CADERNO DO PROFESSOR

MATEMÁTICA
Ensino Médio

2º SEMESTRE
3ª SÉRIE

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
Secretaria de Educação

SP FAZ ESCOLA

CADERNO DO PROFESSOR

3ª SÉRIE
ENSINO MÉDIO
MATEMÁTICA

2º SEMESTRE

SUMÁRIO

PREZADO PROFESSOR,

As sugestões de trabalho, apresentadas neste material, refletem a constante busca da promoção das competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo.

O tempo todo os jovens têm que interagir, observar, analisar, comparar, criar, refletir e tomar decisões. O objetivo deste material é trazer para o estudante a oportunidade de ampliar conhecimentos, desenvolver conceitos e habilidades que os auxiliarão na elaboração dos seus Projetos de Vida e na resolução de questões que envolvam posicionamento ético e cidadão.

Procuramos contemplar algumas das principais características da sociedade do conhecimento e das pressões que a contemporaneidade exerce sobre os jovens cidadãos, a fim de que as escolas possam preparar seus estudantes adequadamente.

Ao priorizar o trabalho no desenvolvimento de competências e habilidades, propõe-se uma escola como espaço de cultura e de articulação, buscando enfatizar o trabalho entre as áreas e seus respectivos componentes no compromisso de atuar de forma crítica e reflexiva na construção coletiva de um amplo espaço de aprendizagens, tendo como destaque as práticas pedagógicas.

Contamos mais uma vez com o entusiasmo e a dedicação de todos os professores para que consigamos, com sucesso, oferecer educação de qualidade a todos os jovens de nossa rede.

Bom trabalho a todos!

Coordenadoria Pedagógica – COPED
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo

INTEGRANDO O DESENVOLVIMENTO SOCIOEMOCIONAL AO TRABALHO PEDAGÓGICO

A educação integral exige um olhar amplo para a complexidade do desenvolvimento integrado dos estudantes e, também, para sua atuação na sociedade contemporânea e seus cenários complexos, multifacetados e incertos. Nesse sentido, o desenvolvimento pleno dos estudantes acontece quando os aspectos socioemocionais são trabalhados intencionalmente na escola, de modo integrado às competências cognitivas.

É importante ressaltar que a divisão semântica que se faz com o uso dos termos cognitivo e socioemocional não representa uma classificação dicotômica. É uma simplificação didática já que, na aprendizagem, essas instâncias (cognitiva e socioemocional) são simultaneamente mobilizadas, são indissociáveis e se afetam mutuamente na constituição dos sujeitos.

O QUE SÃO COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS?

As competências socioemocionais são definidas como as capacidades individuais que se manifestam de modo consistente em padrões de pensamentos, sentimentos e comportamentos. Ou seja, elas se expressam no modo de sentir, pensar e agir de cada um para se relacionar consigo mesmo e com os outros, para estabelecer objetivos e persistir em alcançá-los, para tomar decisões, para abraçar novas ideias ou enfrentar situações adversas.

Durante algum tempo, acreditou-se que essas competências eram inatas e fixas, sendo a primeira infância o estágio ideal de desenvolvimento. Hoje, sabe-se que as competências socioemocionais são maleáveis e quando desenvolvidas de forma intencional no trabalho pedagógico impactam positivamente a aprendizagem.

Além do impacto na aprendizagem, diversos estudos multidisciplinares têm demonstrado que as pessoas com competências socioemocionais mais desenvolvidas apresentam experiências mais positivas e satisfatórias em diferentes setores da vida, tais como bem-estar e saúde, relacionamentos, escolaridade e no mercado de trabalho.

QUAIS SÃO AS COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS E COMO ELAS SE ORGANIZAM

Ao longo de 40 anos, foram identificadas e analisadas mais de 160 competências sociais e emocionais. A partir de estudos estatísticos, chegou-se a um modelo organizativo chamado de Cinco Grandes Fatores que agrupa as características pessoais conforme as semelhanças entre si, de forma abrangente e parcimoniosa. A estrutura do modelo é composta por 5 macrocompetências e 17 competências específicas. Estudos em diferentes países e culturas encontraram essa mesma estrutura, indicando robustez e validade ao modelo.

MACRO COMPETÊNCIA	COMPETÊNCIA	DEFINIÇÃO
Abertura ao novo	Curiosidade para aprender	Capacidade de cultivar o forte desejo de aprender e de adquirir conhecimentos, ter paixão pela aprendizagem.
	Imaginação criativa	Capacidade de gerar novas maneiras de pensar e agir por meio da experimentação, aprendendo com seus erros, ou a partir de uma visão de algo que não se sabia.
	Interesse artístico	Capacidade de admirar e valorizar produções artísticas, de diferentes formatos como artes visuais, música ou literatura.
Resiliência Emocional	Autoconfiança	Capacidade de cultivar a força interior, isto é, a habilidade de se satisfazer consigo mesmo e sua vida, ter pensamentos positivos e manter expectativas otimistas.
	Tolerância ao estresse	Capacidade de gerenciar nossos sentimentos relacionados à ansiedade e estresse frente a situações difíceis e desafiadoras, e de resolver problemas com calma.
	Tolerância à frustração	Capacidade de usar estratégias efetivas para regular as próprias emoções, como raiva e irritação, mantendo a tranquilidade e serenidade.
Engajamento com os outros	Entusiasmo	Capacidade de envolver-se ativamente com a vida e com outras pessoas de uma forma positiva, ou seja, ter empolgação e paixão pelas atividades diárias e a vida.
	Assertividade	Capacidade de expressar, e defender, suas opiniões, necessidades e sentimentos, além de mobilizar as pessoas, de forma precisa.
	Iniciativa Social	Capacidade de abordar e se conectar com outras pessoas, sejam amigos ou pessoas desconhecidas, e facilidade na comunicação
Autogestão	Responsabilidade	Capacidade de gerenciar a si mesmo a fim de conseguir realizar suas tarefas, cumprir compromissos e promessas que fez, mesmo quando é difícil.
	Organização	Capacidade de organizar o tempo, as coisas e as atividades, bem como planejar esses elementos para o futuro.
	Determinação	Capacidade de estabelecer objetivos, ter ambição e motivação para trabalhar duro, e fazer mais do que apenas o mínimo esperado.
	Persistência	Capacidade de completar tarefas e terminar o que assumimos e/ou começamos, ao invés de procrastinar ou desistir quando as coisas ficam difíceis ou desconfortáveis.
	Foco	Capacidade de focar — isto é, de selecionar uma tarefa ou atividade e direcionar toda nossa atenção apenas à tarefa/atividade "selecionada".

MACRO COMPETÊNCIA	COMPETÊNCIA	DEFINIÇÃO
Amabilidade	Empatia	Capacidade de usar nossa compreensão da realidade para entender as necessidades e sentimentos dos outros, agir com bondade e compaixão, além do investir em nossos relacionamentos prestando apoio, assistência e sendo solidário.
	Respeito	Capacidade de tratar as pessoas com consideração, lealdade e tolerância, isto é, demonstrar o devido respeito aos sentimentos, desejos, direitos, crenças ou tradições dos outros.
	Confiança	Capacidade de desenvolver perspectivas positivas sobre as pessoas, isto é, perceber que os outros geralmente têm boas intenções e, de perdoar aqueles que cometem erros.

Você sabia?

O componente Projeto de Vida desenvolve intencionalmente as 17 competências socioemocionais ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Em 2019, foi realizada uma escuta com os professores da rede para priorizar quais competências seriam foco de desenvolvimento em cada ano/série. A partir dessa priorização, a proposta do componente foi desenhada, tendo como um dos pilares a avaliação formativa com base em um instrumento de rubricas que acompanha um plano de desenvolvimento pessoal de cada estudante.

COMO INTEGRAR AS COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS AO TRABALHO PEDAGÓGICO

Um dos primeiros passos para integrar as competências socioemocionais ao trabalho com os conteúdos do componente curricular é garantir a intencionalidade do desenvolvimento socioemocional no processo. Evidências indicam que a melhor estratégia para o trabalho intencional das competências socioemocionais se dá por meio de um planejamento de atividades que seja SAFE[1] – sequencial, ativo, focado e explícito:

SEQUENCIAL	ATIVO	FOCADO	EXPLÍCITO
Percurso com Situações de aprendizagem desafiadoras, de complexidade crescente e com tempo de duração adequado.	As competências socioemocionais são desenvolvidas por meio de vivências concretas e não a partir de teorizações sobre elas. Para isso, o uso de metodologias ativas é importante	É preciso trabalhar intencionalmente uma comptência por vez durante algumas aulas. Não é possível desenvolver todas as competências socioemocionais simultaneamente.	Para instaurar um vocabulário comum e um campo de sentido compartilhado com os estudantes, é preciso explicitar qual é competência foco de desenvolvimento e seu significado.

Desenvolver intencionalmente as competências socioemocionais não se refere a “dar uma aula sobre a competência”. Apesar de ser importante conhecer e apresentar aos estudantes quais são as competências trabalhadas e discutir com eles como elas estão presentes no dia a dia, o desenvolvimento de competências socioemocionais acontece de modo experiencial e reflexivo. Portanto, ao preparar a estratégia das aulas, é importante considerar como oferecer mais oportunidades para que os estudantes mobilizem a competência em foco e aprendam sobre eles mesmos ao longo do processo.

MATEMÁTICA

3ª SÉRIE – ENSINO MÉDIO
VOLUME 3

1. ORGANIZAÇÃO DAS GRADES CURRICULARES

Apresentamos a seguir uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio, além de algumas orientações pedagógicas, para as três séries que compõe o referido estágio de ensino da escolaridade básica.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

1.1 GRADE CURRICULAR DA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO – 3° BIMESTRE

ENSINO MÉDIO – CURRÍCULO DE MATEMÁTICA – 3ª SÉRIE (3° BIMESTRE)		
CURRÍCULO OFICIAL – SEDUC-SP		Currículo Paulista do Ensino Médio
Tema/Conteúdo	**Habilidades**	**Competências Gerais**
• Relações • Estudo das funções • Qualidade das funções; • Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais; • Gráficos: análise de sinal crescimento e taxa de variação. • Composição: translações e reflexões; • Inversão.	• Saber usar de modo sistemático as funções para caracterizar relações de interdependência, reconhecendo as funções de 1° e 2° graus, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica, com suas propriedades características. • Saber construir gráficos de funções por meio de transformações em funções mais simples (translações horizontais, verticais, simetrias, inversões). • Compreender o significado da taxa de variação unitária (variação de f(x) por unidade a mais de x), utilizando o crescimento, o decrescimento e a concavidade de gráficos. • Conhecer o significado, em diferentes contextos, do crescimento e do decrescimento exponencial, incluindo-se os que expressam por meio de funções de base .	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

1.1.1 ESTUDO FUNCIONAL DE FUNÇÕES DO PRIMEIRO E SEGUNDO GRAUS.

De forma geral, as funções polinomiais são instrumentos fundamentais para a representação das relações de interdependência entre grandezas, conforme foram desenvolvidos durante a aprendizagem dos estudantes em anos anteriores. Por exemplo, no 7° ano do Ensino Fundamental foram exploradas situações envolvendo a proporcionalidade direta e inversa entre grandezas, que conduzem a relações do tipo $y = k \cdot x$, ou, então, $y = \frac{k}{x}$, de modo que **k** é uma constante não nula.

Já no 9° ano, foram estudadas as funções $y = ax + b$ e $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, além da representação destas em gráficos.

Recorrendo às considerações anteriores, destacamos as funções que traduzem matematicamente os processos que envolvem relações de proporcionalidade direta (gráficos lineares), ou relações em que uma grandeza é proporcional ao quadrado de outra (gráficos com a forma de parábola).

Convém ressaltar, que a construção de gráficos das funções acima indicadas é objeto de atenção na Competência Específica 1, na habilidade (EM13MAT101). No desenvolvimento da habilidade descrita nesta Competência Específica, pensamos na resolução e elaboração de sequências de atividades que envolvem situações concretas em que a consideração das grandezas envolvidas conduz a uma função polinomial de 1º ou de 2º grau, que contemplem com destaque problemas de otimização, ou seja, problemas que envolvem a obtenção do valor máximo ou mínimo de uma função.

Este encadeamento metodológico, propicia o desenvolvimento de importantes competências básicas, tais como:

- o recurso à linguagem das funções para representar interdependências, o que conduz a um aumento na capacidade de expressão, favorecendo a construção de um discurso mais eficaz para enfrentar problemas em diferentes contextos.
- a capacidade de compreensão de uma variada gama de fenômenos, uma vez que muitas situações de interdependência estão naturalmente associadas a modelagens que conduzem a explicações dos referidos fenômenos.
- o reconhecimento das funções envolvidas em um fenômeno, o que possibilita a sistematização de propostas de intervenção consciente sobre a realidade representada.

A título de aprofundamento podemos nos referir a um panorama sobre todas as relações de interdependência, revisando e incluindo diferentes linguagens com recursos mais amplos, buscando estabelecer suas qualidades essenciais e permitindo que colaborem mutuamente, favorecendo uma compreensão mais ampla de múltiplos fenômenos da realidade.

Desta forma, as competências básicas: expressão, compreensão, contextualização, argumentação e decisão estarão presentes nas diversas situações-problema, uma vez que o estudo funcional proposto seria a busca de uma linguagem apropriada para compreender os fenômenos de diferentes tipos, objetivando sempre a argumentação e a tomada de decisões em situações concretas.

Os assuntos apresentados podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem:

- **Situação de Aprendizagem 5 -** Funções como relações de interdependência: Múltiplos exemplos, Vol. 1, 1ª série do Ensino Médio, p. 55 a 64;
- **Situação de Aprendizagem 6 -** Funções Polinomiais de 1º grau: Significado, gráficos, crescimento, decrescimento e taxas. Vol. 1, 1ª série do Ensino Médio, p. 65 a 74.
- **Situação de Aprendizagem 7 -** Funções Polinomiais de 2º grau: Significado, gráficos, interseções com os eixos, vértices e sinais. Vol. 1, 1ª série do Ensino Médio, p. 74 a 96;
- **Situação de Aprendizagem 8:** Problemas envolvendo funções de 2º grau em múltiplos contextos: Problemas de máximo e mínimo. Vol. 1, 1ª série do Ensino Médio, p. 96 a 104.

Lembrando que ao final de cada situação de aprendizagem constam algumas considerações sobre a avaliação dos conhecimentos bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências e habilidades enunciadas.

Além das situações de aprendizagem, sugerimos alguns recursos audiovisuais, da plataforma Matemática Multimídia:

- Problema da cerca, disponível em: **http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1160** (acesso em: 28/nov./2018)
- A mãe, disponível em: **http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1160** (acesso em: 28/nov./2018)

1.1.2 FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Para iniciar os comentários referentes a esta seção convém ressaltar que o conceito base das funções exponencial e logarítmica, remete à potência de um número, cujo desenvolvimento já vem sendo tratado nos anos finais do Ensino Fundamental. No Ensino Médio, consolidamos seus significados, sistematizando os fatos e apresentando a função exponencial, com destaque para sua forma peculiar de crescimento ou decrescimento.

Os logaritmos, uma "invenção" engenhosa do início do século XVII, cuja motivação inicial era a simplificação dos cálculos em uma época de limitados instrumentos para tal, apesar da abundância de recursos atuais, permanecem como um tema especialmente relevante, não em razão de tais simplificações, mas pela sua adequação em descrever fenômenos em que as variáveis aparecem no expoente. Apresentar seu significado mais profundo, o que contribuiu para conservar sua importância, juntamente com as propriedades mais relevantes para seu uso em diferentes contextos, talvez seja o objetivo principal em se abordar tal conteúdo.

É importante ressaltar que ambos os conteúdos sejam abordados de maneira articulada, a distinção entre eles, é estritamente ligada a uma troca de posições entre as variáveis, de tal forma que:

- se $y = a^x$, considerando x a variável independente e $0 < a \neq 1$, escrevemos $y = f(x) = a^x$, e temos uma função exponencial.
- quando y é a variável independente e $0 < a \neq 1$, escrevemos $x = g(y) = \log_a y$, e temos uma função logarítmica.

As funções exponenciais e logarítmicas são inversas.

Apesar de que o caráter estritamente matemático seja importante no desenvolvimento de um conteúdo, não podemos deixar de contemplar suas aplicações em situ-ações-problema. Desta forma, reiteramos que as diversas contextualizações dos logaritmos (graus de terremotos, acidez de líquidos, intensidade sonora, magnitude de estrelas, cálculos de juros etc.) são possibilidades de enriquecimento de uma determinada sequência de atividades em sala de aula.

A título de aprofundamento, apresentamos uma função exponencial, do tipo $y=a^x$, particularmente importante na representação de diversos fenômenos naturais, em que a base **a** é o número neperiano representado pela letra , cujo valor é 2,71828188459045. ou seja, é aproximadamente igual a 2,7183. Tal como o número π que representa a razão constante entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, o número tem um significado especialmente importante quando se estudam as diversas formas de uma função f(x) crescer ou decrescer. O estudo de fenômenos que envolvem crescimento ou decrescimento de populações, desintegração radioativa, juros compostos, entre outros, torna natural o aparecimento deste número.

Tal como o número π, o número e é irracional e transcendente. Os irracionais como √2 não são razões entre inteiros, são raízes de equações algébricas com coeficientes inteiros (por exemplo, $x^2 - 2 = 0$). Um número irracional é transcendente quando não existe equação algébrica com coeficientes inteiros que o tenha como raiz, e esse o é o caso de números como π e e.

O mais importante no momento é a utilização de uma função exponencial particular, que vai ampliar significativamente o repertório de recursos para o tratamento matemático de diversos fenômenos em diferentes contextos.

Os tópicos apresentados, podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem:

- **Situação de aprendizagem 1 -** As potências e o crescimento exponencial: A função exponencial, Vol. 2, 1ª série do Ensino Médio, p. 11 a 20.
- **Situação de Aprendizagem 2 -** Quando o expoente é a questão, o logaritmo é a solução: A força da ideia de logaritmo, Vol. 2, 1ª série do Ensino Médio, p. 20 a 38.
- **Situação de Aprendizagem 3 -** As funções com variável no expoente: A exponencial e sua inversa, a logarítmica, Vol.2, 1ª série do Ensino Médio, p. 38 a 46.
- **Situação de Aprendizagem 4**: As múltiplas faces das potências e dos logaritmos: Problemas envolvendo equações e inequações e diferentes contextos, Vol. 2, 1ª série do Ensino Médio, p. 47 a 59.
- **Situação de Aprendizagem 4**: Os fenômenos naturais e o crescimento ou decrescimento exponencial: O número , Vol. 2, 3ª série do Ensino Médio, p. 40 a 55.

Lembrando que ao final de cada situação de aprendizagem constam algumas considerações sobre a avaliação dos conhecimentos bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências e habilidades enunciadas.

Além das situações de aprendizagem, sugerimos alguns recursos audiovisuais, da plataforma Matemática Multimídia:

- Osso duro de roer, disponível em: **http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1146** (acesso em: 28/nov./2018).
- Baralho mágico, disponível em: **http://m3.ime.unicamp.br/recursos/998** (acesso em: 28/nov./2018).
- Overdose, disponível em: **http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1147** (acesso em: 28/nov./2018).
- A aparição, disponível em: **http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1050** (acesso em: 28/nov./2018).
- Avalanches, disponível em: **http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1364** (acesso em: 28/nov./2018).

1.1.3 FENÔMENOS PERIÓDICOS

As funções são maneiras que encontramos para representar a interdependência entre grandezas, sem perder a generalidade. No Ensino Médio, o estudo de números e funções é um dos mais importantes e amplia sobremaneira, em relação às etapas anteriores. Com base nessa premissa, apresentamos os tipos de função estudados no Ensino Médio, identificando os significados que normalmente lhes são associados.

O primeiro grupo de funções com o qual os estudantes tem contato no Ensino Médio são as funções polinomiais de 1º e 2º grau, complementadas ao fim da 3ª série do Ensino Médio, com a apresentação das funções polinomiais de grau qualquer. Há uma variedade de situações possíveis de serem modeladas com funções polinomiais de diferentes graus. É comum, no início do trabalho com funções, a proposição aos estudantes situações que exijam, por exemplo, a análise de como o preço da corrida de táxi depende da quilometragem ou da verificação de que a quantidade de calor que um corpo absorve ocorre em função do aumento de sua temperatura ou, ainda, o fato de que um corpo em queda livre aumenta cada vez mais a distância que percorre a cada segundo sucessivo.

Outro grupo de funções, analisado no Ensino Médio, é aquele que discute o crescimento exponencial de uma grandeza em função da variação de outra. Nesse grupo, incluem-se, além das funções exponenciais propriamente ditas, as funções logarítmicas. Enquanto as funções exponenciais tratam dos processos de crescimento ou decrescimento rápidos, as funções logarítmicas modelam fenômenos que crescem ou decrescem de modo mais lento. Processos de crescimento populacional e também de acumulação financeira constituem contextos fecundos para a significação de funções desse grupo, e normalmente são apresentados em diversos materiais didáticos. Além disso, os logaritmos e as exponenciais estão presentes na determinação da intensidade dos terremotos, no nível de intensidade sonora e no cálculo da capacidade de armazenagem de informação.

As funções trigonométricas, que constituem o terceiro grupo das funções estudadas no Ensino Médio, caracterizam-se por permitir a modelagem de fenômenos periódicos, isto é, fenômenos que se repetem e que mantêm as características de dependência entre as grandezas envolvidas. A existência de uma gama de fenômenos dessa natureza contrasta com a baixa frequência com que as funções trigonométricas são contextualizadas nos materiais didáticos. Na maioria das vezes, o tratamento dado aos senos, cossenos e tangentes fica única e exclusivamente restrito aos cálculos de valores para arcos notáveis e seus côngruos, e para a relação algébrica entre estas funções, sem que a periodicidade, foco principal do estudo, seja analisada com a importância merecida.

Para concluir, reiteramos que a motivação pelo estudo das funções trigonométricas deve ser o reconhecimento de que elas são necessárias para a modelagem de fenômenos periódicos. Nesse sentido, antes da apresentação dos conceitos, os estudantes precisam ser sensibilizados para a observação real, virtual ou imaginativa de uma série de manifestações naturais de caráter periódico.

Os tópicos apresentados podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem:

- **Situação de Aprendizagem 1 -** O reconhecimento da periodicidade, Vol.1, 2ª série do Ensino Médio, p. 12 a 22;
- **Situação de Aprendizagem 2 -** A periodicidade e o modelo da circunferência trigonométrica, Vol.1, 2ª série do Ensino Médio, p. 23 a 38.
- **Situação de Aprendizagem 3 -** Gráficos de funções periódicas envolvendo senos e cossenos, Vol. 1, 2ª série do Ensino Médio, p. 39 a 52.
- **Situaç**ão **de Aprendizagem 4 -** Equações trigonométricas, Vol.1, 2ª série do Ensino Médio, p. 53 a 60.

Lembrando que ao final de cada situação de aprendizagem constam algumas considerações sobre a avaliação dos conhecimentos bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências e habilidades enunciadas.

Além das situações de aprendizagem, sugerimos alguns recursos audiovisuais, da plataforma Matemática Multimídia:

- Tempestades solares, disponível em: **http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1353** (acesso em: 28/nov./2018);
- A dança do sol, disponível em: **http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1080** (acesso em: 28/nov./2018);
- A roda gigante, disponível em: **http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1364** (acesso em: 28/nov./2018);
- Aventuras do Geodetetive 1: A circunferência da Terra, disponível em: **http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1102** (acesso em: 28/nov./2018).

1.1.4 (RE)SIGNIFICANDO O ESTUDO DAS FUNÇÕES

O objetivo maior da proposição é a de explorar sistematicamente as caracterizações das funções já estudadas, ampliando-se as possibilidades de construção de gráficos e da compreensão das formas básicas de crescimento ou decrescimento. Com isso, a possibilidade de utilização de funções para compreensão de fenômenos da realidade será ampliada, e os estudantes poderão analisar com mais nitidez a riqueza da linguagem das funções.

Desta forma, é preciso ir além da constatação do crescimento ou do decrescimento, procurando qualificá-lo e tentando caracterizar sua rapidez com que ocorre o crescimento ou decrescimento por meio da taxa de variação, ou seja, da variação da variável independente por unidade a mais da variável dependente. Tal preocupação com as taxas de variação não é muito comum no estudo das funções no Ensino Médio, porém é, um assunto importante para o estudo das funções na escola básica quanto para descortinar uma série de ideias simples sobre variação de funções, que serão muito úteis para a compreensão de inúmeros fenômenos, naturais ou econômicos, envolvendo variações e taxas de variação, como a descrição dos movimentos, ou a compreensão das taxas de inflação, por exemplo.

Destacamos que neste estudo, todas as competências básicas podem ser desenvolvidas por meio deste tratamento qualitativo das funções: a expressão/compreensão de fenômenos, a argumentação/tomada de decisão e a contextualização/abstração de relações.

