendicular com o outro lado do ângulo. Chamamos esse ponto de **B**;

- ▶ Marcamos o ângulo reto $\widehat{BAC}$;
- ▶ Marcamos o outro ângulo agudo $\widehat{CBA}$, que chamamos de β ;
- ▶ Construimos o triângulo **CAB**.



<11 IM PR EM S A 3 AT 1 4 PG 47.svg>

Fonte: Elaborado pelos autores

Apresentamos a seguir um tutorial para a construção no *software GeoGebra*, o qual retrata a construção do triângulo **ABC**.

[Sugestão de construção de um triângulo](#)

[retângulo.pptx](#). Acesso em: 31 ago. 2021.

[<12_QR_PR_EM_S_A_3_AT_1_4_PG_48.svg>](#)



- a) Você já estudou que a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é 180° . Assim, o que podemos afirmar sobre a soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo?
- b) Tomando como base o triângulo **ABC**, construído anteriormente, observe atentamente o ângulo α , um dos ângulos agudos do triângulo retângulo **ABC**, o cateto oposto a α é o cateto do triângulo que está oposto a esse ângulo e o cateto adjacente a α é o cateto do triângulo que está adjacente a esse ângulo. Considerando o triângulo construído, indique, a hipotenusa do triângulo e os catetos oposto e adjacente a α .
- c) Analogamente para o outro ângulo agudo β , o cateto oposto a β é o cateto do triângulo que está oposto a esse ângulo e o cateto adjacente a β é o cateto do triângulo que está adjacente a esse ângulo. Considerando o triângulo construído, indique a hipotenusa do triângulo e os catetos oposto e adjacente a β .

Resolução:

- a) Considerando o triângulo construído no início da atividade, sabemos que:
- $$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ.$$

Resolvendo temos: $\alpha + \beta = 180^\circ - 90^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

- b) Hipotenusa: Lado oposto ao ângulo reto: $\overline{CB}$, cateto oposto em relação ao ângulo α : $\overline{BA}$ e Cateto adjacente em relação ao ângulo α : $\overline{CA}$.
- c) Hipotenusa: Lado oposto ao ângulo reto: $\overline{CB}$, cateto oposto em relação ao ângulo β : $\overline{CA}$ e cateto adjacente em relação ao ângulo β : $\overline{BA}$.
- d) Retome a construção feita no *GeoGebra* no início desta atividade. Agora vamos construir triângulos semelhantes ao triângulo **ABC**, traçando novas perpendiculares:

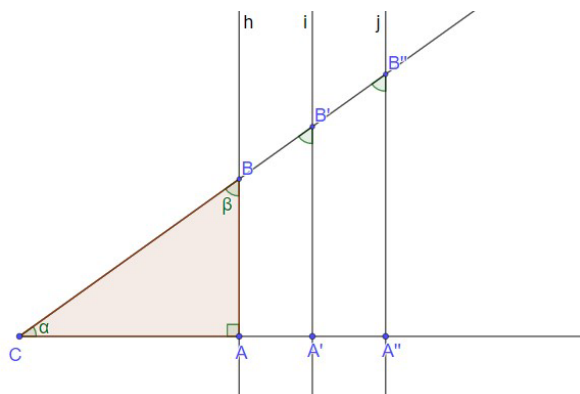
▶ Sobre a semirreta **CA**, traçamos outras duas perpendiculares. Chamamos de **A'** e **A''** os pontos de interseção dessas perpendiculares com a semirreta **CA**;

▶ Marcamos os pontos **B'** e **B''** de interseção das perpendiculares com a semirreta **CB**;

▶ Marcamos os ângulos retos **B'A'C** e **B''A''C**;

▶ Marcamos os ângulos agudos **CB'A'** e **CB''A''**, complementares de α .

▶ Construimos os triângulos **CA'B'** e **CA''B''**.



Fonte: Elaborado pelos autores

e) De que forma podemos justificar a semelhança entre os triângulos obtidos?

Resposta: os triângulos são retângulos e possuem um ângulo agudo em comum, então são semelhantes entre si pela congruência de seus ângulos.

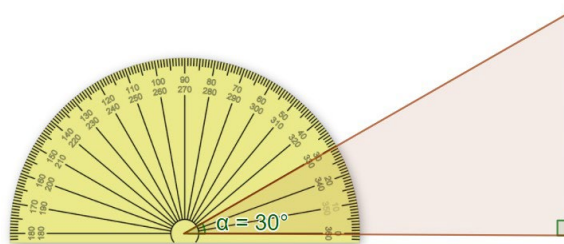
f) Como os triângulos **CAB**, **CA'B'** e **CA''B''** são semelhantes, sabemos que as razões entre as medidas de lados correspondentes são constantes. São as **razões trigonométricas**, chamadas de **seno**, **cosseno** e **tangente** de um ângulo agudo no triângulo retângulo. Complete o quadro que apresenta as razões trigonométricas para o ângulo α dos triângulos.

$\Delta CAB \sim \Delta CA'B' \sim \Delta CA''B''$	
$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{CB'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{CB''}}$	$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$
$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}} = \frac{\overline{CA''}}{\overline{CB''}}$	$\text{cos } \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$
$\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{CA''}}$	$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$

Fonte: Elaborado pelos autores

Desafio:

- a) De que maneira é possível aplicar as definições estudadas para calcular os valores aproximados de seno, cosseno e tangente do ângulo de 30° representado na figura a seguir? Faça seus registros e compare com a estratégia utilizada e com os valores encontrados por seus colegas.



