SP FAZESCOLA

CADERNO DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

Ensino Médio

2º BIMESTRE

Governo do Estado de São Paulo

Governador
João Doria

Vice-Governador
Rodrigo Garcia

Secretário da Educação
Rossieli Soares da Silva

Secretário Executivo
Haroldo Corrêa Rocha

Chefe de Gabinete
Renilda Peres de Lima

Coordenador da Coordenadoria Pedagógica
Caetano Pansani Siqueira

Presidente da Fundação para o Desenvolvimento da Educação
Leandro José Franco Damy

SUMÁRIO

1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

1- Organização das grades curriculares

Apresentamos a seguir uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais da Base Nacional Comum (BNCC) do Ensino Médio, além de algumas orientações pedagógicas, para as três séries que compõe o referido estágio de ensino da escolaridade básica.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

1.1. Grade curricular da 1ª série do Ensino Médio.

Currículo Oficial		BNCC
Tema/Conteúdo	Habilidades	Competência Geral - BNCC
Relações • Funções • Relação entre duas grandezas; • Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado. • Função de 1º grau • Função de 2º grau.	• Saber reconhecer relações de proporcionalidade direta, inversa, direta com o quadrado, entre outras, representando as por meio de funções. • Compreender a construção do gráfico de funções de 1º grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decrescimento e a taxa de variação. • Compreender a construção do gráfico de funções de 2º grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento e decrescimento, os sinais da função e os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo). • Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1º e de 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

1.1.1 As funções polinomiais de 1° e 2° graus.

As três primeiras habilidades apresentadas na segunda coluna da esquerda para a direita, retomam a noção de função, que traduz uma relação de interdependência entre duas grandezas, explorando-se especialmente as funções de 1° grau e de 2° grau, bem como suas aplicações em diferentes contextos. Tais assuntos já foram apresentados aos alunos em algum momento dos anos iniciais do Ensino Fundamental. No 7° ano, por exemplo, foram exploradas situações envolvendo a proporcionalidade direta e inversa entre grandezas, e que conduzem a relações do tipo $y = kx$, ou, então, $y=\frac{k}{x}$, de tal forma que k é uma constante não nula. No 9° ano, foram estudadas as funções $y=ax + b$ e $y = ax^2+ bx + c$, com $a \neq 0$, além da representação destas em gráficos.

Para o desenvolvimento da habilidade descrita na coluna da competência específica 1, no Ensino Médio, a apresentação será mais sistematizada, de tal forma que, mesmo que o professor estiver tratando desse assunto pela primeira vez, o aluno provavelmente não terá grandes dificuldades em acompanhar as atividades propostas.

Podemos afirmar que as funções são capazes de traduzir matematicamente todos os processos que envolvem relações de proporcionalidade direta (gráficos lineares), ou relações em que uma grandeza é proporcional ao quadrado de outra (gráficos com a forma de uma parábola). Muitos exercícios envolvendo situações concretas em que a consideração das grandezas envolvidas conduz a uma função de 1° grau ou de 2° grau serão contemplados, com especial destaque para problemas de otimização, ou seja, problemas que envolvem a obtenção do máximo ou do mínimo de uma função, em determinado contexto.

De um modo geral, o estudo das funções contribuem para o desenvolvimento de importantes competências básicas, como:

- o recurso à linguagem das funções para representar interdependências conduz a um aumento na capacidade de expressão, favorecendo a construção de um discurso mais eficaz para enfrentar problemas em diferentes contextos;
- a capacidade de compreensão de uma variada gama de fenômenos é ampliada, uma vez que muitas situações de interdependência estão naturalmente associadas a modelagens que conduzem a explicações dos referidos fenômenos;
- o reconhecimento das funções envolvidas em um fenômeno possibilita a sistematização de propostas de intervenção consciente sobre a realidade representada.

A última habilidade, possibilita apresentar de modo mais sistematizado as características das funções já estudadas em séries anteriores, ampliando-se as possibilidades de construção de gráficos e da compreensão das formas básicas de crescimento ou decrescimento. Com isso a possibilidades de construção de gráficos e da compreensão das formas básicas de crescimento ou decrescimento. Com isso, a possibilidade de utilização de funções para a compreensão das formas básicas de crescimento ou decrescimento. Com isso, a possibilidade de utilização de funções para compreensão de fenômenos da realidade será ampliada, e os alunos poderão analisar com mais nitidez a riqueza da linguagem das funções.

No Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo, Caderno do Professor, os conteúdos referentes às habilidades descritas, podem ser encontradas nas seguintes situações de aprendizagem:

Situação de Aprendizagem 5 – Funções como relações de interdependência: Múltiplos exemplos, Vol. 1 – 1ª série do Ensino Médio, pg. 55 a 64.

Situação de Aprendizagem 6 – Funções polinomiais de 1° grau: Significado, gráficos, crescimento, decrescimento e taxas, Vol. 1 – 1ª série do Ensino Médio, pg. 65 a 74.

Situação de Aprendizagem 7: Funções Polinomiais de 2° grau: significado, gráficos, intersecções com os eixos, vértices e sinais. Vol. 1, 1ª série do Ensino Médio, pg. 74 a 96.

Situação de Aprendizagem 8: Problemas envolvendo funções de 2° grau em múltiplos contextos, problemas de máximos e mínimos. Vol. 1, 1ª série do Ensino Médio, pg. 96 a 103.

Situação de Aprendizagem 2: A reta, a inclinação constante e a proporcionalidade. Vol. 1, 3ª série do Ensino Médio, pg. 22 a 32 e Situação de Aprendizagem 3: máximos e mínimos. Vol. 1, 3ª série do Ensino Médio, pg. 33 a 42.
Lembrando que ao final de cada situação de aprendizagem constam algumas considerações sobre a avaliação dos conhecimentos bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências e habilidades enunciadas.

Introdução ao Volume 2

Professor, neste material você encontrará além da resolução comentada das atividades, várias orientações pedagógicas. Como já afirmado no primeiro caderno, o objetivo único destas orientações é sugerir e/ou relembrar encaminhamentos didáticos (o que fazer e qual metodologia a ser considerada no momento) e procedimentos didáticos (como colocar em prática os encaminhamentos didáticos previamente planejados) que podem ser úteis na sua prática pedagógica e principalmente, ampliar e qualificar as aprendizagens de todos os alunos. As orientações não devem ser encerradas em si mesmas. Devem ser consideradas, ampliadas, adaptadas e mesmo substituídas de acordo com as variáveis inerentes a cada grupo de alunos.

TEMA 1: PROPORCIONALIDADES

Conversa inicial:

O texto a seguir traz uma situação relacionada ao cotidiano que vale a pena ser explorada. Outras situações podem servir de apoio para a compreensão de proporção. O professor pode solicitar aos alunos exemplos semelhantes ao apresentado no texto, anotar na lousa e mediar uma discussão sobre o assunto. Esse movimento já os preparará para a compreensão da atividade 1. É importante também que nos exemplos dados fique claro o valor da constante k. Também precisa ficar consolidado quando duas grandezas são inversamente ou diretamente proporcionais (3° e 4° parágrafos do texto). Para isso, uma sugestão é um valor fixo para **k** e modificar numericamente uma variável, propondo a observação do comportamento da outra variável.

Proporção:

A proporcionalidade está presente em muitas situações com as quais nos deparamos diariamente, mas nem sempre nos damos conta dela. Quando compramos, por exemplo, 100g de muçarela por R$ 3,50, já temos a ideia de que se comprássemos 200g dessa mesma muçarela pagaríamos R$ 7,00. Essa e várias outras situações são muito mais comuns em nosso cotidiano do que podemos imaginar.
Tais situações podem ser representadas sob a forma de grandezas que variam de maneira interdependente:
Quando x e y são duas grandezas diretamente proporcionais, elas aumentam ou diminuem simultânea e proporcionalmente, ou seja, a razão y/x é constante, resultando em $y = k \cdot x$ (k é uma constante).
Quando x e y são duas grandezas inversamente proporcionais, sempre que uma delas aumenta, a outra diminui na mesma proporção, e vice-versa, de modo que o produto das duas permanece constante: $x \cdot y = k$, ou seja, y = k/x, onde k é uma constante não nula.

Perceber se existe ou não proporcionalidade entre os elementos presentes naquilo que estamos envolvidos faz grande diferença, pois essa relação facilita muito a resolução de problemas nas várias atividades humanas.

ATIVIDADE 1

Analisando situações cotidianas, encontre e justifique quais apresentam proporcionalidade:

a) O tempo gasto em uma viagem de carro é proporcional à velocidade média do veículo.

b) O número de palavras ditas por um jornalista em um telejornal é diretamente proporcional ao tempo do programa.
c) O número do sapato calçado por uma pessoa é diretamente proporcional à sua idade.
d) A média de combustível gasto por uma moto em uma viagem é diretamente proporcional à distância percorrida por ela.
e) O valor total pago por determinadas bolas de futebol é diretamente proporcional ao número comprado.
f) O número de passos dados por uma pessoa é diretamente proporcional às horas que ela passa acordada.
g) O consumo de energia dos aparelhos eletroeletrônicos é diretamente proporcional às suas potências em Watts.
h) O número de botões de um controle remoto é diretamente proporcional ao tamanho da televisão.

O rientações pedagógicas:

É importante ressaltar que se o texto foi bem explorado, possivelmente os alunos não terão dificuldades de resolver esta primeira atividade, podendo até ser proposta para ser resolvida individualmente se o docente achar pertinente.

A afirmação proposta no item d) é muito importante, dado que amplia um entendimento matemático sobre um conceito explorado em Física.

Sobre o item e) Neste caso pode-se dizer que o valor pago pelas bolas é diretamente proporcional com a quantidade de bolas compradas.

Em relação ao item f), sabemos que apresentar contra exemplos pode ser muito eficaz. Neste caso um contra exemplo é levar em consideração que a pessoa pode passar o dia todo acordado e não dar um passo apenas. Outros casos podem ser citados. Instigue os alunos com bons questionamentos para que eles mesmo cheguem a estas conclusões.

Finalmente, em relação ao item g), como já vimos anteriormente, este é um caso que envolve diretamente outro componente curricular e é uma oportunidade de relacionar a Matemática em contextos cotidianos. A discussão pode ficar ainda mais interessante se levarmos exemplos reais aos alunos para que, após o levantamento das hipóteses, eles visualizem situações de aplicação.

Resolução comentada:

a) O tempo gasto em uma viagem de carro é proporcional à velocidade média do veículo.

Apresenta proporcionalidade, pois quanto maior a velocidade média, menor será o tempo gasto. Portanto, inversamente proporcional.

b) O número de palavras ditas por um jornalista em um telejornal é diretamente proporcional ao tempo do programa.

Em determinado espaço de tempo o jornalista pode utilizar mais ou menos palavras do que o previsto, falando mais rápido ou mais devagar. Nessas condições não há proporcionalidade entre as grandezas citadas.

c) O número do sapato calçado por uma pessoa é diretamente proporcional à sua idade.

O pé de uma pessoa cresce até determinada idade, mas não cresce por toda a vida adulta. Considerando apenas o período de crescimento, também não podemos afirmar que existe um relação matemática que diz exatamente o tamanho do pé de uma pessoa apenas se soubermos a sua idade. Então não há relação de proporcionalidade entre as grandezas citadas.

d) A média de combustível gasto por uma moto em uma viagem é diretamente proporcional à distância percorrida por ela.

A afirmação diz que o consumo médio tem relação de proporcionalidade com a distância, o que de fato não é verdade, pois mesmo que a distância aumente, o consumo médio se manterá.
A média de combustível é uma relação que se faz entre a quantidade de combustível gasto e a distância do percurso realizado. Por exemplo, uma moto que ao percorrer 100 km gasta 5 litros de combustível tem uma média de consumo de 1 litro para 20 km, ou, como se fala no cotidiano, "faz 20 km por litro" ($M = \frac{100\ km}{5\ l} = \frac{20\ km}{l}$).
Esse valor médio deve se manter no decorrer da viagem se considerarmos sempre as mesmas condições.

e) O valor total pago por determinadas bolas de futebol é diretamente proporcional ao número comprado.

Sim, quanto mais bolas se compra, maior será o valor pago.

f) O número de passos dados por uma pessoa é diretamente proporcional às horas que ela passa acordada.

Não é proporcional esta relação, dado que a pessoa não se movimenta com uma frequência uniforme durante o dia.

g) O consumo de energia dos aparelhos eletroeletrônicos é diretamente proporcional às suas potências em Watts.

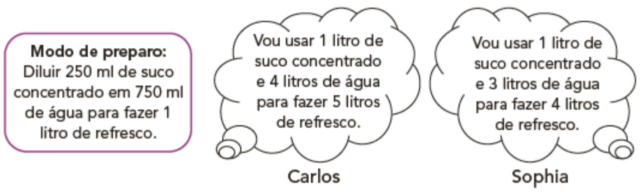
Sim, quanto maior a potência, que é sua capacidade de trabalho, maior será o consumo de energia em determinado tempo de uso.

h) O número de botões de um controle remoto é diretamente proporcional ao tamanho da televisão.

Não, pois geralmente o controle de um modelo de televisão funciona para todas as de mesmo modelo independentemente das dimensões da televisão.

ATIVIDADE 2

Para se fazer um delicioso refresco de caju deve-se misturar uma parte de suco concentrado com uma parte de água, conforme especificado na embalagem do produto. Observe nas ilustrações abaixo a descrição do modo de preparo do refresco e como Carlos e Sophia pensaram em diluir o suco concentrado para fazer quantidades maiores.



Com base nas informações, responda: Qual dos dois pensou adequadamente no sentido de manter a proporção especificada no modo de preparo do refresco? Justifique sua resposta.

O rientações pedagógicas:

A resposta abaixo é apenas uma possibilidade que pode ser ampliada com o uso e compreensão das relações –"m'– quando relacionamos a quantidade de suco com água. Mas, também podemos relacionar a quantidade de suco com o total do refresco com –"m'–. Isso dependerá de como você encaminhará a atividade, podendo trazer mais de uma opção.

Resolução comentada:

O modo de preparo traz a relação de 1 parte de suco para 3 partes de água. Carlos pensou em um litro de suco para 4 litros de água, o que já não contempla a sugestão inicial. Sophia mantém a relação proposta de 1 para 3, portanto está correta.

ATIVIDADE 3

Observando a sequência abaixo, percebe-se que com três palitos forma-se um triângulo; com cinco palitos forma-se uma fileira com dois triângulos, com sete palitos forma-se uma fileira com três triângulos e assim sucessivamente.

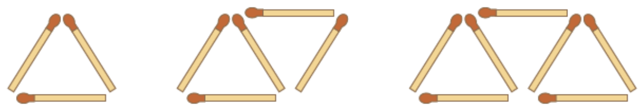


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Complete a tabela com os valores de x, y e z.

nº de triângulos	1	2	3	4	y	10
nº de palitos	3	5	7	x	13	z

O rientações pedagógicas:

Esta atividade traz uma proporcionalidade seguida de uma adição a uma unidade. Note que a segunda linha é o dobro da primeira linha mais 1. Estes pontos de atenção precisam ser discutidos com os alunos, instigando-os com bons questionamentos: "que relação existe entre os números da segunda linha com os respectivos números da primeira linha?"; "apenas dobrar as quantidades é suficiente?"; "e triplicar é o suficiente?"; "que relação vocês propõem?"; dentre outros. A intenção desta atividade é trabalhar o desenvolvimento de leitura e escrita de expressões matemáticas tendo em vista o estudo das funções.

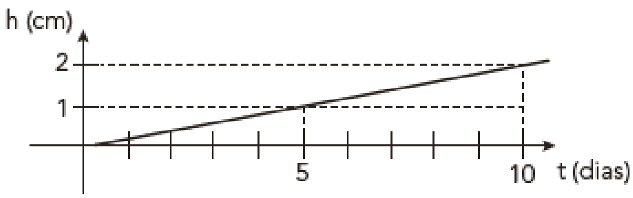
Resolução

nº de triângulos	1	2	3	4	6	10
nº de palitos	3	5	7	9	13	21

Logo x = 9, y = 6 e z = 21.

ATIVIDADE 4

Em um laboratório, os funcionários observam diariamente o crescimento de algumas plantas. O gráfico abaixo representa o crescimento de uma delas. Mantendo-se a relação entre tempo (t) e altura (h), qual será a altura dessa planta no vigésimo dia?



Orientação pedagógica:

Considerando o ano/série, precisamos aprofundar os cálculos. Após a compreensão da relação de proporcionalidade existente, é imprescindível que seja abordada a relação –Š $\frac{»}{.\ -}$. Se o estudante não compreender, solicite à ele que descreva os recursos para a obtenção do valor de x na relação de equivalência, de acordo com a proporcionalidade identificada na representação gráfica.