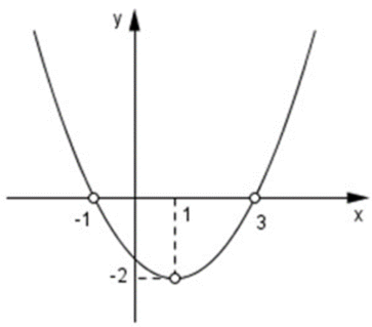
O tópico acima apresentado, pode ser encontrado no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, na respectiva Situação de Aprendizagem, conforme segue:

- **Situação de Aprendizagem 3** – As três formas básicas de crescimento ou decrescimento: A variação e a variação da variação, Vol. 2, 3ª série do Ensino Médio, pg.31 a 40.

Além da referência citada acima, o professor poderá recorrer a outros materiais que abordem o assunto tratado.

1.1.5 OS PONTOS CRÍTICOS DE UMA FUNÇÃO DE GRAU 2

Um assunto recorrente após o estudo das representações algébrica e gráfica, de funções polinomiais de 2º grau é o estabelecimento das situações de máximo ou mínimo, identificando e calculando as coordenadas dos pontos críticos (máximos ou mínimos), no desenvolvimento relativo a este tópico. Ressaltamos a importância do aspecto qualitativo da análise de situações-problema, em detrimento do aspecto quantitativo, no qual se baseia em repetição de problemas modelo.



$$M = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Desta forma, consideramos que não é decisiva para uma compreensão adequada do tema a quantidade de questões a serem trabalhadas, mas sim o modo como elas são exploradas em classe garantindo-se uma abordagem que favoreça um aprendizado consciente e efetivo, sobretudo quando envolvem modelos matemáticos utilizados em outras situações-problema.

O ponto máximo ou mínimo de uma função polinomial do 2º grau poderá ser abordado também como média aritmética de suas raízes ou de dois pontos simétricos, quando essas raízes não existirem. Ressaltamos que quando uma função polinomial do 2º grau tem uma única raiz, esta é o ponto máximo ou mínimo da função conforme sua concavidade (coeficiente ***a*** positivo ou negativo).

O tópico acima apresentado pode ser encontrado no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, na respectiva Situação de Aprendizagem, conforme segue:

- **Situação de Aprendizagem 8** – Problemas envolvendo funções de 2º grau em múltiplos contextos: Problemas de máximos e mínimos, Vol. 1, 1ª série do Ensino Médio, pg. 96 a 104.

Sugerimos a utilização do software Geogebra para a construção e análise de gráficos de funções.

1.1.6 ATIVIDADES

TEMA 1: ESTUDO DAS FUNÇÕES

ATIVIDADE 1

Determine a lei da função que relaciona o lado x de um quadrado ao seu perímetro.

$x + x + x + x = 4x$

ATIVIDADE 2

Determine a lei da função que relaciona o lado x de um quadrado com a sua área.

$x \cdot x = x^2$

ATIVIDADE 3

Complete a tabela com algumas relações entre os valores dos exercícios anteriores.

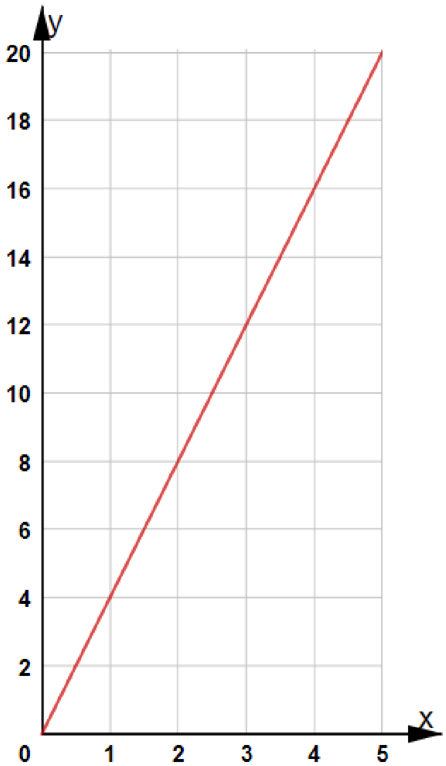
Lado(x)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Perímetro	4	8	12	16	20
Área	1	4	9	16	25

ATIVIDADE 4

a) Esboce o gráfico que representa a função relacionada do lado x de um quadrado com o seu perímetro.

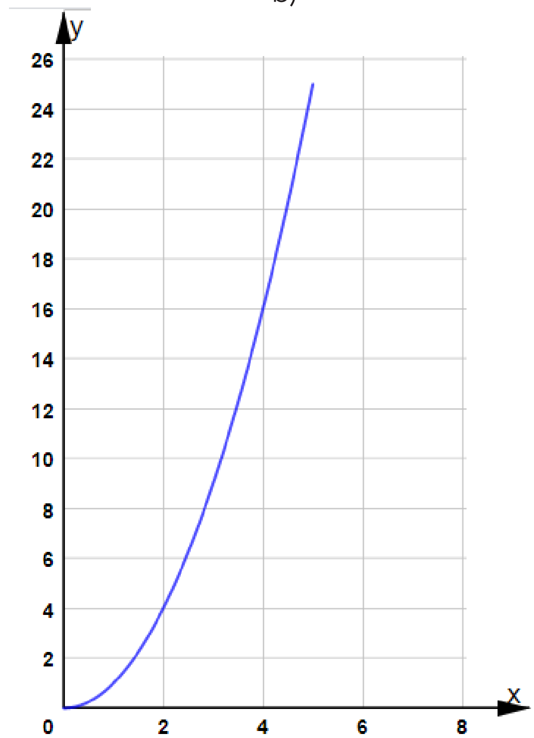
b) Esboce o gráfico que representa a função relacionada do lado x de um quadrado com a sua área.

a)



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

b)



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

ATIVIDADE 5

Classifique as funções a seguir em (C) crescente ou (D) decrescente:

(C) f(x) = 5x + 2

(D) g(x) = –3x + 4

(D) h(x) = 5 – x

ATIVIDADE 6

Defina a característica observada no exercício anterior, para determinar se a função é crescente ou decrescente.

São decrescentes as funções em que se pode verificar a diminuição do valor de y ao aumentar o valor de x.

São crescentes as funções em que se pode verificar o aumento do valor de y ao aumentar o valor de x.

ATIVIDADE 7

Identifique se a representação gráfica das funções a seguir é uma parábola, com a concavidade direcionada para cima(∪) ou com a concavidade direcionada para baixo (∩):

(∪) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

(∩) $g(x) = -x^2 - 2x^2$

(∩) $h(x) = -4x^2 - 5x + 2$

ATIVIDADE 8

Defina a característica observada, no exercício anterior, para determinar se a concavidade da parábola é direcionada para cima ou a concavidade direcionada para baixo.

As funções quadráticas cujo coeficiente de x^2 é positivo têm concavidade voltada para cima.

Quando o coeficiente de x^2 é negativo a concavidade é voltada para baixo.

ATIVIDADE 9

No gráfico de uma função polinomial do 1° grau podemos notar as seguintes características:

- a reta que representa a função intercepta em um único ponto no eixo x;
- a reta que representa a função intercepta em um único ponto no eixo y.

Dadas as equações de retas a seguir encontre os pontos de intersecção nos eixos (x e y):

a) $y = x + 3$

Corta o eixo x quando $y = 0$

$0 = x + 3$

$x = -3$

Corta o eixo y quando $x = 0$

$y = 0 + 3$

$y = 3$

b) $y = 2x - 8$

Corta o eixo x quando $y=0$

$0 = 2x - 8$

$x = \frac{8}{2}$

$x = 4$

Corta o eixo y quando $x = 0$

$y = 2 \cdot (0) - 8$

$y = -8$

c) $y = -3x - 3$

Corta o eixo x quando $y = 0$

$0 = -3x - 3$

$x = -\frac{3}{3}$

$x = -1$

Corta o eixo y quando $x = 0$

$y = -3 \cdot (0) - 3$

$y = -3$

d) $y = 6 - x$

Corta o eixo x quando $y=0$

$0 = 6 - x$

$x = 6$

Corta o eixo y quando $x=0$

$y = 6 - 0$

$y = 6$

ATIVIDADE 10

Podemos observar como característica das funções polinomiais de 2º grau a quantidade de raízes reais (ou zeros da função) dependendo do valor obtido no radicando $\Delta = b2 - 4 \cdot a \cdot c$

- quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- quando Δ é zero, há só uma raiz real (para ser mais preciso, há duas raízes iguais);
- quando Δ é negativo, não há raiz real.

Sabendo–se disto, encontre o valor do Δ e identifique a quantidade de raízes reais nas seguintes funções:

a) $y = x^2 + 3$

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$

$\Delta = 0 - 12$

$\Delta = -12$

Não há raiz Real

b) $y = 3x^2 - 8x$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0$

$\Delta = 64 - 0$

$\Delta = 64$

Há duas raízes distintas

b) $y = -4x^2 - x - 3$

$\Delta = -(1)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-3)$

$\Delta = 1 - 48$

$\Delta = -47$

Não há raiz Real

c) $y = 5 - 6x - x^2$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5$

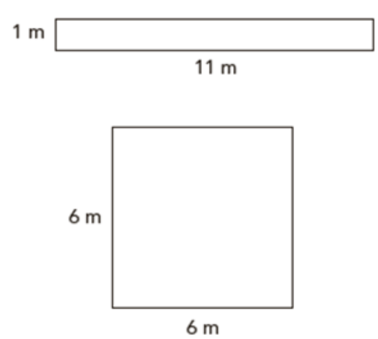
$\Delta = 36 + 20$

$\Delta = 56$

Há duas raízes distintas

ATIVIDADE 11

Entre todos os retângulos com perímetro de 24 m, como os exemplificados a seguir, qual tem a maior área? Registre sua resposta no espaço a seguir

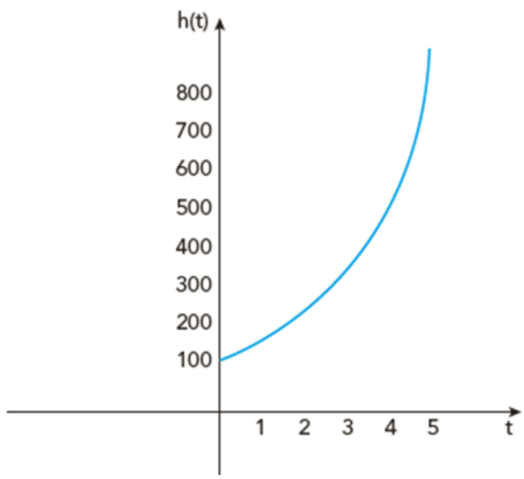


Fonte: Imagem elaborada pelo autor

O quadrado de lado 6m tem maior área

ATIVIDADE 12

O gráfico a seguir exibe a curva de potencial biótico h(t) para uma população de microrganismos, ao longo do tempo t.



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

Considerando a representação gráfica acima e as constantes reais m e n, a função que pode descrever esse potencial é:

Professor(a), solicitamos a substituição das variáveis m e n por **a** e **b,** no enunciado da atividade.

(A) $h(t) = at + b$

(B) $h(t) = at^2 + bt$

(C) $h(t) = ab^2$

(D) $h(t) = a + \log_b t$

$h(t) = at^2 + bt$

ATIVIDADE 13

A massa m de uma substância radioativa diminui com o tempo, ou seja, é uma função do tempo de decomposição t: m = f(t). Para certa substância, tem-se, $m = m_0 \bullet 10^{-t}$ onde é a massa inicial igual a 4000g e t, o tempo de decomposição em horas. Determine quantos gramas estarão presentes após 5 horas.

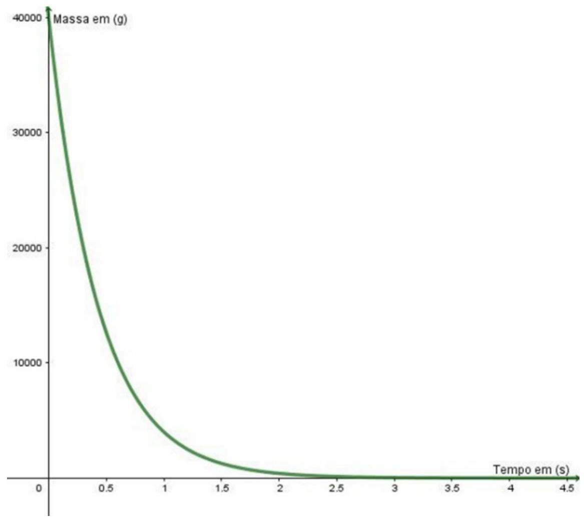
$$m = 4000 \cdot 10^{-5}$$

$$m = 4000 \cdot \frac{1}{100000}$$

$$m = 0{,}04g$$

ATIVIDADE 14

Esboce o gráfico da função anterior. (Sugestão: atribua para t valores múltiplos de 10.) (Utilize uma folha de papel quadriculado para esboçar o gráfico).



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

Atenção professor! Seus estudantes podem ter a falsa impressão de que o gráfico toca o eixo x, por isso sugerimos que o QR CODE seja disponibilizado à eles para possam dar zoom na imagem e verificarem que a curva se aproxima do eixo x sem nunca tocá-lo.

ATIVIDADE 15

Com base na resolução das atividades 13 e 14, determine o instante em que a massa restante será igual a 20g.

$$20 = 4000 \cdot 10^{-t}$$

$$\frac{20}{4000} = 10^{-t}$$

$$0{,}005 = 10^{-t}$$

$$0{,}005 = \frac{1}{10^{t}}$$

$$10^{t} \cdot 0{,}005 = 1$$

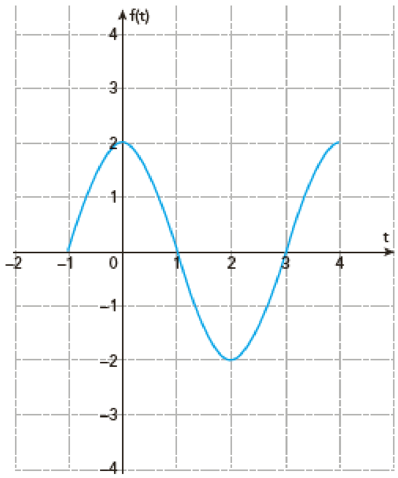
$$10^{t} = \frac{1}{0{,}005}$$

$$\log 200 = t$$

$$t \cong 2{,}3\ s$$

ATIVIDADE 16

No gráfico a seguir está descrita a função periódica $f(t) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$, em que o valor de t refere-se ao tempo em segundos.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Calcule os valores de f(t) para: t=1, t = 2 e $t = 7/2$

I) t = 1

$$f(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right)$$

$$f(t) = 2\cos\frac{\pi}{2}$$

$$f(t) = 0$$

II) t = 2

$$f(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right)$$

$$f(t) = 2\cos\pi$$

$$f(t) = -2$$

III) $t = \frac{7}{2}$

$$f(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{7}{2}\right)$$

$$f(t) = 2\cos\frac{7\pi}{4}$$

$$f(t) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(t) = \sqrt{2}$$

ATIVIDADE 17

Defina as raízes das seguintes funções polinomiais.

a) $f(x) = (x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

Um dos fatores precisa ser igual a zero, portanto:

$(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$

ou

$(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$

ou

$(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2$

b) $f(x) = x\,(x - 3) \cdot (x + 4)$

Um dos fatores deve ser igual a zero, portanto:

$x = 0$

ou

$(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3$

ou

$(x + 4) = 0 \Rightarrow x = -4$

c) $f(x) = x\,(x - 5) \cdot x \cdot (x + 2)$

Um dos fatores deve ser igual a zero, portanto:

$x = 0$

ou

$(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 5$

$(-x + 2) = 0 \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2$

d) $f(x) = (1 - x) \cdot (x + 1) \cdot (x - 4) \cdot (3 + x)$

Um dos fatores precisa ser igual a zero, portanto:

$(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 1$

ou

$(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$

ou

$(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 4$

ou

$(3 + x) = 0 \Rightarrow x = -3$

ATIVIDADE 18

Esboce os gráficos das funções dos itens b e c da atividade 17 em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

(Utilize uma folha de papel quadriculado para esboçar o gráfico)

Fonte: Imagem elaborada pelos autores

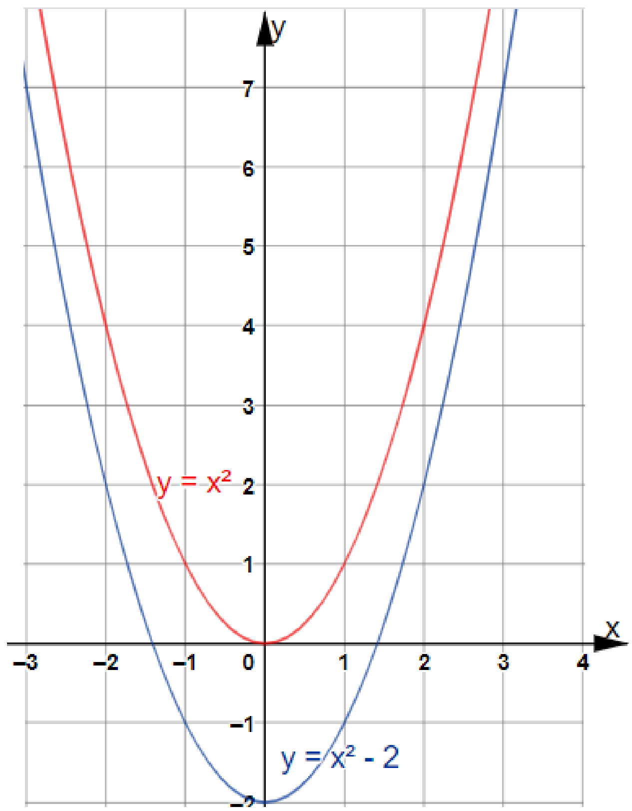
TEMA 2: GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Geralmente quando queremos esboçar um gráfico, recorremos primeiramente a uma tabela com a indicação de alguns valores do domínio da função e posterior cálculo da imagem da função. Contudo muitos gráficos, podem ser obtidos sem tomar por base as conclusões de uma representação de pontos isolados. Nesse trabalho, o ponto central consiste em "ler" e interpretar as indicações de quais operações devemos realizar com a variável independente x para obter valores referentes à variável dependente y.

Para iniciar o que pretendemos dizer, exploraremos a construção de alguns gráficos de funções, na qual você já aprendeu durante o Ensino Médio.

Para as funções quadráticas, nota-se uma particularidade interessante quando temos funções do tipo $f(x) = x^2 - 2$, neste caso para encontrar o valor de $y = f(x)$, basta elevar a variável independente x, ao quadrado e diminuir 2 unidades do resultado obtido. Desse modo, para representar os pontos (x; y) em que $y = x^2 - 2$, podemos imaginar que o gráfico de $y = x^2$ foi deslocado 2 unidades para baixo na direção do eixo y.

Dessa forma, o gráfico de $f(x) = x^2 - 2$, pode ser construído a partir da elaboração de um gráfico mais simples: $f(x) = x^2$.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

ATIVIDADE 1

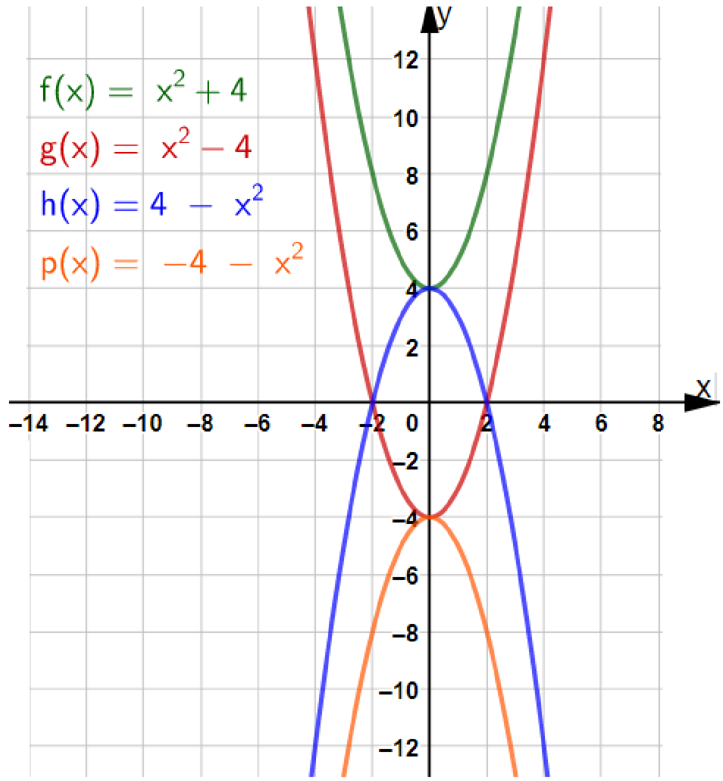
Utilizando o mesmo sistema de coordenadas esboce os gráficos das seguintes funções.

a) $f(x) = x^2 + 4$

b) $g(x) = x^2 - 4$

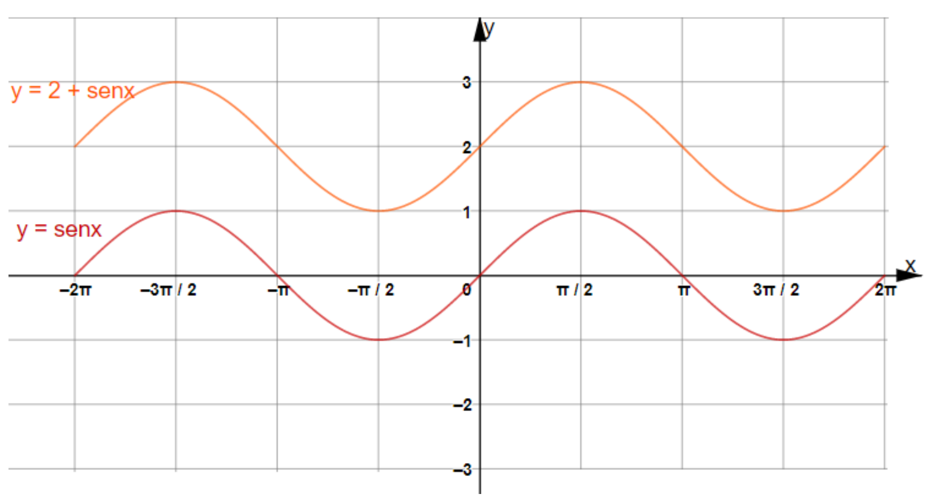
c) $h(x) = 4 - x^2$

d) $p(x) = -4 - x^2$



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Para as funções trigonométricas do tipo f(x) = 2 + sen x os valores de **y** serão determinados depois que encontrarmos o valor do seno da variável independente **x** e a esse valor adicionarmos 2 unidades. Nesse caso, podemos imaginar que o gráfico mais simples da função de y = sen x será deslocado 2 unidades para cima na direção do eixo **y,** conforme mostra o gráfico a seguir:

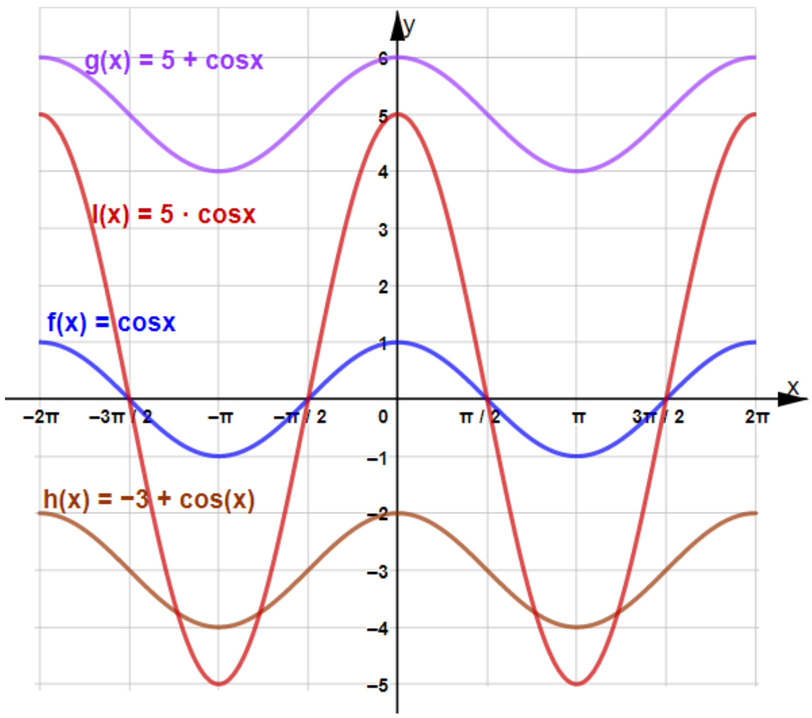


Fonte: Imagem elaborada pelos autores

ATIVIDADE 2

Esboce os gráficos das funções indicadas a seguir no mesmo sistema de coordenadas.

a) f(x) = cos x
b) g(x) = 5 + cos x
c) h(x) = –3 + cos x
d) i(x) = 5 · cos x



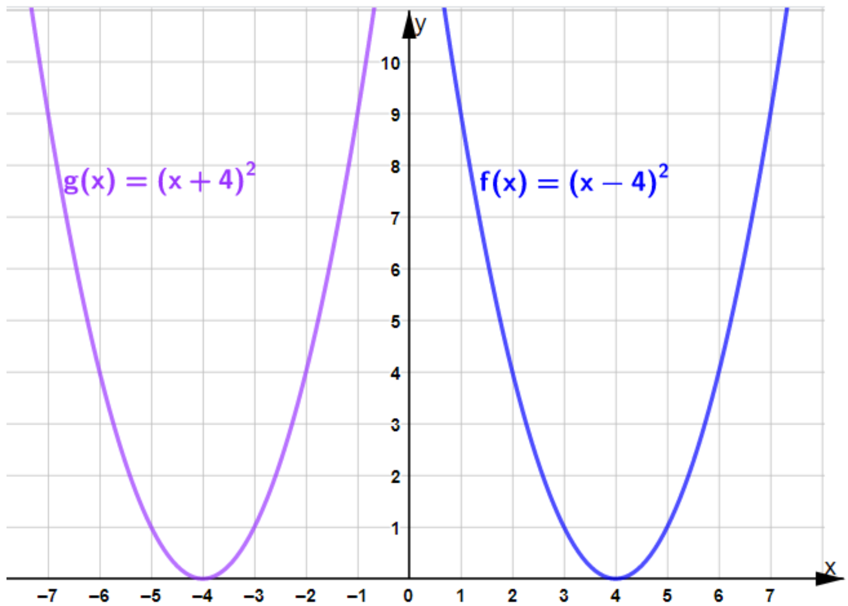
Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

No estudo dos gráficos das funções quadráticas, podemos destacar o estudo de funções do tipo: $(x – 4)^2$, de modo que, pode-se imaginar o gráfico de $y = x^2$ deslocado 4 unidades para a direita na direção do eixo x O gráfico de $y = (x – 4)^2$ é como se fosse o de $y = m^2$, sendo $m = x – 4$. O vértice da parábola desloca-se do ponto em que x = 0 para o ponto em que x = 4.