[<14 IM PR S A 3 DESAFIO PG 50.svg>](#)

Fonte: Elaborado pelos autores

- b) Utilizando uma calculadora científica, verifique se os valores de $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ e $\tan 30^\circ$ fornecidos pela calculadora são próximos aos valores encontrados por você. Registre sua conclusão.

Resolução:

- a) *Resposta pessoal. Professor, na discussão da solução sugerimos compartilhar as diferentes estratégias e resultados obtidos pelos estudantes, para que percebam que, independente do triângulo construído, os valores obtidos para seno, cosseno e tangente do ângulo de 30° são iguais, mesmo que as aproximações sejam diferentes, por erros obtidos nas medidas. Sugerimos a construção no GeoGebra para uma melhor aproximação.*
- b) *Resposta pessoal. Professor, é importante conduzir as discussões, de forma a concluir que os valores de seno, cosseno e tangente de um determinado ângulo agudo no triângulo retângulo são constantes, independente das medidas de seus lados. Informe que isso possibilitou a construção de uma tabela de seno, cosseno e tangente de ângulos agudos, que pode ser consultada para a resolução de muitos problemas.*

Momento 2: Explorando conceitos

ATIVIDADE 2 – CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS E NOÇÕES DE CONGRUÊNCIA E SEMELHANÇA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO.

Caro estudante, você já se deparou com muitas situações em que podemos verificar a importância da matemática para que as pessoas resolvam problemas relacionados com seu cotidiano. Nesta atividade vamos apresentar conceitos e procedimentos matemáticos úteis em variados contextos que envolvem triângulos.

2.1 Um problema de altura, e agora? Relações trigonométricas aplicadas na elaboração de uma situação-problema.

É possível calcular a altura da sala de aula, de uma árvore, da caixa d'água, de torres, de monumentos, de um balão no céu... Você já pensou em como fazer esses cálculos?

Existem diversas ferramentas criadas para obter medidas desconhecidas, o **teodolito** é uma delas. Você já viu um teodolito ou já observou algum profissional utilizando um aparelho como esse?

A seguir colocamos a sugestão de um site para pesquisa, a fim de ampliar seus conhecimentos sobre diferentes tipos de teodolitos e seu uso em diferentes épocas.

<<http://clubes.obmep.org.br/blog/brincando-com-trigonometria-oficinas-obtendo-medidas-inaccessiveis/>>. Acesso em: 19 ago. 2021.



Ferramentas como transferidores e teodolitos têm funções parecidas, mas os teodolitos modernos possuem recursos mais avançados e fornecem mais dados a respeito das medições feitas. Que tal colocar a mão na massa e realizar um experimento para construir um teodolito caseiro e descobrir uma altura inacessível? Acesse um roteiro para este experimento.

<https://m3.ime.unicamp.br/arquivos/994/a_altura_da_arvore---folha_do_aluno.pdf>. Acesso em: 19 ago. 2021.



Professor, você encontrará materiais de apoio para a realização deste experimento acessando o link, ou realizando a leitura do QR CODE.

<<https://m3.ime.unicamp.br/recursos/994>> . Acesso em: 19 ago.2021.



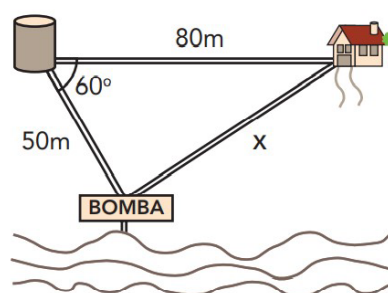
Agora, junte-se com um amigo e elabore uma situação-problema que envolva o cálculo de uma altura inacessível, por exemplo: medir a altura de uma árvore da escola, da caixa d'água, de um prédio. No enunciado do problema, inclua dados que você obterá usando instrumentos de medida, como régua, trena, transferidor e o teodolito caseiro que construiu (trocar com um amigo).

2.2 E se o triângulo não for retângulo? Relações trigonométricas aplicadas em triângulos quaisquer.

Desde a Antiguidade, o problema de obter medidas desconhecidas tem desafiado o ser humano. Na maioria das vezes, a figura do triângulo surge na modelagem destas situações. Quando o triângulo não é retângulo, e é necessário calcular uma ou mais medidas dos lados, ou dos ângulos, utilizamos relações trigonométricas conhecidas por **lei dos senos** e **lei dos cossenos**.

Vamos apresentar duas situações em que será necessário calcular a medida de distâncias inacessíveis. Como podemos medir sem medir? A que ferramentas matemáticas podemos recorrer?

- a) (AAP) Uma bomba d'água é utilizada para transportar água de um rio para outros dois locais: a casa e a caixa d'água, conforme figura a seguir:



[<18 IM PR EM S A 3 AT 2 2 A PG 52.svg>](#)

Fonte: Elaborado pelos autores

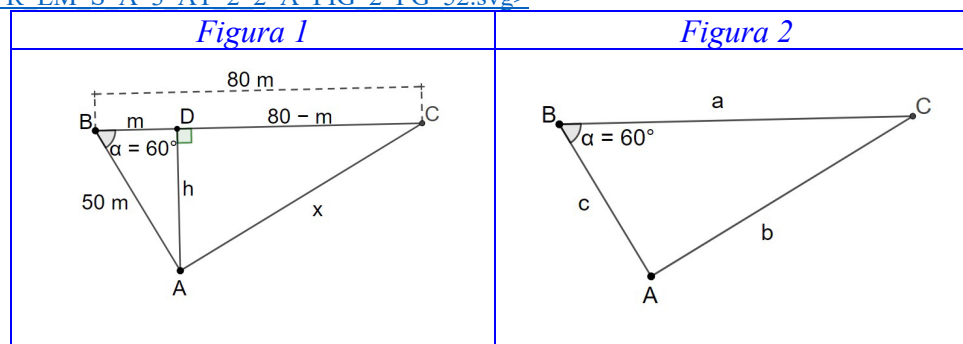
O proprietário da casa pretende bombear a água do rio diretamente para a casa. Ele terá que construir uma rede de encanamento de quantos metros?