Resolução

Uma possibilidade de resposta:
5 dias ⇒ 1 cm
10 dias ⇒ 2 cm
15 dias ⇒ 3 cm
20 dias ⇒ 4 cm

Outra possibilidade de resposta: $\frac{1}{5} = \frac{x}{20}$, x = 4

ATIVIDADE 5

A tabela abaixo representa alguns valores de uma função na qual “T” corresponde à temperatura na cidade do Rio de Janeiro (em graus Celsius) e “h” são as horas passadas no decorrer de um dia.

h	8	11	15
T	28	32	36

Analisando os dados da tabela constata-se que a temperatura aumentou mais rápido:

(A) Entre 8h e 11h.

(B) Entre 11h e 15h.

(C) Aumentou na mesma proporção nos dois intervalos.

Resolução comentada

Na análise da tabela apresentada oriente os alunos a observarem os intervalos dados para o horário e para a temperatura. Eles poderão notar que a variação da temperatura se mantém, porém o intervalo de tempo aumentou.
Professor retome a tabela apresentada e questione com os estudantes se é possível chegar a mesma conclusão se pensassem na comparação das razões entre as variações de tempo e temperatura expressas na tabela.
Portanto, alternativa (A)

ATIVIDADE 6

(SARESP 2010) A relação entre a pressão e a temperatura de um gás quando este é mantido em um recipiente de volume constante é definida pela relação P/T=a, ou seja, a razão entre a pressão e a temperatura é constante. A tabela seguinte mostra, para um determinado gás, a evolução da pressão em relação à temperatura.

Temperatura (T)	300	400	700
Pressão (P)	60	80	

O valor que está faltando na tabela é:

(A) 100

(B) 140

(C) 150

(D) 170

(E) 180

O rientações pedagógicas:

Em casos de questões de múltipla escolha, solicite aos alunos que registrem os cálculos ou estratégias adotadas, justificando assim seus procedimentos.

Resolução:

Se $\frac{P}{T}$=a, então $\frac{60}{300} = \frac{P}{700}$

Temos P = 140, alternativa (B)

ATIVIDADE 7

(AAP 2016) A tabela a seguir informa a vazão de uma torneira aberta em relação ao tempo:

Tempo (x)	1	5	10	20
Vazão (y)	20	100	200	400

A expressão que representa a vazão em função do tempo é:

(A) $y = x \cdot 20$

(B) $y = x + 100$

(C) $y = x - 200$

(D) $y = 5x \cdot 400$

O rientações pedagógicas:

O objetivo da questão está em avaliar a capacidade do estudante em compreender a função como expressão de uma proporcionalidade. Esta é um tipo de situação que pode confundir os alunos. Muitas vezes sabem que é uma situação de relação direta de proporcionalidade, mas não conseguem escolher entre ..":"» Š ‘ ou ..Š ‘ "·"».

Ao circular pela sala, se perceber que isto está ocorrendo, o professor deve solicitar àqueles com essa dificuldade que expliquem o que estão dizendo com a expressão que escreveram para que possa identificar qual aspecto da proporcionalidade direta e da inversa que os está confundindo. Assim poderá intervir de modo mais satisfatório.

Resolução comentada:

Nota-se pela tabela que a cada unidade de tempo (x) corresponde uma vazão (y) da torneira igual a 20. Assim, quando x é igual a 1, y é igual a vinte ($y=1 \cdot 20$); quando $x = 5$, $y = 5 \cdot 20$ e assim sucessivamente ($y = 20 \cdot x$ ou $y = x \cdot 20$). Dessa forma, a vazão se mantém, proporcionalmente crescente de 20 unidades a medida que o tempo passa. Logo, a expressão que representa a vazão em função do tempo é $y = x \cdot 20$. Alternativa (A). Podemos também pensar da seguinte maneira:

$$\frac{20}{1} = \frac{100}{5} = \frac{200}{10} = \frac{400}{20} = 20$$

Então temos que:

$$20 = 20 \cdot 1$$
$$100 = 20 \cdot 5$$
$$200 = 20 \cdot 10$$
$$\vdots$$

$y = 20 \cdot x$ ou $y = x \cdot 20$. Alternativa (A)

ATIVIDADE 8

A tabela a seguir informa a capacidade em metros cúbicos de uma represa que "estourou" (sua barragem se rompeu) em relação ao tempo em minutos. A represa inicialmente tinha capacidade de 200 m^3 de água e após 20 minutos, devido à queda contínua da barragem, ficou com apenas 10 m^3 de água.

Solicitamos que considere os dados da tabela, conforme segue:

Tempo (x)	1	5	10	20
Vazão (y)	200	40	20	10

A expressão que representa a vazão em função do tempo é

(A) $y = x \cdot 20$

(B) $y = x + 100$

(C) $y = 200/x$

(D) $y = 5x \cdot 400$

Prezado Professor, ao propor a atividade peça aos alunos que modifiquem a alternativa (C), no Caderno do Aluno, para: $y = 200/x$.

Orientações pedagógicas:

Leve os alunos a discutirem nesta situação sobre o que está acontecendo com a represa, sobre o que vem a ser uma barragem e a relação desta com o represamento da água. Como na atividade anterior, pode haver dúvidas sobre utilizar ..''æ»Š' ou .Š' ''æ. Tanto esta atividade como a atividade anterior podem propiciar boas discussões e comparações. Promova o momento em que mais de um aluno possa ir à lousa justificar sua resposta. Uma possibilidade é solicitar que ambas sejam realizadas por um mesmo grupo de alunos com questões norteadoras que deverão ser abordadas na socialização comparando as duas.

Resolução:

$$200 \cdot 1 = 40 \cdot 5 = 20 \cdot 10 = 200$$

Então temos que:

$$200 = {}^{200}/_{1}$$

$$40 = {}^{200}/_{5}$$

$$20 = {}^{200}/_{10}$$

$$\vdots$$

$$y = {}^{200}/_{x}$$

Alternativa (C)

ATIVIDADE 9

(AAP) O comprimento C de uma circunferência é uma função do diâmetro d. A variável C é diretamente proporcional a d, e temos $C = f(d) = \pi \cdot d$. Então, a constante de proporcionalidade (k) é:

(A) $k = 2$

(B) $k = \pi$

(C) $k = 2/\pi$

(D) $k = 2/\pi$

Resolução:

A constante de proporcionalidade é dada pela razão entre comprimento e diâmetro. Desta forma $\frac{C}{d} = \pi$ (B)

ATIVIDADE 10

Num movimento, o espaço percorrido é diretamente proporcional ao tempo, mantendo-se constante a velocidade. O professor Demóstenes deslocou-se no seu automóvel durante 4 horas, a uma velocidade média de 90 km/h. A função que representa corretamente a relação de proporcionalidade direta é:

(A) Velocidade média $= \frac{\text{espaço}}{\text{tempo}}$

(B) Velocidade média $= \frac{\text{espaço + tempo}}{\text{tempo}}$

(C) Velocidade média $= \frac{\text{espaço– tempo}}{\text{tempo}}$

(D) Velocidade média = espaço · tempo

(E) Velocidade média $= \frac{\text{tempo}}{\text{espaço}}$

Orientação pedagógica:

O aluno pode não ter conhecimento desta relação. Mesmo assim é possível que ele realize esta inferência com questionamentos norteadores: "quais são as unidades de medidas apresentadas nas placas que lemos sobre velocidade? Citem exemplos"; "o que elas têm em comum?", e assim sucessivamente.

Resolução

De acordo com o enunciado da atividade o espaço percorrido é diretamente proporcional ao intervalo de tempo do percurso, com velocidade média constante, desta forma, pode se dizer que a velocidade média é a razão constante entre espaço e o tempo, portanto alternativa A.

TEMA 2: FUNÇÕES

Função:

Duas grandezas x e y podem variar de modo interdependente, de tal forma que assumem valores interrelacionados. Essa relação de dependência entre duas grandezas diretamente proporcionais pode ser expressa por uma sentença do tipo $f(x) = kx$, na qual $k \neq 0$, cujo gráfico que representa essa relação de dependência é uma reta que passa pela origem quando x for um número real.

Em linhas gerais, pode-se dizer que a função é uma relação entre conjuntos numéricos, relacionando cada elemento de um conjunto (x) a um único elemento de outro conjunto (y). Sendo assim, o primeiro conjunto é chamado de domínio da função, e o segundo conjunto é chamado de contradomínio da função, sendo definida utilizando uma lei de formação, em que, para cada valor de x, temos um valor de y, dizemos ainda que x é a variável independente e y é a variável dependente.

Orientação pedagógica

Este é um texto repleto de informações conceituais importantes. Sugerimos que seja realizada uma leitura colaborativa, onde o professor vai lendo pequenos trechos e questionando os alunos sobre o que compreenderam. A medida que novas colaborações vão surgindo por parte dos alunos, o professor vai ampliando com outras informações e/ou instigando os alunos com questionamentos reflexivos. Dessa forma todos colaboram e os conceitos podem ser sistematizados. O professor pode ir anotando na lousa o que foi sistematizado, completando e fazendo melhorias, mas não sugere-se que traga os conceitos prontos e apresente aos alunos. Da mesma maneira o professor deve proceder se houver palavras difíceis, utilizando o dicionário apenas quando todos os procedimentos de leitura tenham sido utilizados.

ATIVIDADE 1

O preço da passagem do transporte urbano comum em uma cidade do Estado de São Paulo é R$ 4,00. Com base nesse dado, complete a tabela a seguir:

Número de passagens	1	2	5	8
Valor a ser pago	4,00	8,00	20,00	32,00

Essa tabela representa tipicamente uma relação de proporcionalidade direta.

a) Quanto uma pessoa pagaria se comprasse 7 passagens?

b) Quantas passagens podem ser compradas com o valor R$ 60,00?

Orientação pedagógica

As (04) quatro primeiras atividades desta sequência de atividades podem ser propostas com o intuito de diagnosticar os conhecimentos adquiridos pelos alunos até aqui e também para que o aluno mobilize seus saberes para lembrar e retomar esse assunto. O objetivo não é apenas avaliar o que os alunos sabem sobre funções, mas se reconhecem a relação de proporcionalidade existente entre as variáveis, a ligação entre elas e sobre constantes de proporcionalidade.

Resolução:

a)

Se comprasse 7 passagens pagaria R$ 28,00, pois:

$$7 \cdot 4 = 28$$

ou

$$f(n) = 4 \cdot n$$

$$f(7) = 4 \cdot 7$$

$$f(7) = 28$$

b)

Podem ser compradas 15 passagens e não há troco.

$$60 \div 4 = 15$$

ou

$$f(n) = 4 \cdot n$$

$$60 = 4 \cdot n$$

$$n = 15$$

Podemos considerar que o preço pago pelas passagens variam em função da quantidade adquirida. Dessa forma, a relação de proporcionalidade é expressa por uma função do tipo y = k.x, também chamada de função linear, onde k é considerada a constante de proporcionalidade.

c) Determine o valor de k e escreva a expressão algébrica que representa essa situação. Considere N o número de passagens e V o valor pago.

d) No caderno, construa um plano cartesiano e esboce o gráfico da função.

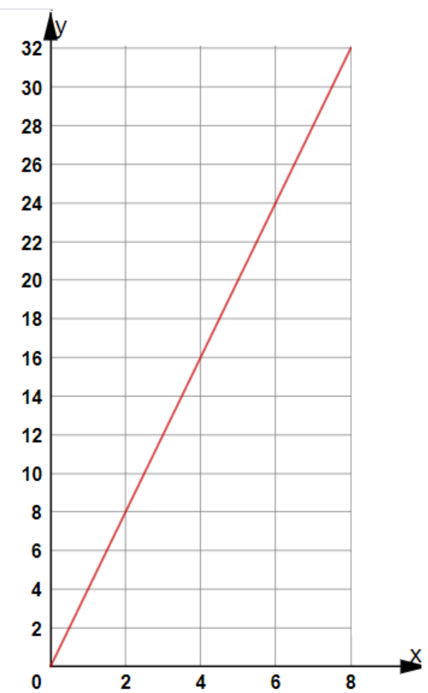
c)

Sabemos que o valor pago V depende da quantidade de passagens compradas. Sabemos também que é uma relação diretamente proporcional. Logo temos: V=k .N

A expressão algébrica que representa esta situação é:

$V = 4 \cdot N$.

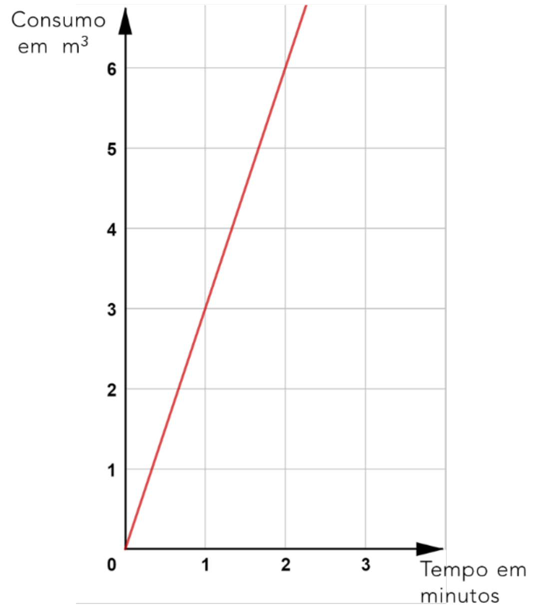
d)



ATIVIDADE 2

O gráfico a seguir representa a relação f(x) = 3t referente ao consumo de água (em m³) de uma empresa em função do tempo (em minutos).

Professor, na ocasião da correção da atividade, considere o gráfico a seguir:



Analise o gráfico e responda:

a) Qual é o consumo de água dessa empresa após 2 minutos?

b) Qual seria a lei de formação dessa função se y fosse dado em litros?

c) Em quanto tempo essa empresa consome 210 m³ de água?

d) O que significa f(30)= 90 nessa função?

a)

Após 2 minutos o consumo será de 6 m³ de água, pois $f(2) = 3 \cdot 2$

b)

Devemos considerar que **1 m³=1000l** de água. Como a função está definida para m³ e para que a resposta seja dada em litros é necessário transformar a unidade de medida, assim podemos escrever:

$$f(t) = 3 \cdot t \cdot 1000$$

c)

O objetivo aqui é calcular o valor de t quando f(t) = 210.

$$210 = 3t \Rightarrow t = 70$$

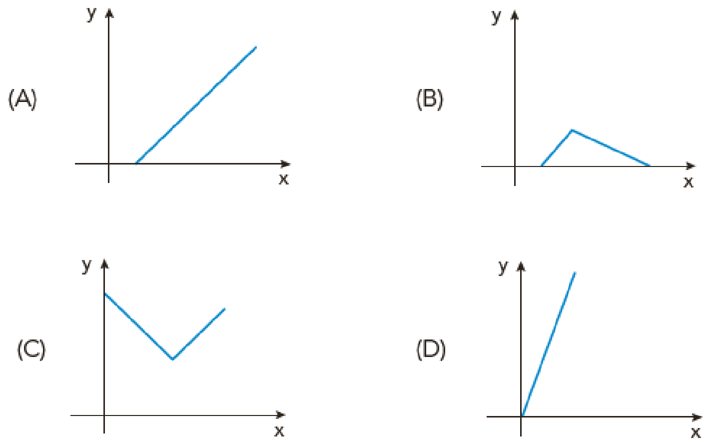
d)

Significa que em 30 minutos o consumo de água na empresa chegou a 90 m³, ou, 90 mil litros de água.

ATIVIDADE 3

(AAP) Existe uma relação de proporcionalidade direta entre duas grandezas x e y. Se x é diretamente proporcional a y, então, também y será diretamente proporcional a x.

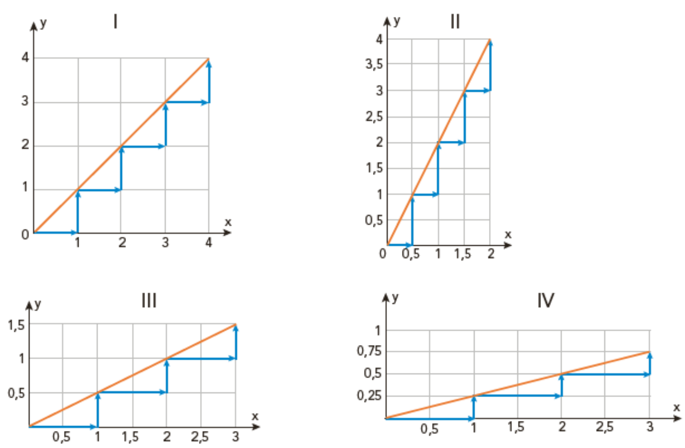
O gráfico que representa uma relação de proporcionalidade direta entre as duas grandezas é:



A proporcionalidade direta de x e y está representada na alternativa (D), onde a reta passa pela origem do sistema.