ATIVIDADE 3

Sabendo-se disto, esboce no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = (x - 4)^2$ e $g(x) = (x + 4)^2$

(Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para esboçar os gráficos solicitados)



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Atenção ,Professor! Facilite aos estudantes o acesso ao QR CODE para que eles possam variar o valor entre -4 e 4 positivo por meio do controle no alto da tela e analisarem as diferenças nos gráficos das duas funções.

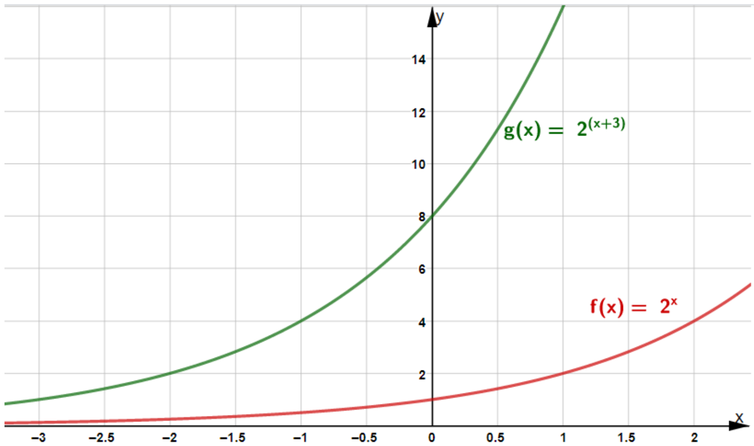
Ou acesse o link: **https://www.geogebra.org/classic/fgvrserj**

Agora vamos relembrar o gráfico da função exponencial, e tomaremos como exemplo a função $f(x) = 2^{(x+3)}$, que será construído a partir do gráfico de , deslocado para a esquerda na direção do eixo x. O gráfico de é como se fosse de $y = 2^m$, sendo $m = x + 3$. É como se o eixo **y** se deslocasse horizontalmente, de tal forma que o antigo ponto em que $x = 0$ coincidisse com o novo ponto em que $x = –3$ (ou seja $m = 0$).

ATIVIDADE 4

Sabendo-se disto, esboce o gráfico, no plano cartesiano, da situação proposta anteriormente.

(Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para esboçar o gráfico solicitado)



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Atenção, Professor! Facilite ao estudante o acesso ao QR CODE para que eles possam variar o valor entre 0 e 3 positivo por meio do controle no alto da tela e analisa as diferenças nos gráficos das duas funções.

Ou pelo link a seguir:

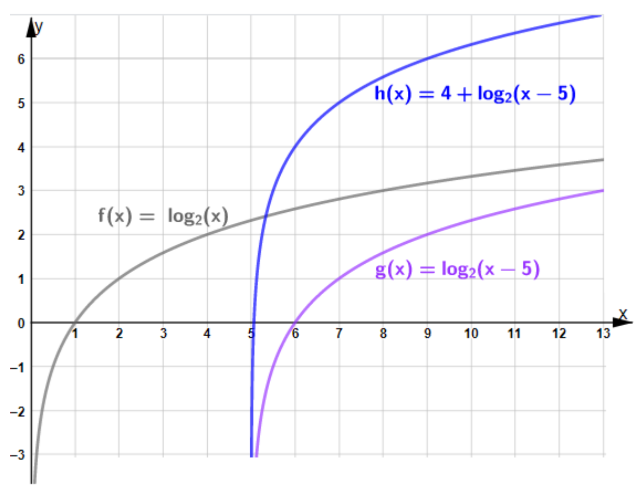
https://www.geogebra.org/classic/nxnmfqbb

No caso das funções logarítmicas, vamos estudar a função $y = 4 + \log_2(x - 5)$, podemos imaginar o gráfico de $y = \log_2 x$ deslocado 5 unidades para a direita, como se estivéssemos construindo o gráfico de $y = \log_2 m$, sendo $m = x - 5$

ATIVIDADE 5

Faça o esboço da situação descrita para obter o gráfico de $y = 4 + \log_2(x - 5)$

(Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para esboçar o gráfico solicitado)



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Atenção, professor! Facilite aos estudantes o acesso ao QR CODE para que eles possam variar os valores de a e b na função: $y = a + \log 2\,(x - b)$, por meio dos controles deslizantes no alto da tela e analisar as diferenças nos gráficos das funções.

Ou pelo link:

https://www.geogebra.org/classic/nbqcsm69

Vamos agora pensar no gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ .Para construir o gráfico de f(x), podemos começar com o de $y = x^2$. Na sequência construímos o de $y = x^2 + 1$, deslocando uma unidade para cima o gráfico de $y = x^2$, na direção do eixo **y**. A partir daí, para obter o gráfico de f(x), representamos os pontos (x; y) de modo que o valor de **y** seja o inverso de $x^2 + 1$, para cada valor de **x**.

É importante notar que:

- no ponto onde $x = 0$, $x^2 + 1$ vale 1 e o inverso de $x^2 + 1$ também é igual a 1;
- em todos os outros pontos, $x^2 + 1$ é positivo e maior que 1; logo seu inverso é positivo e menor que 1;
- assim, o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ situa-se sempre acima do eixo x, aproximando-se mais e mais dele, a medida que o valor de x aumenta, pois quanto maior for o valor de $x^2 + 1$, menor será o valor de seu inverso.

Resumindo, na construção do gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ podemos observar os seguintes passos:

- construir o gráfico de $y = x^2$;
- construir o gráfico de $y = x^2 + 1$;
- construir o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

ATIVIDADE 6

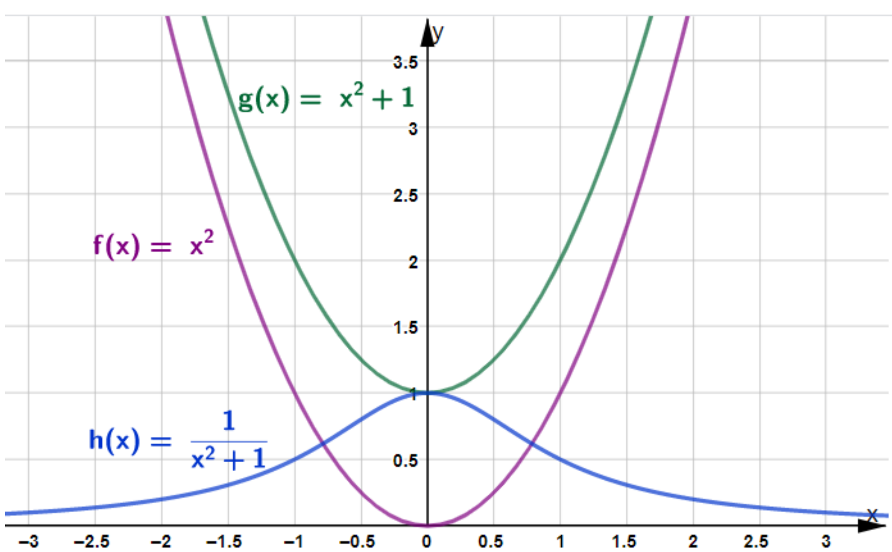
Faça o esboço da situação descrita para traçar o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$,

(Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para esboçar o gráfico solicitado)

Uma sugestão de resolução, seria a elaboração de uma tabela contendo as funções descritas anteriores e alguns valores para x, conforme segue:

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 + 1$	$h(x) = \frac{1}{x^2+1}$
–2	4	5	$\frac{1}{5}$
–1	1	2	$\frac{1}{2}$
0	0	1	1
1	1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	5	$\frac{1}{5}$

Então, o esboço das funções apresentadas na tabela, será:



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Para o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, podemos tomar como pontos de referências os gráficos de $y = x^2$ e $y = x^2 - 1$em seguida representar os pontos com abscissa **x** e ordenada o inverso de .

É importante notar que:

- quando $x^2 - 1 = 0$, ou seja, quando temos $x = 1$ ou $x = -1$, então a função f(x) não está definida;

- quando **x** assume valores próximos de 1 ou de –1,os valores absolutos dos inversos tornam-se muito grandes. Se **x** se aproxima de 1 por valores maiores do que 1, os inversos tornam-se muito grandes (positivos); por outro lado, se **x** se aproxima de 1 por valores menores do que 1, os inversos tornam-se muito grandes em valor absoluto, mas negativos. Algo similar ocorre quando **x** se aproxima de –1.

ATIVIDADE 7

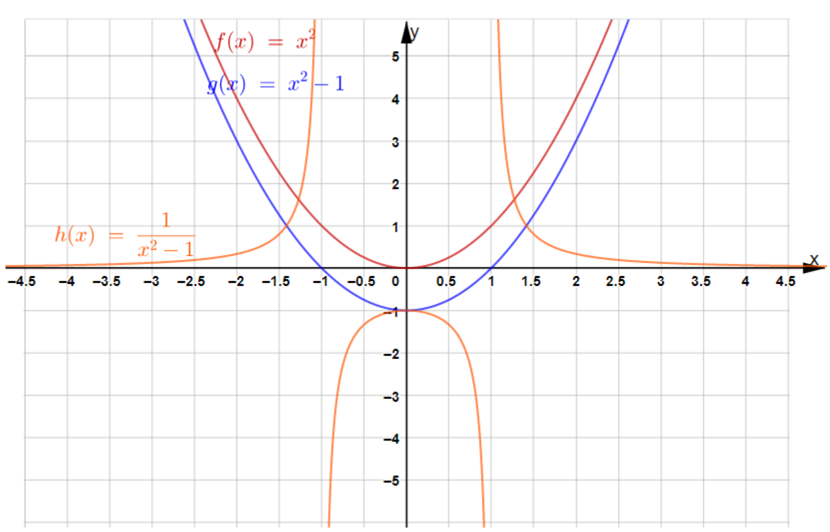
Sabendo-se disto, faça o esboço da situação descrita para traçar o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

(Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para esboçar o gráfico solicitado)

Uma sugestão de resolução, seria a elaboração de uma tabela, contendo as funções descritas anteriores e alguns valores para x, conforme segue:

x	**$f(x) = x^2$**	**$g(x) = x^2 - 1$**	**$h(x) = \frac{1}{x^2+1}$**
–2	4	3	$\frac{1}{3}$
–0,5	0,25	–0,75	$-\frac{4}{3}$
0	0	–1	–1
0,5	0,25	–0,75	$-\frac{4}{3}$
2	4	3	$\frac{1}{3}$

Então, o esboço das funções apresentadas na tabela, será:



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Para o gráfico de $y = \frac{1}{x}$, podemos esboçar primeiramente o gráfico de y = x e representar, para cada valor de **x**, a ordenada **y**, que é o inverso de **x**.

É importante notar que:

- quando x = 0, não existe o inverso de **x**, ou seja, a função f(x) não está definida;
- quanto mais próximo de 0 é o valor de **x**, maior é o valor absoluto do inverso de **x**, sendo que os valores de **x** positivos têm inversos positivos e os valores de **x** negativos têm inversos negativos;
- quanto mais próximo de 0 é o valor de **x**, maior é o valor absoluto do inverso de **x**, sendo que os valores de **x** positivos têm inversos positivos e os valores de **x** negativos têm inversos negativos;

ATIVIDADE 8

Faça o esboço da situação descrita para traçar o gráfico de $y = \frac{1}{x}$.

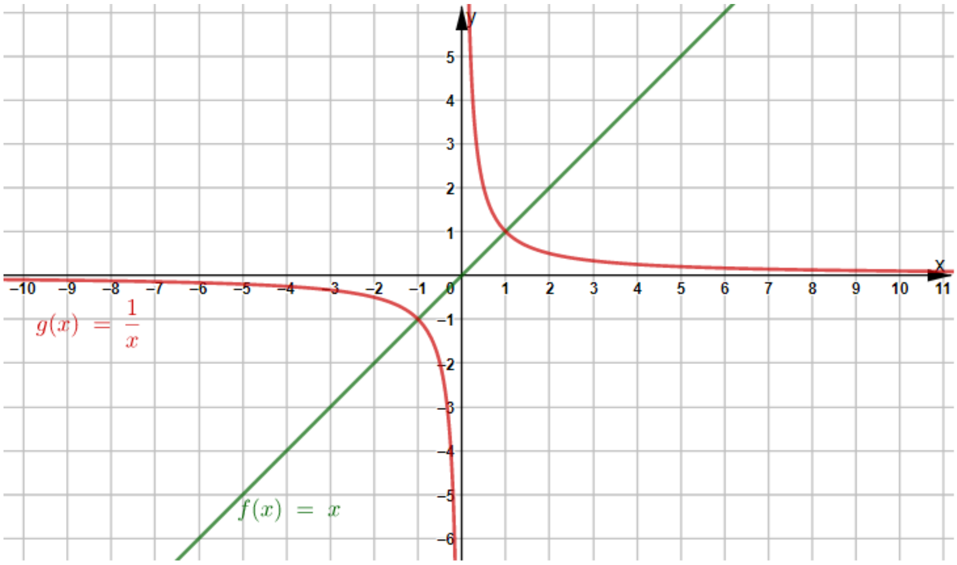
(Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para esboçar o gráfico solicitado).

Uma sugestão de resolução, seria a elaboração de uma tabela, contendo as funções descritas anteriores e alguns valores para x, conforme segue:

x	**y = x**	$f(x) = \frac{1}{x}$
–2	–2	$-\frac{1}{2}$
–0,5	–0,5	–2
–1	–1	–1
0,5	0,5	2
1	1	1
2	2	$\frac{1}{2}$

Fonte: Tabela elaborada pelos autores

Então, o esboço das funções apresentadas na tabela, será:



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

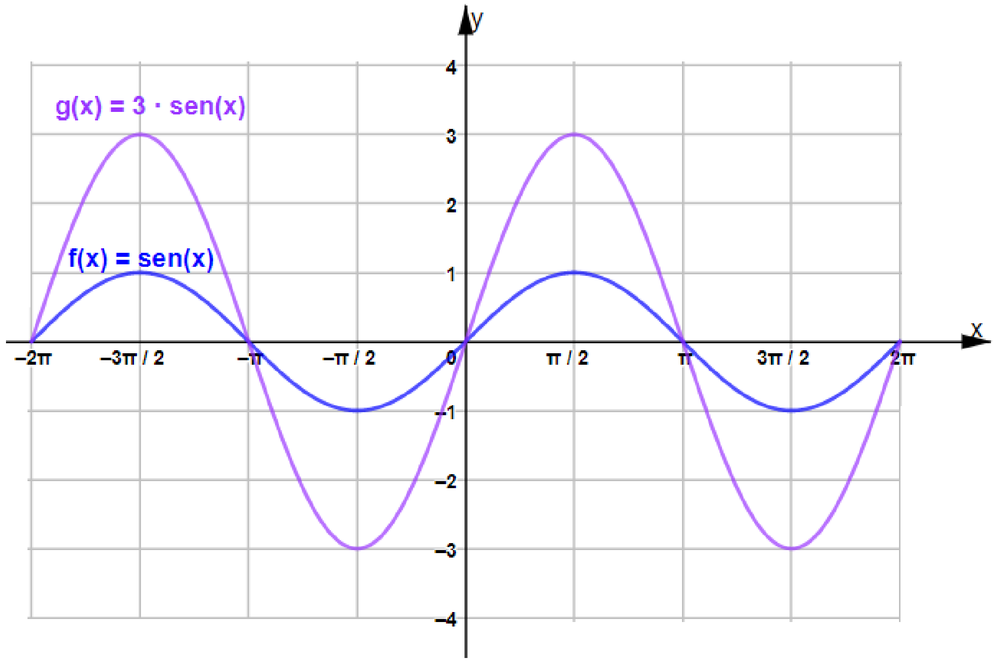
ATIVIDADE 9

O gráfico de f(x) = 3 sen x é análogo ao de y = sen x, com a amplitude aumentando de 1 para 3 unidades, ou seja, os valores de f(x) oscilarão entre +3 e –3. Faça o esboço desse gráfico no plano a seguir.

Uma sugestão de resolução, seria a elaboração de uma tabela, contendo as funções descritas anteriores e alguns valores para x, conforme segue:

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x) = sen (x)	0	1	0	–1	0	1	0	–1	0
g(x) =3 · sen (x)	0	3	0	–3	0	3	0	–3	0

Fonte: Tabela elaborada pelos autores



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

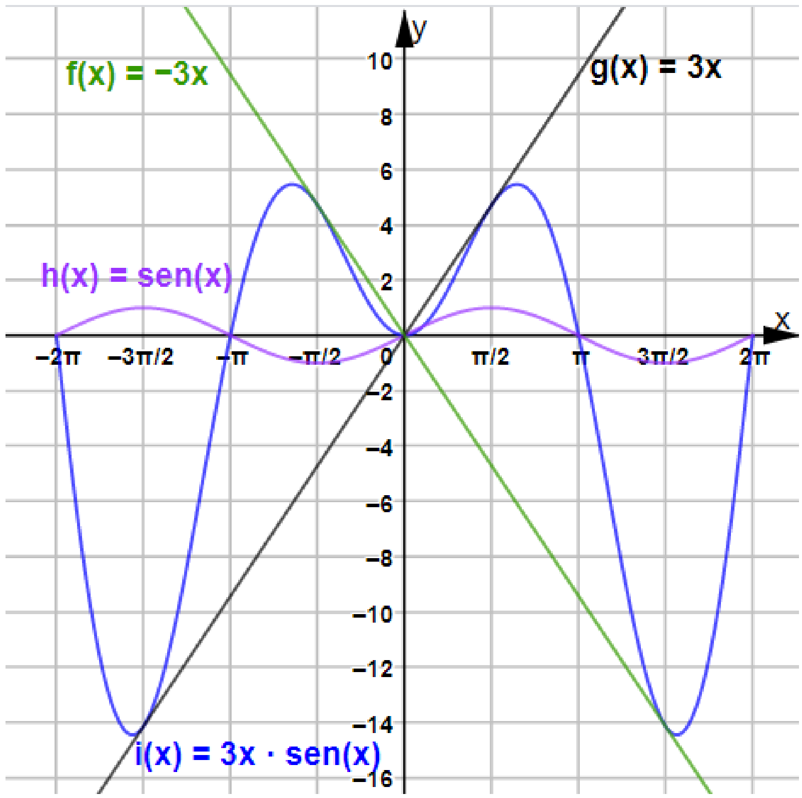
Atenção, professor! Facilite aos estudante o acesso ao QR CODE para que eles possam variar o valor entre -4 e 4 positivo por meio do controle no alto da tela e analisar as diferenças nos gráficos das duas funções.

Ou pelo link:

https://www.geogebra.org/classic/vexsbtny

ATIVIDADE 10

Para construir o gráfico de $f(x) = 3x \cdot \text{sen } x$, basta imaginar o gráfico de $y = A \cdot \text{sen } x$, sendo que o valor de **A** varia de acordo com **x** segundo a reta $y = 3x$.. Assim o gráfico oscilará entre as retas $y = 3x$ e $y = -3x$. Faça o esboço desse gráfico no plano a seguir.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Atenção, professor! Facilite aos estudantes o acesso ao QR CODE para que eles possam variar o valor entre -4 e 4 positivo por meio do controle no alto da tela e analisar as diferenças nos gráficos das duas funções.

Ou pelo link:

https://www.geogebra.org/classic/f5acrz3g

ATIVIDADE 11

Esboce no mesmo sistema de coordenadas, os gráficos das funções indicadas a seguir :

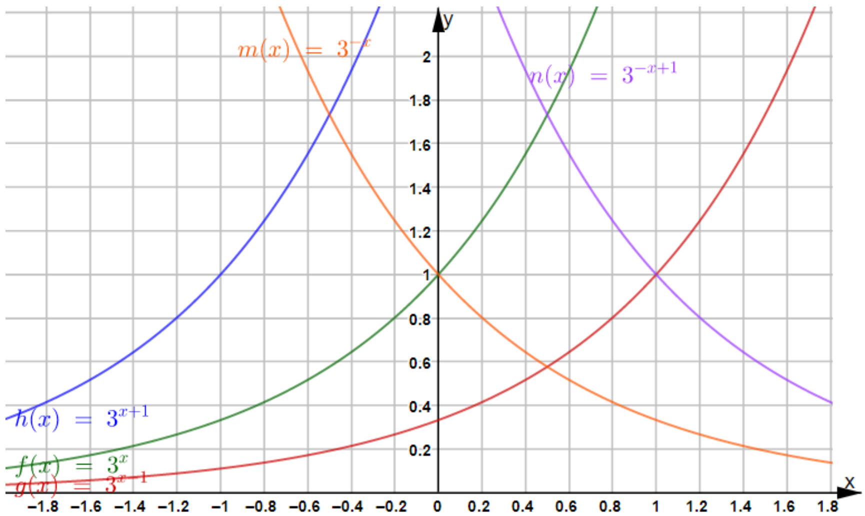
a) $f(x) = 3^{x}$

b) $g(x) = 3^{x-1}$

c) $h(x) = 3^{x+1}$

d) $m(x) = 3^{-x}$

e) $n(x) = 3^{-x+1}$

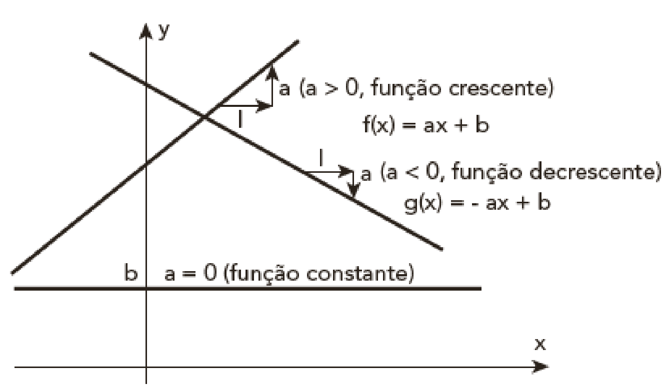


Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Disponibilize aos estudantes acesso ao QR CODE para que eles possam variar (por meio dos controles deslizantes) os parâmetros da função e analisar os efeitos na sua representação gráfica.

TEMA 3: CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DE FUNÇÕES.

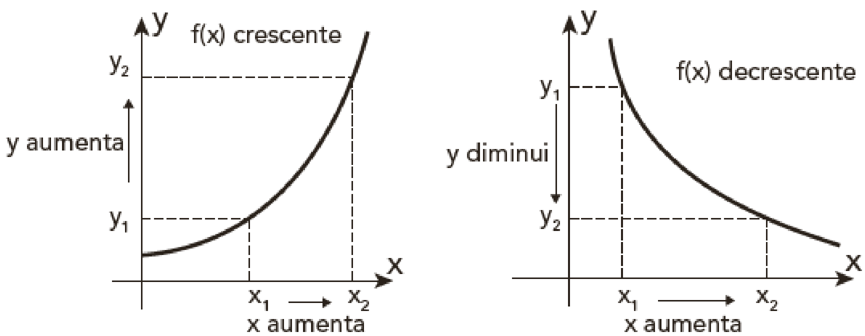
Na 1ª série do Ensino Médio, você já deve ter estudado que as funções polinomiais de 1° grau, expressas na forma f(x) = ax +b, são crescentes (a > 0) ou decrescentes (a < 0), sendo que o coeficiente **a** representa a variação em f(x), quando **x** aumenta em 1 unidade a partir de qualquer valor inicial. O valor de **a** é chamado taxa de variação unitária de f(x), ou somente taxa de variação de f(x). Naturalmente, se a = 0, ou seja se a taxa de variação é zero, então a função f(x) é constante: f(x) = b



taxa de variação = a = variação de f(x) por unidade a mais de x
a = f(x + 1) = f(x) = constante

Fonte: Imagem elaborada pelos autores

De modo geral, dizemos que uma função f(x) é crescente nos intervalos em que ocorre o seguinte: se os valores de **x** crescem, então os correspondentes valores de f(x) também crescem. Dizemos que f(x) é decrescente nos intervalos em que ocorre o seguinte: se os valores de **x** crescem, então os correspondentes valores de f(x) decrescem. O significado do crescimento ou do decrescimento do gráfico de f(x) é bastante expressivo:



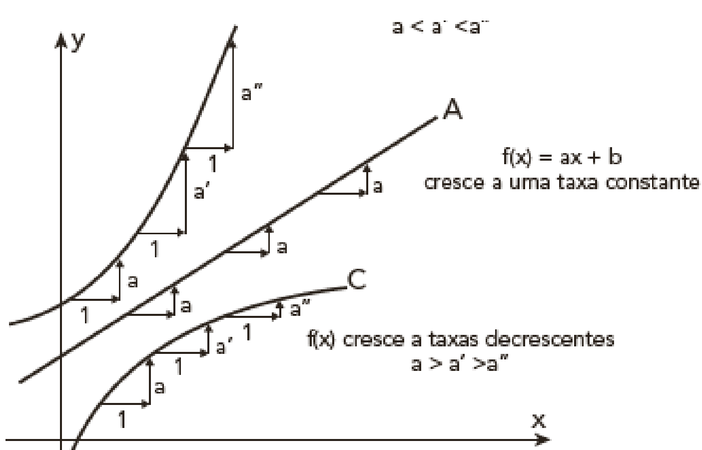
Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Consideremos uma função que não é de 1° grau, ou seja, cujo gráfico não é uma reta. Ao observá-lo, constatamos que a taxa de variação unitária de f(x), ou seja, a variação de f(x) por unidade a mais de x, não é mais constate, isto é, a diferença f(x + 1) – f(x) passa a depender do valor de x a partir do qual ela é calculada.