Resolução:

Representamos a situação na figura 1 abaixo, nomeando os vértices dos triângulos. Na figura 2, uma solução possível é traçar a altura do triângulo ABC relativa ao vértice A, obtendo assim os triângulos retângulos ADB e ADC. Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle ADB$ e, em seguida, no $\triangle ADC$, e calculando o $\cos 60^\circ$, chegamos nas expressões:

[<19 IM PR EM S A 3 AT 2 2 A FIG 1 PG 52.svg>](#)

[<20 IM PR EM S A 3 AT 2 2 A FIG 2 PG 52.svg>](#)



Fonte: Elaborado pelos autores

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ADB e ADC (Figura 1), chegamos nas expressões:

$$\Delta ADB: 50^2 = m^2 + h^2 \quad (I)$$

$$\Delta ADB: \cos 60^\circ = \frac{m}{50} \Rightarrow m = 50 \cdot \cos 60^\circ \quad \overset{\cos 60^\circ = 0,5}{\Rightarrow} \quad m = 50 \cdot 0,5 = 25 \quad (II)$$

Substituindo o resultado obtido em (II) na equação (I), temos:

$$50^2 = m^2 + h^2 = 50^2 = 25^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 50^2 - 25^2 \Rightarrow h^2 = 2500 - 625 \Rightarrow h^2 = 1875$$

No ΔADC , temos que:

$$x^2 = (80 - m)^2 + h^2 \Rightarrow (80 - 25)^2 + 1875 \Rightarrow x^2 = 55^2 + 1875 \Rightarrow x^2 = 3025 + 1875 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 = 4900 \Rightarrow x = \pm \sqrt{4900}$$

A medida do comprimento da rede de encanamento deve ser um valor positivo, portanto, essa medida será de 70 metros.

Professor, na equação $x^2 = (80 - m)^2 + h^2$, pode-se verificar implicitamente uma importante relação trigonométrica, veja:

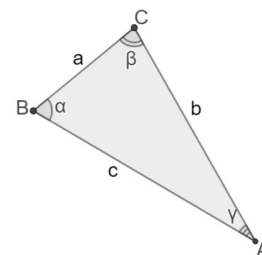
$$x^2 = 80^2 - 2 \cdot 80 \cdot m + m^2 + h^2 \quad \overset{m^2 + h^2 = 50^2 \text{ (I)}}{\Rightarrow} \quad x^2 = 80^2 - 2 \cdot 80 \cdot m + 50^2 \quad \overset{m = 50 \cdot \cos 60^\circ}{\Rightarrow} \\ x^2 = 80^2 - 2 \cdot 80 \cdot 50 \cdot \cos 60^\circ + 50^2 \Rightarrow x^2 = 80^2 + 50^2 - 2 \cdot 80 \cdot 50 \cdot \cos 60^\circ$$

Generalizando: a expressão que obtivemos para resolver o problema é um resultado conhecido como **Lei dos Cossenos**, que, aplicado em um triângulo qualquer, como na figura ao lado, pode ser escrita por:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$



a) Vamos agora organizar nossa descoberta. Considerando ainda o triângulo ABC , complete o quadro a seguir, para cada uma das leis apresentadas.

Ângulo considerado	Lado oposto ao ângulo	Lados adjacentes	Lei dos cossenos
Ângulo α	a	b, c	$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$
Ângulo β	b	a, c	$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$
Ângulo γ	c	a, b	$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$

Fonte: Elaborado pelos autores

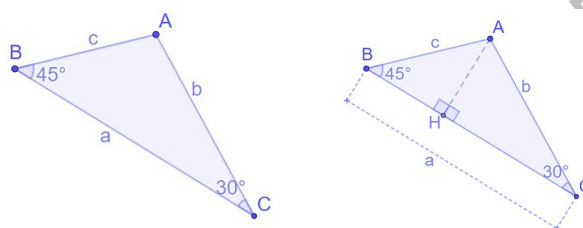
- b) A figura mostra o trecho de um rio onde se deseja construir uma ponte AC. De um ponto B a 100 metros de A, mediu-se o ângulo $\widehat{ACB} = 30^\circ$, e do ponto A, mediu-se o ângulo $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Calcule o comprimento da ponte.



Fonte: Elaborado pelos autores

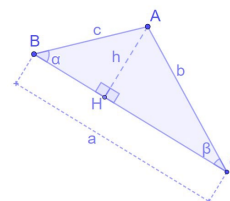
Resolução:

Representando a situação no triângulo ABC abaixo, e traçando a altura relativa ao vértice A, obtemos os triângulos AHB e AHC.