ATIVIDADE 4

(AAP) Considere os gráficos a seguir:



Considerando as constantes de proporcionalidade encontradas em cada uma das funções e organizando-as em ordem crescente, obtemos a seguinte sequência:

(A) IV, III, I e II

(B) II, I, III e IV

(C) III, IV, I e II

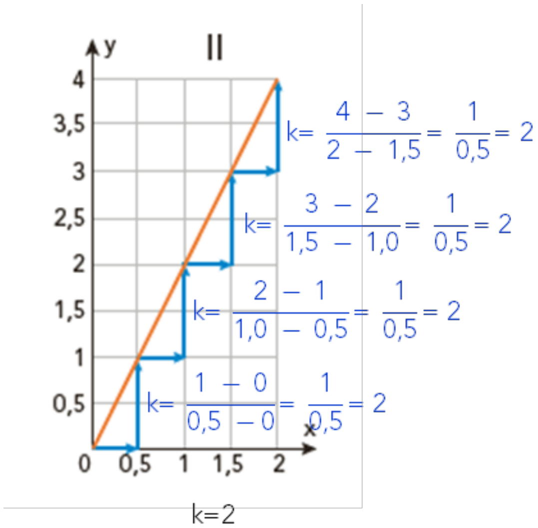
(D) I, II, III e IV

Orientações pedagógicas:

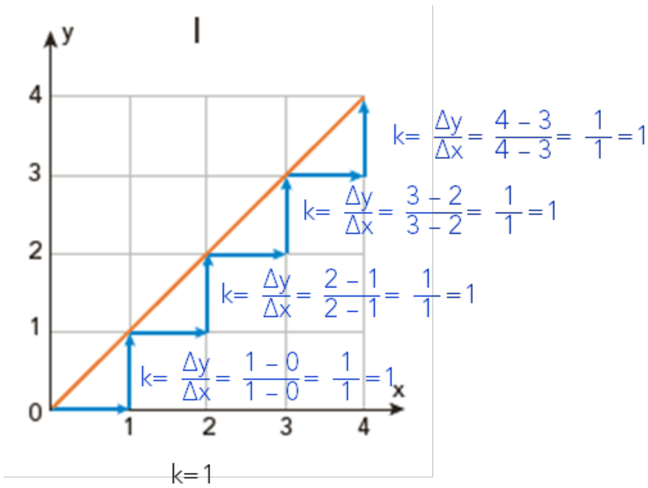
Esta é uma atividade que pode ser resolvida se o aluno saber corretamente o conceito de taxa de variação de uma função afim, apenas verificando a inclinação da reta. e a respectiva constante de proporcionalidade.

Resolução

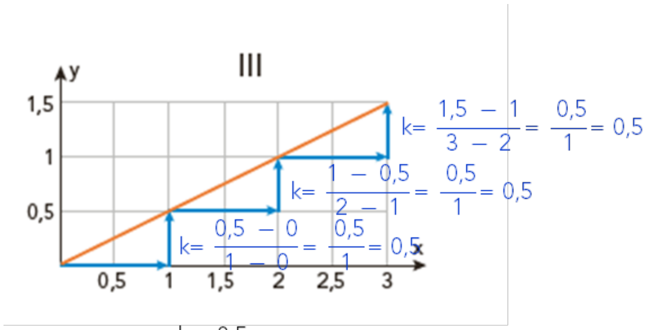
Analisando-se as constante de proporcionalidade dos gráficos apresentados e considerando a maior constante para a menor, temos: II, I, III, IV. Portanto, alternativa (B). Calculado as constantes de proporcionalidade (k), nos respectivos gráficos temos:



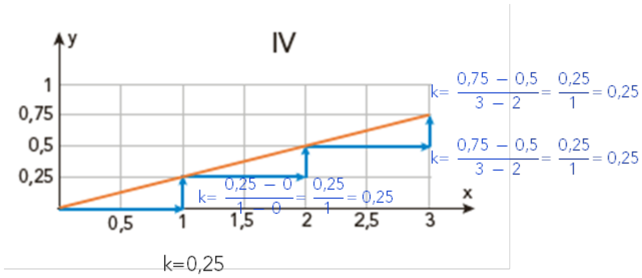
k=2



k=1



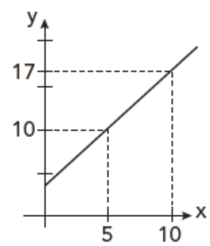
k = 0,5



k=0,25

ATIVIDADE 5

Calcule a taxa de variação da função representada no gráfico abaixo.



Resolução:

A taxa de variação pode ser dada por $a = \frac{17-10}{10-5} = 1,4$.

ATIVIDADE 6

Sabendo-se que, numa função do tipo f(x) = ax + b o valor de f(-1) = 4 e que f(2) = 10, determine o valor de f(12).

Resolução:

Calculando os coeficientes:
Coeficiente angular:
$a = \frac{10-4}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = 2$; Logo: f(x) = 2x + b
Para calcular o valor do coeficiente linear **b**, utilizaremos um dos pontos conhecidos. Escolhemos aleatoriamente o ponto (2,10), mas poderíamos ter escolhido o ponto (–1, 4).
Temos:

$$f(x) = 2x + b$$

$f(2) = 2 \cdot 2 + b$
$f(2) = 2 \cdot 2 + b = 10$
$2 \cdot 2 + b = 10$
Logo: $b = 6$
Temos a função: $f(x) = 2x + 6$
Calculando f(12):
$f(12) = 2 \cdot 12 + 6 = 30$

ATIVIDADE 7

Dada a função f(x) = 3x + 3, definida para x pertencente aos números reais, assinale a alternativa que mostra uma propriedade desta função.

(A) Crescente e sempre positiva.

(B) Decrescente e sempre positiva.

(C) Decrescente e positiva no primeiro e segundo quadrantes.

(D) Crescente e positiva no primeiro e segundo quadrantes.

Orientações pedagógicas:

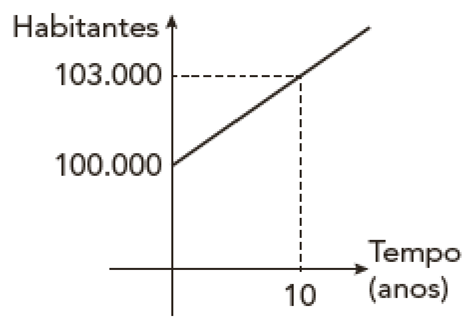
Num primeiro momento questões como estas são podem parecer fáceis por envolver mais a parte conceitual. Acreditamos que ela propicia um trabalho em duplas, na qual os alunos devam justificar a escolha de cada alternativa. Após isso, o professor pode fomentar um debate ou roda de conversa, na qual os alunos apresentem suas justificativas e o professor as anota na lousa. Depois das anotações realizadas, a sistematização pode ser feita. Procure não construir o gráfico de imediato, pois o objetivo é aguçar a curiosidade e a capacidade de abstração dos alunos.

Resolução

Em qualquer função do tipo f(x) = ax + b, o coeficiente a indica o valor do coeficiente angular da reta e o termo independente o coeficiente linear, sabendo-se que quando o coeficiente linear é positivo a reta é crescente, desta forma, em f(x) = 3x + 3 constamos que é crescente e positiva no primeiro e segundo quadrante, logo a resposta correta é a alternativa (D).

ATIVIDADE 8

O gráfico a seguir representa uma projeção do número de habitantes de um município em n anos. Qual a taxa de variação do número de habitantes por ano?



(A) 103 000

(B) 100 000

(C) 3 000

(D) 300

(E) 10

Resolução

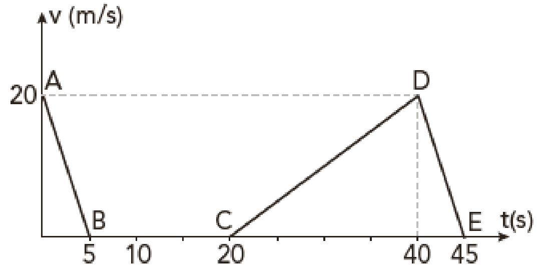
Por se tratar de uma função de 1° grau, podemos determinar a função e encontrar f(1) – f(0).Calculado os coeficientes temos a função $f(x) = 300x + 100\,000$ e $f(1) - f(0) = 300$.

Podemos também considerar a relação direta:

$$\frac{3000}{10} = \frac{y}{1} \Rightarrow y = 300 \text{ habitantes (D)}$$

ATIVIDADE 9

O gráfico mostra a variação de velocidade de um veículo numa trajetória retilínea.



A velocidade aumenta no período de:

(A) 0 a 10s

(B) 10s a 40s

(C) 40s a 45s

(D) 0 a 20s

(E) 20s a 40s

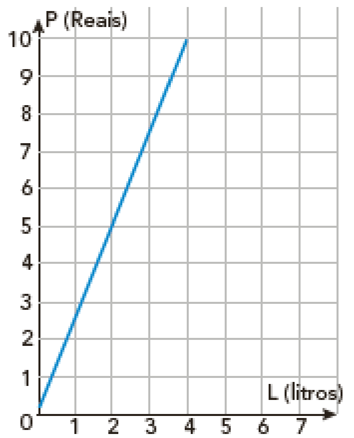
Professor, na ocasião da aplicação desta atividade, solicitamos que peça aos alunos a correção da alternativa (E)

Resolução:

É possível ver que a velocidade aumenta quando a função é crescente. Isso ocorre no intervalo onde t varia de 20 a 40 segundos. Portanto alternativa (E).

ATIVIDADE 10

(AAP 2017) O valor a ser pago por uma pessoa para abastecer seu automóvel varia proporcionalmente em função da quantidade de litros de combustível utilizado. Tal função trata-se de uma relação de proporcionalidade direta.



A partir das informações apresentadas no gráfico, pode-se afirmar que:

(A) A relação de (L) Litros e Preço (P) é decrescente, ou seja, quanto maior a quantidade de litros menor o valor a ser pago.

(B) A relação de (L) Litros e Preço (P) é crescente, ou seja, quanto maior a quantidade de litros maior o valor a ser pago.

(C) A relação de (L) Litros e Preço (P) é crescente e sua constante de proporcionalidade é k = 3,5.

(D) A relação de (L) Litros e Preço (P) é decrescente e sua constante de proporcionalidade é k = -3,5.

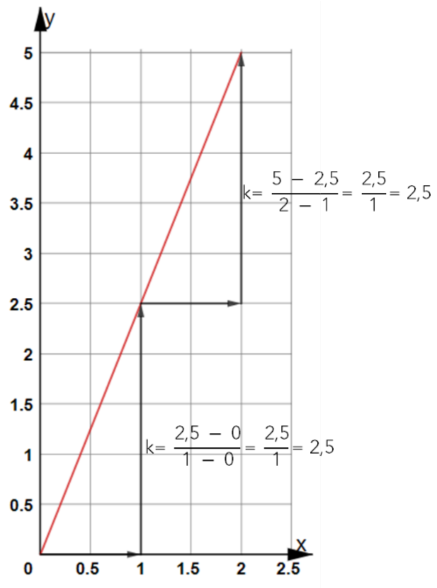
(E) A relação de (L) Litros e Preço (P) é constante, com P crescente de k = 2,5 mantendo a proporcionalidade.

Orientações pedagógicas.

Sugerimos movimento tal qual realizado na atividade 7. Se preferir, uma vez que os alunos se encontram em grupos, solicitar que realizar as atividades 7,8, 9, 10 e 11, uma vez que elas permitem que haja discussão.

Resolução:

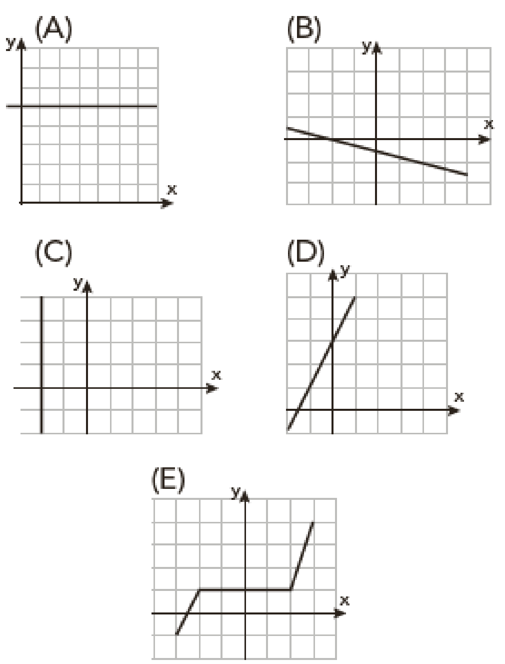
Do gráfico, tem-se que a relação entre litros e preço é direta, e que o valor do litro do combustível em questão é R$ 2,50. Então a constante de proporcionalidade é k = 2,5, como podemos constatar na representação gráfica a seguir:



Professor, ao discutir com os alunos esta atividade, atente à respostas dos alunos com relação à alternativa E, note-que ela se refere a uma relação entre litros e preços constantes, mesmo que a constante de proporcionalidade é 2,5.

ATIVIDADE 11

Dentre os gráficos a seguir, assinale os que representam, respectivamente, uma função decrescente e crescente.



(A) A e B

(B) B e C

(C) B e D

(D) C e D

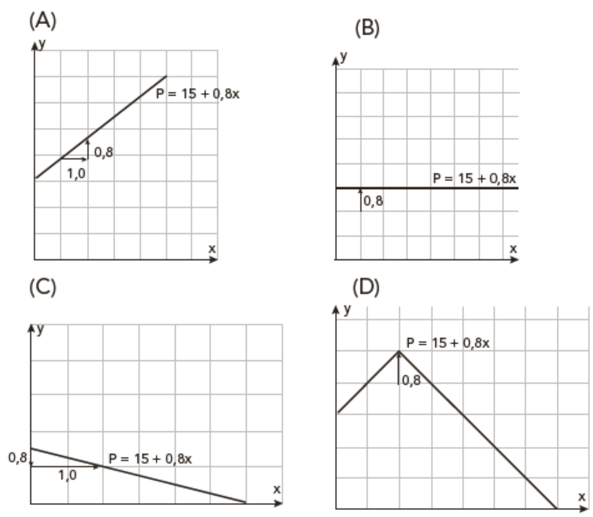
(E) D e E

Resolução

Os gráficos que atendem ao solicitado na atividade, refere-se à alternativa C.

ATIVIDADE 12

(AAP 2016) O preço (P) a ser cobrado em uma corrida de táxi é composto por uma quantia fixa (bandeirada), igual para todas as corridas, mais uma parcela variável, que é diretamente proporcional ao número de quilômetros rodados: P = a + b.x (b é o custo de cada quilômetro rodado). Em determinada cidade, temos P = 15 + 0,8.x (P em reais e x em quilômetros). O gráfico de P em função de x que atende à proposição é:



Resolução:

A resposta correta é a alternativa (A), não apenas por ser a única crescente, mas também pela taxa de variação do gráfico corresponder com a taxa de variação da função.

Funções polinomiais de 2º grau.

A relação de interdependência entre duas grandezas x e y, em que y é diretamente proporcional ao quadrado de x, ou seja, $y = k \cdot x^2$, sendo $k = y/x^2$ a constante de proporcionalidade, que pode ser representada por uma função do 2ºgrau.

> De modo geral, a relação $y = k \cdot x^2$ serve de base para iniciar o estudo das funções do 2º grau, cuja fórmula geral é $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

ATIVIDADE 1

Uma pedra é abandonada em queda livre. A distância vertical que ela percorre é diretamente proporcional ao quadrado do tempo de queda, ou seja, temos $y = kx^2$ sendo, neste caso, y = distância percorrida em metros, x = tempo de queda em segundos e k = 5 (aproximadamente). Nessas condições, calcule:

a) A distância percorrida pela pedra após 1 segundo de queda ;
b) A distância percorrida pela pedra após 2 segundo de queda;
c) A distância percorrida pela pedra após 5 segundo de queda;
d) Depois de quanto tempo a pedra percorre a distância de 45m?
e) Se a pedra foi lançada de uma altura de 80 metros, depois de quanto tempo ela atinge o chão?

O rientação pedagógica

A atividade 1 propõe uma aplicação prática da aplicabilidade da função de 2° grau, com itens de aplicação direta da relação $y = kx^2$. Explore com os alunos a leitura do enunciado e solicitando que expliquem o que está sendo colocado em cada uma das situações e como ela deve ser interpretada matematicamente.

Resolução:

a)

Do enunciado, se k = 5, temos que $y = 5 \cdot x^2$ e quando x =1, $y = 5 \cdot 1^2 = 5$m

b)

De maneira análoga, temos que $y = 5 \cdot 2^2 \Rightarrow y = 20$m

c)

$y = 5 \cdot 5^2 \Rightarrow y = 5^3 = 125$m

d)

Neste caso, temos que y = 45m, então:

$45 = 5 \cdot x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = 3$s

Note que não consideramos o valor negativo para x, pois não existe medida negativa para intervalo de tempo.

e)

Neste caso temos que o espaço inicial da pedra é de 80m, então temos que:

$80 = 5 \cdot x^2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = |\sqrt{16}| \Rightarrow x = 4$s

Note que não consideramos o valor negativo para x, pois neste caso não se considera distâncias negativas.

ATIVIDADE 2

(AAP 2017) A tabela mostra a proporcionalidade direta entre a grandeza x e seu quadrado.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$	2	$\frac{25}{8}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{49}{2}$	8	$\frac{81}{8}$	$\frac{25}{2}$

Professor, informe aos estudantes a seguinte comanda: "**A função que representa a variação das grandezas será:**"

(A) $y = \frac{1}{8}x$

(B) $y = 4x$

(C) $y = \frac{1}{8}x^2$

(D) $y = 8x^2$

(E) $y = \frac{1}{2}x$

Orientações pedagógicas:

Após algum tempo dado à resolução, pergunte aos alunos o que eles acharam de semelhança entre as frações apresentadas na tabela, de acordo com a proporcionalidade direta da grandeza x com o quadrado.