Por exemplo:

- se f(x) = 5x + 7, então f(x + 1) – f(x) = 5(x + 1) + 7 – (5x + 7) = 5, ou seja, a taxa de variação unitária de f(x) = 5x + 7 é constante e igual a 5, exatamente o valor de **a** na função a = 5;
- no entanto, se f(x) = $5x^2$ + 7, então f(x + 1) – f(x) = $5(x + 1)^2$ + 7 – ($5x^2$ + 7) = 10x + 5, ou seja, a taxa de variação unitária de f(x) = $5x^2$ + 7 é igual a 10x + 5; portanto, a taxa varia com o valor de **x** para o ponto considerado.

No que segue, chamaremos de taxa de variação unitária de uma função, para cada valor de x, o valor da diferença f(x + 1) – f(x).



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Quando uma função f(x) cresce a taxas crescentes, seu gráfico tem a concavidade voltada para cima; quando ela cresce a taxas decrescentes, seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

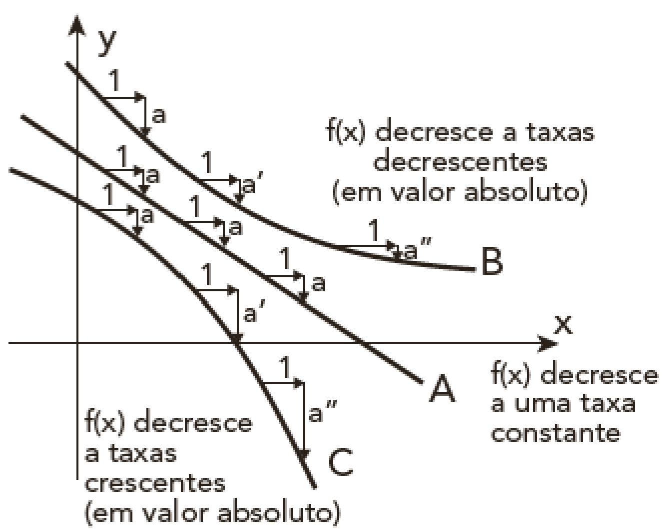
Basicamente, em cada intervalo considerado, estas são as três formas de crescimento:

- crescer linearmente, com taxa de variação constante;
- crescer cada vez mais rapidamente, ou seja, com taxas de variação crescentes, o que faz com que o gráfico resulte encurvado para cima;

De forma análoga, em dado intervalo, uma função pode decrescer de três modos distintos:

- decrescer linearmente, com taxa de variação constante;
- decrescer cada vez mais rapidamente, ou seja, com taxas de variação crescentes em valor absoluto (as taxas são negativas);
- decrescer cada vez mais lentamente, ou seja, com taxas de variação decrescentes em valor absoluto (as taxas são negativas).

O gráfico a seguir ilustra as três formas de decrescimento:



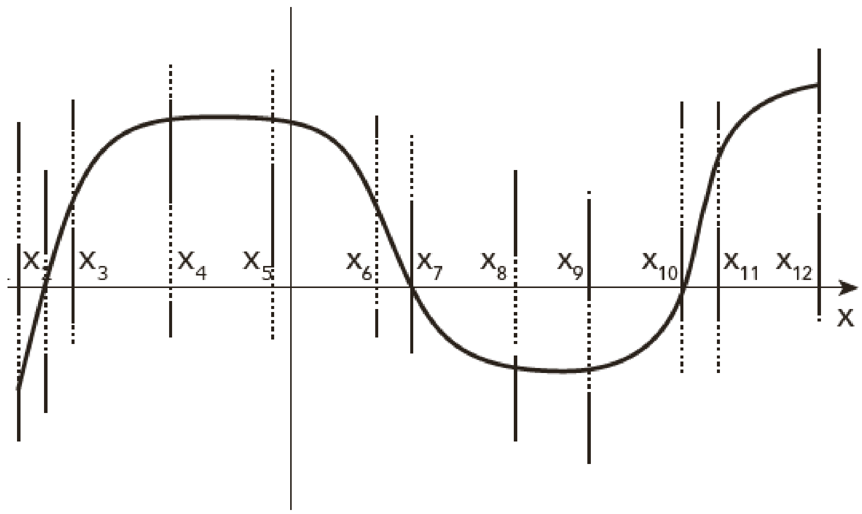
Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Resumindo:

Quando uma função decresce a taxas decrescentes, seu gráfico tem a concavidade voltada para cima; quando ela decresce a taxas crescentes, seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

ATIVIDADE 1

No gráfico a seguir, identifique os intervalos nos quais.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

a) a função f(x) é positiva;
Temos $f(x) > 0$ para x entre x_2 e x_7 e para x entre x_{10} e x_{12}.

b) a função f(x) é negativa;
Temos $f(x) < 0$ para x entre x_1 e x_2 e para x entre x_7 e x_{10}.

c) a função f(x) é constante;
A função f(x) é constante para valores de x entre x_4 e x_5 e para x entre x_8 e x_9

d) a função f(x) é crescente;
A função f(x) é crescente para x entre x_1 e x_4 e para x entre x_9 e x_{12}.

e) a função f(x) é decrescente;
A função f(x) é decrescente para x entre x_5 e x_8 .

f) a função f(x) cresce a taxa constante;
A função f(x) cresce a taxa constante nos intervalos em que o gráfico é um segmento de reta ascendente, ou seja, para x entre x_1 e x_3 e para x entre x_{10} e x_{11}.

g) a função f(x) decresce a taxa constante;
A função f(x) decresce a taxa constante no intervalo em que o gráfico é um segmento de reta descendente, ou seja, para x entre x_6 e x_7 .

h) a função f(x) cresce a taxas crescentes;
A função f(x) cresce a taxas crescentes no intervalo em que é crescente e o gráfico é encurvado para cima, ou seja, para x entre x_9 e x_{10}.

i) a função f(x) cresce a taxas decrescentes;
A função f(x) cresce a taxas decrescentes nos intervalos em que é crescente, mas o gráfico está encurvado para baixo, ou seja, para x entre x_3 e x_4 e para x entre x_{11} e x_{12}.

j) a função f(x) decresce a taxas crescentes;

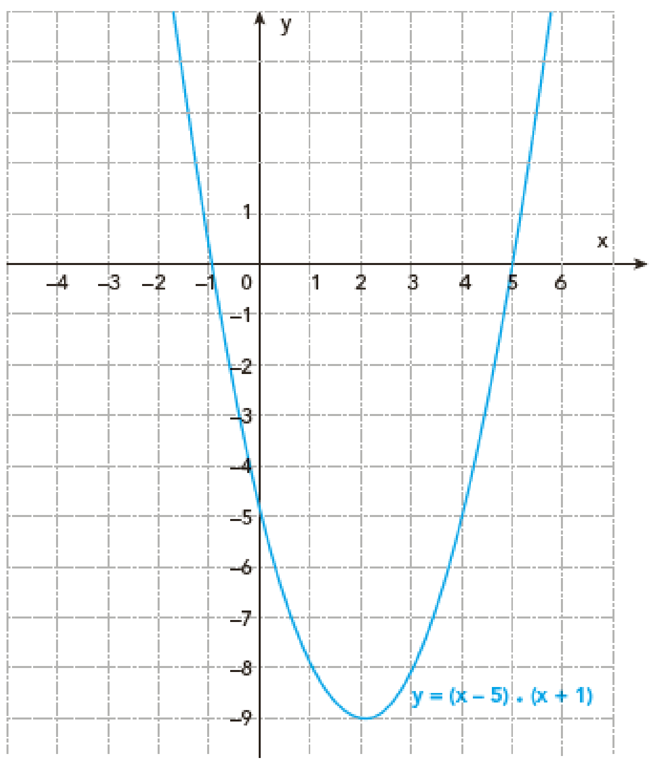
A função f(x) decresce a taxas crescentes no intervalo em que é decrescente e o gráfico é encurvado para baixo, ou seja, para x entre x_5 e x_6.

k) a função f(x) decresce a taxas decrescentes.

A função f(x) decresce a taxas decrescentes no intervalo em que é decrescente e o gráfico é encurvado para cima, ou seja, para x entre x_7 e x_8 .

ATIVIDADE 2

Considere o gráfico da função polinomial de 2º grau indicado a seguir.



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

a) Identifique os intervalos em que f(x) > 0 e os intervalos em que f(x) < 0

f(x) > 0 para x > 5, ou então para x < –1;

f(x) < 0 para x entre –1 e 5, isto é, – 1 < x < 5;

b) Identifique os intervalos em que f(x) é crescente e os intervalos em que é decrescente.

f(x) é crescente para x > 2;

f(x) é decrescente para x < 2;

c) Qualifique o crescimento e o decrescimento de f(x), informando se eles ocorrem a taxas crescentes ou a taxas decrescentes.
para x > 2, f(x) cresce a taxas crescentes (concavidade para cima);
para x < 2, f(x) decresce a taxas decrescentes (concavidade para cima).

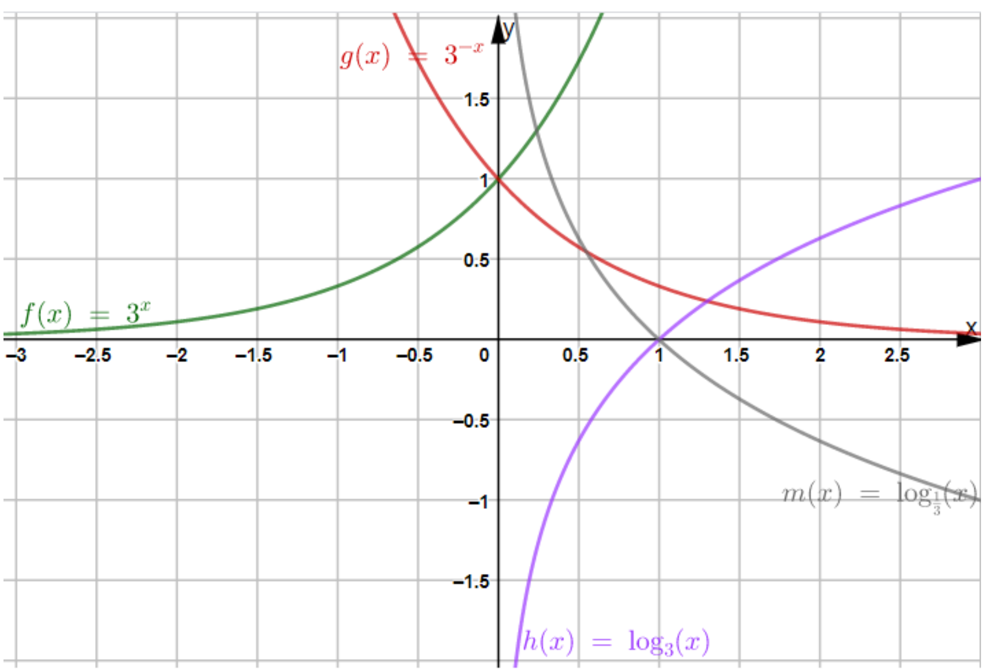
ATIVIDADE 3

Construa os gráficos das funções a seguir em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado.

a) $f(x) = 3^x$
b) $g(x) = 3^{-x}$
c) $h(x) = \log_3 x$
d) $m(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Identifique, em cada caso, se a função é crescente ou decrescente, bem como se o crescimento ocorre a taxas crescentes ou a taxas decrescentes



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

a) f(x) cresce a taxas crescentes;
b) g(x) decresce a taxas decrescentes;
c) h(x) cresce a taxas decrescentes;
d) m(x) decresce a taxas decrescentes

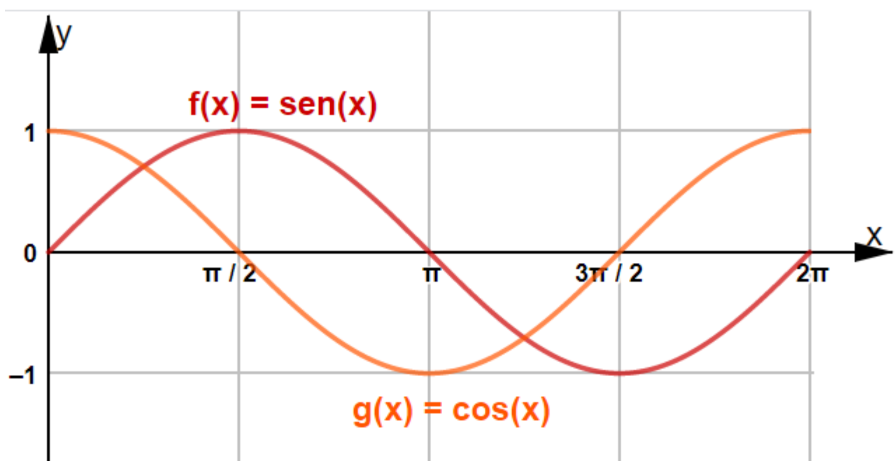
ATIVIDADE 4

No mesmo sistema de coordenadas, construa o gráfico das funções entre x=0 e x= 2π
Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado.

a) No intervalo considerado, identifique os trechos em que f(x) e g(x) são crescentes e os trechos em que são decrescentes.

b) Compare os gráficos de f(x) e de g(x), observando que os valores máximos de uma das funções ocorrem nos pontos em que a outra se anula e vice-versa.

c) Compare os gráficos de f(x) e de g(x), verificando que a concavidade de f(x) muda (de gráfico encurvado para baixo para gráfico encurvado para cima ou vice-versa) nos pontos em que g(x) assume valores extremos (máximos ou mínimos) e vice-versa em relação a g(x).



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

a)

f(x) é crescente para x entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ e para x entre $\frac{3\pi}{2}$ e ;

f(x) é decrescente para x entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$;

g(x) é crescente para x entre π e 2π;

g(x) é decrescente para x entre 0 e π.

b)

Notamos que o valor máximo de f(x) ocorre no ponto x = $\frac{\pi}{2}$, e o valor mínimo ocorre no ponto x = $\frac{3\pi}{2}$; nesses pontos, temos g(x) = 0.

Analogamente, o valor máximo de g(x) ocorre nos pontos x = 0 e x = 2π o valor mínimo, no ponto x = π; nesses pontos, temos f(x) = 0.

c)

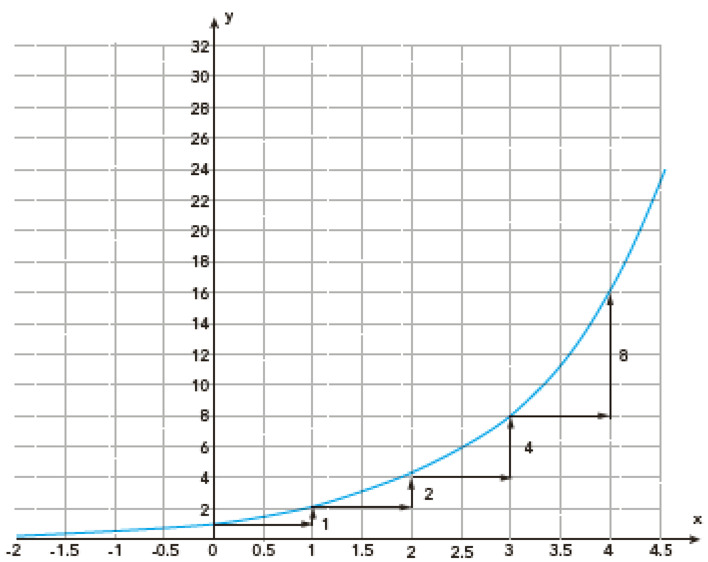
Notamos que o gráfico de f(x) passa de voltado para baixo a voltado para cima no ponto $x = \pi$, em que g(x) assume o valor mínimo. Analogamente, o gráfico de g(x) passa de voltado para baixo a voltado para cima no ponto $x = \frac{\pi}{2}$, que é de máximo para f(x), e volta a ficar voltado para baixo no ponto $x = \frac{3\pi}{2}$, que é de mínimo para f(x).

TEMA 4: CRESCIMENTO OU DECRESCIMENTO EXPONENCIAL O NÚMERO e

Durante o curso, você já deve ter resolvido vários problemas que envolvem a função exponencial, $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Neste momento, destacaremos uma propriedade característica, que pode ter passado despercebida.

Para exemplificar, vamos considerar a função $\mathbf{f(x) = 2^x}$ e seu gráfico. Iniciaremos o cálculo de f(x), com valores inteiros de **x**, começando com x = 0.

O gráfico da função, será representado da seguinte maneira:



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

x	2^x	f(x + 1) – f(x)
0	1	1
1	2	2
2	4	4
3	8	8
4	16	16
5	32	32
6	64	64
7	128	...

Notamos que quando **x** aumenta 1 unidade, a partir de x =0, a variação em f(x) é igual, sucessivamente, a 1, 2, 4, 8, 16,..., ou seja, a taxa de variação unitária, que é igual a f(x+1) – f(x), é igual ao valor de f(x).

f(1) – f(0) = f(0)   f(3) – f(2) = f(2) f(5) – f(4) = f(4)

f(2) – f(1) = f(1)   f(4) – f(3) = f(3) e assim por diante.

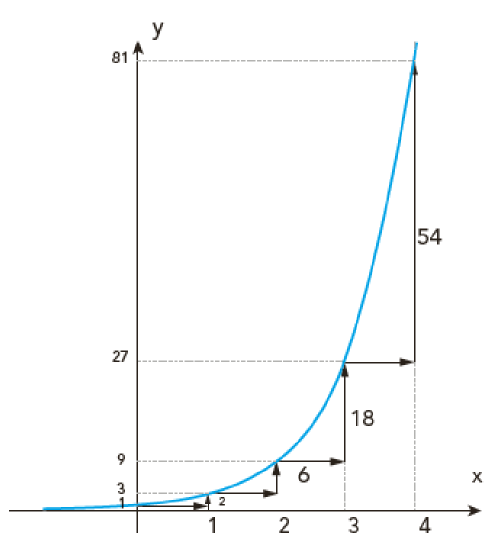
A taxa de variação unitária de é portanto, igual a f(x).

Chameremos essa taxa de $f_1(x)$. Calculando $f_1(x)$ para um valor qualquer de **x**, temos, de fato:

$$f_1(x) = f(x + 1) - f(x) = 2^{x+1} - 2^x =$$
$$= 2^x \cdot (2 - 1) = 2^x$$

ATIVIDADE 1

Analogamente ao que foi feito antes para $f(x) = 2^x$, calcule a taxa de variação unitária para $f(x) = 3^x$. Para isso, inicialmente complete a tabela a seguir:



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

x	3^x	f(x+1) – f(x)
0	1	2
1	3	6
2	9	18
3	27	54
4	81	162
5	243	486
6	729	1458
7	2187	4374

Notamos que, quando **x** aumenta 1 unidade, a partir de x = 0), a variação em f(x) é igual, sucessivamente, a 2, 6, 8, 18, 54, 162, ..., ou seja, a taxa de variação unitária, que é igual a f(x + 1) – f(x), é igual ao dobro do valor de f(x).

$f(1) - f(0) = 2f(0) = 2$ $\quad f(2) - f(1) = 2f(1) = 6$

$f(3) - f(2) = 2f(2) = 18$ $\quad f(4) - f(3) = 2f(3) = 54$

$f(5) - f(4) = 2F(4) = 162$ $\quad$ e assim por diante.

A taxa de variação unitária de f(x) = 3 é, portanto, igual a 2f(x). Chamando anteriormente, a taxa unitária de f_1 (x) e calculando seu valor para um x qualquer, temos, de fato:

$$\mathbf{f_1(x) = f(x+1) - f(x) = 3^{x+1} - 3^x = 3^x \cdot (3 - 1) = 2 \cdot 3^x}$$

Quadro-resumo

De modo geral, calculando a taxa unitária f_1 (x) para função **f(x) = a** ^{x} **, obtemos:**

$f_1(x) = f(x+1) - f(x) = a^{x+1} - a^x = a^x \cdot (a - 1)$, ou seja, o valor de f1(x) é diretamente proporcional ao valor de f(x).

ATIVIDADE 2

Uma população **p** de bactérias aumenta com uma rapidez diretamente proporcional ao seu valor, em cada instante, ou seja, quanto maior é o valor de **p**, mais rapidamente a população aumenta. Partindo de um valor P0 = 1 000, observa-se que a população dobra a cada hora, ou seja, o valor de **p** pode ser expresso pela função:

$$P = f(t) = 1\,000 \cdot 2^t \text{ (t em horas)}$$

a) Calcule a taxa de variação unitária nos instantes t= 1h e t = 2h.

$f_1(1) = f(2) - f(1) = 4000 - 2000 = 2000$

$f_1(2) = f(3) - f(2) = 8000 - 4000 = 4000$

b) Mostre que o aumento no valor de **P** entre os instantes t = 6h e t = 7h é igual ao valor da população para t = 6h.

O aumento citado é igual a:

$f(7) - f(6) = 1000 \cdot (2^7 - 2^6) = 1000 \cdot 2^6 (2 - 1) =$

$= 1000 \cdot 2^6 = f(6)$, ou seja, a taxa de variação unitária para t=6 é igual ao valor de f(6).

ATIVIDADE 3

A população N de cães, de certa região, cresce exponencialmente de acordo com a expressão $N = f(t) = 600 \cdot 10^t$, sendo **t** em décadas.

a) Calcule a taxa de variação unitária para t = 2 décadas.

$f_1(2) = f(3) - f(2) = 600 \cdot 10^3 - 600 \cdot 10^2 = 540000$

b) Mostre que o aumento no valor de **P** entre os instantes t = 7 e t = 8 é igual a 9 vezes o valor da população para t = 7.

O aumento pedido é igual a

$f(8) - f(7) = 600 \cdot (10^8 - 10^7) =$

$= 600 \cdot 10^7 \cdot (10 - 1) = 600 \cdot 10^7 \cdot 9 = 9 \cdot f(7)$, ou seja, a taxa de variação unitária para t = 7 é igual a 9 vezes o valor de f(7).

FENÔMENOS NATURAIS E CRESCIMENTO EXPONENCIAL – O NASCIMENTO DO NÚMERO.

Você sabia que os números mais frequentemente utilizados, como base de um sistema de logaritmo, são 10 e o número e = 2,71828....

Este número não é resultado de uma fração decimal periódica, no entanto ele é irracional, ou seja, ele não pode ser obtido por meio do quociente de dois inteiros. (e = p/q)

Então por que este número é tão importante?

A resposta para a indagação proposta está na variação proporcional das grandezas.

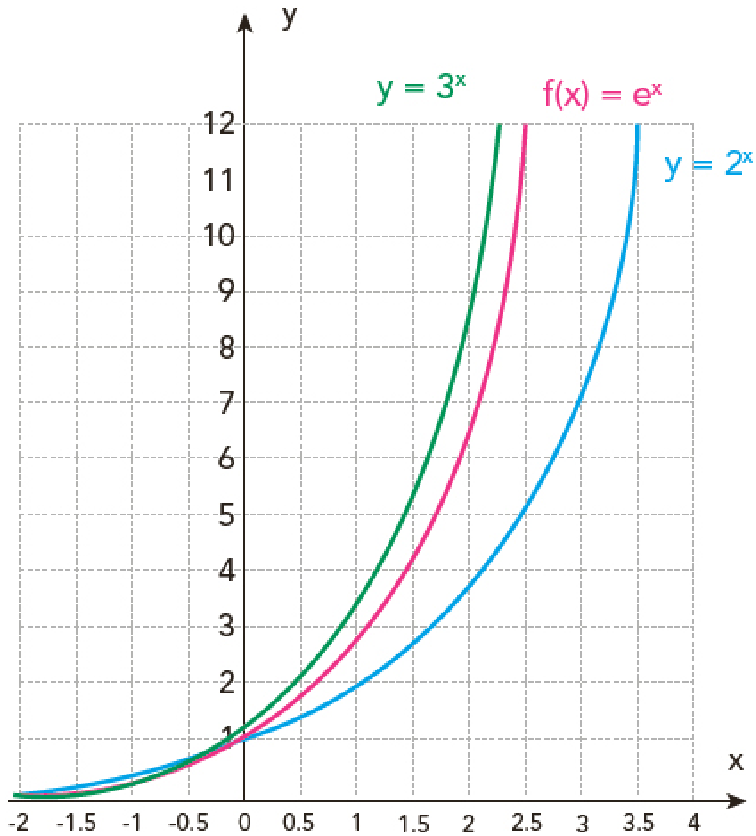
Um tipo de variação mais simples e comumente encontrada, consiste no crescimento (ou decrescimento) da grandeza em cada instante, é proporcional ao valor da grandeza naquele instante. Este tipo de variação ocorre, por exemplo, em questões de juros compostos, crescimento populacional (pessoas ou bactérias), desintegração radioativa etc.