Fonte: Elaborado pelos autores

Considerando a figura a seguir:



Fonte: Elaborado pelos autores

Temos:

$$\begin{aligned} \Delta AHB \\ \text{sen} \alpha &= \frac{h}{c} \\ h &= c \cdot \text{sen} \alpha \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta AHC \\ \text{sen} \beta &= \frac{h}{b} \\ h &= b \cdot \text{sen} \beta \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

Igualando (I) e (II), obtemos:

$$c \cdot \text{sen} \alpha = b \cdot \text{sen} \beta \Rightarrow \boxed{\frac{c}{\text{sen} \beta} = \frac{b}{\text{sen} \alpha}}$$

*Essa relação de proporcionalidade é conhecida como **Lei dos Senos**.*

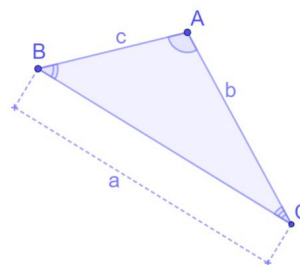
Na atividade proposta, temos:

$$\frac{100}{\sin 30^\circ} = \frac{x}{0,71} \quad (\text{use: } \sin 30^\circ = 0,5 \text{ e } \sin 45^\circ \cong 0,71)$$

$$\frac{100}{0,5} = \frac{x}{0,71} \Rightarrow 0,5x = 71 \Rightarrow x \cong \frac{71}{0,5} \cong 142m$$

Generalizando: a expressão que obtivemos para resolver o problema é um resultado conhecido como Lei dos Senos, que, aplicado em um triângulo qualquer, como na figura ao lado, pode ser escrita por:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$



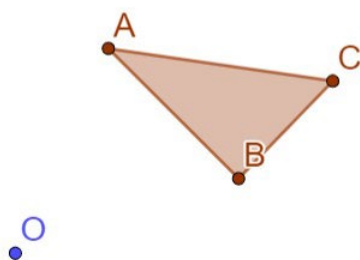
Fonte: Elaborado pelos autores

2.3 Você é bom de desenho? Que tal se aperfeiçoar usando a homotetia?

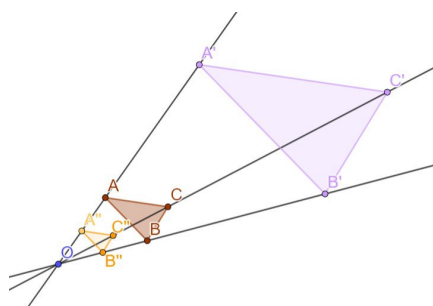
Considerando o triângulo na figura abaixo, outros podem ser obtidos a partir dele, por meio de uma transformação homotética ou **homotetia**. Nesse tipo de transformação, o tamanho das figuras pode ser alterado, mas os triângulos obtidos são semelhantes.

- a) Usando homotetia, construa triângulos semelhantes ao triângulo dado. Para fazer essa construção com o *GeoGebra*, você pode reproduzir esta figura desenhando um ponto e um triângulo qualquer.

Resolução:



Fonte: Elaborado pelos autores



Fonte: Elaborado pelos autores

- ▶ Trace as retas que passam por **O** e por cada vértice do triângulo;
- ▶ Na semirreta $\overrightarrow{OA}$, marque o ponto **A'**, de forma que a medida de $\overrightarrow{OA'}$ seja o dobro da medida de $\overrightarrow{OA}$, e o ponto **A''**, de forma que a medida de $\overrightarrow{OA''}$ seja a metade da medida de $\overrightarrow{OA}$;
- ▶ Repita o mesmo procedimento para os outros vértices do triângulo;

- Desenhe os triângulos $A'B'C'$ e $A''B''C''$, unindo os pontos marcados.

Apresentamos a seguir um tutorial para a construção no *software GeoGebra*, o qual retrata a construção de uma transformação homotética de um triângulo qualquer.

Utilizando a homotetia para construir triângulos semelhantes.pptx. Acesso em: 31 ago. 2021.



- b) Observe os triângulos na figura. Eles têm o mesmo formato? O que podemos afirmar sobre seus tamanhos?
- c) A redução ou ampliação de um polígono por homotetia preserva a proporcionalidade das medidas lineares, de acordo com uma razão chamada **razão de homotetia**. Qual é a razão de homotetia para cada um dos triângulos obtidos a partir do triângulo ABC?
- d) Que transformação do triângulo ABC seria obtida se a razão de homotetia fosse igual a 1? E se a razão de homotetia fosse um número negativo?
- e) Acesse uma reprodução desta construção no link ou QR Code:

<<https://www.geogebra.org/m/vdur9vku>>.
Acesso em: 24 ago.2021.



Altere o valor da razão de homotetia, movendo o controle deslizante. Confirme suas respostas para esta atividade.

Resolução:

- b) *São triângulos semelhantes de tamanhos diferentes.*
- c) *A razão de homotetia é igual a 2 para o triângulo $A'B'C'$, e $\frac{1}{2}$ para o triângulo $A''B''C''$.*
- d) *Os triângulos seriam congruentes se a razão de homotetia fosse igual a 1. Para razão negativa, o triângulo obtido seria a imagem semelhante invertida do triângulo original em relação ao centro de homotetia.*
- e) *Professor, na realização deste item, é possível fazer generalizações sobre transformações provocadas a partir de razões de homotetia maiores que 1, entre 0 e 1, igual a 1 ou negativas, e ainda verificar as construções feitas. Sugerimos, também, explorar a ferramenta “Homotetia” disponível em um dos ícones do GeoGebra.*

2.4 O que você vê ao seu redor? Apurando o olhar para as isometrias.

Pesquise o significado da palavra **isometria**, e exemplos dos tipos de isometria: reflexão, translação e rotação. Essas transformações geométricas podem ser facilmente observadas em elementos da natureza e obras de arte. Você pode fazer o registro de sua pesquisa por meio de texto, figuras, fotos, vídeo etc.