Resolução:

De acordo com a variação das grandezas apresentadas na tabela, nota-se que a constante de proporcionalidade (k) varia de acordo com o quadrado do valor de x na razão de 1/8, conforme a tabela abaixo:

x	y	x^2	$k = \frac{y}{x^2} \Rightarrow y = kx^2$
1	$\frac{1}{8}$	1	$k = \frac{\frac{1}{8}}{1} = \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{2}$	4	$k = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
3	$\frac{9}{8}$	9	$k = \frac{\frac{9}{8}}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{8}$
4	2	16	$k = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
5	$\frac{25}{8}$	25	$k = \frac{\frac{25}{8}}{25} = \frac{25}{8} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{8}$

De acordo com os cálculos, a função que representa as grandezas x e y da tabela será $y = \frac{1}{8} \cdot x^2$

Algumas características da função quadrática:

ATIVIDADE 3

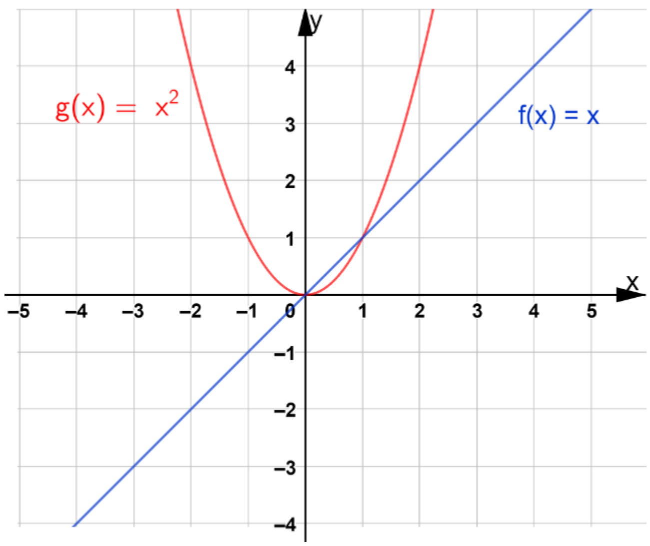
Complete a tabela abaixo e construa, no espaço a seguir, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.

Tabela: Associação entre os valores de x e as funções f(x) e g(x)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f(x)	–3	–2	–1	0	1	2	3
g(x)	9	4	1	0	1	4	9

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura: Esboço das funções f(x) e g(x)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao construir os gráficos acima, observamos que o gráfico de $f(x) = x$ é uma reta e o gráfico de $g(x) = x^2$ é uma parábola.

Indique a seguir, se verdadeiro ou falso.

a) $x^2 \geq 0$ para todo número real x;
b) $g(x) = g(-x)$ para todo número real x:
c) $x^2 \leq x$ para valores de x no intervalo de 0 a 1.
d) $x^2 < x$ para x maior que 1
e) o gráfico de $g(x) = x^2$ encosta suavemente no eixo x:

Resolução:

a) Verdadeira. Todo número real x elevado ao quadrado será igual a zero ou será sempre positivo.

b) Verdadeira. $g(x) = g(-x)$ porque todo número elevado ao quadrado resulta em número positivo o que nos permite escrever que $x^2 = (-x)^2$

c) Verdadeira , pode se perceber no gráfico que os valores de g(x) se encontram abaixo da função f(x).

d) Falso. Analisando pelo gráfico percebemos que a partir de **$x > 1$** a função **$g(x) > f(x)$.**

e) Verdadeiro. Essa função toca eixo $\boldsymbol{x}$ e um único ponto, onde **$x = 0$.**

ATIVIDADE 4

Partindo do gráfico de $f(x) = x^2$, abaixo, vamos construir outros gráficos de $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$, para observar o comportamento da concavidade das parábolas que se formam. Para isso, complete a tabela e construa os gráficos das funções indicadas no mesmo plano cartesiano:

Tabela: Associando o valor de x nas funções: f(x), g(x), h(x) e m(x)

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = 3x^2$	$h(x) = \frac{1}{2}x^2$	$m(x) = -x^2$
–2	4	12	2	–4
–1	1	3	½	–1
0	0	0	0	0
1	1	3	½	–1
2	4	12	2	–4

Fonte: Elaborada pelo autor

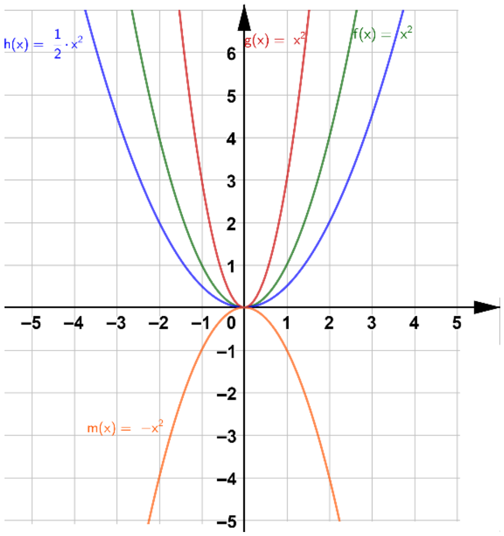
Orientações Pedagógicas:

Para a ampliação da discussão e compreensão das atividades 4 e 5 por parte dos alunos é interessante o uso de um software de geometria dinâmica ou plotadores de gráficos. Com os gráficos elaborados, podem ser discutidas algumas particularidades dos gráficos, como :

- As representações algébricas dessas funções são semelhantes?
- O que isso provoca de semelhança na representação gráfica dessas funções?
- O que as representações algébricas têm de diferença?
- O que isso provoca de diferença na representação gráfica?

Resolução:

Figura: Esboço das funções: f(x), g(x), h(x) e m(x)



Fonte: Elaborada pelo autor.

ATIVIDADE 5

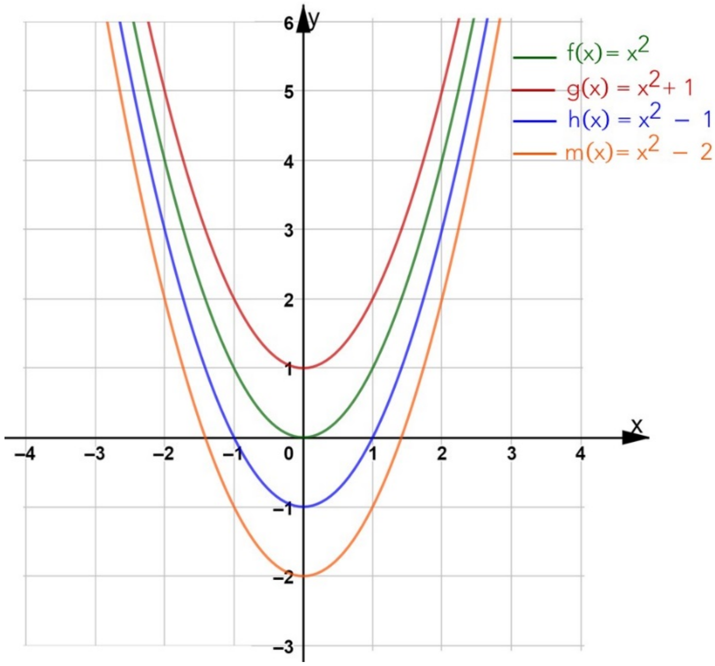
O gráfico de **f(x) = ax² + c** continua a ser uma parábola, mas seus pontos são deslocados, em relação ao conhecido gráfico de **y= ax²**. Complete a tabela e construa os gráficos das funções indicadas no mesmo plano cartesiano:

Tabela: Associando o valor de x nas funções: f(x), g(x), h(x) e m(x)

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 + 1$	$h(x) = x^2 - 1$	$m(x) = x^2 - 2$
–2	4	5	3	2
–1	1	2	0	–1
0	0	1	–1	–2
1	1	2	0	–1
2	4	5	3	2

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura: Esboço das funções: f(x), g(x), h(x) e m(x)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Descreva o que você observou:

Possível resposta: Observa -se que a parábola não altera sua abertura, pois o coeficiente a é o mesmo para todas elas. Contudo as parábolas estão acima ou abaixo do eixo x de acordo com a variação do termo independente. Se o termo independente é positivo, a parábola fica acima do eixo das abscissas. Se o termo independente for negativo, a parábola terá seu vértice abaixo do eixo das abscissas.

ATIVIDADE 6

Explique quando o gráfico de uma função do tipo $y = ax^2 + c$ passa pela origem (0, 0).

Isso ocorre quando o termo independente **c** é igual a zero.

ATIVIDADE 7

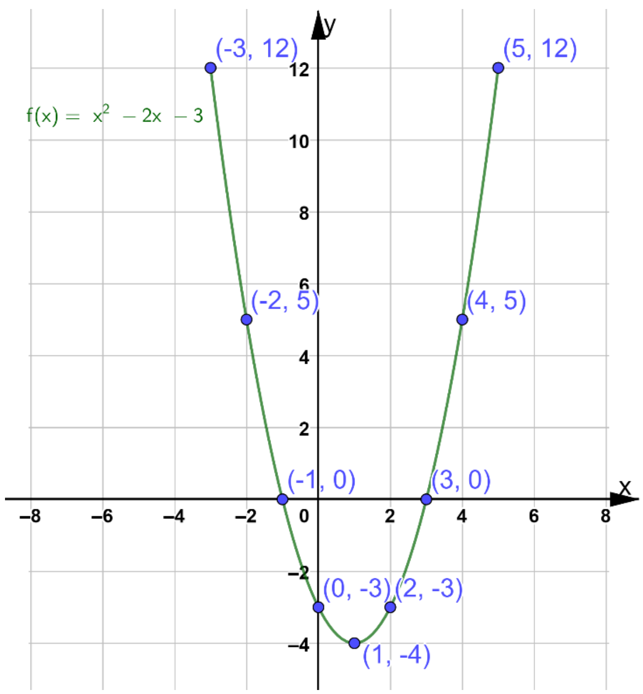
Sabemos que o gráfico da função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$é uma parábola. Agora, amos construir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Complete a tabela e construa o gráfico no plano cartesiano abaixo:

Tabela: Pares ordenados da função: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

x	$f(x) = x^2 - 2x - 3$	Par ordenado
-3	$y= (-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 3 = 12$	$(-3, 12)$
-2	$y = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = 5$	$(-2, 5)$
-1	$y = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 0$	$(-1, 0)$
0	$y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$	$(1, -4)$
2	$y = 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -3$	$(2, -3)$
3	$y = 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$	$(3, 0)$
4	$y = 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 = 5$	$(4, 5)$
5	$y = 5^2 - 2 \cdot 5 - 3 = 12$	$(5, 120)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura: Esboço da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$



Fonte: Elaborada pelo autor.

ATIVIDADE 8

Observe o gráfico construído na questão anterior e responda:

a) Descreva o que você observou em relação ao ponto (0, -3):

Note que: f(0) = c

b) Descreva o que você observou em relação aos pontos
(-1 , 0) e (3 , 0)

Note que: f(x) = 0 para os valores de x que anulam a função, isto é, quando $x^2 - 2x - 3 = 0$. Neste caso, dizemos que x1 e x2 são as raízes da função.

c) Descreva o que você observou em relação aos pontos
(-3 , 12) e (5 , 12) ; (-2 , 5) e (4 , 5) ; (-1 , 0) e (3, 0) ;
(0 , -3) e (2, -3):

Note que:

- A parábola é simétrica.
- O eixo de simetria da parábola é uma reta vertical.

d) Descreva o que você observou em relação ao ponto
(1 , 4):

Note que:

- O vértice da parábola situa-se no eixo de simetria.
- O vértice é também conhecido como ponto de máximo quando a concavidade da parábola está voltada para baixo (a < 0).
- O vértice é também conhecido como ponto de mínimo quando a concavidade da parábola está voltada para cima (a > 0).
- A abscissa do vértice é o ponto médio do segmento determinado pelas raízes da função.
- Se a equação f(x) = 0 tiver apenas uma raiz real, a abscissa do vértice será a própria raiz.
- Mesmo no caso de a equação do 2° grau f(x) = 0 não ter raízes, podemos calcular diretamente as coordenadas do vértice da parábola da seguinte forma:

Resolução:

a)

Isso quer dizer também que é um dos locais em que a parábola intercepta o eixos y.

b)

Note que: f(x) = 0 para os valores de x que anulam a função, isto é, quando $x^2 - 2x - 3 = 0$. Neste caso, dizemos que x_1 e x_2 são as raízes da função.

c)

Resposta possível: os pontos citados, dois a dois, são simétricos em relação ao eixo de simetria.

Informações que podem ser citadas pelos alunos ou rememoradas pelos docentes:

- a parábola é simétrica.
- o eixo de simetria da parábola é uma reta vertical.

d)

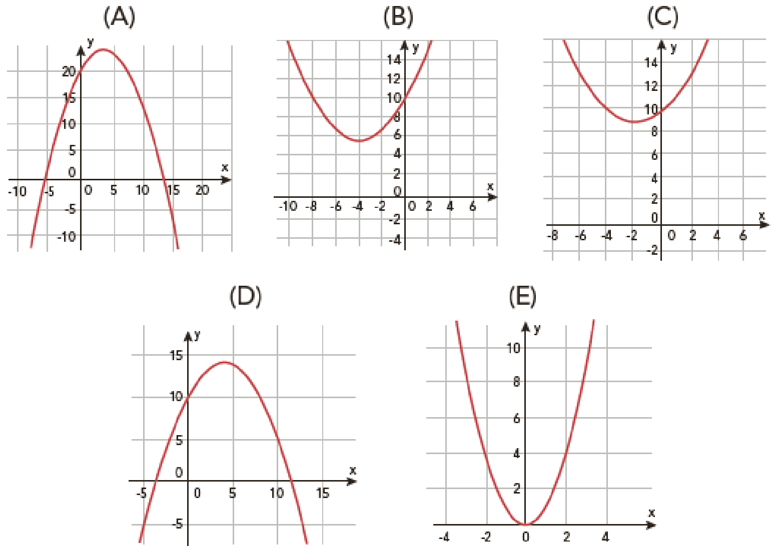
Resposta possível: é o ponto mais abaixo da parábola e o ponto em que a curva muda de direção. (ponto mínimo e de inflexão)

ATIVIDADE 9

(AAP 2015) Indique qual dos gráficos abaixo expressa uma proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado da outra, considerando as grandezas x e y, em que $y = 0{,}25\,x^2 + 2x + 10$

Professor, solicitamos, que considere o seguinte enunciado;

Considerando as grandezas x e y, indique qual dos gráficos representa a função: $y = 0{,}25\,x^2 + 2x + 10$



Fonte: Elaborada pelo autor

Orientações pedagógicas.

Até o momento não foram realizadas atividades em que o aluno precisasse de localizar uma, ou as duas, coordenadas do vértice e neste caso é uma boa alternativa partir da descoberta desse ponto. Sendo assim, um trabalho prévio a esta atividade se faz necessário. Antes de apresentar as formas algébricas de localizar as coordenadas do vértice de uma parábola, é de fundamental importância que os alunos compreendam: onde geometricamente se localiza este ponto; qual seu significado e possíveis aplicações; como localizá-lo já conhecendo as raízes da equação; como localizar uma das coordenadas já conhecendo a outra. Após esta compreensão global, localizar as coordenadas do vértice utilizando os coeficientes da equação passará a ter sentido real.

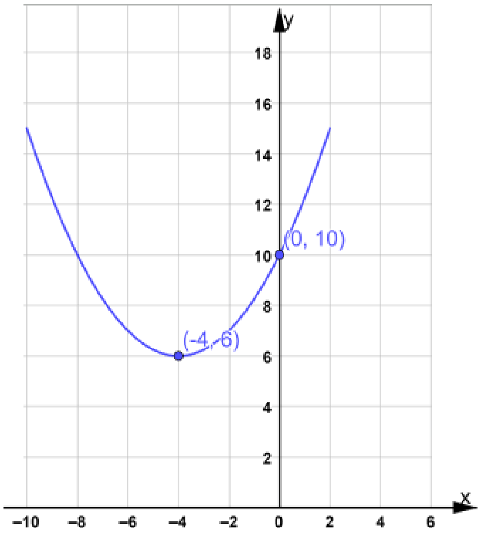
Resolução:

O objetivo desta atividade é averiguar se o aluno identifica algumas características importantes da função polinomial de 2º grau, por meio das características de seus coeficientes e também pelas coordenadas do vértice da parábola.
Então temos que:

- $a > 0 \Rightarrow$ a parábola tem concavidade voltada para cima;
- $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 0{,}25} = -\frac{2}{0{,}5} = -4$
- $y_v = f(x_v) \Rightarrow y_v = 0{,}25 \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4) + 10 = -6$
- o termo independente (c) da função é 10, portanto a parábola corta o eixo y no ponto (0,10).