Em todos os fenômenos dessa natureza, o número e aparece de modo natural e insubstituível, conforme estudaremos nas atividades a serem propostas.

Assim, reafirmamos: sempre que tentamos descrever matematicamente, o modo como variam as funções presentes em fenômenos naturais de diferentes tipos ou financeiras, que têm em comum o fato de que envolvem grandezas que crescem ou decrescem com uma rapidez é diretamente proporcional ao valor da grandeza em cada instante, naturalmente encontramos o número e.

Um valor aproximado de e pode ser obtido a partir da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$: quanto maior o valor de **n,** mais próximos estaremos do número e. Para todos os fins práticos e = 2,71828, ou, com uma aproximação melhor, e = 2,718281824590

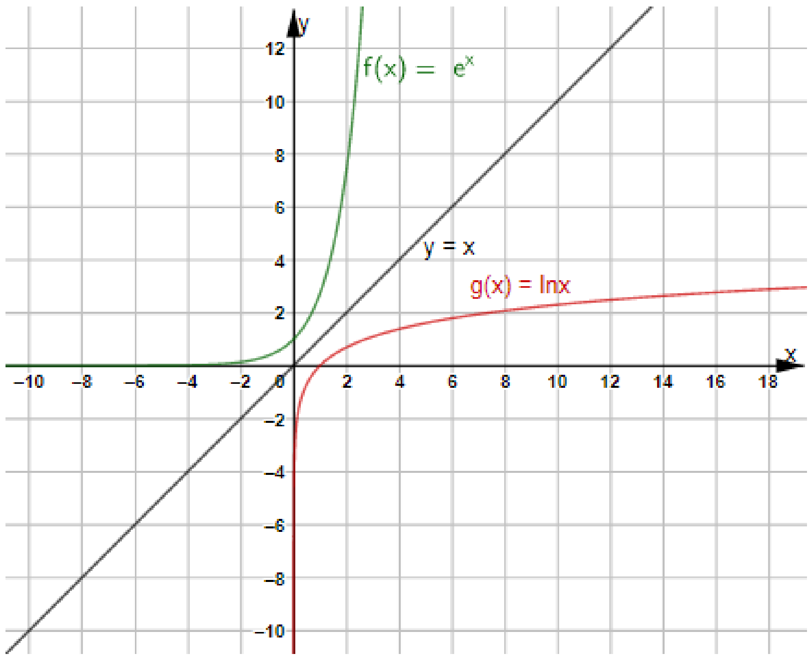
Em consequência, em situações concretas que descrevem fenômenos naturais que apresentem crescimento ou decrescimento exponencial, a função f(X) = e^x, cujo gráfico apresentamos a seguir, tem uma presença marcante.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

A função g(x) = $\log_e x$ costuma ser representada por g(x) = ln x, uma abreviatura para "logaritmo natural de **x**". Os gráficos de f(x) = e^x e de sua inversa, g(x) = ln x , são representados a seguir.

É interessante notar que, como funções inversas, a cada ponto (a; b) do gráfico de f(x) corresponde um ponto (b; a) do gráfico de g(x), ou seja, os gráficos são simétricos em relação à reta y = x.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Professor(a), quando estiver desenvolvendo este tópico, esboce o gráfico acima na lousa e peça aos estudantes que substituam o gráfico que consta no caderno pelo atual.

ATIVIDADE 3

Um investidor aplica uma quantia de R$ 1 000,00 a uma taxa de juros de 12% ao ano. Calcule o valor do **capital investido ao final do primeiro ano**, supondo que:

a) os juros serão incorporados ao capital apenas ao final de cada ano (juros simples);

Se os juros são simples, então o capital c_1 ao final do primeiro ano será 12% maior, ou seja, $C_1 = 1{,}12 \cdot C_0$, o que implica $C_1 = 1{,}12 \cdot 1000 =$
$= 1120$ reais.

b) os juros serão distribuídos uniformemente, sendo incorporados ao capital ao final de cada mês;

Se os juros são distribuídos (1% ao mês) e incorporados ao capital mês a mês, temos:

ao final do 1° mês: $C_{\frac{1}{12}} = 1{,}01 \cdot C_0$

ao final do 2° mês: $C_{\frac{2}{12}} = (1{,}01)^2 \cdot C_0$

de modo análogo ao final do 12° mês:

$C_1 = (1{,}01)^{12} \cdot C_0$. Ou seja:

$C_1 \cong 1{,}1268 \cdot 1000 = 1126{,}80$ reais

c) os juros serão incorporados continuamente ao capital (juros compostos) ao longo do ano. (Dado: $e^{0,12} = 1,1275$).

Se os juros são incorporados continuamente ao capital, temos: $C = C0 \cdot e^{0,12t}$

Ao final do primeiro ano, ou seja, par t = 1, temos: $C_1 = C_0 \cdot e^{0,12}$, ou seja, $C_1 \cong 1,1275 \cdot C0 \cong$ $\cong 1127,50$ reais.

ATIVIDADE 4

Quando uma substância radioativa se decompõe, a rapidez com que ela se transforma é diretamente proporcional à quantidade restante, em cada momento, ou seja, seu decrescimento é exponencial. Sabendo que a massa inicial $\mathbf{m_0}$ de certa substância radioativa é 60 g e se reduz à metade, a cada 4 h, determine a expressão de sua massa **m** em função do tempo **t** em horas:

a) supondo que $m(t) = m_0 \cdot 2^{bt}$, determine o valor de **b;**

Supondo $m(t) = m_0 \cdot 2^{b\cdot t}$, ou seja, $m(t) = 60 \cdot 2^{b\cdot t}$

e sabendo que, quando t = 4, temos m = 30, resulta: $30 = 60 \cdot 2^{4b}$, ou seja, $2^{4b} = \frac{1}{2}$.

Em consequência, $4b = \log_2\left(\frac{1}{2}\right)$

Como $\log_2 (2) = 1$, segue que $4b = -1$, pois,

$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(1) - \log_2(2) = -\log_2(2) = -1$

Segue que $b = -0,25$; então, $mt) = 60 \cdot 2^{-0,25t}$

b) supondo que $m(t) = e^{at}$, determine o valor de **a;**

Supondo $m(t) = m_0 \cdot e^{at}$ ou seja, $m(t)= 60 \cdot e^{at}$ e sabendo que, quando t = 4, temos m = 30, resulta: $30 = 60 \cdot e^{4a}$.

Ou seja, $e^{4a} = \left(\frac{1}{2}\right)$. Em consequência, $4a = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

Obtendo o valor de ln 2 em uma calculadora, obtemos *ln2 ≅ 0,6932* de onde segue que $4a \cong -0,6932$, ou seja, $a \cong -0,1733$.

c) mostre que as expressões obtidas nos itens a) e b) são equivalentes;

Calculando $2^{-0,25}$, usando uma calculadora (ou uma tabela de logaritmos), obtemos 0,8409, calculando $e^{-0,1733}$, obtemos o mesmo valor, o que significa que $(2^{-,025})^t = (e^{-0,17733})^t$, ou seja, as duas expressões para a função m(t) são equivalentes, respeitadas as aproximações.

d) calcule a massa restante após 8 horas;

Em qualquer uma das expressões para m(t), substituindo **t** por 8, obtemos a massa restante após 8h:

$$m(8) = 60 \cdot 2^{-0,25} \cdot 8 =$$
$$= 60 \cdot 2^{-2} = 15g$$

e) após quanto tempo a massa restante será igual a 12g?

Para saber após quanto tempo a massa será reduzida a 12g, basta determinar o valor de **t** em qualquer uma das expressões:

$112 = 60 \cdot e^{-0,1733t}$, ou seja, $-0,1733t = \ln\left(\frac{12}{60}\right)$, isto é, $-0,1733t = -\ln 5$.

Recorrendo a uma calculadora (ou a uma tabela de logaritmos), obtemos $\ln \cong 1,6094$; segue que $t \cong 9,29$h, ou seja, aproximadamente 9 horas e 17 minutos.

ATIVIDADE 6

MOMENTO DIGITAL

Construção de gráficos com o auxílio de um software.

Alguns softwares livres, como o Graphmatica, GeoGebra ou o Winplot, podem ser utilizados para construir gráficos de funções de vários tipos.

Para aprofundar os estudos propostos, neste caderno, você poderá efetuar o download de alguns dos programas de geometria dinâmica, mencionados anteriormente.

Tomaremos como exemplo a utilização do software GeoGebra, que pode ser utilizado tanto em computadores pessoais, bem como em aparelhos móveis (tablets ou celulares).

Para baixar os diferentes produtos oferecidos, acesse pela internet o site do GeoGebra. Disponível em **https://www.geogebra.org/**, acesso em 09/04/2019.

No nosso caso, sugerimos que efetuem o download do programa denominado GeoGebra Clássico, para utilizar em computadores pessoais.

O programa mencionado possui duas funcionalidades, além do usuário explorar todas as funcionalidades da Geometria Dinâmica, ele também é um plotador gráfico.

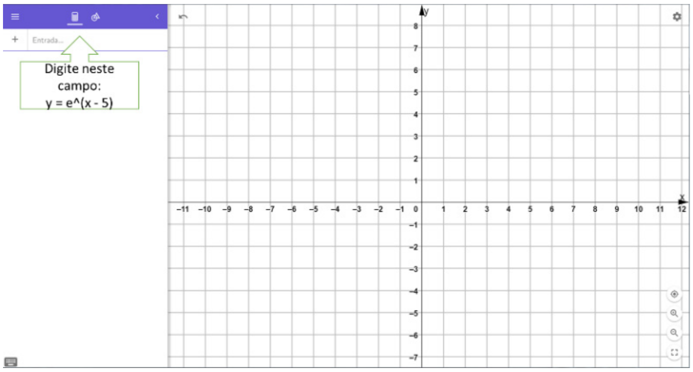
Para a utilização em aparelhos móveis sugerimos dois programas: a Calculadora gráfica e o Geometria

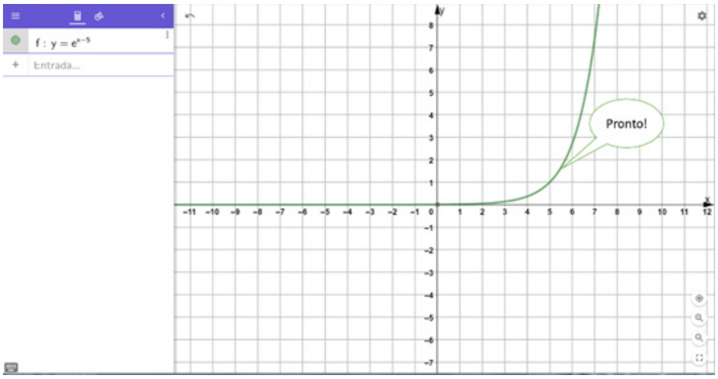
Para aparelhos móveis que utilizam o sistema Android o download, da Calculadora Gráfica, pode ser obtido por meio da leitura do seguinte QR code

Para aparelhos que utilizam o sistema IOS o download, da Calculadora Gráfica pode ser obtido por meio da leitura do seguinte QR code.

O GeoGebra on-line está disponível na URL ou no QR code: **https://www.geogebra.org/graphing**, acesso em 09/04/2019

Como exemplo de aplicação do software construiremos o gráfico de





ATIVIDADE 7

Dado as seguintes funções respondendo as alternativas a seguir:

$f(x) = e^{x}$ $\quad$ $g(x) = e^{-x}$

$h(x) = \ln x \ (h>0)$ $\quad$ $m(x) = \ln(-x) \ (x<0)$

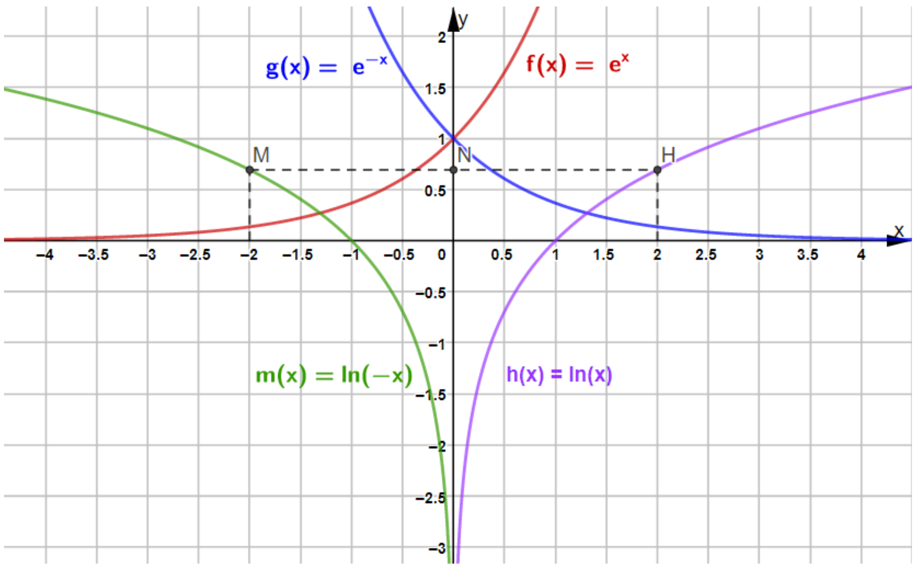
a) Qual das funções cresce a taxas crescentes?

b) Qual das funções cresce a taxas decrescentes?

c) Qual das funções decresce a taxas crescentes?

d) Qual das funções decresce a taxas decrescentes?

Prezado(a) Professor(a), solicite aos estudantes esboçar os gráficos das funções apresentadas em um mesmo sistema de eixos cartesianos.

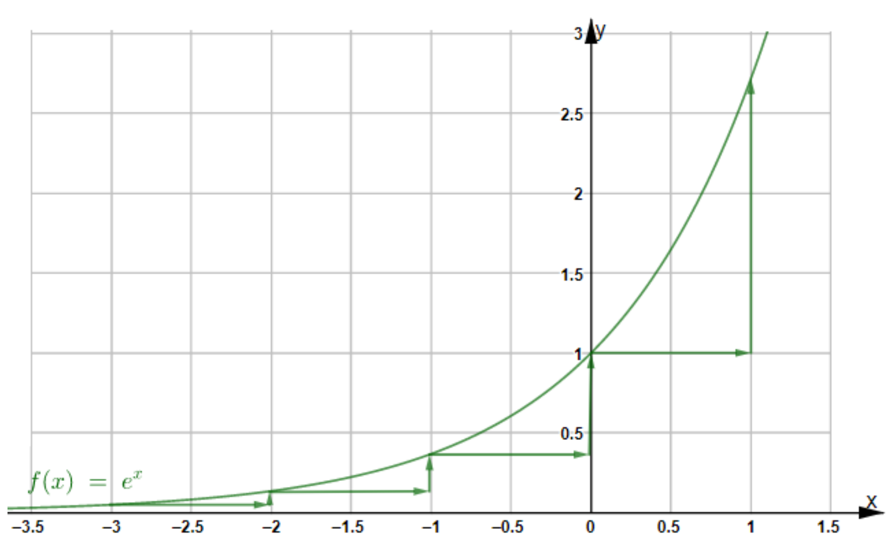


Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Os gráficos de f(x) e de g(x) são simétricos em relação ao eixo **y**, uma vez que os valores de f(x), quando trocamos **x** por (–x), coincidem com os valores de g(x). Os gráficos de m(x) e h(x) também são simétricos em relação ao eixo **y**. Notamos que, para x = –2, a função m(x) assume o mesmo valor que a função h(x) para x = 2. Naturalmente, o domínio de h(x) é o conjunto dos números reais positivos, enquanto o domínio de m(x) é o conjunto dos números reais negativos.

a) Qual das funções cresce a taxas crescentes?

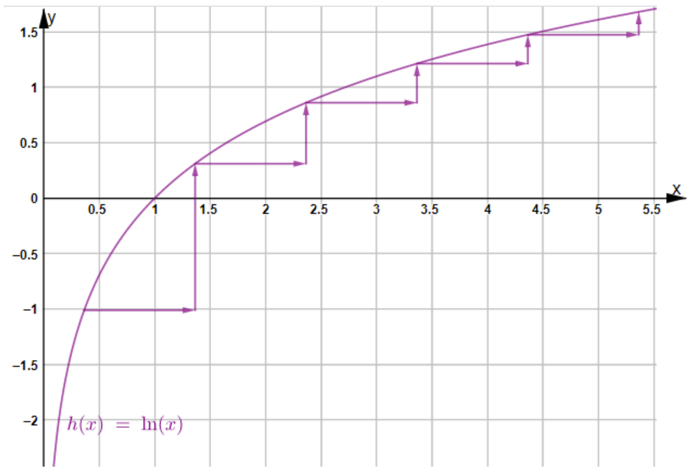
Observando os gráficos e lembrando o significado da taxa de variação unitária, notamos que ela é crescente em f(x), o que faz com que o gráfico resulte encurvado para cima; f(x) é crescente a taxas crescentes.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

b) Qual das funções cresce a taxas decrescentes?

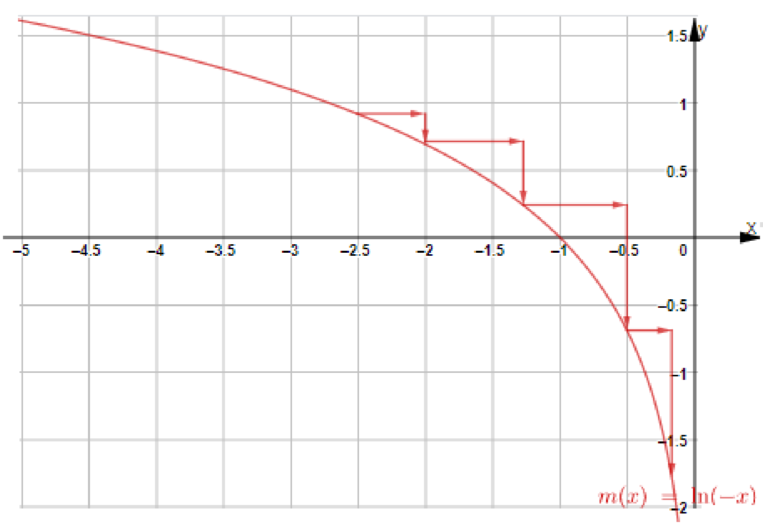
No gráfico de h(x) = lnx, notamos que a taxa de variação unitária é decrescente, o que faz com que o gráfico seja encurvado para baixo; h(x) é crescente a taxas decrescentes.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

c) Qual das funções decresce a taxas crescentes?

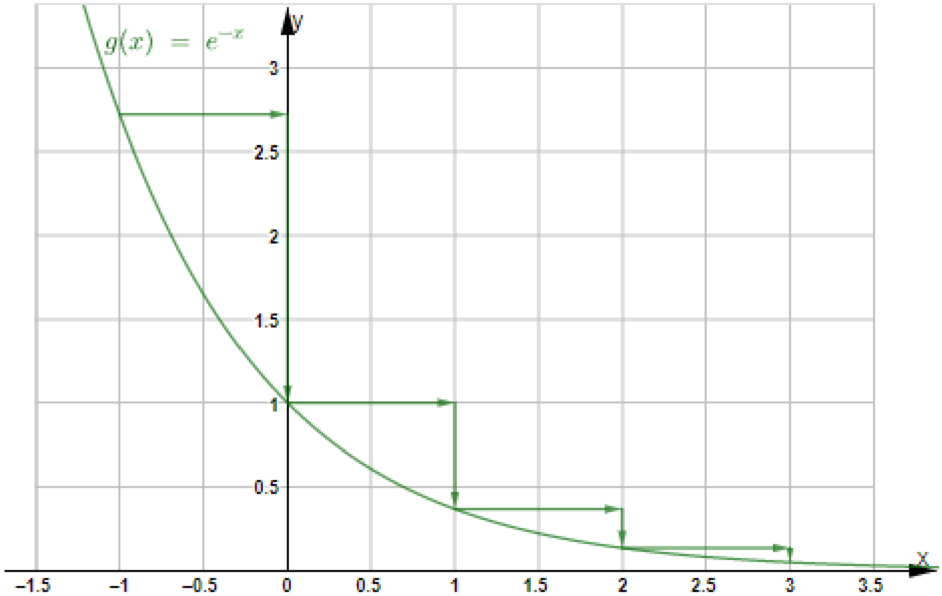
O gráfico de m(x) representa uma função decrescente, e notamos que as taxas de variação são crescentes em valor absoluto, m(x) decresce a taxas crescentes.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

d) Qual das funções decresce a taxas decrescentes?

O gráfico de g(x) representa uma função decrescente, e notamos que as taxas de variação são decrescentes em valor absoluto; g(x) decresce a taxas decrescentes.

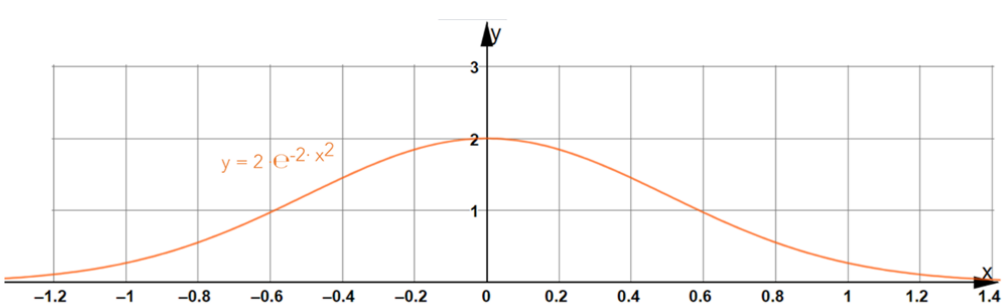


Fonte: Imagem elaborada pelos autores

ATIVIDADE 8

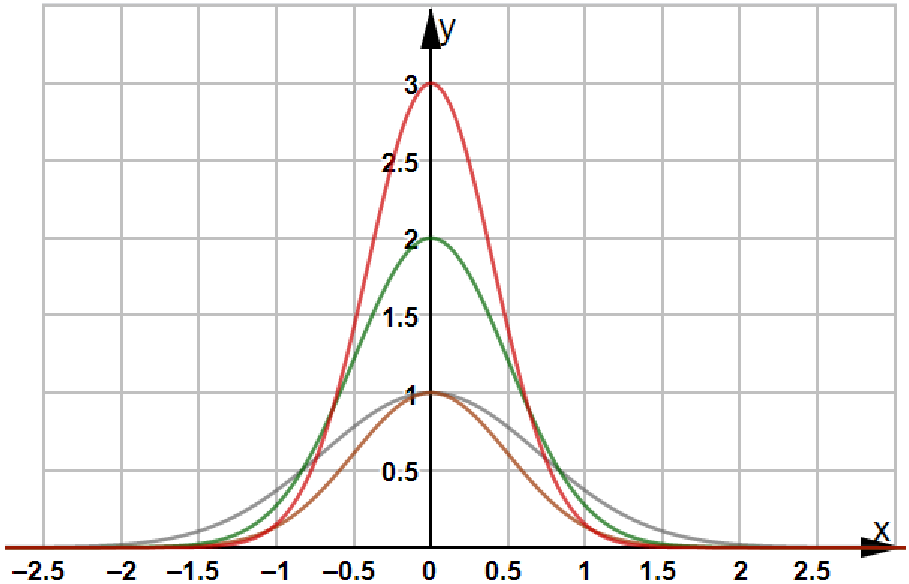
O gráfico da função $f(x) = e^{-x^2}$ é chamado **curva normal** e representa a distribuição, em torno do valor médio das frequências de ocorrência de um experimento aleatório em uma população. Muitas medidas de características físicas como altura, massa, dimensões dos pés, dos colarinhos, entre outras ao serem representadas estatisticamente, conduzem a uma curva normal. De forma geral, as diversas curvas do tipo normal (ou curva de Gauss) são do tipo $f(x) = a \cdot e^{-b \cdot x^2}$, com diversos valores para os parâmetros **a** e **b**.

A seguir temos um exemplo de uma curva normal, dada pela função $f(x) = 2 \cdot e^{-2 \cdot x^2}$



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Utilizando um programa para construção de gráficos, elabore algumas curvas de Gauss, variando os valores dos parâmetros **a** e **b.**



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Disponibilize aos estudantes acesso ao QR CODE para que eles possam variar (por meio dos controles deslizantes) os parâmetros da função e analisar os efeitos na sua representação gráfica.