*Professor, você pode planejar a melhor forma de socializar as pesquisas feitas, mas lembre-se de que é importante destacar a **congruência** entre as figuras geradas por isometrias*

Momento 3: Explorando situações-problemas

ATIVIDADE 3 – SITUAÇÕES-PROBLEMA QUE ENVOLVEM TRIÂNGULOS EM VARIADOS CONTEXTOS.

3.1 (ETEC – SP) - Leia o texto a seguir:

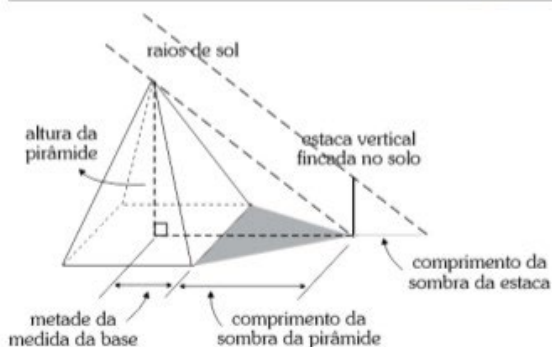
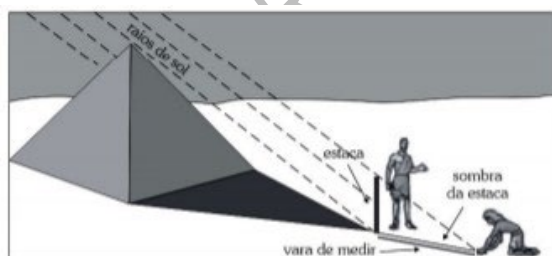
Tales, o grande matemático do século VI a. C., foi também um próspero comerciante. Certa vez, visitou o Egito em viagem de negócios. Nessa ocasião, ele assombrou o faraó e toda a corte egípcia, medindo a altura da pirâmide de Quéops, cuja base é um quadrado de 230 metros de lado.

Para calcular a altura da pirâmide, Tales fincou verticalmente no solo uma estaca que ficou com altura de 1 metro acima do solo.

As medidas de comprimento da sombra da pirâmide e da sombra da estaca são, respectivamente, 255 metros e 2,5 metros.

Com base nas informações do texto, é válido afirmar que a altura da pirâmide, em metros, é:

- (A) 14,80 (B) 92,50 (C) 148 (D) 925 (E) 1.480



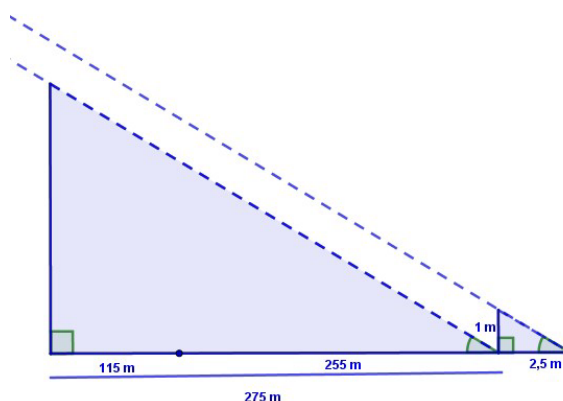
[<31_IM_PR_S_A_3_AT_3_1_PG_57.svg>](#)

Fonte: ETEC/SP

Alternativa correta: (C)

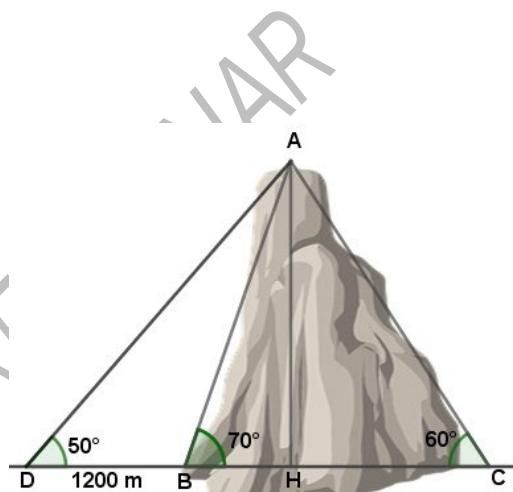
Observe que os triângulos são semelhantes, pois são retângulos e os ângulos formados pelos raios solares com o chão são congruentes. Considerando as informações apresentadas no enunciado e indicadas na figura ao lado, temos:

$$\frac{x}{1} = \frac{370}{2,5} \Rightarrow 2,5x = 370 \Rightarrow x = \frac{370}{2,5} = 148$$



Fonte: Elaborado pelos autores

3.2 Um alpinista, avista o topo de uma montanha (ponto A) segundo um ângulo de 55° com a horizontal (Ponto D). Ao caminhar 1600 metros em linha reta, chega à sua base (ponto B), e, desse ponto, avista o topo da montanha, sob um ângulo de 70° com a horizontal. Seu amigo, que está na base do outro lado da montanha (ponto C), enxerga o mesmo ponto do topo, sob um ângulo de 60° com a horizontal. Esta situação está representada no esquema a seguir, em que AH é a altura da montanha.



Fonte: Elaborado pelos autores

- Calcule o comprimento aproximado do lado AB da montanha.
- Calcule o comprimento aproximado do lado AC da montanha.
- Calcule a altura da montanha.