Os dados anteriormente citados, são condições suficientes para o esboço do seguinte gráfico.

Figura: Esboço da função f(x) = 0.25 x^2 + 2x +10



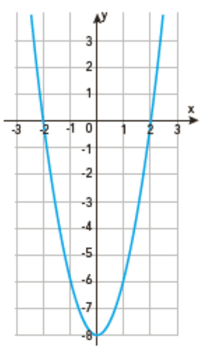
Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, o gráfico da função: C = 0,25 x^2 + 2x + 10, será representado pelo gráfico indicado na alternativa **B.**

ATIVIDADE 10

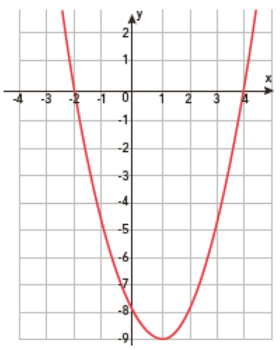
Analisando as informações apresentadas nos gráficos, a expressão algébrica que corresponde a cada uma das parábolas é:

(A) $y = -x^2 + 2x + 8$



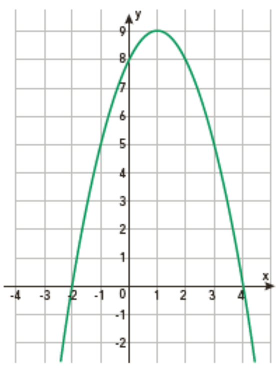
( )

(B) $y = 2x^2 - 8$



( )

(C) $y = x^2 - 2x - 8$



( )

Orientação pedagógica:

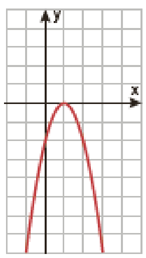
Esta atividade e outras similares podem auxiliar na avaliação individual dos alunos quando o intuito é avaliar, por exemplo, se eles sabem a relação entre os coeficientes da equação e a localização dos pontos no gráficos. Solicite que os alunos justifiquem suas escolhas.

Resolução:
B - C - A, nesta ordem.
A função representada pelo item B, não apresenta o termo **bx,** que implica em duas raízes cujo módulo é o mesmo, então tal função relaciona-se ao primeiro esboço.
A função representada pelo item C, pode ser relacionada com o segundo esboço, localizando, por exemplo, as coordenadas do vértice.
A função representada pelo item A tem coeficiente **a** negativo, logo está relacionada ao terceiro esboço cuja parábola está com a concavidade voltada para baixo.

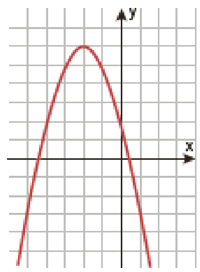
ATIVIDADE 11

Uma função do 2º grau é expressa genericamente por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são coeficientes reais, com **a** $\neq$ **0.** Se uma função do 2º grau tem o coeficiente a negativo, b negativo e c nulo, então, o gráfico a melhor representa é :

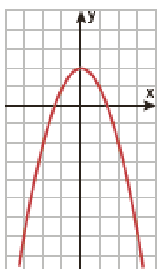
(A)



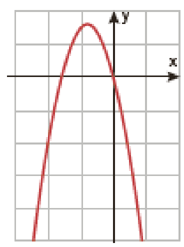
(B)



(C)



(D)



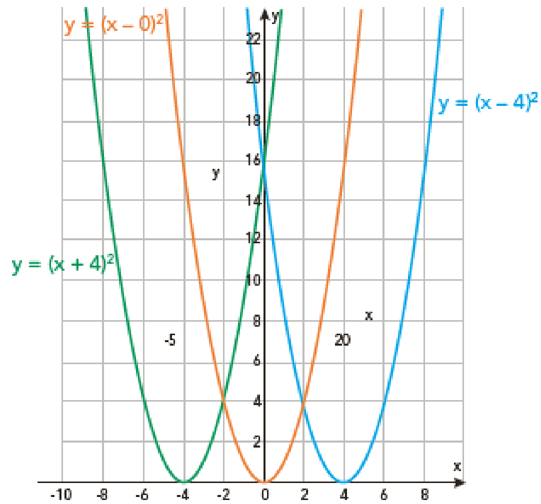
Orientação pedagógica

Esta é uma atividade que também permite um trabalho em grupo se o professor, além da comanda, solicitar que os alunos escrevam as possíveis relações dos gráficos com os valores dos coeficientes. Podem até fazer simulações no Geogebra. A socialização pode enriquecer ainda mais o que poderá ser elencado por cada grupo.

Resolução:
Dado que o coeficiente ***c*** é nulo, então a parábola passa pelo ponto de origem. A única imagem que apresenta esta opção é a letra D.

ATIVIDADE 12

Observe as funções abaixo:



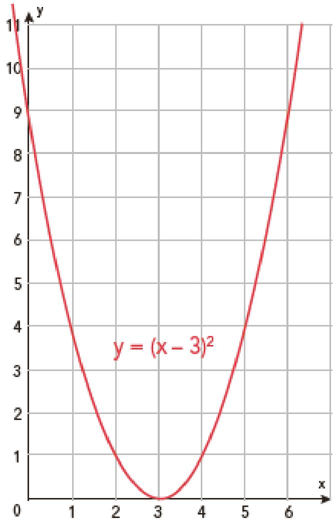
a) Com relação às semelhanças e diferenças entre as funções acima representadas, o que pode ser percebido entre o vértice das funções $y = (x – 0)^2$ e $y = (x + 4)^2$? Elas possuem algum ponto em comum? Por quê?
Analisando as funções:
$y = (x – 0)^2$ e $y = (x + 4)^2$, indique o que houve com o vértice dessas parábolas.

b) As funções $y = (x+4)^2$ e $y = (x – 4)^2$ se interceptam na ordenada 16. Discuta com seu colega o motivo disso ocorrer e registre as conclusões. A partir do observado na situação anterior, é possível construir o gráfico das funções quadráticas que possuem apenas uma raiz Real, sem a necessidade de construir as tabelas das funções.

Por exemplo:

Construa o gráfico da função $y = (x - 3)^2$

Já sabemos que a parábola tem sua concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de "x" é positivo. Através da atividade anterior, sabemos que o gráfico dessa função quadrática "toca" o eixo x no ponto 3 e intercepta o eixo y no ponto 3^2, ou seja 9. Portanto temos o gráfico:



ATIVIDADE 13

Construa, num mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções abaixo:

a) $y = (x + 1)^2$
b) $y = (x + 2)^2$
c) $y = (x - 1)^2$
d) $y = (x - 2)^2$

Orientação pedagógica:

Após a socialização é interessante que uma imagem exata dos gráficos seja apresentada aos alunos. Pode ser um cartaz, uma projeção ou a construção em tempo real no Geogebra.

Deixamos que, se considerar possível neste momento, encontre junto com os alunos os demais pontos de intersecção no gráfico.

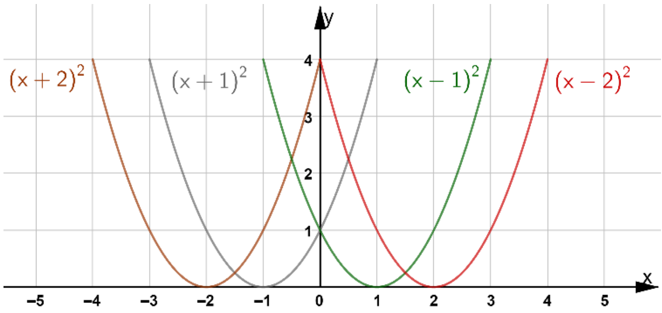
Resolução;

Vértices: (-2;0), (-1;0), (1;0), (2,0)

Pontos em comum:

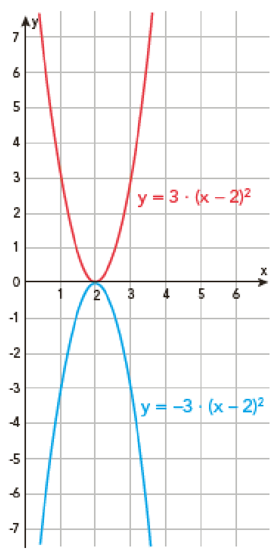
$y = (x + 1)^2$ e $y = (x - 1)^2$ têm em comum no eixo das ordenadas o ponto (0;1).

$y = (x + 2)^2$ e $y = (x - 2)^2$ têm em comum no eixo das ordenadas o ponto (0 ; 4).



ATIVIDADE 14

Na função $y = k(x - h)^2$, podemos notar, nos casos anteriores, que o "h" determina o ponto em que a parábola toca o eixo x e seu quadrado (h^2) é onde ela intercepta o eixo y. Mas ainda não falamos nada com relação ao "k", pois em todos os casos anteriores ele teve valor 1 e, como sabemos, 1 é o elemento neutro da multiplicação. Observe o que ocorre com as funções abaixo e descubra o que ocorre com o valor de "k" no gráfico.



a) Em qual ponto as funções:
$y = 3 \cdot (x - 2)^2$ e $y = -3 \cdot (x - 2)^2$ “tocam” o eixo x?

b) Quais são os pontos, respectivamente, que as funções $y = 3 \cdot (x - 2)^2$ e $y = -3 \cdot (x - 2)^2$ interceptam o eixo y? Por que isso ocorre?

c) Discuta com seu colega sobre o “k” na função $y = k \cdot (x - h)^2$ e registre suas conclusões.

O rientação pedagógica:

É muito importante que a discussão sobre “k” seja ampliada, não ficando apenas no fato de ser positivo ou negativa e sua influência sobre a direção da concavidade da parábola. Exemplos significativos precisam ser apresentados, seja na lousa, seja utilizando o Geogebra.

Resolução:

a) Ambas “tocam” o eixo x no ponto **(2 ; 0)**

b) Interceptam o eixo y respectivamente nos pontos **(0 ; 12)** e **(0 ; –12)**. Isso ocorre quando **x = 0**e os valores de y são opostos no dois pontos porque os coeficientes têm sinais opostos.

c) Possível resposta: O sinal de k determina a direção da concavidade da parábola e também o valor c, pois $c = k \cdot h^2$.

ATIVIDADE 15

Construa, num mesmo plano cartesiano, as funções:

a) $f(x) = -(x - 3)^2$

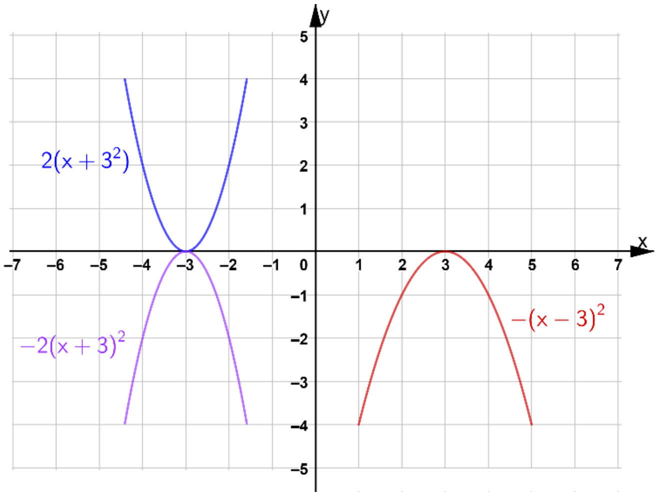
b) $g(x) = 2(x + 3)^2$

c) $h(x) = -2(x + 3)^2$

O rientação pedagógica:

Esta atividade permite, além de desenvolver habilidades relacionadas à utilização de softwares de construção de gráficos, avaliar também se o aluno sabe construir gráficos em malhas quadriculadas ou mesmo se consegue ter uma boa noção de escala e manuseio de régua e esquadro ao construir o gráfico em uma folha sem linhas. Em relação ao objeto de conhecimento funções de segundo grau, a atividade permite que o aluno explore e compare as diferenças dos gráficos em relação aos diferentes coeficientes das funções. Pode ser proposto para o trabalho em duplas de alunos que apresentam mais dificuldades, contudo, para os alunos que precisam consolidar e refinar as habilidades, sugere-se que seja proposto para um trabalho individual.

Resolução:



ATIVIDADE 16

(Adaptado Unifenas 2001) O custo diário de produção de uma indústria de computadores, é dado pela função $C(x) = x^2 - 92x + 2800$, onde $C(x)$ é o custo em reais, e x é o número de unidades fabricadas. Nessas condições, responda:

a) Quantos computadores devem ser produzidos diariamente para que o custo seja mínimo?

b) Para x = 0, o custo é igual a R$ 2800,00. Como pode ser interpretada tal relação?

c) Quantos computadores devem ser produzidos para que o custo seja de R$ 2800,00?

d) Calcule o custo de produção de 10 computadores.

e) Calcule o custo de produção de 82 computadores.

O rientação pedagógica:

Esta atividade exige do aluno um conhecimento amplo, mas não profundo, sobre os pontos notáveis de uma função do segundo grau e da relação existente entre as ordenadas e as abscissas por meio de um ponto. Sendo assim é uma atividade que precisa ser apresentada para os alunos respeitando alguns passos: solicitação de uma leitura silenciosa; abertura de espaço para os comentários dos alunos sobre a situação problema apresentada, as possíveis estratégias de cálculo que serão utilizadas e a justificativa desta previsão de cálculos; resolução individual ou em duplas; apresentação das soluções e verificação das hipóteses levantadas. Para isso, uma sugestão é que o professor deixe as hipóteses iniciais anotadas no quadro ou em uma cartolina para serem retomadas na hora da socialização.

Resolução

a) A quantidade de computadores que gera um custo mínimo é numericamente igual ao valor da abscissa (x do vértice). Calculando-o, temos:

$$x_v = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{(-92)}{2 \cdot 1} = \frac{92}{2} = 46 \text{ computadores}$$

O custo mínimo é o mesmo valor numérico da ordenada do vértice (y do vértice). Calculando-o, temos:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{(-92)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2800}{4 \cdot 1} = -\frac{8464 - 11200}{4}$$

$$y_v = \frac{2736}{4} = 684$$

$$C(x) = y_v = 684$$

Custo mínimo de R$ 684,00

b) Se a empresa não produzir nenhum computador ainda terá um custo fixo de R$ 2800.00.

c)

Sendo $C(x) = x^2 - 92x + 2800$ e $C(x) = 2800$, então,

$2800 = x^2 - 92x + 2800 \Rightarrow x^2 - 92x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (x - 92) = 0 \Rightarrow x = 0$ (não convém) ou $x = 92$

Para alcançar o custo de produção de R$ 2.800,00 será necessário produzir 92 computadores.

d) Para calcular o custo de produção de 10 computadores é necessário calcular C(10), na função apresentada., então temos que:

$C(10) = (10)^2 - 92 \cdot (10) + 2800 \Rightarrow$

$\Rightarrow 100 - 920 + 2800 \Rightarrow C(10) = 1980$

Desta forma, o custo de produção de 10 computadores será de R$ 1.980,00

e) Para calcular o custo de produção de 10 computadores é necessário calcular C(82), na função apresentada., então temos que:

$C(82) = (82)^2 - 92 \cdot (82) + 2800 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(82) = 6724 - 7544 + 2800 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(82) = 1980$

O custo para produzir 82 computadores também será de R$ 1.980,00. Neste caso, a venda de 82 computadores promoverá um faturamento 8,2 vezes maior que a veda de 10 computadores. (Se o valor de cada máquina não for alterado devido ao volume de vendas).

ATIVIDADE 17

Sabemos que um corpo em queda livre cai de forma que a distância (d) percorrida é proporcional ao quadrado do tempo (t) decorrido desde o início da queda. Isto é, $d = k \cdot t^2$ (onde d é a distância percorrida, t é o tempo de queda e k é a razão constante entre d e t^2). Após 3 segundos de queda, o corpo caiu 45 metros. Então, a relação entre a distância percorrida e o tempo após a queda também pode ser expressa por

(A) $d = 3 \cdot t^2$

(B) $d = 5 \cdot t^2$

(C) $d = 7{,}5 \cdot t^2$

(D) $d = 15 \cdot t^2$

Orientação pedagógica:

Note que nenhuma atividade anterior é similar a esta. Portanto se faz necessário que bons exemplos sejam utilizados previamente para repertoriar os alunos. Vale ressaltar também que muitos alunos não compreendem a diferença entre constantes e variáveis. Apenas a definição pode não ser suficiente para a compreensão da maioria, sendo necessário, além de exemplos, ampla discussão proporcionada pelo docente.

Resolução:

A relação aponta a existência de duas variáveis (t e d) e de uma constante k. É necessário determinar o valor da constante k. É dado que se t = 3, d = 45. Portanto, temos:

$$d = k \cdot t^2$$
$$45 = k \cdot 3^2$$

$$k = 5$$

O resultado obtido indica a expressão: $d = 5 \cdot t^2$, portanto alternativa, B.

ATIVIDADE 18

(ENEM 2009) Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

(A) $V = 10.000 + 50x - x^2$

(B) $V = 10.000 + 50x + x^2$

(C) $V = 15.000 - 50x - x^2$

(D) $V = 15.000 + 50x - x^2$

(E) $V = 15.000 - 50x + x^2$

Professor, na ocasião da aplicação desta atividade, solicitamos que peça aos alunos a correção das expressões indicadas, como indica as variáveis (x^2).