Ou pelo link: **https://www.geogebra.org/classic/sxeqwc3f**

MATEMÁTICA

3ª SÉRIE – ENSINO MÉDIO
VOLUME 4

1.1 ORGANIZAÇÃO DAS GRADES CURRICULARES

Tendo em mente as ponderações anteriores, apresentamos uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais indicadas no Currículo Paulista, referente à etapa do Ensino Médio.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (Números e Álgebra, Geometria e Grandezas e Estatística e Probabilidade), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorizem a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo ensino é de que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas; o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

Desta forma, os quadros apresentados destacam as habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes em cada unidade. Tais habilidades traduzem, de modo operacional, as ações que os estudantes devem ser capazes de realizar, ao final de um determinado estágio de aprendizagem, após serem apresentados aos conteúdos curriculares listados.

1.1. GRADE CURRICULAR DA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

ENSINO MÉDIO – CURRÍCULO DE MATEMÁTICA – 2ª SÉRIE (4° BIMESTRE)		
CURRÍCULO OFICIAL – SEDUC-SP		Currículo Paulista do Ensino Médio
Tema/Conteúdo	**Habilidades**	**Competências Gerais**
Números/Relações Elementos de Estatística • Gráficos estatísticos e interpretação de índices estatísticos. • Medidas de tendência central: média, mediana e moda. • Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão. • Elementos de amostragem.	• Saber construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências a partir de dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas. • Saber calcular e interpretar medidas de tendência central de uma distribuição de dados: média, mediana e moda. • Saber calcular e interpretar medidas de dispersão de uma distribuição de dados: desvio padrão. • Saber analisar e interpretar índices estatísticos de diferentes tipos. • Reconhecer as características de conjuntos de dados distribuídos normalmente, utilizar a curva normal em estimativas pontuais e intervalares.	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

1.2 REVISANDO A CONSTRUÇÃO DE TABELAS E GRÁFICOS NA ESTATÍSTICA

A construção de gráficos e tabelas insere-se no contexto que envolve a busca de conhecimento e o esclarecimento acerca de certa questão da realidade, que se tem interesse em compreender. Dessa maneira, diante de uma questão proposta, seja no âmbito da sociedade ou da natureza, damos início a um trabalho de pesquisa mediante o levantamento de dados e registro das situações percebidas, concretamente de forma sistemática, que podem ser de natureza qualitativa ou quantitativa.

A construção de tabelas envolve um planejamento longo no qual devem estar previstas as condições da amostragem a serem realizadas, suas variáveis, as categorias a serem inseridas e sua posterior contagem de dados e, finalmente, a organização desses para a correta confecção do gráfico.

Para a construção dos gráficos, é necessário verificar qual seria o gráfico ideal para a apresentação dos dados presentes na tabela. Com o uso quase que corriqueiro, da facilidade das planilhas eletrônicas, a tarefa de construção de gráficos, ficou bem facilitada, porém a construção geométrica sem a utilização de recursos eletrônicos também é altamente positiva, ficando de acordo com as possibilidades da Unidade Escolar, ou da disponibilidade do estudante em utilizar tais recursos eletrônicos.

O tópico anteriormente apresentado, pode ser encontrado no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, na respectiva Situação de Aprendizagem, conforme segue:

Situação de Aprendizagem 4 – A apresentação de dados estatísticos: Gráficos e tabelas, Vol. 2, 3ª série do Ensino Médio, pg. 51 a 63.

Além dessa referência, o professor poderá recorrer a outros materiais que abordem o assunto tratado.

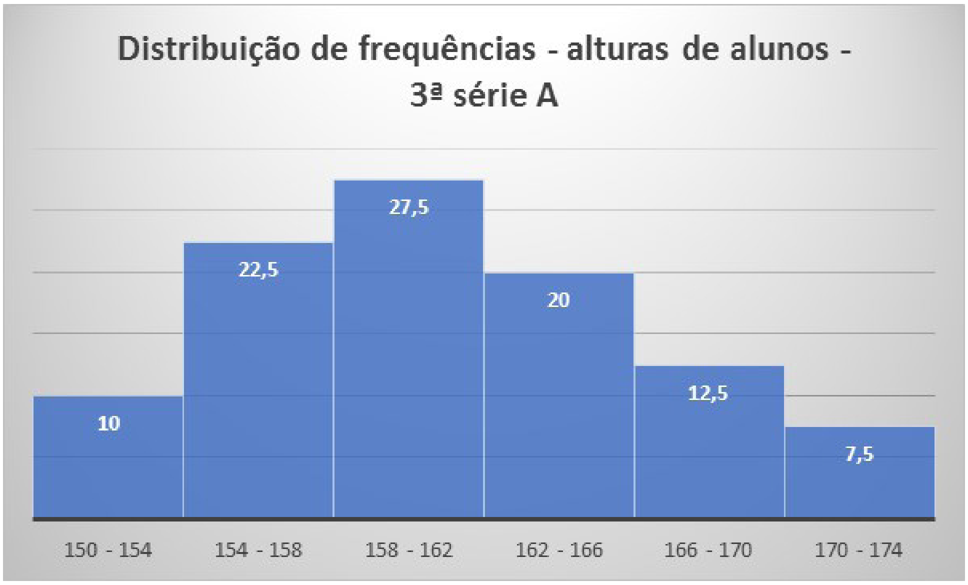
1.3 HISTOGRAMA E POLÍGONOS DE FREQUÊNCIA

Um histograma é uma representação gráfica, que ilustra uma determinada distribuição de dados. Podemos dizer que tal representação é uma estimativa da distribuição de probabilidade de uma variável contínua, tabulando frequências mostradas como retângulos adjacentes, erigida sob intervalos discretos, com uma área igual à frequência da observação no intervalo. A altura de um retângulo também é igual à densidade de frequência do intervalo.

A seguir, mostraremos um exemplo no qual é possível representar um caso de amostragem de dados por um histograma:

Estatura de 40 estudantes da 3ª série A			
i	**Estaturas (cm)**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**
1	150 ⊢ 154	4	10,00
2	154 ⊢ 158	9	22,50
3	158 ⊢ 162	11	27,50
4	162 ⊢ 166	8	20,00
5	166 ⊢ 170	5	12,50
6	170 ⊢ 174	3	7,50
		$\Sigma = 40$	$\Sigma = 100$

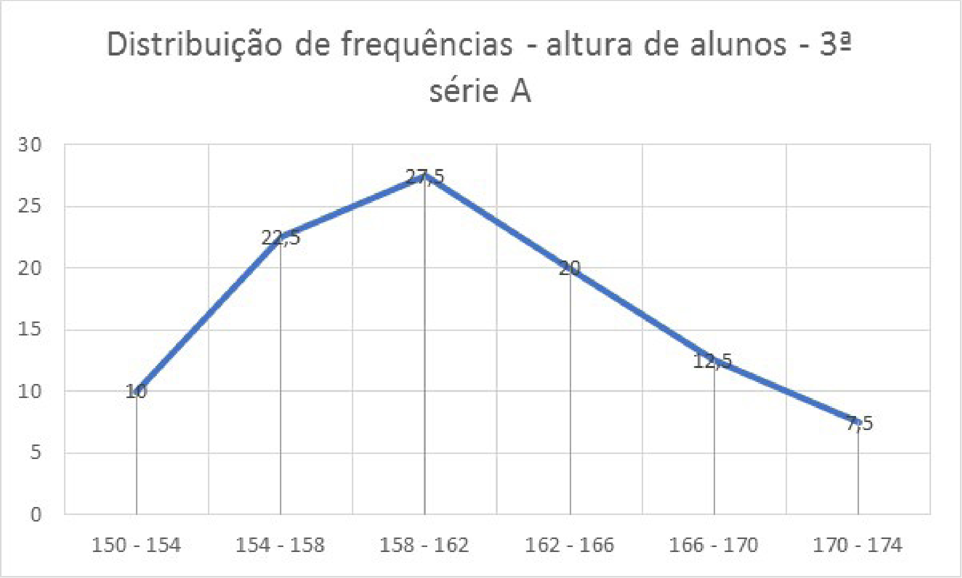
Fonte: Elaborada pelo autor



Fonte: Elaborada pelo autor

POLÍGONOS DE FREQUÊNCIAS

Um polígono de frequências é uma representação gráfica obtida por meio dos pontos médios de cada coluna do histograma, conforme a ilustração a seguir:



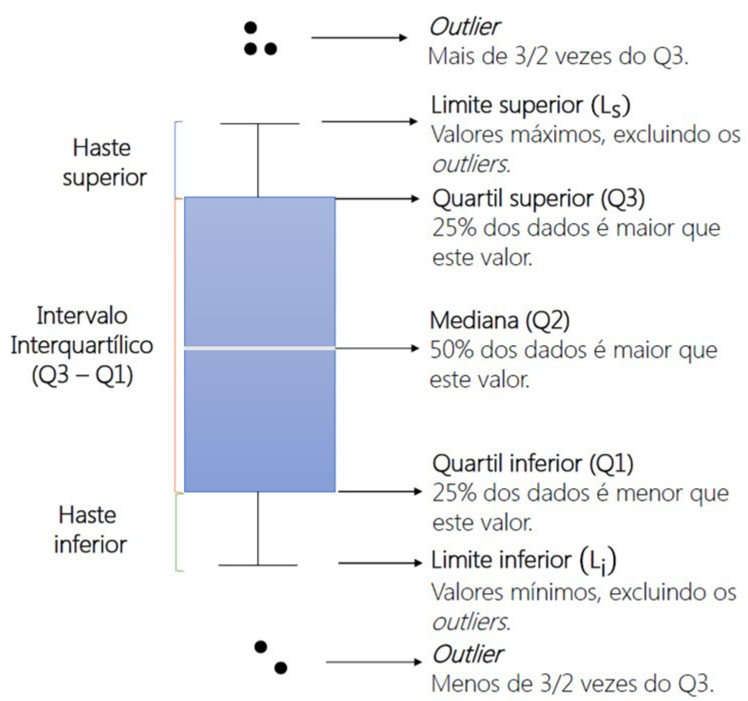
Fonte: Elaborada pelo autor

BOXPLOT OU DIAGRAMA DE CAIXA

A análise quantitativa de dados é sumarizada por meio de dados agrupados, dispostos em tabelas e gráficos. Nas tabelas, os dados permitem a análise simultânea de múltiplas variáveis e estabelece relações entre elas. Já o gráfico, com suas várias representações visuais, permitem a análise exploratória (ou descritiva) e a interpretação da tendência conjunta dos dados.

Uma dessas representações gráficas é o Boxplot, regularmente utilizado na pesquisa científica, que, resumidamente, sintetiza os dados para exibir a mediana, quartis e os valores de tendência central, dispersão e simetria dos dados agrupados.

A seguir apresentamos uma estrutura básica de um "Boxplot"



Fonte: Elaborada pelo autor

As informações do gráfico indicam:

a. eixo vertical –representam dados de valores numéricos;
b. eixo horizontal – fator de interesse;
c. primeiro quartil (Q1) – no qual se realiza ¼ ou 25% dos menores valores. Também chamado de quartil inferior ou 25° percentil. Representado pela linha limite inferior da caixa;
d. mediana ou segundo quartil (Q2) – é o local onde ocorre a divisão da metade superior (50%) da metade inferior da amostra. É o 50° percentil.
e. terceiro quartil (Q3) – no qual se localiza ¾ ou 75% dos valores maiores. Também chamado de quartil superior ou 75° percentil. Representado pela linha limite superior da caixa;
f. intervalo interquartílico (Q3 – Q1 ou IIQ) – é definida como a diferença entre Q3 e Q1. No gráfico é representado pela dimensão da caixa. Estende-se do Q1 ao Q3 (percentis 25° a 75°). Representa o intervalo dos 50% dos dados em torno da mediana;

g. limite inferior – valor mínimo do conjunto de dados, até 1,5 vezes o IIQ (uma vez e meia o intervalo interquartílico), excluindo os *outliers* e/ou extremos;

h. limite superior – valor máximo do conjunto de dados, até 1,5 vezes o IIQ (uma vez e meia o intervalo interquartílico), excluindo os *outliers* e/ou extremos;

i. *outliers* (valores atípicos) – valores acima e/ou abaixo de 1,5 vezes o IIQ;

j. extremos – valores acima e/ou abaixo de 2,5 vezes o IIQ (duas vezes e meia o intervalo interquartílico.

Sabendo-se disso passaremos à construção de um gráfico do tipo Boxplot.

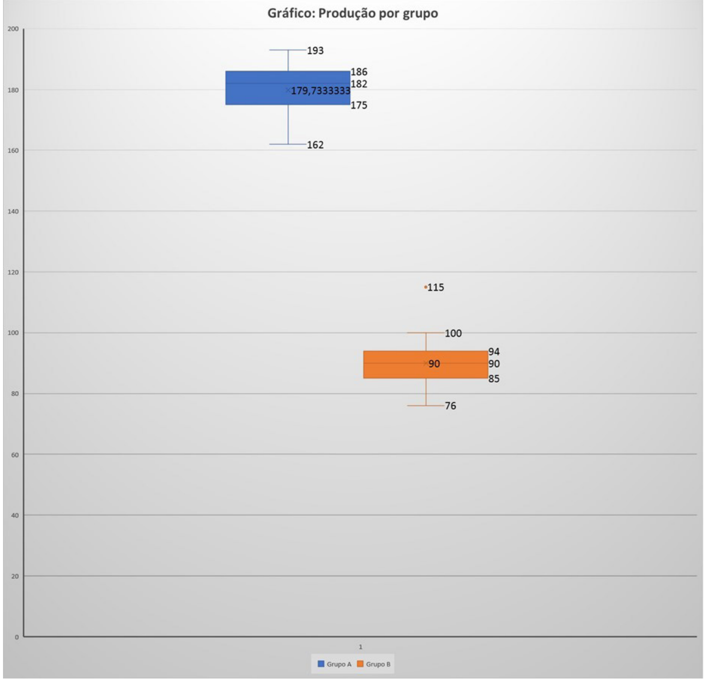
Veja a seguinte situação:

Para verificar o tempo de produção de dois materiais produzidos, uma empresa separou seus funcionários em dois grandes grupos. Após a coleta de dados, foi confeccionada a seguinte tabela:

Tabela 2 - Distribuição de frequências

Comparativo da produção por dois grupos distintos													
Tempo													
82	85	93	75	84	92	75	73	86	78	62	79	64	82
2	6	6	0	7	0	6	3	0	15	5	0	0	6

Fonte: Elaborada pelos autores



Fonte: Elaborada pelos autores

Observando o gráfico anterior pode-se constatar que pelos dados a produção do Grupo A é maior que o Grupo B porém observa-se, que o valor da mediana do Grupo B, é inferior ao do Grupo A, mas o intervalo entre o primeiro e o terceiro quartil é próximo para os dois grupos, dando a ideia de que a variabilidade do tempo de produção é semelhante para ambos os grupos.

GRÁFICO DE RAMOS E FOLHAS

Uma alternativa ao histograma é o diagrama de ramo-e-folhas. Nesse tipo de representação é possível observar a distribuição de um conjunto de valores e sua grande vantagem é que nele os valores originais são apresentados.

A ideia aqui é dividir as informações em partes denominadas ramo e folha, sendo a primeira o valor inteiro e a segunda o decimal (até dois dígitos), por exemplo, considerando o valor 5,35, o ramo é 5, e 35.

Os passos para a construção são:

1. Ordenar os valores;
2. Indicar as partes inteiras em uma primeira coluna;
3. Indicar os decimais em outras duas colunas, separadas da primeira por uma linha vertical.

Exemplo: O conjunto de dados {1,00; 2,55; 2,90; 3,01; 3,09; 4,55; 4,58; 5,11; 5,20; 5,25; 6,00; 4,95; 4,71; 3,68; 3,99; 3,55; 2,59} teria o diagrama:

1	00				
2	55	59	90		
3	01	09	55	68	99
4	55	58	77	71	95
5	11	20	25		
6	00				

Fonte: Elaborada pelos autores

A LINHA DE TENDÊNCIA DE UM GRÁFICO

Para abordar e investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas varáveis, sugerimos a utilização da Regressão Linear por meio da construção do seu gráfico. A ideia de uma regressão linear propõe o estudo do comportamento de uma variável e a partir de dados presentes.

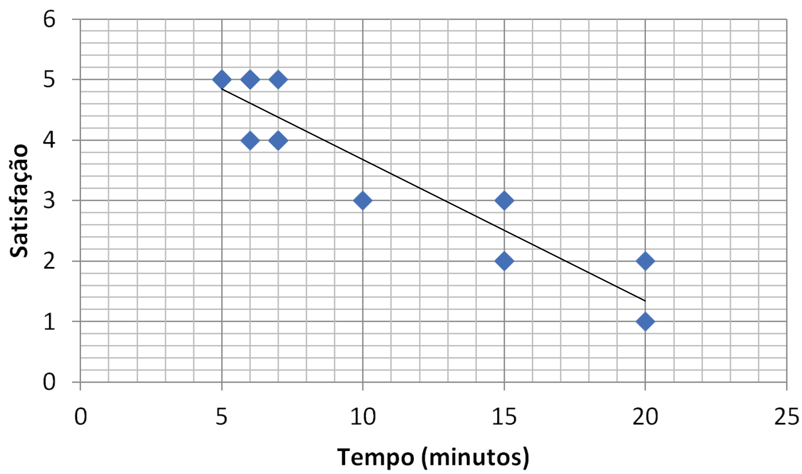
Exemplo 1: As propagandas exibidas na tela do seu computador enquanto navegamos na internet. Ao fazer uma busca por tênis de corrida, a regressão linear faz uma aproximação de outros produtos que tenham algum tipo de ligação com o produto pesquisado, como outros tênis de mesa na modalidade outras marcas ou até mesmo acessórios para corrida.

Com a regressão linear, é possível observar a curva que mais se aproxima ao comportamento de relação entre as variáveis.

Exemplo 2: Observe a tabela a seguir quanto à satisfação dos clientes de um banco em relação ao tempo de espera para atendimento.

Cliente	Tempo (minutos)	Satisfação
A	10	3
B	5	5
C	7	4
D	7	5
E	6	5
F	5	5
G	7	4
H	15	3
I	20	2
J	15	3
K	5	5
L	6	5
M	7	4
N	6	4
O	15	2
P	15	2
Q	7	4
R	6	5
S	5	5
T	20	1

Fonte: Elaborada pelos autores



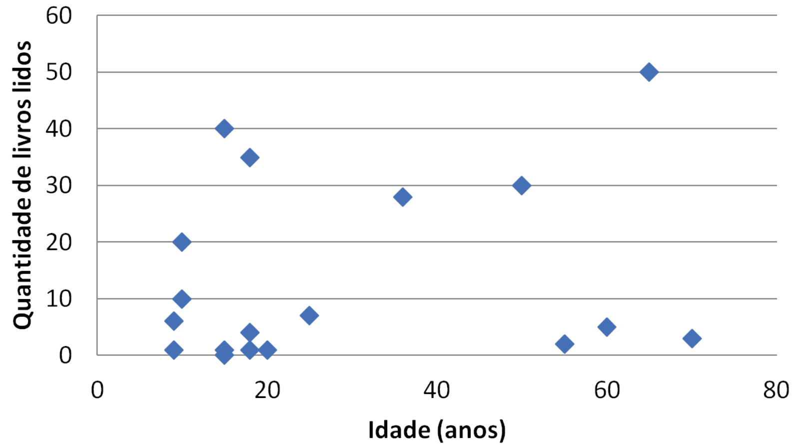
Fonte: Elaborada pelos autores

Elevada correlação negativa

Exemplo 3. A tabela a seguir, relaciona a quantidade de livros lidos e a idade de um grupo de pessoas.

Pessoa	Idade (anos)	Quantidade de livros lidos
A	9	6
B	9	1
C	10	10
D	10	20
E	15	1
F	15	0
G	15	40
H	18	4
I	18	35
J	18	1
K	20	1
L	25	7
M	36	28
N	50	30
O	55	2
P	60	5
Q	65	50
R	70	3

Fonte: Elaborado pelos autores



Fonte: Elaborada pelos autores

Ausência de correlação.

2 – ATIVIDADES

TEMA 1 – MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL: MÉDIA, MEDIANA E MODA

Ao final de cada bimestre, após o término das provas, acontece em todas as escolas o fechamento da média da nota em todas as disciplinas. No caso da nota bimestral, a média é dada pela soma das notas de todas as atividades, dividida pela quantidade de atividades realizadas. A média representa a tendência do conjunto de valores. Em um caso em que a média bimestral em matemática seja igual a 7, significa que de modo geral as notas giram em torno de 7 (em alguns casos um pouco mais em outros casos, um pouco menos que 7) compensando as diferenças. Por exemplo:

Notas: {6, 5, 10, 7}

Média aritmética: 7

Distâncias das notas até a média:

$6 - 7 = -1$ $\quad$ $5 - 7 = -2$ $\quad$ $10 - 7 = 3.$ $\quad$ $7 - 7 = 0$

Note que : $(-1) + (-2) + 3 + 0 = 0$

Somando as diferenças de cada nota pela média aritmética, o total sempre será igual a zero, compensando os desvios superiores ou inferiores à média. Para fazer uma análise mais precisa, se faz-se necessário o uso de outras *medidas de tendência central,* que são a mediana e a moda. A comparação entre moda, média e mediana é fundamental para dar significado à média. O estudo e a compreensão do significado da média, mediana e moda só farão sentido se levadas em conta as *medidas de dispersão*, como a amplitude, variância e o desvio padrão.

De uma forma simples e direta podemos escrever:

- Média aritmética: é somatório de todos elementos da série divididos pelo número de elementos.
- Mediana: é determinada ordenando-se os dados de forma crescente ou decrescente e determinando o valor central da série.
- Amplitude: é a diferença entre o valor máximo e mínimo.
- Desvio padrão: aparece junto à média aritmética, informando o quão "confiável" é esse valor.

Vejamos o exemplo a seguir:

A direção da escola "Saberes" fará uma análise de desempenho de uma turma de 3º série do Ensino Médio, observando a quantidade de estudantes que apresentam notas superiores a 6 em matemática. A diretora Andreia solicitou que o professor Raul montasse uma tabela com a quantidade de estudantes com nota maior que 6, ao longo de um ano, bimestre a bimestre, do 3º Ano B, gerando a seguinte tabela:

3ª B EM	Quantidade de estudantes com nota > 6
1o Bimestre	8
2o Bimestre	13
3o Bimestre	9
4o Bimestre	4

Fonte: Elaborada pelos autores

Média aritmética ($\overline{x}$)

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

De acordo com a tabela, temos:

$x_1 = 8;\ x_2 = 13;\ x_3 = 9;\ x_4 = 4$

Então:

$$\overline{x} = \frac{8 + 13 + 9 + 4}{4} = \frac{34}{4} = 8{,}50$$

moda: não há moda, observe que nenhuma amostra tem valor repetido

Mediana: 4; 8; 9; 13

Como o número de amostra é par, não há um valor central na série, portanto deve-se fazer a média aritmética entre as duas amostras centrais.

$$\text{mediana} = \frac{8+9}{2} = \frac{17}{2} = 8,5$$

Variância

$$V(x) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$$

ou

$$V(x) = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Então, temos que:

$$V(x) = \frac{(8-8,5)^2 + (13-8,5)^2 + (9-8,5)^2 + (4-8,5)^2}{3}$$

$$V(x) = \frac{(-0,5)^2 + 4,5^2 + 0,5^2 + (-4,5)^2}{3} = \frac{0,25 + 20,25 + 0,25 + 20,25}{3} = \frac{41}{3} = 13,66$$

Desvio Padrão

$$s = \sqrt{V(x)}$$

Dessa forma, o Desvio padrão da série apresentada será dado por:

$$s = \sqrt{13,66} \cong 3,70$$

Coeficiente de variação

$$Cv = 100 \cdot \frac{s}{\bar{x}}$$

Aplicando a fórmula na situação apresentada temos:

$$Cv = 100 \cdot \frac{3,70}{8,5} = 100 \cdot 0,4352 = 43,52\%$$

ATIVIDADE 1

[...]Quantas barragens existem no Brasil?

De acordo com a Agência Nacional de Águas - ANA, que tem a responsabilidade de consolidar o Relatório de Segurança de Barragens, o Brasil tem pelo menos 24.092 barragens, com diferentes usos.

Elas podem ser usadas para a produção de energia elétrica, contenção de rejeitos de mineração, disposição de resíduos industriais ou usos múltiplos da água. A ANA, no entanto, afirma que esse número pode ser maior. Sua compilação depende de que os órgãos, responsáveis pela fiscalização das barragens, cadastrem as estruturas no sistema de dados do governo.

"O número de barragens com certeza é maior. A maior parte dessas 24 mil são barragens de pequeno porte, em propriedades rurais', diz Fabio Reis, da Febrageo. Destas mais de 24 mil barragens, cerca de 4,5 mil obedecem aos critérios da PNSB (Política Nacional de Segurança de Barragens) e, portanto, devem ser fiscalizadas regularmente. Mas, de acordo com a ANA, sobre muitas delas não há informações suficientes para saber se também deveriam receber agentes.[...]"