Dados:

$\sin 15^\circ \cong 0,26$	$\cos 15^\circ \cong 0,97$	$\operatorname{tg} 15^\circ \cong 0,27$
$\sin 55^\circ \cong 0,82$	$\cos 55^\circ \cong 0,57$	$\operatorname{tg} 55^\circ \cong 1,43$
$\sin 70^\circ \cong 0,94$	$\cos 70^\circ \cong 0,34$	$\operatorname{tg} 70^\circ \cong 2,75$
$\sin 60^\circ \cong 0,87$	$\cos 60^\circ = 0,5$	$\operatorname{tg} 60^\circ \cong 1,73$

Resolução:

a) Vamos calcular as medidas dos ângulos $\widehat{ABD}$ e $\widehat{DAB}$:

$$\text{med}(\widehat{ABD}) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\text{med}(\widehat{DAB}) = 180^\circ - (55^\circ + 110^\circ) = 15^\circ$$

Aplicamos a Lei dos senos no triângulo ABD:

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen } 55^\circ} = \frac{\overline{DB}}{\text{sen } 15^\circ} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{0,82} \cong \frac{1600}{0,26} \Rightarrow \overline{AB} \cong 5046$$

O comprimento do lado AB da montanha é aproximadamente 5046 metros.

b) Aplicamos a Lei dos Senos no triângulo ABC:

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } 70^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } 60^\circ} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{0,94} \cong \frac{5046}{0,87} \Rightarrow \overline{AC} \cong 5452$$

O comprimento do lado AC da montanha é aproximadamente 5452 metros.

c) Podemos aplicar $\text{sen } 60^\circ$ no triângulo AHC ou $\text{sen } 70^\circ$ no triângulo ABH, neste último, temos:

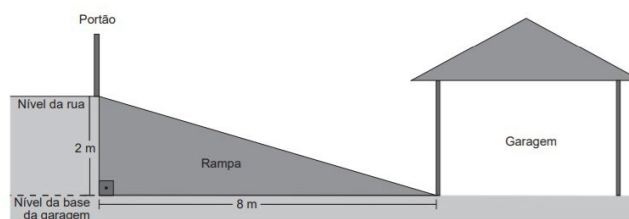
$$\text{sen } 70^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} \Rightarrow 0,94 \cong \frac{\overline{AH}}{5046} \Rightarrow \overline{AH} \cong 4743$$

A altura da montanha é aproximadamente 4743 metros.

3.3 (ENEM 2018) A inclinação de uma rampa é calculada da seguinte maneira: para cada metro medindo na horizontal, mede-se x centímetros na vertical. Diz-se, nesse caso, que a rampa tem inclinação de x%, como no exemplo da figura:



A figura apresenta um projeto de uma rampa de acesso a uma garagem residencial cuja base, situada 2 metros abaixo do nível da rua, tem 8 metros de comprimento.



Depois de projetada a rampa, o responsável pela obra foi informado de que as normas técnicas do município onde ela está localizada exigem que a inclinação máxima de uma rampa de acesso a uma garagem residencial seja de 20%.

Se a rampa projetada tiver inclinação superior a 20%, o nível da garagem deverá ser alterado para diminuir o percentual de inclinação, mantendo o comprimento da base da rampa. Para atender às normas técnicas do município, o nível da garagem deverá ser

- (A) **elevado em 40 cm.** (B) elevado em 50 cm. (C) mantido no mesmo nível.
(D) rebaixado em 40 cm. (E) rebaixado em 50 cm.

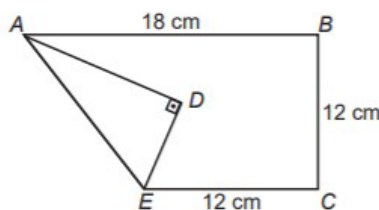
Resolução:

Para obter a inclinação de 20%, calculamos:

$$\frac{h}{8} = 0,20 \rightarrow h = 1,60$$

Então, o nível da garagem deverá ser elevado em 40 cm.

3.4 (ENEM 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é:

- (A) $2\sqrt{22}$ cm (B) $6\sqrt{3}$ cm (C) 12 cm **(D) $6\sqrt{5}$ cm** (E) $12\sqrt{2}$ cm

Resolução:

Na figura, AE é hipotenusa do triângulo retângulo ADE. O cateto AD é congruente ao lado BC do retângulo, portanto sua medida é igual a 12 cm. A medida do cateto DE é 6 cm pois:

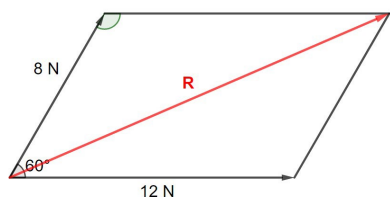
$$DE + EC = AB \Rightarrow DE + 12 = 18 \Rightarrow DE = 18 - 12 \Rightarrow DE = 6$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$(AE)^2 = 6^2 + 12^2 \Rightarrow (AE)^2 = 180 \Rightarrow AE = \sqrt{180} \Rightarrow AE = 6\sqrt{5}$$

3.5 (Aplicações de resultados da Matemática) Chama-se força resultante aquela que, sozinha, substitui todas as outras que agem sobre um corpo, e o efeito sobre ele continua o mesmo. Duas forças com o mesmo ponto de aplicação, mas com direções diferentes, uma de intensidade $F_1 = 8\text{N}$ e outra de intensidade $F_2 = 12\text{N}$, formam entre si um ângulo de 60° , como mostra a figura. Qual é a intensidade R resultante dessas duas forças?

Dados: $\sin 60^\circ \cong 0,87$, $\cos 60^\circ = 0,5$ e $\tan 60^\circ \cong 1,73$.