Orientação pedagógica:

Esta atividade requer que o aluno saiba que o valor V arrecadado diariamente está relacionado a quantidade vendida e com o preço praticado. Acreditamos que esta atividade exija uma conversa inicial, com perguntas reflexivas que levem a compreensão desta relação XŠ‹ ‡' ~ŧk' kmŀ"„' |¢›. Num segundo momento, sugira que os alunos sentem em duplas ou pequenos grupos afim de que deduzam que XŠ ÷¯.¯¯¯Ö˘¯¯»¦·÷ı¸¯"ð" ı¯˘»¦ e concluam a atividade.

Resolução:

O valor V arrecadado diariamente está relacionado a outros dois valores: a quantidade de litros vendida no dia e o valor de cada litro.

$$V = \text{quantidade} \cdot \text{valor}$$
$$V = (10000 + 100x) \cdot (1{,}50 - 0{,}01x)$$
$$V = 15.000 + 50x - x^2$$

Portanto, alternativa C, correta.

ATIVIDADE 19

(Adaptado UA – AM) Após várias experiências em laboratório, observou-se que a concentração de certo antibiótico no sangue de cobaias varia de acordo com a função $y = 12x - 2x^2$, em que x é o tempo decorrido, em horas, após a ingestão do antibiótico. Nessas condições, determine:

a) A concentração de antibiótico no sangue das cobaias, nas primeiras 10 horas de experiência, calculando de hora em hora.

b) O tempo necessário para que o antibiótico atinja nível máximo de concentração no sangue dessas cobaias.

c) Uma nova dose do antibiótico deverá ser aplicada no sangue destas cobaias quando o nível de concentração seja nulo. Depois de quanto tempo essa nova dose será aplicada?

d) Faça um esboço do gráfico da função que representa esta situação.

Professor, solicite aos alunos que alterem a função apresentada para $y = 12x - x^2$

Orientação pedagógica:

Possivelmente o alunos compreendam as comandas. Mesmo assim, circule pela sala observando as dificuldades e facilidades dos alunos para a socialização possam ser chamados a colaborar. Durante a correção, aproveite para relembrar, se ninguém o fizer, como resolver uma equação de segundo grau incompleta.

Resolução

a) A tabela a seguir mostra a concentração de antibiótico, calculado nas 10 primeiras horas:

Período (horas)	1	2	3	4	5	Soma
Concentração	11	20	27	32	35	**125**

Período (horas)	6	7	8	9	10	Soma
Concentração	36	35	32	27	20	**150**

A concentração de antibiótico no sangue, nas 10 primeiras horas será de 275 unidades.

b) Como a função polinomial é de grau 2, e apresenta uma concavidade negativa (para baixo), o tempo máximo de concentração no sangue será indicado pela abscissa do vértice da parábola, da seguinte maneira:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{12}{2 \cdot (-1)} = 6$$

Desta forma, 6 horas é o intervalo de tempo na qual a concentração de antibiótico no sangue seja a maior possível, desta forma, com o decorrer do tempo a concentração no sangue irá diminuir.

c) Dizer que o nível é nulo é o mesmo que ter **y = 0**.

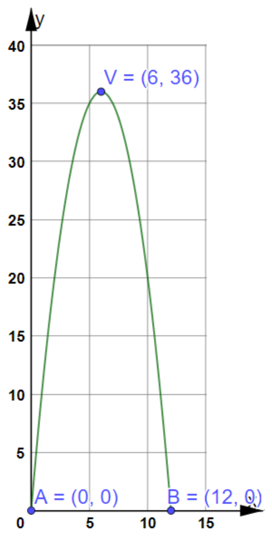
$$0 = 12x - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = x \cdot (12 - x) \Rightarrow$$

$$x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = 12$$

Esses valores, que são as raízes da equação, permitem que a compreensão de que a concentração de antibiótico no sangue será nula antes da aplicação ou depois de 12 horas da aplicação. Então uma nova dose só poderá ser ministrada depois de doze horas da primeira aplicação.

d)



ATIVIDADE 20

(Adaptado AAP 2017) Deseja-se cercar com muros um terreno retangular utilizando-se de uma parede já existente. Sabe-se que o comprimento do muro que será construído para cercar os outros três lados do terreno deverá ter 36 m de comprimento, conforme mostra a figura a seguir.

De acordo com as indicações propostas no enunciado, responda:

a) Considerando apenas números inteiros como possíveis medidas, descubra todas as possibilidades de medidas para os três lados do terreno que deverá ser cercado.

b) Calcule a área do terreno cercado em cada um dos casos identificados no item a) desta questão.

c) Escreva a função quadrática que representa a área terreno cercado.

d) Calcule a medida dos lados que determine área máxima para o terreno cercado. Justifique os valores encontrados.

Orientação pedagógica:

Esta atividade possibilita, além do trabalho individual ou em duplas/grupos, o trabalho com maquetes ou simulações utilizando pedaços de cordas ou barbantes. Enquanto um aluno faz anotações , outros dois podem ir medindo e informando os resultados. Desta forma acreditamos que o aluno relacionará melhor a variação das medidas dos lados com a significativa variação da medida da área.

Resolução:

a) Denominando por y o lado oposto à parede, é possível construir a tabela a seguir:

Tabela: Possíveis medidas para x e y

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	34	32	30	28	26	24	22	20
2x + y	36	36	36	36	36	36	36	36

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela: Possíveis medidas para x e y

x	9	10	11	12	13	14	15	16	17
y	18	16	14	12	10	8	6	4	2
2x + y	36	36	36	36	36	36	36	36	36

Fonte: Elaborada pelo autor.

b)

Tabela: Possíveis medidas da área do terreno

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	34	32	30	28	26	24	22	20
x · y	34	64	90	112	130	144	154	160

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela: Possíveis medidas da área do terreno

x	9	10	11	12	13	14	15	16	17
y	18	16	14	12	10	8	6	4	2
x · y	162	160	154	144	130	112	90	64	34

Fonte: Elaborada pelo autor.

c)

Sabe-se que a área é dado pelo produto de x por y (lado oposto à parede)

$$A(x) = x \cdot y$$

Contudo y pode estar em função de x, e de acordo com os padrões indicados nas tabelas do item a), temos que

$$y = 36 - 2x$$

Substituindo a relação obtida em A(x), temos

$$A(x) = x \cdot (36 - 2x)$$

$$A(x) = 36x - 2x^2$$

d)

A área máxima pode ser obtida localizando as coordenadas do vértice ou seja, o ponto máximo da parábola:

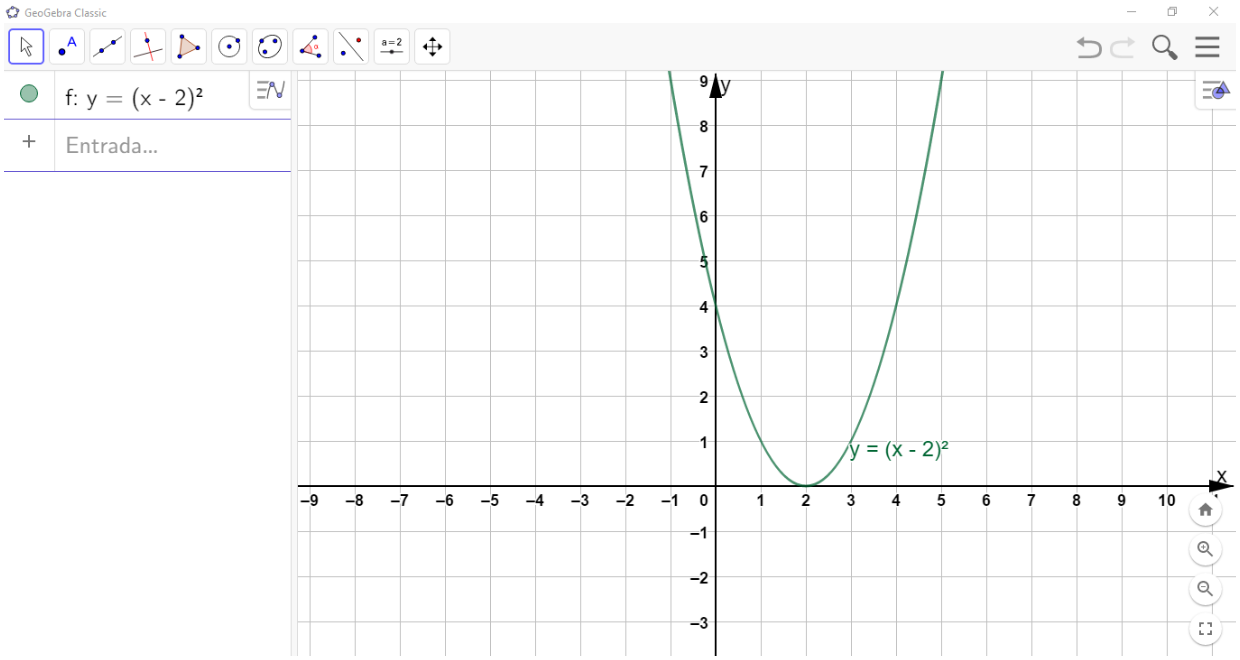
$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{36}{-4} = 9$$

e) Se $x_v = 9$, logo $y_v = A(x) = 162$

Então a área máxima do terreno cercado será de 162 m^2.

Momento Digital

Alguns softwares livres, como o Geogebra, o Graphmatica ou o Winplot, podem ser utilizados para construir gráficos de funções de vários tipos. Veja a seguir, como exemplo, o gráfico das funções desenhados com o auxílio do Geogebra:



Para aprofundar o estudo das funções quadráticas utilizando o software gratuito de geometria dinâmica "Geogebra", escolha uma das opções abaixo:

- Geogebra para computador com sistema operacional Windows:
https://download.geogebra.org/package/win-autoupdate , acesso em 01/04/2019.

- Geogebra para celular com sistema operacional Android:
https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra.android acesso em 01/04/2019;

- Geogebra On Line:
https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc , acesso em 01/04/2019

- Geogebra para celular com sistema operacional IOS:
https://itunes.apple.com/us/app/geogebra-graphing-calculator/id1146717204 , acesso em 01/04/2019.

2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

1 - Organização das grades curriculares

Apresentamos a seguir uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais da Base Nacional Comum (BNCC) do Ensino Médio, além de algumas orientações pedagógicas para as três séries que compõem o referido estágio de ensino da escolaridade básica.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades em Matemática não é rígida nem inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade, e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca por uma formação voltada às competências pessoais, à abordagem de conteúdos que valorizem a cultura e o mundo do trabalho, e à caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é de que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas; o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

1.1 - Grade curricular da 2ª série do Ensino Médio – 2º Bimestre

Currículo Oficial		BNCC
Tema/Conteúdo	Habilidades	Competência Geral - BNCC
▸ Números / Relações • Matrizes, determinantes e sistemas lineares; • Matrizes significado como tabelas, características e operações; • A noção de determinante de uma matriz quadrada; • Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento.	• Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas no plano; • Saber expressar, por meio de matrizes, situações relativas a fenômenos físicos ou geométricos (imagens digitais, *pixels* etc.); • Saber resolver e discutir sistemas de equações lineares pelo método de escalonamento de matrizes; • Reconhecer situações-problema que envolvam sistemas de equações lineares (até 4ª ordem), sabendo equacioná-los e resolvê-los.	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

1.2 – Matrizes, determinantes e sistemas lineares.

Quando nos referimos à matrizes, recorremos imediatamente a uma tabela de dupla entrada contendo dados numéricos. Se tal fato não pode ser contestado, visto o contato dos alunos com as tabelas desde praticamente o início de sua escolarização, torna-se importante, no Ensino Médio, interpretar com qualidade os significados associados à cada elemento da matriz, obtendo assim a correta interpretação de dados numéricos registrados em matrizes.

Em relação às operações com matrizes, sabemos da pouca dificuldade apresentada pelos alunos no que se refere às adições e também ao produto de um número real por uma matriz. No entanto, o mesmo não ocorre com o cálculo do produto entre duas matrizes, uma vez que o procedimento adequado para a obtenção correta de resultados contraria, inicialmente, a expectativa dos alunos quanto à sequência de passos a ser obedecida.

Consideramos que a apresentação do cálculo de um produto de matrizes com base em exemplos contextualizados é uma abordagem que favorece a aprendizagem e a compreensão dos alunos sobre esse tema. Para auxiliar o(a) professor(a) neste caminho metodológico, propomos algumas atividades, desenvolvidas sobre contextos pertinentes para a introdução de tais operações.

Mesmo acreditando que o(a) professor(a) saberá julgar e decidir sobre o melhor momento de apresentar aos alunos as atividades propostas, consideramos que isso possa ser feito antes mesmo de que sejam apresentadas, formalmente, as operações entre matrizes.

A transformação da linguagem cotidiana para a linguagem matemática é realizada, na maioria das vezes, por intermédio de uma equação. Uma situação-problema que pode ser resolvida com cálculo mental não exige que equações sejam escritas, e não se trata, de forma alguma, de priorizar o cálculo mental em detrimento do cálculo algébrico. No entanto, são inúmeras as situações-problema em que se evidencia a necessidade de escrever e resolver equações, e não podemos deixar de apresentar aos alunos exemplos dessa natureza, associados, sempre que possível, a contextos significativos. No entanto, chamamos a atenção do(a) professor(a) para que situações semelhantes não sejam propostas apenas no final do curso, em um único bloco, e sim que possam, a todo o tempo, permear a gradativa construção conceitual.

Devemos avaliar com cuidado a importância do cálculo dos determinantes associados às matrizes quadradas, no contexto da resolução de sistemas lineares. Sabemos que, com frequência, os determinantes são utilizados como ferramenta quase única para a resolução e a discussão de sistemas lineares por intermédio da regra de Cramer. Ressaltamos que a aplicação de regras de cálculo que exigem dos alunos apenas a mobilização da habilidade de memorização não podem ser priorizadas em detrimento de outras condutas e outros procedimentos que permitem aos alunos exercitarem toda a diversidade de estratégias de raciocínio.

Tema 1: Matrizes – Significados

Quando pensamos em uma contextualização associada às matrizes, a primeira ideia que nos vem é a de uma tabela de dupla entrada contendo dados numéricos. Se tal fato não pode ser contestado, visto o contato dos alunos com as tabelas desde praticamente o início de sua escolarização, torna-se importante, no Ensino Médio, interpretar com qualidade os significados associados a cada elemento da matriz. Assim, a correta interpretação de dados numéricos registrados em matrizes é um dos objetivos da proposta destas atividades.

O livro didático será um grande aliado ao desenvolvimento das operações com matrizes, facilitando a resolução das atividades propostas neste caderno.

Nestas atividades, propomos algumas situações-problema de contexto bem definido para introduzir a adição e a multiplicação entre duas matrizes, tais como a utilização de tabelas e translação de polígonos no plano cartesiano. Uma vez que os problemas apresentam similaridades quanto às estratégias de raciocínio que devem ser mobilizadas em suas respectivas resoluções, caberá ao professor(a) avaliar se a melhor maneira é apresenta-las a seus alunos uma por vez, em aulas distintas, ou reunindo-as em um único momento.

Outro aspecto a salientar diz respeito à dificuldade das operações necessárias à resolução de cada situação-problema. De fato, para que o contexto se aproxime o máximo possível do real, é importante que os valores relativos às quantidades não sejam expressos apenas por números naturais. Para que o foco do conteúdo em questão não se perca, o(a) professor(a) poderá, a seu critério, permitir que os alunos utilizem calculadoras para agilizar os cálculos.

Matrizes

As matrizes são tabelas de números reais utilizadas em muitos ramos da ciência e da engenharia. Os computadores realizam muitas operações através de matrizes. Vejamos um exemplo.

Considere a tabela abaixo que apresenta o peso, a idade e a altura de 5 pessoas.

Nome	Peso(kg)	Idade(anos)	Altura(m)
Paulo	70	23	**1,70**
José	60	42	**1,60**
João	55	21	**1,65**
Pedro	50	18	**1,72**
Ary	**66**	**30**	**1,68**

O conjunto ordenado dos números que formam a tabela é denominado matriz, e cada número é chamado elemento da matriz.

$$\begin{bmatrix} 70 & 23 & 1{,}70 \\ 60 & 42 & 1{,}60 \\ 55 & 21 & 1{,}65 \\ 50 & 18 & 1{,}72 \\ 66 & 30 & 1{,}68 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 70 & 23 & 1{,}70 \\ 60 & 42 & 1{,}60 \\ 55 & 21 & 1{,}65 \\ 50 & 18 & 1{,}72 \\ 66 & 30 & 1{,}68 \end{pmatrix}$$

Neste exemplo, temos uma matriz de ordem 5 x 3 (lê-se: cinco por três), isto é, uma matriz formada por 5 linhas e 3 colunas. Representa-se uma matriz colocando seus elementos entre parênteses ou entre colchetes. De forma abreviada, podemos escrever uma matriz como:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ ou } A = (a_{ij}),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

Além dessa representação, existem vários tipos de matrizes. A atividade a seguir propõe a construção de uma matriz através de sua lei de formação.