Fonte: **https://www.bbc.com/portuguese/brasil-47056259** - Acesso em: 20.02.2019

De acordo com a ANA existem 7.171 barragens de diferentes usos no Estado de São Paulo dessas, 74 são de contenção de rejeitos de mineração, e 20 se enquadram nos critérios da PNSB, conforme tabela a seguir:

CRITÉRIOS PARA SE ENQUADRAR NA PNSB	
ALTURA	>= 15m
VOLUME	>= 3 milhões m^3
RESÍDUO	Perigoso
DANO POTENCIAL ASSOCIADO	Médio ou Alto

UF	Município	Minério principal	Altura atual (m)	Volume atual (m^3)	Categoria de risco
SP	Descalvado	Argila	15,00	1.500.000,00	Baixa
SP	Descalvado	Argila	15,00	577.840,39	Baixa
SP	Santana de Parnaíba	Calcário Dolomítico	20,00	8.500,00	Média
SP	Cajati	Rocha Carbonática	13,50	3.200.000,00	Baixa
SP	São Paulo	Argila	25,00	659.323,59	Média
SP	Mogi das Cruzes	Granito	27,36	375.000,00	Baixa
SP	Mogi das Cruzes	Granito	9,64	154.433,29	Baixa
SP	São Paulo	Granito	45,00	3.190.000,00	Baixa
SP	Leme	Argila	23,58	1.800.000,00	Baixa
SP	Cajati	Rocha Carbonática	60,00	6.340.000,00	Baixa
SP	Santa Isabel	Argila	14,00	74.135,00	Média
SP	Santa Isabel	Argila	20,00	170.000,00	Média
SP	Guararema	Argila	18,00	735.000,00	Baixa
SP	Ribeirão Branco	Minério de Estanho Primário	20,00	260.000,00	Média
SP	Mogi das Cruzes	Argila Arenosa	12,00	331.920,00	Baixa
SP	São Simão	Argila Caulinítica	5,00	271.000,00	Média
SP	São Simão	Argila Caulinítica	5,00	112.000,00	Baixa
SP	Ibiúna	Areia	14,04	157.070,50	Baixa
SP	Descalvado	Areia Industrial	25,00	921.154,70	Média

Fonte: Agência Nacional de Mineração: **https://bit.ly/2Gdpkzv** – Acesso em: 20.02.2019

a) Considerando a exploração de todos os tipos de argila no Estado de São Paulo, qual é o valor da altura da barragem que mais se repete?
Resposta: 15m

b) Qual é a média de altura das "Barragens de Argila" indicadas na tabela?
Resposta: 14,143636...

c) Conforme a tabela, qual é o valor central do volume das barragens apresentadas?
Resposta: 387.000

d) Conforme a tabela, qual o valor central do volume das barragens apresentadas?
Respostas:

Altura: 60 – 3 = 57

Volume: 6.340.000 – 8.500 = 6.331.500

ATIVIDADE 2

Em um ambulatório médico, no mês de fevereiro, foram atendidos pacientes pela oftalmologia e, sobre os dez primeiros dias, os números de atendimentos diários estão expressos na tabela a seguir:

Atendimentos oftalmológicos diários				
100	115	119	123	135
123	141	100	140	123

Fonte: Autoria própria

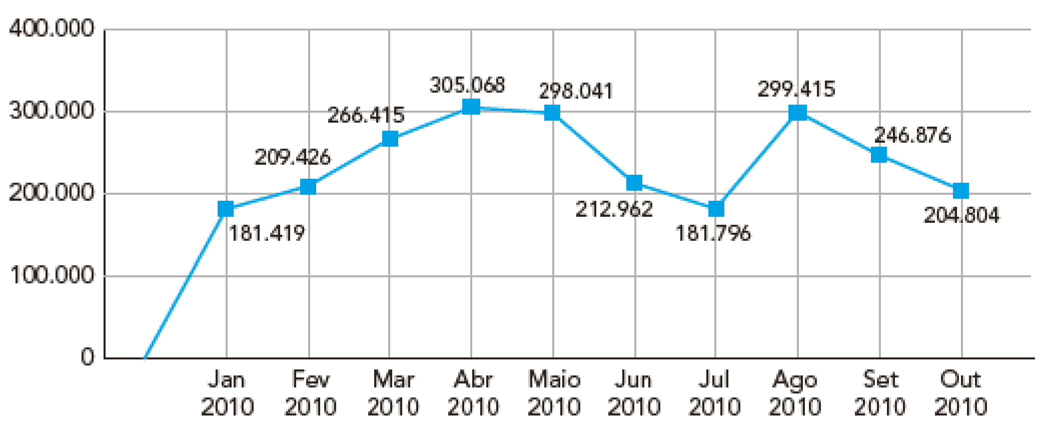
a) Qual é a média de atendimentos diários?
Resposta: $121,9 \cong 122$

b) Qual é a mediana?
Resposta: 123

c) Qual é a moda?
Resposta: 123

ATIVIDADE 3

(Adaptada - Enem 2012) O gráfico apresenta o comportamento de emprego formal surgido, segundo o CAGED, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010.



Disponível em: www.mte.gov.br
Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado)

Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é:

Resposta: 229.913

ATIVIDADE 4

Vamos relacionar a medida de tendência central “média” e as medidas de dispersão, que indicam o quão distantes estão os dados, que geraram uma média, quando comparados com a própria média.

Imagine a seguinte situação:

Em uma escola, Marcelo teve notas na prova de matemática 7,0; 6,5; 8,0 e 4;5, e, nas mesmas provas, Malcon obteve 2,0; 4,5; 9,5 e 10,0.

a) Qual foi a média de cada estudante?
Resposta: Considerando a última nota do Marcelo com 4,5, temos:
Marcelo: 6,5
Malcon: 6,5

b) Qual estudante você considera que teve maior desempenho? Justifique a sua resposta.
Resposta pessoal

ATIVIDADE 5

Uma forma de analisar, de modo mais apurado, o desempenho dos estudantes da atividade anterior é por meio das medidas de dispersão e a primeira da qual podemos tratar é a “amplitude”, que nada mais é do que a diferença entre a maior e a menor nota de cada estudante. Temos então, que Marcelo teve em suas notas uma amplitude de 7,0 - 4,5 = 3,5 e Malcon teve 10,0 - 2,0 = 8,0, embora as médias tenham sido as mesmas, nota-se que Marcelo teve uma menor variação (amplitude), em suas notas, que Malcon.

Com base na amplitude de notas apresentadas nessa situação, você pode agora dizer qual estudante teve maior desempenho? Por quê?

Resposta pessoal.

ATIVIDADE 6

Vamos agora calcular qual foi o desvio médio das notas de cada estudante, em relação à média alcançada por eles e, para isso, basta efetuar a diferença entre cada nota e a média deles. Complete a tabela a seguir:

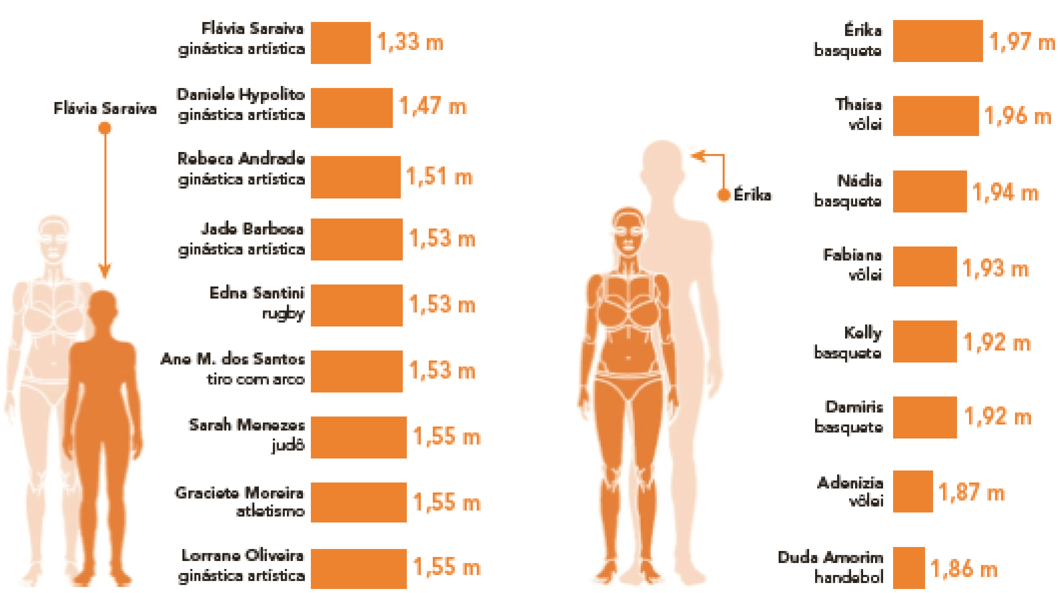
Estudante	1ª nota	2ª nota	3ª nota	4ª nota	Média	Amplitude	Desvio médio 1	Desvio Médio 2	Desvio Médio 3	Desvio Médio 4
Marcelo	7,0	6,5	8,0	4,5	6,5	3,5	7,0 – 6,5 = 0,5	0	1,5	–2,0
Malcon	2,0	4,5	9,5	10,0	6,5	8,0	2,0 – 6,5 = –4,5	–2	3,0	3,5

Finalmente, podemos avaliar qual dos estudantes teve desempenho mais regular baseando-se na média dos desvios médios de cada um.

ATIVIDADE 7

Histograma é um gráfico que serve para tratar as informações coletadas de dados, que representam quantidades agrupadas com possibilidade de escrevê-las em intervalos que podem ser definidos para melhor representação e análise. É composto por colunas retangulares, no eixo horizontal são colocadas as classes e no eixo vertical os valores correspondentes. Com eles podemos representar um fenômeno.

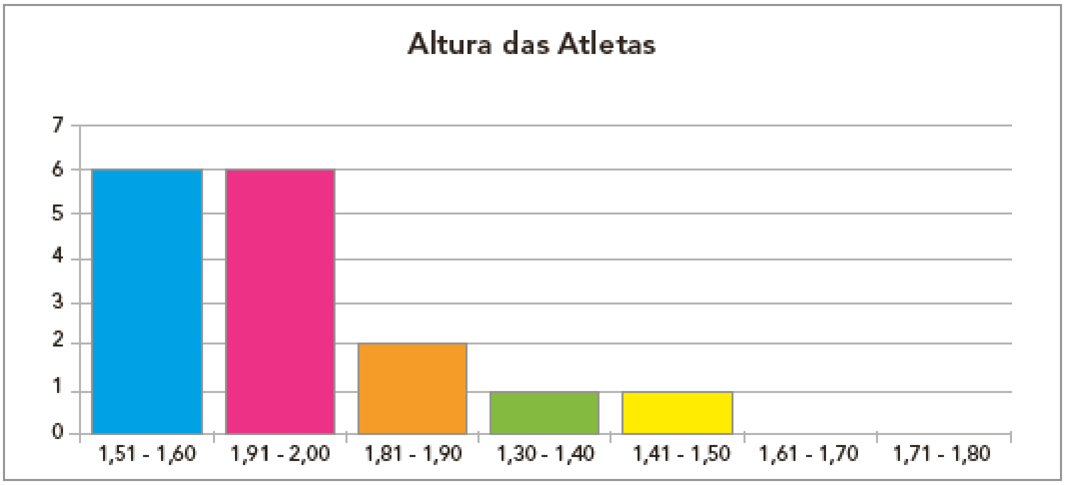
A seguir estão representadas as alturas de alguns atletas, que fizeram parte da Delegação Esportiva representando o Brasil nas Olimpíadas de 2016.



Disponível em: http://www.espn.com.br/noticia/615650_censo-olimpico-altura-peso-idade-e-origem-o-raio-x-completo-dos-465-atletas-que-defenderao-o-brasil-na-rio-2016 Acesso em: 22/02/19

Podemos estabelecer um agrupamento com base em um intervalo de valores, por exemplo:

Faixas – alturas	Frequência de valores
1,30 – 1,40 m	1
1,41 – 1,50 m	1
1,51 – 1,60 m	6
1,61 – 1,70 m	0
1,71 – 1,80 m	0
1,81 – 1,90 m	2
1,91 – 2,00 m	6

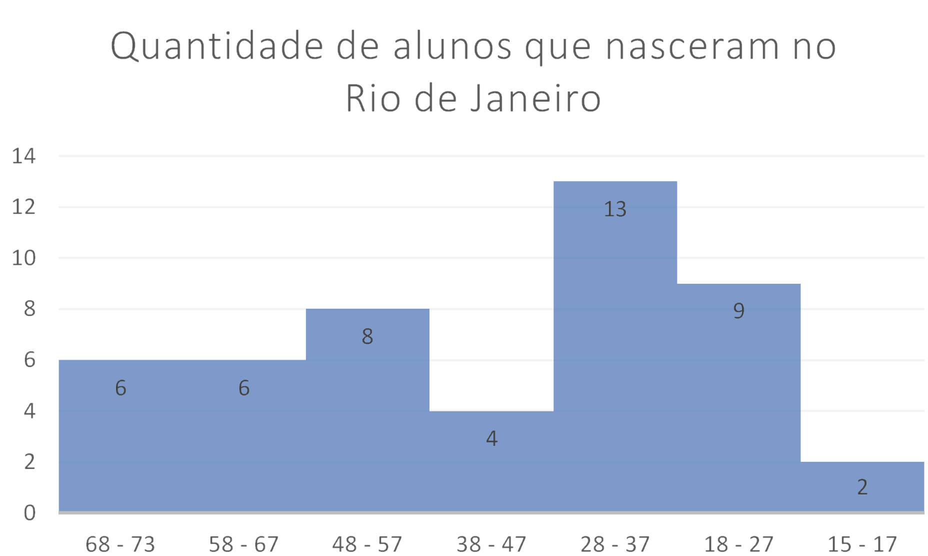


ATIVIDADE 8

Observe a tabela a seguir e, com base nos dados apresentados, faça o esboço de um gráfico (Histograma), por faixa etária, conforme pesquisa realizada com os estudantes, que participaram do Programa de Apoio aos Sistemas de Ensino para Atendimento à Educação de Jovens e Adultos (PEJA), para representar os estudantes que nasceram no Rio de Janeiro.

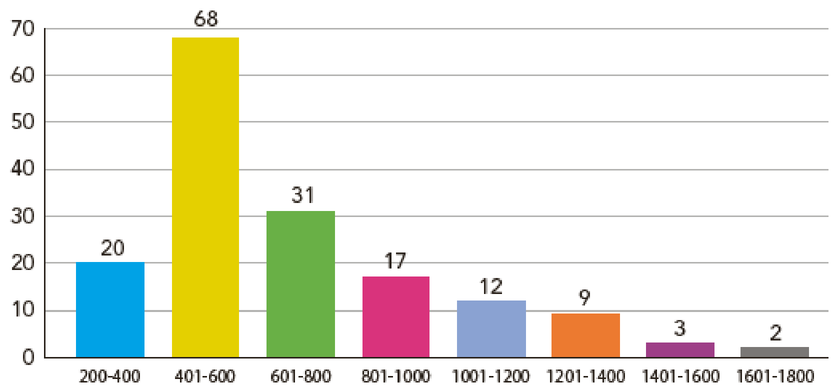
	Nasceu no Rio de Janeiro?		
Faixas de idade	**Não**	**Sim**	**Total**
68 – 73 anos	1	6	7
58 – 67 anos	10	6	16
48 – 57 anos	13	8	21
38 – 47 anos	6	4	10
28 – 37 anos	13	13	26
18 – 27 anos	4	9	13
15 – 17 anos	1	2	3
Total	**48**	**48**	**96**

Resposta:



ATIVIDADE 9

(Caderno do Professor_2014_2017_Vol2_Matematica_EM_3S). O gráfico, a seguir, foi construído pelo síndico de um condomínio para analisar o consumo de energia dos proprietários:



a) Qual é o número total de residências pesquisadas?
Resposta: 162

b) Quantas residências consomem até 1 400 kWh?
Resposta: 157

DIAGRAMA DE RAMO E FOLHAS

Nos diagramas de ramo e folhas, é possível ter uma visão geral da distribuição de um conjunto de valores, mostrando os dados numéricos brutos e a densidade relativa. Podem ser destacados com maior facilidade os "outliers" (pontos fora da curva) e a moda. Porém, os diagramas de ramo e folhas podem ser pouco úteis com conjunto de dados muito pequenos ou muito grandes. São geralmente usados como um método rápido de exibição gráfica de informações.

Mostraremos, a seguir, como construir um diagrama de ramos e folhas.

O conjunto de valores {1,00; 2,55; 2,90; 3,01; 3,09; 4,55; 4,58; 5,11; 5,20; 5,25; 6,00; 4,95; 4,71; 4,77; 3,68; 3,99; 3,55; 2,59} teria o diagrama:

1	00				
2	55	59	90		
3	01	09	55	68	99
4	55	58	77	71	95
5	11	20	25		
6	00				

ATIVIDADE 10

Crie um diagrama de ramo e folhas para os valores {20,35; 16,09; 11,23; 11,37; 11,80; 8,17; 8,65; 7,15; 5,00; 7,11; 16,03; 11,71; 11,95; 8,79; 8,80}.

Resposta:

5	0				
7	11	15			
8	17	65	79	88	
11	23	37	71	80	95
16	3	9			
20	35				

ATIVIDADE 11

Durante o Carnaval, 75% das multas aplicadas em rodovias federais foram decorrentes do excesso de velocidade. Observe o diagrama de ramo e folhas, que contém dados fictícios de velocidades registradas pelos radares.

9	2	2	3	4	4	5	9
10	1	5	5	7	7		
11	3	8					
12	0	2	4	7	9		
13	1						

Legenda: 9 | 2 = 92

a) Qual é a média das velocidades registradas entre 90 e 105 km/h?
Resposta: 95 km/h

b) Quartis são valores calculados que dividem em quatro partes iguais uma amostra de dados.
- 1° quartil (Q1) - é o valor apresentando 25% dos dados que são menores que/ou iguais a esse valor.
- 2° quartil (Q2) - é a mediana, ou seja, 50% dos dados são menores que/ou iguais a esse valor.
- 3° quartil (Q3) - é o valor apresentando 75% dos dados que são menores que/ou iguais a esse valor.

Quais são os quartis (Q1 , Q2 e Q3) deste diagrama?

Resposta:

Q1	9	2	2	3	4	4

Q2	9	5	9	
	10	1	5	5

Q3	10	7	7
	11	3	8
	12	0	

c) Em um único dia foram aplicadas mais de 250 multas por excesso de velocidade. Nesse caso, para representar o conjunto de dados, o diagrama de ramo e folhas será uma escolha adequada. Justifique a sua resposta.

Resposta pessoal

ATIVIDADE 12

No início de 2019, no município de São Paulo, foram registradas mais de 2800 quedas de árvores, ou seja, por volta de 43 árvores por dia. Considerando a tabela a seguir, com os dados fictícios de árvores caídas nos últimos 15 dias, construa o gráfico de ramo e folhas referente a essa informação.

49	21	33	50	45
58	26	62	34	21
65	61	19	33	68

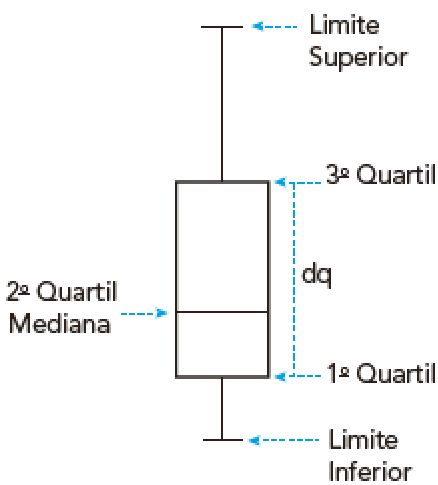
Resposta:

1	9			
2	1	1	6	
3	3	3	4	
4	5	9		
5	0	8		
6	1	2	5	8

BOXPLOT OU DIAGRAMA DE CAIXA

Esse tipo de gráfico estatístico representa os dados por meio de um retângulo construído com os quartis.

Objetivando fornecer informações sobre a variabilidade dos dados e valores atípicos, que podem influenciar o cálculo de medidas como a média aritmética, por exemplo, o *boxplot* utiliza cinco medidas estatísticas: primeiro quartil, mediana (segundo quartil), terceiro quartil, mínimo e máximo. O conjunto dessas medidas fornece evidências acerca da posição, dispersão, assimetria e valores extremos (atípicos).



Fonte: Autoria própria

As posições dos quartis Q1, Q2 e Q3 fornecem evidências sobre o nível de assimetria da distribuição dos dados.

Os comprimentos das caudas da distribuição são dados pelas linhas que vão do retângulo aos valores atípicos. Esses valores atípicos são chamados de *outliers*.

De modo geral, um ponto será considerado *outlier* , quando estiver fora do intervalo denotado Limite Inferior (LI).

Limite Superior (LS), em que:

LI = Q1 1,5 dq LS = Q3 + 1,5 dq

A posição central é dada pela mediana e a dispersão pelo chamado desvio interquartílico, denotado por:

dq = Q3 Q1.

Vamos construir *Boxplot* passo a passo como exemplo.

18	18	19	20	20	20	20	20	20	21	21
22	23	24	25	25	25	26	29	30	35	37

Primeiro determinaremos Q2 = Mediana, Q1 e Q3:

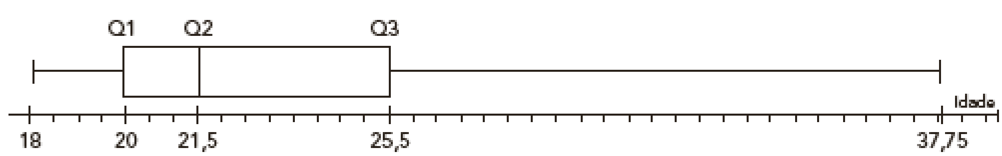
18; 18; 19; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 21; 21; 21; 22; 24; 25; 25; 25; 25; 26; 30; 35; 37

Q1 Q2 Q3

$$\frac{20+20}{2} = 20 \qquad \text{Mediana} = \frac{21+22}{2} = 21{,}5 \qquad \frac{25+26}{2} = 25{,}5$$

Q1 = 20; Q2 (Md) = 21,5 e Q3= 25,5

Agora determinaremos o desvio interquartílico (dq)
dq = Q3 - Q1
dq = 25,5 – 20
dq = 5,5
Determinaremos o limite inferior (LI)
LI = Q1 - 1,5 dq
LI = 20 - 1,5 x 5,5
LI = 20 - 8,25
LI = 11,75
Determinaremos o limite superior (LS)
LS = Q3 + 1,5 dq
LS = 25,5 + 1,5 x 5,5
LS = 25,5 + 8,25
LS = 33,75
Portanto, todos os dados menores que 11,75 ou maiores que 33,75 são *outliers*.



Fonte: Autoria própria

Para saber mais...

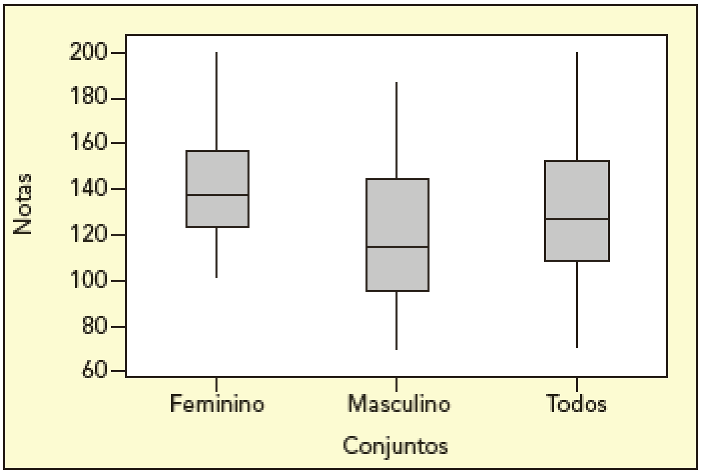
Você pode pesquisar um pouco mais escaneando o QR CODE, a seguir, com seu celular.

Ou acessando o link abaixo

encurtador.com.br/emu46

ATIVIDADE 13

(Lupércio F. Bessegato e Marcel T. Vieira - (Elementos de Estatística (EST001-B)) - adaptado) De acordo com Instituto de Pesquisa de Hábitos de Estudos e Atitudes – IPHEA. A figura apresenta os *Boxplot* das notas dos conjuntos de dados referentes às alunas (F) e aos estudantes (M) e a todos os estudantes (T).



Fonte: http://www.bessegato.com.br/UFJF/At_06-box-plot.pdf

a) Para cada um dos conjuntos de dados, estime graficamente a mediana, o primeiro e o terceiro quartis.

	Feminino	Masculino	Total
Mediana	**140**	**118**	**122**
Q1	121	98	105
Q3	157	142	152

b) Faça uma breve comparação dos grupos de estudantes e alunas. As mulheres, como grupo, têm maiores notas do que os homens? Que grupo de notas se apresenta mais disperso?
Resposta pessoal

A Tabela 1 apresenta algumas informações adicionais sobre esses conjuntos de dados:

Tabela 1: Algumas medidas-resumo dos conjuntos de dados

Conjunto	**Quantidade (n)**	**Média (x)**	**Desvio-padrão (s)**
Estudantes (F)	18	141,06	26,44
Estudantes (M)	20	121,25	32,85
Todos os estudantes (T)			31,24

c) Utilize o coeficiente de variação (cv) e compare os conjuntos em relação aos resultados obtidos. Qual grupo foi mais homogêneo?