Fonte: Elaborado pelos autores

Observação: para ângulos obtusos, podemos obter os valores de seno e cosseno por meio dos valores do seno e cosseno do ângulo suplementar:

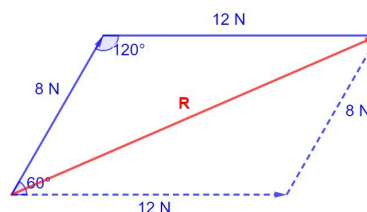
$$\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$$

Resolução:

Por se tratar de um paralelogramo, a soma dos ângulos internos é 360° , e os ângulos opostos são congruentes. Assim, a medida do ângulo oposto ao vetor da força resultante é 120° .

Os lados opostos em um paralelogramo são congruentes, como observado na figura ao lado. Aplicando a Lei dos Cossenos ao ângulo de 120° , temos:



Fonte: Elaborado pelos autores

$$R^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ$$

$$R = \sqrt{304} = 4\sqrt{19}$$

$$R^2 = 64 + 144 - 192 \cdot (-0,5)$$

A intensidade resultante dessas duas forças é

$$R^2 = 208 + 96$$

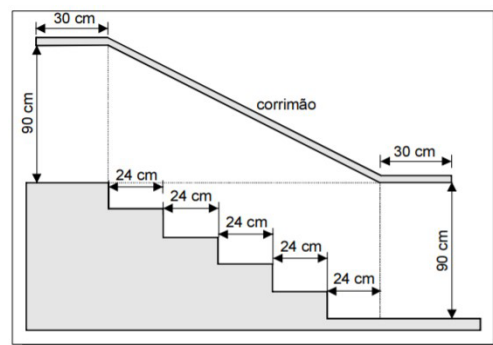
$$R = 4\sqrt{19}.$$

$$R^2 = 304$$

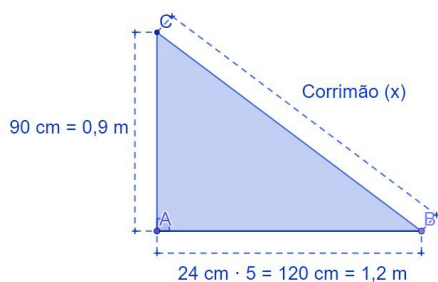
Momento 4: Atividade diagnóstica

4.1 (ENEM 2006) A figura a seguir representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

- (A) 1,8 m (B) 1,9 m (C) 2,0 m
(D) 2,1 m (E) 2,2 m



Resolução:



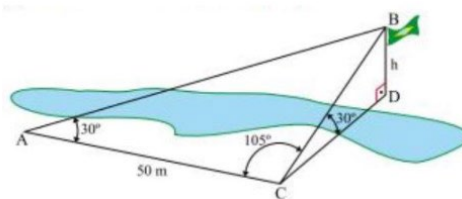
Fonte: Elaborado pelos autores

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$x^2 = 90^2 + 120^2 \Rightarrow x^2 = 8100 + 14400 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 = 22500 \Rightarrow x = 150$$

O comprimento total do corrimão   $30 + 150 + 30 = 210 \text{ cm} = 2,10 \text{ m}$ (alternativa "D").

4.2 (UNESP 2011) Uma pessoa se encontra no plano A de uma planície, às margens de um rio, e v , do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, ponto B. Com o objetivo de determinar a altura h do mastro, ele anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto C. Sendo D o p  do mastro, avalia que os ângulos $\widehat{BAC}$ e $\widehat{BCD}$ valem 30° , e o ângulo $\widehat{ACB}$ vale 105° , como mostra a figura.



A altura h do mastro da bandeira, em metros, é:

- (A) 12,5 **(B) $12,5\sqrt{2}$** (C) 25,0 (D) $25,0\sqrt{2}$ (E) 35,0

Dados:

$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{tg } 45^\circ = 1$
$\text{sen } 105^\circ \cong 0,97$	$\cos 105^\circ \cong -0,26$	$\text{tg } 105^\circ \cong -3,73$

Resolução:

No triângulo ABC, o ângulo $\hat{B}$ mede 45° , pela Lei dos senos, temos:

$$\frac{50}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\text{sen } 30^\circ} \Rightarrow \frac{50}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overline{BC}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 25 = \frac{\sqrt{2} \cdot \overline{BC}}{2} \Rightarrow 50 = \sqrt{2} \cdot \overline{BC} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{50}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{50\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\overline{BC} = 25\sqrt{2}}$$

Usando o triângulo BCD:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{h}{\overline{BC}} = \frac{1}{2} = \frac{h}{25\sqrt{2}} \Rightarrow 25\sqrt{2} = 2h \Rightarrow h = \frac{25\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{h = 12,5\sqrt{2}}$$

Portanto, a alternativa correta é: “B”

Professor, nesta atividade trouxemos os valores exatos das relações trigonométricas, antecipando o trabalho que será realizado no próximo bimestre com a construção da tabela de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

4.3 (UNESP 2012) No dia 11 de março de 2011, o Japão foi sacudido por terremoto com intensidade de 8,9 na Escala Richter, com o epicentro no Oceano Pacífico, a 360 km a nordeste de Tóquio, seguido de tsunami. A cidade de Sendai, a 320 km a nordeste de Tóquio, foi atingida pela primeira onda do tsunami após 13 minutos.

(O Estado de S. Paulo, 13.03.2011. Adaptado.)