2. Atividades e Correção comentada

ATIVIDADE 1

Seja a_{ij} a representação de um elemento de uma matriz na linha i e coluna j, escreva as matrizes a seguir:

a) $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, onde $a_{ij} = 2i + 3j$

b) $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, onde $b_{ij} = \frac{i}{j}$

c) $C = (c_{ij})_{4 \times 1}$, onde $c_{ij} = i^2 + j$

d) $D = (d_{ij})_{1 \times 3}$, onde $d_{ij} = i - j$

e) $E = (e_{ij})_{4 \times 3}$, onde $e_{ij} = \begin{cases} 2, \text{ se } i \geq j \\ -1, \text{ se } i < j \end{cases}$

Correção comentada

Esta atividade auxilia o(a) aluno(a) a interpretar com qualidade os significados associados à cada elemento da matriz através de sua lei de formação. Lembrando que não é interessante utilizarmos somente números naturais, caso o(a) professor(a) queira complementar com outros exercícios do livro didático ou outras fontes.

a) $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, onde $a_{ij} = 2i + 3j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

b) $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, onde $b_{ij} = \frac{i}{j}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

c) $C = (c_{ij})_{4 \times 1}$, onde $c_{ij} = i^2 + j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix}$$

d) $D = (d_{ij})_{1 \times 3}$, onde $d_{ij} = i - j$

$(a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}) = (0 \quad -1 \quad -2)$

e) $E = (e_{ij})_{4 \times 3}$, onde $e_{ij} = \begin{cases} 2, \text{ se } i \geq j \\ -1, \text{ se } i < j \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{43} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ATIVIDADE 2

(ENEM 2018) A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz A: $[a_{ij}]$, em que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco i para o banco j durante o mês. Observe que os elementos $a_{ij} = 0$, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Resolução:
Alternativa A. O maior número de transferências foi do Banco 01.
O que é TED? TED significa "TRANSFERÊNCIAS ENTRE BANCOS DISTINTOS".
Significado do zero na matriz: não se trata de transferência para um banco distinto ou não houve TED para o outro banco.
Analise a tabela a seguir representada pela matriz para encontrarmos o total de transferências realizadas por TED.

		Destinos das Transferências					Total de TED
		Banco 1	Banco 2	Banco 3	Banco 4	Banco 5	
Origem das Transferências	Banco 1	0	2	0	2	2	6
	Banco 2	0	0	2	1	0	3
	Banco 3	1	2	0	1	1	5
	Banco 4	0	2	2	0	0	4
	Banco 5	3	0	1	1	0	5

Ou seja, na primeira linha temos:

- Banco 1 para Banco 1 = 0 (TED é transferência entre bancos diversos, por isso sempre dará zero)
- Banco 1 para Banco 2 = 2 (duas transferências)
- Banco 1 para Banco 3 = 0
- Banco 1 para Banco 4 = 2
- Banco 1 para Banco 5 = 2

Total de transferências do Banco 1: 0 + 2 + 0 + 2 + 2 = 6.

ATIVIDADE 3

A representação de uma matriz E é dada pela expressão: $E = (e_{ij})_{2x2}$. Os elementos e_{ij} de E são expressos algebricamente por $E = e_{ij} = i^2 - 2j$. A matriz que corresponde a esta lei de formação é:

(A) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(E) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Resolução:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ATIVIDADE 4

Uma matriz A pode ser representada algebricamente por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, e seus elementos a_{ij} podem ser representados por expressões algébricas quando $\begin{cases} i = j \\ i \neq j \end{cases}$.

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$,

a representação algébrica dos elementos dela é

(A) $a_{ij} = \begin{cases} i - j \text{ se } i = j \\ 2i + j \text{ se } i \neq j \end{cases}$

(B) $a_{ij} = \begin{cases} i + j \text{ se } i = j \\ 3i + j \text{ se } i \neq j \end{cases}$

(C) $a_{ij} = \begin{cases} i + j \text{ se } i = j \\ 3i - j \text{ se } i \neq j \end{cases}$

(D) $a_{ij} = \begin{cases} i + j \text{ se } i = j \\ 2i - j \text{ se } i \neq j \end{cases}$

(E) $a_{ij} = \begin{cases} i - j \text{ se } i = j \\ 2i - j \text{ se } i \neq j \end{cases}$

Resolução:
Professor(a), para esta atividade os alunos poderão testar as alternativas do problema e encontrar a lei de formação que satisfaz todos os elementos da matriz. Veja:

A lei de formação para a matriz A é a representada na alternativa C, $\begin{cases} i + j \text{ se } i = j \\ 3i - j \text{ se } i \neq j \end{cases}$. Verifique fazendo os cálculos.

$$A = (a_{ij})_{3\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 1 = 2 & 3 - 2 = 1 \\ 6 - 1 = 5 & 6 - 2 = 4 \\ 9 - 1 = 8 & 9 - 2 = 7 \end{pmatrix}$$

As atividades 5, 6, 7 e 8 abordam a adição e subtração de matrizes de uma forma simples e objetiva, sendo base para as próximas atividades contextualizadas. Professor(a), neste momento, o livro didático será um grande aliado na complementação das atividades.

ATIVIDADE 5

Determine os valores correspondentes a x e y na igualdade:

$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 8 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

Resolução:
Para satisfazer a igualdade temos:

$$\begin{cases} x + (-1) = 4 \Rightarrow x = 5 \\ y + y = -6 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$$

ATIVIDADE 6

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Determine: $A + 2 \cdot B^T$

Resolução:

Seja M uma matriz de ordem m x n, a ***sua transposta*** (M^T) *será uma matriz de ordem n x m, ou seja, a transposta será a matriz que tem por linhas as colunas.*

$$A + 2 \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

ATIVIDADE 7

Determine a, b e c para que:

$$\begin{bmatrix} a & 3 & 2a \\ c & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrarmos os valores a, b e c, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} a + b = 2 \text{ (I)} \\ 2a - 1 = 5 \text{ (II)} \\ c + 1 = 3 \text{ (III)} \end{cases}$$

De (II), temos que: $a = 3$
Em (I), substituindo o valor de a, temos que:
$3 + b = 2 \Rightarrow b = -1$
De (III), temos que: $c = 2$

ATIVIDADE 8

Considere as matrizes M, N e P:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ e calcule X, de modo que:

a) $X - M = N - P$
b) $P + X = M - N$
c) $X + (M - P) = N$

Resolução:
Com raciocínio análogo à atividade anterior,

a) $X - M = N - \Rightarrow X = M + N - P$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 7 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

b) $P + X = M - N \Rightarrow X = M - N - P$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 7 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

c) $X + (M - P) = N \Rightarrow X = N - M + P$

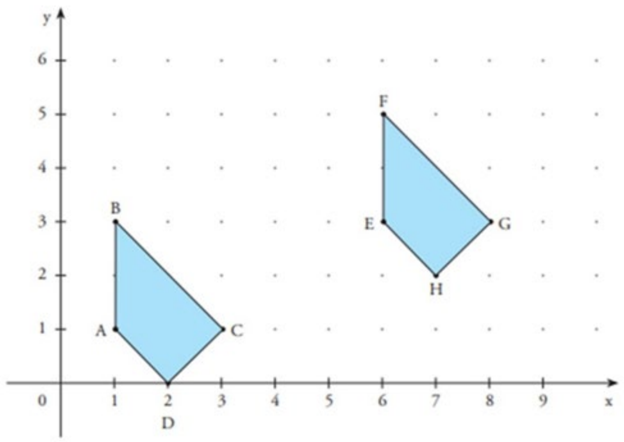
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -7 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

ATIVIDADE 9

Observe os dois polígonos representados no plano cartesiano:



Esses dois polígonos são congruentes, e podemos considerar que o polígono EFGH é uma translação do polígono ABCD, isto é, EFGH foi obtido a partir de duas movimentações de ABCD, sendo uma na horizontal e outra na vertical.

a) Quantas unidades na horizontal e quantas unidades na vertical do polígono ABCD devem ser deslocadas para que, ao final, coincidam com o polígono EFGH?

b) Represente em uma matriz A(4x2) as coordenadas dos vértices do polígono ABCD, de maneira que cada linha da matriz contenha coordenadas de um ponto, com a abscissa na primeira coluna e a ordenada na segunda coluna.

c) Represente em uma matriz B(4x2) as coordenadas dos vértices do polígono EFGH, de maneira que cada linha da matriz contenha coordenadas de um ponto, com a abscissa na primeira coluna e a ordenada na segunda coluna.

d) Escreva uma matriz C(4x2), de tal forma que:

$A + C = B$

Resolução:

a) 5 unidades na horizontal e 2 unidades na vertical.

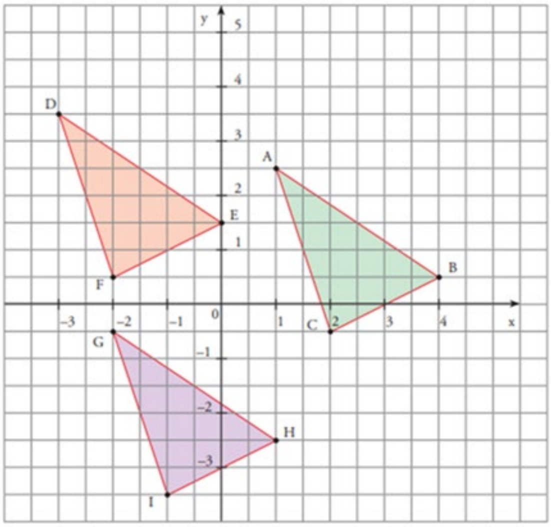
b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

c) $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 5 \\ 8 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

d) $C = B - A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

ATIVIDADE 10

Na representação a seguir, de um plano cartesiano, podemos observar três triângulos congruentes. O triângulo ABC pode ser transladado até coincidir com o triângulo DEF, que, por sua vez, se transladado, poderá coincidir com o triângulo GHI.



a) Quantas unidades horizontais e quantas unidades verticais são necessárias para uma translação do triângulo ABC, a fim de que, ao final, ele coincida com o triângulo DEF?

b) Quantas unidades horizontais e quantas unidades verticais são necessárias para uma translação do triângulo DEF, a fim de que, ao final, ele coincida com o triângulo GHI?

c) Quantas unidades horizontais e quantas unidades verticais são necessárias para uma translação do triângulo ABC, a fim de que, ao final, ele coincida com o triângulo GHI?

d) Escreva uma matriz 3x2 para cada triângulo, de maneira que cada linha da matriz contenha coordenadas de um vértice do triângulo, com a abscissa na primeira coluna e a ordenada na segunda coluna. Denomine a matriz referente ao triângulo ABC pela letra M, a matriz referente ao triângulo DEF pela letra N, e a matriz referente ao triângulo GHI pela letra P.

e) Escreva uma matriz Q, tal que M + Q = N.

f) Escreva uma matriz R, tal que N + R = P.

g) Escreva uma matriz T, tal que M + T = P

Resolução:

a) Quatro unidades horizontais para a esquerda e uma unidade vertical para cima.

b) Uma unidade horizontal para a direita e quatro unidades verticais para baixo.

c) Três unidades horizontais para a esquerda e três unidades verticais para baixo.

d)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2,5 \\ 4 & 0,5 \\ 2 & -0,5 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} -3 & 3,5 \\ 0 & 1,5 \\ -2 & 0,5 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -2 & -0,5 \\ 1 & -2,5 \\ -1 & -3,5 \end{bmatrix}$$

e)

Podemos escrever a matriz Q = N - M

$$Q = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

f)

Podemos escrever a matriz R = P - N

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

g)

Podemos escrever a matriz T = P - M

$$T = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Professor(a), as atividades propostas 11, 12 e 13 têm como foco a multiplicação de matrizes, e poderá ser complementadas com outras do livro didático. Essa etapa deve ser desenvolvida com seus alunos para facilitar o desenvolvimento da habilidade nos próximos exercícios.

ATIVIDADE 11

Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se for possível, calcule as operações com matrizes:

a) AB – BA

b) 2C – D

c) D^2 – DE

Resolução:

a)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 4 + 0 \cdot (-8) \\ 6 \cdot 0 + 7 \cdot 2 & 6 \cdot 4 + 7 \cdot (-8) \end{pmatrix} =$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 14 & -32 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 14 & -32 \end{pmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} -24 & -20 \\ 58 & 24 \end{pmatrix}$$

b)

Não é possível realizar adição e subtração de matrizes de ordens diferentes.

2C é uma matriz 2x3 e D é uma matriz 3x3.

c)

$$D^2 = D \cdot D = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 40 & -20 & 16 \\ -29 & 5 & 28 \\ 0 & -24 & 36 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot E = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$D \cdot E = \begin{pmatrix} -40 & -54 & 38 \\ -19 & 9 & -17 \\ -72 & -54 & 48 \end{pmatrix}$$

$$D^2 - D \cdot E = \begin{pmatrix} 80 & 34 & -22 \\ -10 & -4 & 45 \\ 72 & 30 & -12 \end{pmatrix}$$

ATIVIDADE 12

Encontre a matriz X, na equação A.X = B, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Professor(a), além das propriedades da multiplicação de matrizes, a álgebra será nossa grande aliada para resolver esta atividade. Veja:

Resolução:

Sendo a matriz A de ordem 3 x 2, a matriz X deve possuir duas linhas (mesmo número de colunas de A). A matriz B é de ordem 2 x 3. Logo, X possui 2 linhas. Isto é, $(A_{3x2}).(X_{2x2}) = B_{3x2}$. Veja que se X possuísse três colunas, a matriz B seria 3 x 3. Escolhendo a, b, c e d como elementos de X, montamos a equação:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - c & 3b - d \\ a + 2c & b + 2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$$

Se $A \cdot X = B$, temos que:

$$\begin{pmatrix} 3a - c & 3b - d \\ a + 2c & b + 2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Então:

$$\begin{cases} 3a - c = 5 \\ 3b - d = 3 \\ a + 2c = 4 \\ b + 2d = 1 \\ 3c = 3 \Rightarrow c = 1 \\ 3d = 0 \Rightarrow d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 1 = 5 \Rightarrow a = 2 \\ 3b - 0 = 3 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

Concluímos, então, que: $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ATIVIDADE 13

Se $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine o valor de $x + y$.

Resolução:

Ao multiplicarmos as matrizes, obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

cuja solução é $x = 2$ e $y = 2$, então $x + y = 4$.

ATIVIDADE 14

Na confecção de três modelos de camisas (A, B e C), são usados botões grandes (G) e pequenos (P). O número de botões por modelos é dado pela tabela:

	Camisa A	Camisa B	Camisa C
Botões P	3	1	3
Botões G	6	5	5

O número de camisas fabricadas, de cada modelo, nos meses de maio e junho, é dado pela tabela:

	Maio	Junho
Camisa A	100	50
Camisa B	50	100
Camisa C	50	50

Nestas condições, obtenha a tabela que dá o total de botões usados em maio e junho.

Resolução:

Para encontrarmos a solução para o problema, basta realizarmos a multiplicação das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 & 50 \\ 50 & 100 \\ 50 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 & 400 \\ 1100 & 1050 \end{bmatrix}$$

	Maio	Junho
Botões P	500	400
Botões G	1100	1050

ATIVIDADE 15

(FATEC SP) João, Sílvia e Pedro são funcionários de uma empresa. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 25 & 40 & 12 & 32 \\ 15 & 22 & 30 & 30 \\ 30 & 25 & 25 & 18 \end{pmatrix}$$

- a matriz A representa o valor, em reais, recebido por hora trabalhada de João, Sílvia e Pedro, respectivamente;
- a matriz B representa a quantidade de horas trabalhadas por semana dos mesmos funcionários, em cada uma das quatro primeiras semanas no mês de julho de 2018;
- na matriz B, as linhas 1 a 3 são para João, Sílvia e Pedro, respectivamente; e as colunas de 1 a 4 são, nessa ordem, para as quatro primeiras semanas do mês de julho, de modo que, por exemplo, o elemento b_{13} é a quantidade de horas que João trabalhou na terceira semana desse mês.

O valor pago pela empresa pelas horas trabalhadas por esses três funcionários na segunda semana de julho de 2018 será:

(A) R$ 670,00

(B) R$ 680,00

(C) R$ 824,00

(D) R$ 980,00

(E) R$ 984,00

Resolução:

Para encontrarmos o valor pago pela empresa pelas horas trabalhadas por esses três funcionários em cada semana de julho de 2018, vamos encontrar a matriz:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 40 & 12 & 32 \\ 15 & 22 & 30 & 30 \\ 30 & 25 & 25 & 18 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 670 & 864 & 680 & 824 \end{bmatrix}$$

Na **segunda semana,** a empresa pagou aos três funcionários juntos a quantia de R$ 864,00.