Respostas:

Feminino: 18,74%

Masculino: 27,09%

d) Observe a variabilidade dos três conjuntos (F, M e T) e conjecture se o gênero é importante para ajudar a explicar a variação das notas.

Resposta pessoal

ATIVIDADE 14

Os dados da tabela a seguir são de Pesos (em Kg) de 50 Homens e 40 Mulheres.

MASCULINO	64,0	64,3	64,7	65,9	66,8	67,1	67,2	67,2	67,2	67,6
	67,9	68,5	68,6	68,7	68,8	68,9	68,9	69,0	69,4	69,4
	69,5	69,7	69,7	69,7	69,9	69,9	70,0	70,0	70,4	70,6
	70,7	70,7	70,8	70,9	71	71,4	71,5	71,5	71,8	71,8
	72,0	72,3	72,4	72,4	72,8	72,8	74,1	75,4	75,6	75,6

FEMININO	64,1	64,6	64,6	65,5	65,6	65,6	65,8	65,8	65,8	65,8
	65,9	65,9	66,0	66,1	66,1	66,1	66,2	66,3	66,5	66,5
	66,6	66,6	66,7	66,8	66,9	67,1	67,4	67,6	67,6	67,7
	67,8	67,9	67,9	68,0	68,1	68,5	68,8	69,7	70,2	71,9

a) Construa as medidas-resumo de posição (média, quartis, mínimo e máximo) e de dispersão (distância interquartílica, amplitude, variância, desvio padrão e coeficiente de variação) para os dados totais (Feminino e Masculino) e, separadamente, por gênero utilizando uma planilha eletrônica.

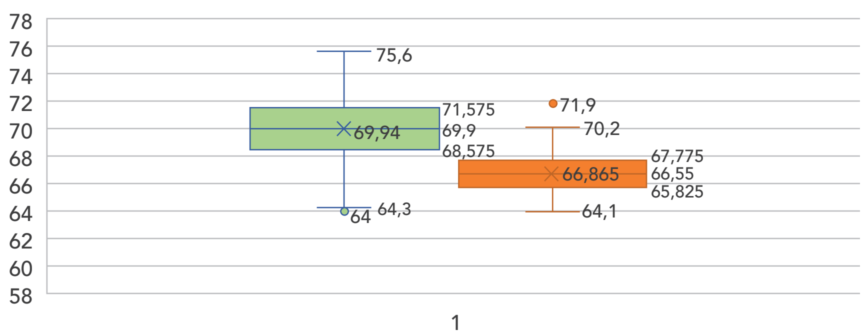
Resposta:

	MASCULINO	FEMININO	TOTAL
Média	69,94	66,865	3085,8
variância	6,931428571	2,357717949	7,210292
desvio padrão	2,632760637	1,535486226	2,685199
coeficiente	3,764313178	2,296397556	37,24119

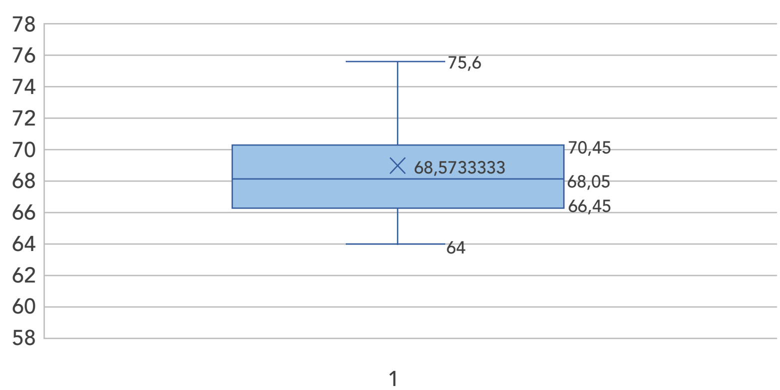
b) Faça os gráficos de ramo e folhas e Boxplot para os dados totais (Feminino e Masculino) e, separadamente, por gênero, utilizando uma planilha eletrônica.

Respostas:

BOXPLOT MASC e FEM



BOXPLOT TOTAL



Para saber mais...

Acesse o link, a seguir, para aprender como criar um Boxplot utilizando uma planilha eletrônica ou escaneie o QR CODE com seu celular.

encurtador.com.br/ch018

ELEMENTOS DE AMOSTRAGEM

ATIVIDADE 15

Escreva o espaço amostral de cada situação a seguir:

a) Lançamento de um dado.

1	2	3
4	5	6

b) Lançamento de dois dados simultaneamente.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

c) Lançamento de uma moeda.

K	C

d) Lançamento de duas moedas simultaneamente.

KK	KC
CK	CC

e) Sortear um número de 1 a 10.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

f) Sortear um ponto na reta numérica.

$x \in \mathbb{R}$

g) Sortear um ponto no círculo de raio 1 e centro na origem do plano cartesiano.

$\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$

ATIVIDADE 16

Das situações anteriores, quais são espaços amostrais discretos? E quais são contínuos?

Respostas:

Discretos: a, b, c, d, e;

Contínuos: f, g.

ATIVIDADE 17

Dentro de uma caixa, são colocadas bolas numeradas de 1 a 20, para serem sorteadas. Qual é a probabilidade de ser sorteada:

a) a bola de número 1?

$\text{Resposta}: \frac{1}{20} = 5\%$

b) a bola de número 10?

$\text{Resposta}: \frac{1}{20} = 5\%$

c) a bola de número 20?

$\text{Resposta}: \frac{1}{20} = 5\%$

d) uma bola de número par?

$\text{Resposta}: \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 50\%$

e) uma bola de número ímpar?

$\text{Resposta}: \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 50\%$

f) uma bola de número menor ou igual a 10?

$\text{Resposta}: \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 50\%$

ATIVIDADE 18

Uma empresa produz televisores de dois tipos, tipo A (comum) e tipo B (luxo), e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar defeito grave no prazo de seis meses. O tempo para ocorrência de algum defeito grave nos televisores tem distribuição normal, sendo que, no tipo A, com média de 10 meses e desvio padrão de 2 meses, e no tipo B com média de 11 meses e desvio padrão de 3 meses. Os televisores de tipo A e B são produzidos com lucro de 1200 u.m. e 2100 u.m. respectivamente e, caso haja restituição, com prejuízo de 2500 u.m. e 7000 u.m. respectivamente.

a) Calcule as probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo A e do tipo B.

Respostas:

P[restituição de A] = P[XA < 6] = P[Z<-2,0] = 0,0228

P[restituição de B] = P[XB < 6] = P[Z<-1,67] = 0,0475

As probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo A e do tipo B são, respectivamente, de 0,0228 e 0,0475.

b) Calcule o lucro médio para os televisores do tipo A e para os televisores do tipo B.

Respostas:

P[não restituição de A] = 1 – P[restituição de A] = 1 – 0,0228 = 0,9772

P[não restituição de B] = 1 – P[restituição de B] = 1 - 0,0475 = 0,9525

Lucro médio de A = 1200 x 0,9772 – 2500 x 0,0228 = 1115,64 u.m

Lucro médio de B = 2100 x 0,9525 – 7000 x 0,0475 = 1667,75 u.m

c) Baseando-se nos lucros médios, a empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo A ou do tipo B?

Resposta:

A empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo B, pois o lucro médio de B é maior que o lucro médio de A.

ATIVIDADE 19

O diâmetro do eixo principal de um disco rígido segue a distribuição Normal com média 25,08 pol. e desvio padrão 0,05 pol. Se as especificações para esse eixo são 25,00 ± 0,15 pol., determine o percentual de unidades produzidas em conformidades com as especificações.

Resposta:

91,92%

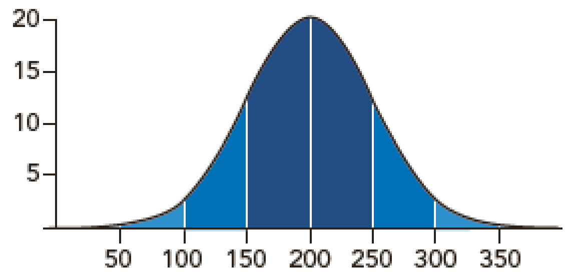
Professor, caso se interesse no aprofundamento desse cálculo, consulte os sites:

https://docplayer.com.br/8948303-Lista-de-exercicios-distribuicao-normal.html

https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3403367/mod_resource/content/1/aula%208%20distribuicoes%20de%20variaveis%20continuas.pdf

ATIVIDADE 20

Observe a curva normal desenhada para a análise de determinada variável populacional.



Determine, de acordo com os valores representados nos eixos horizontal e vertical:

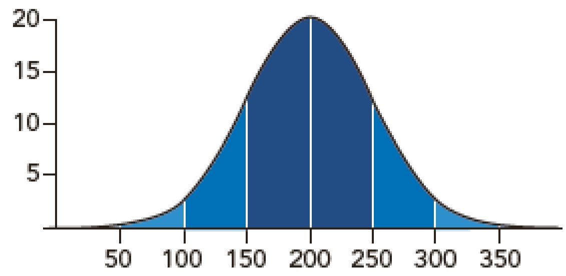
a) o valor aproximado do desvio padrão dessa distribuição.
Resposta: 50

b) a medida da área do triângulo.
Resposta: 1500

c) a medida da área do trapézio.
Resposta: 875

ATIVIDADE 21

Em relação aos valores das áreas do triângulo e do trapézio, determinados na atividade anterior, avalie se seriam iguais ou diferentes, caso a distribuição, mantendo-se normal, apresentasse um maior valor de desvio padrão, de maneira que o gráfico fosse mais "achatado", semelhante ao da figura a seguir.



Resposta pessoal.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

COORDENADORIA PEDAGÓGICA – COPED

Coordenador
Caetano Pansani Siqueira

Diretora do Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica – DECEGEP
Viviane Pedroso Domingues Cardoso

Diretora do Centro de Ensino Médio – CEM
Ana Joaquina Simoes Sallares de Mattos Carvalho

Diretora do Centro de Anos Finais do Ensino Fundamental – CEFAF
Patrícia Borges Coutinho da Silva

ÁREA DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

BIOLOGIA
Aparecida Kida Sanches – Equipe Curricular de Biologia; Beatriz Felice Ponzio – Equipe Curricular de Biologia; Airton dos Santos Bartolotto – PCNP da D.E. de Santos; Evandro Rodrigues Vargas Silverio – PCNP da D.E. de Apiaí; Ludmila Sadokoff – PCNP da D.E. de Caraguatatuba; Marcelo da Silva Alcantara Duarte – PCNP da D.E. de São Vicente; Marly Aparecida Giraldelli Marsulo – PCNP da D.E. de Piracicaba; Paula Aparecida Borges de Oliveira – PCNP da D.E. Leste 3.

FÍSICA
Carolina dos Santos Batista Murauskas – Equipe Curricular de Física; Fabiana Alves dos Santos – Equipe Curricular de Física; Ana Claudia Cossini Martins – PCNP D.E. José Bonifácio; Carina Emy Kagohara – PCNP D.E. Sul 1; Debora Cintia Rabello – PCNP D.E. Santos; Dimas Daniel de Barros – PCNP D.E. São Roque; Jefferson Heleno Tsuchiya – PCNP D.E. Sul 1; Jose Rubens Antoniazzi Silva – PCNP D.E. Tupã; Juliana Pereira Thomazo – PCNP D.E. São Bernardo do Campo; Jussara Alves Martins Ferrari – PCNP D.E. Adamantina; Sara dos Santos Dias – PCNP D.E. Mauá; Thaís de Oliveira Muzel – PCNP D.E. Itapeva; Valentina Aparecida Bordignon Guimarães – PCNP DE Leste 5.

QUÍMICA
Alexandra Fraga Vazquez – Equipe Curricular de Química; Regiane Cristina Moraes Gomes - Equipe Curricular de Química; Cristiane Marani Coppini – PCNP D.E. São Roque; Gerson Novais Silva – PCNP D.E. São Vicente; Laura Camargo de Andrade Xavier – PCNP D.E. Registro; Natalina de Fatima Mateus – PCNP D.E. Guarulhos Sul; Wilian Guirra de Jesus – PCNP D.E. Franca; Xenia Aparecida Sabino – PCNP D.E. Leste 5.Revisão Conceitual (Área de Ciências da Natureza): Edson Grandisoli.

ÁREA DE CIÊNCIAS HUMANAS

GEOGRAFIA
Andreia Cristina Barroso Cardoso – SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia; Mariana Martins Lemes - SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia; Milene Soares Barbosa - SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia; Sergio Luiz Damiati – SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia; André Baroni – PCNP da D.E. Ribeirão Preto; Alexandre Cursino Borges Junior – PCNP da D.E. Guaratinguetá; Beatriz Michele Moco Dias – PCNP da D.E. Taubaté; Bruna Capoia Trescenti – PCNP da D.E Itu; Camilla Ruiz Manaia – PCNP da D.E. Taquaritinga; Cleunice Dias de Oliveira – PCNP da D.E. São Vicente; Cristiane Cristina Olimpio – PCNP da D.E. Pindamonhangaba; Daniel Ladeira Almeida – PCNP da D.E. São Bernardo do Campo; Dulcinea da Silveira Ballestero – PCNP da D.E. Leste 5; Elizete Buranello Perez – PCNP da D.E. Penápolis; Maria Julia Ramos Sant'Ana – PCNP da D.E Adamantina; Marcio Eduardo Pedrozo – PCNP da D.E. Americana; Patricia Silvestre Águas – PCNP da D.E. Piraju; Regina Célia Batista - PCNP da D.E. Piraju; Roseli Pereira de Araújo - PCNP da D.E. Bauru; Rosenei Aparecida Ribeiro Liborio – PCNP da D.E. Ourinhos; Sandra Raquel Scassola Dias - PCNP da D.E. Tupã; Sheila Aparecida Pereira de Oliveira – PCNP da D.E. Leste 2;Shirley Schweizer – PCNP da D.E. Botucatu; Simone Regiane de Almeida Cuba – PCNP da D.E. Caraguatatuba; Telma Riggio – PCNP da D.E. Itapetininga; Viviane Maria Bispo – PCNP da D.E. José Bonifácio.

FILOSOFIA
1º BIMESTRE - 2ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); Erica C. Frau (PCNP da DRE Campinas Oeste). 3ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); Erica C. Frau (PCNP da DRE Campinas Oeste). 2º BIMESTRE - 2ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); Erica C. Frau (PCNP da DRE Campinas Oeste). 3ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); Erica C. Frau (PCNP da DE Campinas Oeste). Organização e revisão: 2ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC); 3ª SÉRIE: Tânia Gonçalves (Equipe curricular de Filosofia COPED – SEDUC). Revisão Conceitual: Joelza Ester Domingues.

HISTÓRIA
1º BIMESTRE - 2ª SÉRIE: Viviane Pedroso Domingues Cardoso (COPED – SEDUC). 3ª SÉRIE: Clarissa Bazzanelli Barradas (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC). 2º BIMESTRE - 2ª SÉRIE: Clarissa Bazzanelli Barradas (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC); Tadeu Pamplona Pagnossa – PCNP da D.E. de Guaratinguetá. 3ª SÉRIE: Clarissa Bazzanelli Barradas (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC); Rodrigo Costa Silva – PCNP da D.E. de Assis. Organização e revisão: Clarissa Bazzanelli Barradas (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC); Edi Wilson Silveira (Equipe Curricular de História COPED – SEDUC); Viviane Pedroso Domingues Cardoso (COPED – SEDUC). Revisão Conceitual: Joelza Ester Domingues.

SOCIOLOGIA
Emerson Costa, Marcelo Elias de Oliveira – SEDUC/COPED/CEM - Equipe Curricular de Ciências Humanas; Ilana Henrique dos Santos – PCNP de Sociologia - D.E. Leste 1. Revisão: Emerson Costa, Marcelo Elias de Oliveira – SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas; Ilana Henrique dos Santos – PCNP de Sociologia - D.E. Leste 1. Organização: Emerson Costa, Marcelo Elias de Oliveira – SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas.

ÁREA DE LINGUAGENS

ARTE
Carlos Eduardo Povinha – Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC; Daniela de Souza Martins Grillo - Equipe Curricular de Arte/SEDUC/COPED; Eduardo Martins Kebbe – Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC; Evania Rodrigues Moraes Escudeiro - Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC; Adriana Marques Ursini Santás - PCNP da D.E Santos; Ana Maria Minari de Siqueira – PCNP da D.E. São José dos Campos; Debora David Guidolin – PCNP da D.E. Ribeirão Preto; Djalma Abel Novaes – PCNP da D.E. Guaratinguetá; Eliana Florindo – PCNP da D. E. Suzano; Elisangela Vicente Prismit – PCNP da D.E. Centro Oeste; Madalena Ponce Rodrigues – PCNP da D.E. Botucatu; Marilia Marcondes de Moraes Sarmento e Lima Torres – PCNP da D. E. São Vicente; Patricia de Lima Takaoka - PCNP da D.E Caraguatatuba; Pedro Kazuo Nagasse – PCNP da D. E. Jales; Renata Aparecida de Oliveira dos Santos – PCNP da D.E. Caieiras; Roberta Jorge Luz – PCNP da D. E. Sorocaba; Rodrigo Mendes – PCNP da D.E. Ourinhos; Silmara Lourdes Truzzi – PCNP da D.E. Marília; Sonia Tobias Prado - PCNP da D.E Lins.

EDUCAÇÃO FÍSICA
Elaboração: Luiz Fernando Vagliengo - Equipe Curricular de Educação Física; Marcelo Ortega Amorim - Equipe Curricular de Educação Física; Mirna Léia Violin Brandt - Equipe Curricular de Educação Física; Sandra Pereira Mendes - Equipe Curricular de Educação Física; Adriana Cristina David Pazian - PCNP da DE São Carlos; Diego Diaz Sanchez - PCNP da DE Guarulhos Norte; Érika Porrelli Drigo - PCNP da DE Capivari; Felipe Augusto Lucci- PCNP da DE Itu; Flavia Naomi Kunihira Peixoto - PCNP da DE Suzano; Gislaine Procópio Querido- PCNP da DE São Roque; Isabela Muniz dos Santos Cáceres -PCNP da DE Votorantim; Janice Eliane Ferreira Bracci - PCNP da DE José Bonifácio; Joice Regina Simões - PCNP da DE Campinas Leste; Jose Carlos Tadeu Barbosa Freire - PCNP da DE Bragança Paulista; Katia Mendes Silva - PCNP da DE Andradina; Lígia Estronioli de Castro- PCNP da DE Bauru; Meire Grassmann Guido Estigaribia - PCNP da DE Americana; Nabil José Awad - PCNP da DE Caraguatatuba; Neara Isabel de Freitas Lima- PCNP da DE Sorocaba; Roseane Minatel de Mattos - PCNP da DE Adamantina; Sueli Aparecida Galante - PCNP da DE Sumaré; Tiago Oliveira dos Santos- PCNP da DE Lins; Thaisa Pedrosa Silva Nunes- PCNP da DE Tupã. Revisão: Luiz Fernando Vagliengo - Equipe Curricular de Educação Física. Marcelo Ortega Amorim - Equipe Curricular de Educação Física; Mirna Léia Violin Brandt - Equipe Curricular de Educação Física; Sandra Pereira Mendes - Equipe Curricular de Educação Física. 2 série: Érika Porrelli Drigo - PCNP da DE Capivari; Meire Grassmann Guido Estigaribia - PCNP da DE Americana. 3 série: Janice Eliane Ferreira Bracci - PCNP da DE José Bonifácio; Neara Isabel de Freitas Lima- PCNP da DE Sorocaba.

INGLÊS
Catarina Reis Matos da Cruz – PCNP da DE Leste 2; Cíntia Perrenoud de Almeida – PCNP da DE Pindamonhangaba; Eliana Aparecida Burian – Professor PEB II da DE Norte 2; Emerson Thiago Kaishi Ono – COPED – CEM – LEM; Gilmara Aparecida Prado Cavalcante – PCNP da DE Mauá; Jucimeire de Souza Bispo – COPED – CEFAF – LEM; Liana Maura Antunes da Silva Barreto – COPED – CEFAF – LEM; Luiz Afonso Baddini – Professor PEB II da DE Santos; Marisa Mota Novais Porto – PCNP da DE Carapicuíba; Nelise Maria Abib Penna Pagnan – PCNP da DE Centro-Oeste; Pamella de Paula da Silva Santos – COPED – CEM – LEM; Renata Andreia Placa Orosco de Souza – PCNP da DE Presidente Prudente; Rosane de Carvalho – PCNP da DE Adamantina; Sérgio Antonio da Silva Teressaka – PCNP da DE Jacareí; Viviane Barcellos Isidorio – PCNP da DE São José dos Campos; Vlademir Oliveira Ismael – PCNP da DE Sul 1.

LÍNGUA PORTUGUESA
Alessandra Junqueira Vieira Figueiredo; Alzira Maria Sa Magalhaes Cavalcante; Andrea Righeto; Cristiane Alves de Oliveira; Daniel Carvalho Nhani; Daniel Venancio; Danubia Fernandes Sobreira Tasca; Eliane Cristina Goncalves Ramos; Igor Rodrigo Valerio Matias; Jacqueline da Silva Souza; Joao Mario Santana; Katia Alexandra Amancio Cruz; Leticia Maria de Barros Lima Viviani; Lidiane Maximo Feitosa; Luiz Fernando Biasi; Marcia Regina Xavier Gardenal; Martha Wassif Salloume Garcia; Neuza de Mello Lopes Schonherr; Patricia Fernanda Morande Roveri; Reginaldo Inocenti; Rodrigo Cesar Goncalves; Shirlei Pio Pereira Fernandes; Sonia Maria Rodrigues; Tatiana Balli; Valquiria Ferreira de Lima Almeida; Viviane Evangelista Neves Santos; William Ruotti Organização, adaptação/elaboração parcial e validação Katia Regina Pessoa; Leandro Henrique Mendes; Mary Jacomine da Silva; Mara Lucia David; Marcos Rodrigues Ferreira; Teonia de Abreu Ferreira.

MATEMÁTICA
Isaac Cei Dias – Equipe Curricular de Matemática; João dos Santos Vitalino – Equipe Curricular de Matemática; Marcos José Traldi – Equipe Curricular de Matemática; Otávio Yoshio Yamanaka – Equipe Curricular de Matemática; Rafael José Dombrauskas Polonio – Equipe Curricular de Matemática; Sandra Pereira Lopes – Equipe Curricular de Matemática; Vanderley Aparecido Cornatione – Equipe Curricular de Matemática; Lilian Silva de Carvalho – PCNP da D.E. de São Carlos; Marcelo Balduíno – PCNP da D.E. Guarulhos Norte; Maria Regina Duarte Lima – PCNP da D.E. José Bonifácio; Simone Cristina do Amaral Porto –PCNP da D.E. Guarulhos Norte; Talles Eduardo Nazar Cerizza – PCNP da D.E. Franca; Willian Casari de Souza – PCNP da D.E. Araçatuba.

PROJETO DE VIDA
Bruna Waitman Santinho – SEDUC/ COPED/ Assessora da Educação Integral; Cassia Moraes Targa Longo – SEDUC/ COPED/ CEM/ PEI; Claudia Soraia Rocha Moura - SEDUC/ COPED/CEM/ PEI; Helena Claudia Soares Achiles - SEDUC/ COPED/DECEGP; Instituto Ayrton Senna Instituto de Corresponsabilidade pela Educação; Instituto PROA Parceiros da Educação – Nadir do Carmo Silva Campelo; Simone Cristina Succi – SEDUC/ EFAPE Walter Aparecido Borges – SEDUC/ EFAPE; Rodiclay Germano – Ilustrações.

Colaboradore(a)s
Andreia Toledo de Lima – PCNP da D.E. Centro Sul; Cristina Inacio Neves – PCNP da D.E. Centro Sul; Elaine Aparecida Giatti – PCNP da D.E. Centro Sul; Lyara Araujo Gomes Garcia – PCNP da D.E. Taubaté; Marcel Alessandro de Almeida – PCNP da D.E. Araçatuba; Patricia Casagrande Malaguetta – PCNP da D.E. Piracicaba; Rosilaine Sanches Martins – PCNP da D.E. Jales; Ruanito Vomieiro de Souza – PCNP da D.E. Fernandópolis; Wanderlei Aparecida Grenchi – PCNP da D.E. São Vicente.

Assessoria Técnica
Alberto da Silva Seguro, Ariana de Paula Canteiro, Bruno Toshikazu Ikeuti, Denise Aparecida Acacio Paulino, Eleneide Gonçalves dos Santos, Inelice Aparecida Fraga Ferreira, Isaque Mitsuo Kobayashi, Márcio Roberto Peres e Vinicius Bueno

Revisão Língua Portuguesa
Lia Suzana de Castro Gonzalez

Impressão e Acabamento
Imprensa Oficial do Estado S/A – IMESP

Projeto Gráfico
Fernanda Buccelli

Diagramação
Beatriz Luanni, Julia Ahmed, Pamela Silva, Raquel Prado, Ricardo Issao Sato e Robson Santos | Tikinet

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
Secretaria da Educação