Baseando-se nos dados fornecidos, e sabendo-se que $\cos \alpha \cong 0,934$, em que α é o ângulo Epicentro-Tóquio-Sendai, e que $2^8 \cdot 3^2 \cdot 93,4 \cong 215\,100$, a velocidade média, em km/h, com que a 1ª onda do tsunami atingiu até a cidade de Sendai foi de:

- (A) 10 (B) 50 (C) 100 (D) 250 (E) 600

Resolução:

Considerando o triângulo representado na figura e usando a Lei dos Cossenos, temos:

$$x^2 = 320^2 + 360^2 - 2 \cdot 320 \cdot 360 \cdot \cos \alpha \Rightarrow x^2 = 102400 + 129600 - 2 \cdot 320 \cdot 360 \cdot 0,934$$

$$x^2 = 232000 - 2 \cdot 2^6 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 0,934$$

Reorganizando as potências para usar a informação dada no enunciado, temos:

$$x^2 = 232000 - 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^8 \cdot 3^2 \cdot 0,934 \Rightarrow x^2 = 232000 - 215100 \Rightarrow x^2 = 16900 \Rightarrow x = 130$$

Do enunciado, temos que a primeira onda atingiu Sendai após $13 \text{ min} = \frac{13}{60} \text{ h}$. Assim, a velocidade média V_m , em km/h, é dada por:

$$V_m = \frac{130}{\frac{13}{60}} = 130 \cdot \frac{60}{13} = 10 \cdot 60 = 600 \text{ km/h (Alternativa "E")}$$

Considerações sobre a avaliação:

Ao final do nosso percurso, esperamos que os estudantes tenham compreendido os conceitos básicos explorados nesta Situação de Aprendizagem. Ressaltamos que a avaliação do aprendizado dos estudantes deve ser feita continuamente, tanto ao longo das atividades propostas, como ao final da Situação de Aprendizagem. Ao elaborar as etapas de avaliação, você, professor, deve balizar-se em um percurso semelhante ao que foi proposto no desenvolvimento da Situação de Aprendizagem.

Orientações para a recuperação:

Professor, para os estudantes que necessitem de recuperação, sugerimos que o tipo de construção dos conceitos propostos nesta Situação de Aprendizagem não seja alterado, mas sim a forma com que devem ser abordados os conceitos.

Elabore problemas que contemplem habilidades de anos anteriores que dão suporte para o desenvolvimento da habilidade trabalhada nesta Situação de Aprendizagem. Você poderá recorrer às questões da AAP, ADE e do SARESP de anos anteriores. Recorra a livros didáticos, selecionando problemas e agrupando-os de modo a formar sequências de atividades em concordância com a proposta de construção conceitual desenvolvida nesta Situação de Aprendizagem. Esse trabalho pode ser realizado por meio de agrupamentos produtivos.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

COORDENADORIA PEDAGÓGICA – COPED

Coordenador

Caetano Pansani Siqueira

*Diretora do Departamento de Desenvolvimento Curricular
e de Gestão Pedagógica – DECEGEP*

Viviane Pedroso Domingues Cardoso

Diretora do Centro de Ensino Médio – CEM

Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

*Diretora do Centro de Projetos e Articulação de Iniciativas
com Pais e Alunos - CEART*

Luiza Helena Vieira Girão

Coordenadora de Etapa do Ensino Médio

Helena Cláudia Soares Achilles

Assessor Técnico de Gabinete para Ensino Médio – SEDUC/SP

Gustavo Blanco de Mendonça

Equipe Técnica e Logística

Ariana de Paula Canteiro, Eleneide Gonçalves dos Santos, Cassia Vassi Beluche, Deisy Christine Boscaratto, Isaque Mitsuo Kobayashi, Luiza Helena Vieira Girão, Silvana Aparecida De Oliveira Navia, Valquiria Kelly Braga, Aline Navarro.

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Coordenação de área: Sandra Pereira Lopes – *Equipe Curricular de Matemática*

Organização e redação: Ana Gomes de Almeida – *Equipe Curricular – COPED*; Cecília Alves Marques – *Equipe Curricular – COPED*; Isaac Cei Dias – *Equipe Curricular – COPED*; Otávio Yoshio Yamanaka – *Equipe Curricular – COPED*; Rafael José Dombrauskas Polonio – *Equipe Curricular – COPED*; Sandra Pereira Lopes – *Equipe Curricular – COPED*; Everaldo José Machado de Lima – *PCNP da D.E. Assis*; Fábio Augusto do Nascimento Vieira – *PCNP da D.E. Campinas*; Fernanda Machado Ribeiro – *PCNP da D.E. Jales*; Lilian Silva de Carvalho – *PCNP da D.E. São Carlos*; Maria Regina Duarte Lima – *PCNP da D.E. José Bonifácio*; Natalia Cristina Cercosta Doce Pereira – *PCNP da D.E. Lins.*

Colaboração: Rosilaine Sanches Martins – *PCNP da D.E. Jales*

Revisor conceitual: Iria Aparecida Storer e Marcelo Dias Pereira.

Revisão textual: Amadora Fraiz Vilar Della Beta; Francine Alves Polidoro; Rozeli Frasca Bueno Alves

Impressão e Acabamento:

Projeto Gráfico:

Diagramação: Tikinet

O material Currículo em Ação é resultado do trabalho conjunto entre técnicos curriculares da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, PCNP atuantes em Núcleos Pedagógicos e professores da rede estadual de São Paulo.

Amparado pelo Currículo Paulista, este caderno apresenta uma pluralidade de concepções pedagógicas, teóricas e metodológicas, de modo a contemplar diversas perspectivas educacionais baseadas em evidências, obtidas a partir do acúmulo de conhecimentos legítimos compartilhados pelos educadores que integram a rede paulista.

Embora o aperfeiçoamento dos nossos cadernos seja permanente, há de se considerar que em toda relação pedagógica erros podem ocorrer. Portanto, correções e sugestões são bem-vindas e podem ser encaminhadas através do formulário <https://forms.gle/1iz984r4aim1gsAL7>.