ATIVIDADE 16

Uma cozinheira preparou 3 tipos diferentes de salgados, usando ingredientes conforme a tabela abaixo:

	ovos	farinha	açúcar	carne
Pastéis	3	6	1	3
Empadas	4	4	2	2
Kibes	1	1	1	6

Os preços dos ingredientes constam na tabela abaixo:

Ingredientes	Preço Base(R$)
ovos	0,20
farinha	0,30
açúcar	0,50
carne	0,80

Qual, então, deve ser o preço base de cada salgado? Organize seu raciocínio utilizando a multiplicação de matrizes.

Resolução:

A multiplicação das duas matrizes nos dará o preço base (custo) de cada salgado. Assim, temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}30 \\ 0{,}50 \\ 0{,}80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}30 \\ 4{,}60 \\ 5{,}80 \end{pmatrix}$$

Então, o preço base, sem prejuízo, de cada salgado deverá ser:

Pastel : R$ 5,30

Empada: R$ 4,60

Quibe: R$ 5,80

ATIVIDADE 17

Uma fábrica de automóveis produz carros A e B nas versões Sedan, Hatch e SUV. Na montagem desses carros, são utilizadas as peças X, Y e Z. Para certo plano de montagem, são fornecidas as seguintes tabelas:

	Carro A	Carro B
Peça X	4	3
Peça Y	3	5
Peça Z	6	2

	Sedan	Hatch	SUV
Carro A	2	4	3
Carro B	3	2	5

Para o planejamento da composição de peças por tipo de carro, que matriz deve ser usada? Você poderá organizar seu raciocínio através do uso de matrizes.

Resolução:

Multiplicando a matriz peças (P) com a matriz tipo de carro (T), temos que:

$$P \cdot T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 22 & 34 \\ 18 & 28 & 28 \end{bmatrix}$$

Desta forma, o planejamento da composição de peças por tipo de carros será:

	Sedan	Hatch	SUV
Peça x	17	22	27
Peça y	21	22	34
Peça z	18	28	28

ATIVIDADE 18

No Campeonato baiano da terceira divisão, após cinco rodadas, foram obtidos os seguintes resultados pelas cinco equipes participantes:

Equipe	Vitória	Empate	Derrota
Barro vermelho	3	2	0
Carranca	2	1	2
Veneza	2	0	3
Colonial	1	1	3
Olaria	1	0	4

Resultado	Pontos
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

Calcule quantos pontos cada time conquistou até agora e represente os resultados em uma matriz de ordem 5x1.

Resolução:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Portanto, a pontuação de cada equipe no campeonato será:

Equipe	Pontos
Barro vermelho	11
Carranca	7
Veneza	6
Colonial	4
Olaria	3

ATIVIDADE 19

Quatro escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de 10 modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, prata ou bronze, dependendo da classificação final, respectivamente, 1°, 2° ou 3° lugares. A quantidade de medalhas de cada escola, ao final da competição, é apresentada na tabela seguinte, assim como o total de pontos conseguidos pelas escolas, considerando que a cada tipo de medalha foi atribuída a uma pontuação.

Escolas	Medalhas			Pontuação Final
	Ouro	Prata	Bronze	
A	4	2	2	46
B	5	3	1	57
C	4	3	3	53
D	3	3	7	53

Qual foi a pontuação atribuída a cada tipo de medalha?

Resolução:

Ouro: 8 pontos; prata: 5 pontos; e bronze: 2 pontos.

Caro(a) professor(a), o sistema possível para a resolução do problema é formado por quatro equações e três incógnitas, isto é, não se trata de um sistema quadrado. Sugerimos que você chame a atenção de seu(sua) aluno(a) para o fato de que sistemas dessa natureza exigem maior reflexão sobre os passos a serem adotados para sua resolução. Neste caso, podemos desprezar inicialmente uma das equações, resolver o sistema formado por três delas e, ao final, testar se os resultados obtidos validam a equação não utilizada na resolução.

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 & \text{(I)} \\ 5x + 3y + z = 57 & \text{(II)} \\ 4x + 3y + 3z = 53 & \text{(III)} \\ 3x + 3y + 7z = 53 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Vamos desprezar a equação (IV) e adotar o método da substituição para resolver o sistema formado pelas três equações restantes. Para tanto, isolaremos a incógnita z na equação (II), e substituiremos a expressão encontrada nas equações (I) e (III).

(II) $z = 57 - 5x - 3y$

(I) $4x + 2y + 2 \cdot (57 - 5x - 3y) = 46$

(III) $4x + 3y + 3 \cdot (57 - 5x - 3y) = 53$

As equações (I) e (III), depois de reduzidos os termos semelhantes, tornam-se equivalentes a:

$6x + 4y = 68$ (V)

$11x + 6y = 118$ (VI)

Para simplificar, dividiremos a equação (V) por 2, obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 34 \text{ (V)} \\ 11x + 6y = 118 \text{ (VI)} \end{cases}$$

Em seguida, pelo método da adição, faremos 3.(V) – (VI), obtendo:

$$\begin{cases} 9x + 6y = 102 \quad \text{(V)} \\ -11x - 6y = -118 \quad \text{(VI)} \end{cases}$$

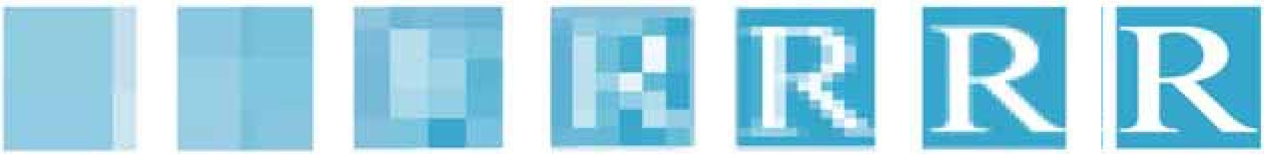
$$-2x = -16 \Rightarrow x = 8$$

Portanto, a medalha de ouro vale 8 pontos. Voltando com esse valor em (V), obtemos que $y = 5$, ou seja, obtemos que a medalha de prata vale 5 pontos. Voltando com esses valores em (I), obtemos que $z = 2$, ou seja, que a medalha de bronze vale 2 pontos. Substituindo os valores obtidos para x, y e z na equação (VI), notamos que ela é verificada, pois $3 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 24 + 15 + 14 = 53$.

A VISÃO DOS PIXELS

Uma imagem digitalizada é formada por *pixels*, que possuem informações que determinam sua cor com a combinação de três cores básicas (vermelho, verde e azul), gerando mais de 16 milhões de possibilidades de cores. Por serem muito pequenos e próximos uns dos outros, o *pixel* é imperceptível a olho nu. Assim, quanto maior o número de *pixels*, mais nítidas são as imagens produzidas.

Nas imagens digitalizadas, os *pixels* estão dispostos como quadradinhos organizados lado a lado, em uma grande matriz. Então, quanto maior a matriz que forma a imagem, melhor será a sua qualidade. Se considerarmos sete imagens do mesmo objeto, com as mesmas dimensões, mudando apenas a quantidade de *pixels* (ou seja, o tamanho da matriz) de cada uma, obteremos resoluções completamente diferentes. Veja a imagem a seguir:



1x1 2x2 5x5 10x10 20x20 50x50 100x100

O tamanho de uma imagem digital é definido pela ordem da matriz, isto é, pela quantidade de linhas e colunas que a formam.

Por exemplo, se uma imagem tem 119 linhas e 116 colunas de tamanho, ela terá um total de 119. 116 = 13 804 *pixels*.

Ao adquirir uma máquina fotográfica digital, uma das primeiras características avaliadas pelo comprador são os *megapixels*. Uma máquina de 6 *megapixels* (6 MP) divide determinada área em 6 milhões de *pixels* ($6x10^6$), enquanto outra, de 7.1 MP, é capaz de dividir a mesma área em 7 milhões e 100 mil *pixels* ($7{,}1x10^6$). Assim, apenas por esse quesito, é possível avaliar que a qualidade da segunda câmera é superior à da primeira.

Determinado modelo de máquina digital pode alterar a resolução da foto. À escolha do fotógrafo, as fotos podem ser produzidas com as seguintes especificações:

- 7.1 MP: 3072 x 2304 *pixels*
- 6.1 MP: 3072 x 2048 *pixels*
- 4.0 MP: 2304 x 1728 *pixels*

- 1.9 MP: 1600 x 1220 *pixels*
- 0.8 MP: 1024 x 768 *pixels*

ATIVIDADE 20

Considere uma foto de 7.1 MP de resolução (3072 x 2304 *pixels*), em que a linha 1 000 da matriz seja formada apenas por *pixels* de cor verde, divididos igualmente entre 3 tonalidades em ordem crescente de posição nas colunas:

Tonalidade 1

Tonalidade 2

Tonalidade 3

Assim, dos n elementos da 1000ª linha da matriz, os $\frac{n}{3}$ primeiros são verdes na tonalidade 1, os $\frac{n}{3}$ seguintes são verdes na tonalidade 2 e os $\frac{n}{3}$ últimos são verdes na tonalidade 3. Nessa condição, qual será a tonalidade do *pixel* a_{ij}, isto é, do elemento da matriz que ocupa a linha i e a coluna j nos seguintes exemplos?

a) $a_{1000,\ 1000}$

b) $a_{1000,\ 500}$

c) $a_{1000,\ 2000}$

a) Tonalidade 2.

b) Tonalidade 1.

c) Tonalidade 3.

ATIVIDADE 21

Considere uma foto de 1.9 MP de resolução em que todos os elementos b_{ij} da matriz sejam *pixels* de cor azul, de modo que cada elemento b_{ij}, isto é, o elemento que ocupa na matriz a posição dada pela linha **i** e pela coluna **j**, seja representado pela sentença $b_{ij}=2i-j$, e as tonalidades sejam associadas ao *pixel* de acordo com o seguinte código:

1- Se $b_{ij} \le 200$ $\rightarrowtail$ Tonalidade 1

2 - Se $200 < b_{ij} \le 320$ $\rightarrowtail$ Tonalidade 2

3- Se $320 < b_{ij} \le 1000$ $\rightarrowtail$ Tonalidade 3

4- Se $b_{ij} > 1000$ $\rightarrowtail$ Tonalidade 4

Nessas condições, qual e a tonalidade do elemento:

a) $b_{40,\ 100}$

b) $b_{1000,\ 1000}$

c) Que estiver na 1200ª linha e 1200ª coluna?

d) Quantos *pixels* da 300ª linha terão tonalidade 3?

a) $b_{40,\ 100} = 2 \cdot 40 - 100 = -20$

Como $-20 \le 200$, tonalidade 1.

b) $b_{1000,\ 1000} = 2 \cdot 1000 - 1000 = 1000$

Como $320 \le b_{1000,\ 1000} \le 1000$, tonalidade 3.

c)

Trata-se de $b_{1200,\ 1200} = 2 \cdot 1200 - 1200 = 1200$.

Assim, $b_{ij} \ge 1000$, tonalidade 4.

d)

$$320 < 2i - j \le 1000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 320 < 2 \cdot 300 - j \le 1000 =$$
$$= 320 < 600 - j \le 1000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 320 - 600 < 600 - j - 600 \le 1000 - 600 =$$
$$= -280 < -j \le 400 \Leftrightarrow \boxed{-400 \le j < 280}$$

Como $j > 0$, são 279 *pixels* na 300ª linha, com a tonalidade 3.

ATIVIDADE 22

Considere a seguinte situação: Uma matriz 100 x 100, em que os elementos da matriz sejam basicamente da cor amarela, de modo que cada elemento b_{ij} da matriz seja representado pela sentença $b_{ij} = 2i - 2j$, e as tonalidades sejam associadas aos *pixels* de acordo com o código abaixo:

Códigos das tonalidades

1- Se $b_{ij} \leq 50$	$\rightarrowtail$	Tonalidade 1
2 - Se $50 < b_{ij} \leq 75$	$\rightarrowtail$	Tonalidade 2
3- Se $75 < b_{ij} \leq 100$	$\rightarrowtail$	Tonalidade 3
4- Se $b_{ij} > 100$	$\rightarrowtail$	Tonalidade 4

Nessas condições, a tonalidade do *pixel* que está na posição $b_{55,25}$ da matriz será a:

(A) Tonalidade 1.

(B) Tonalidade 2.

(C) Tonalidade 3.

(D) Tonalidade 4.

Considerando a lei de formação da matriz $b_{ij} = 2i - 2j$, temos que:
$b_{55,25} = 2 \cdot 55 - 2 \cdot 25 = 110 - 50 = 60$
Conforme o código de tonalidades para $b_{ij} = 60$, teremos a tonalidade 02. Alternativa B.

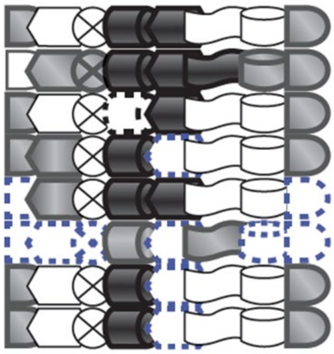
MATRIZES E O PRINCÍPIO DA TOMOGRAFIA

A tomografia computadorizada é uma moderna técnica da medicina que permite visualizar o interior do corpo de uma pessoa por meio de uma série de imagens que possibilitam aos médicos identificar diversos tipos de problemas, como, por exemplo, a existência de regiões cancerígenas. Na atividade a seguir, aproveitaremos o modo como são produzidas as imagens de uma tomografia para simular situações problema envolvendo matrizes. O funcionamento de um tomógrafo computadorizado consiste, basicamente, na emissão de feixes de raios X que não atravessam todo o organismo da pessoa, mas fazem varreduras em um único plano. Desse modo, um feixe de raios, ao varrer um plano ou uma "fatia", projeta ao final uma imagem que é unidimensional, isto é, uma tira com trechos claros e escuros, conforme aquilo que tenha encontrado pelo caminho (órgãos, ossos etc.). O desenho seguinte representa o momento em que uma pessoa é exposta aos feixes de raios de um tomógrafo.

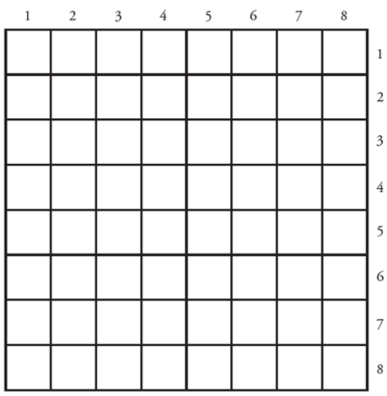
Imagem sem restrição de uso ou compartilhamento: https://www.google.com/search?as_st=y&hl=pt-BR&tbs=sur%3Af&tbm=isch&sa=1&ei=PCORXL L6G87Y5OUP8tWMoAI&q=tomografia&oq=tomografia&gs_l=img.12..0i67j0l9.12901.14581..22290...0.0..0.262.1773.0j1j7....1..1....1..gws-wiz-img.8uV4Ut3pklo#imgrc=rLLJEw4vZV4P0M

Quem já passou por esse tipo de exame sabe que, durante cerca de meia hora, um grande equipamento executa movimentos circulares e ruidosos, como se estivesse, de fato, "fatiando" nosso corpo com os feixes unidimensionais de raios X. O feixe de raios X, emitido em um único plano, projeta uma tira com trechos claros e escuros, como neste desenho:

À medida que o tomógrafo se movimenta, outros feixes de raios X são emitidos e novas tiras são geradas. A reunião dessas tiras em uma única imagem forma uma "chapa" semelhante a que é mostrada no desenho a seguir:

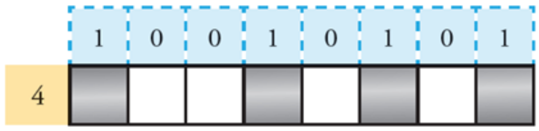


Podemos associar os numerais 1 ou 0 aos pontos escuros ou claros, respectivamente. Além disso, simplificando a constituição dessas microrregiões claras ou escuras, vamos supor que todas tenham o formato de pequenos quadrados, de maneira que uma região plana possa ser, de fato, uma região quadriculada, em que linhas e colunas sejam numeradas de 1 a n, conforme a seguinte representação, em que a malha quadriculada tem 8 linhas e 8 colunas.

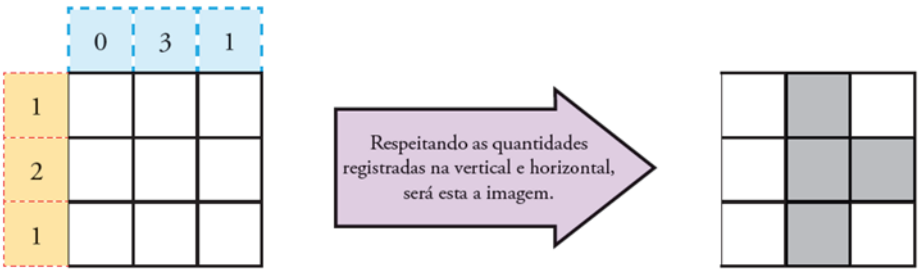


Nesse caso, podemos associar ao desenho uma matriz 8x8 formada por elementos que são, ao mesmo tempo, numerais 1 ou 0, e regiões escuras ou claras. Quando nosso tomógrafo simplificado efetuar um corte, ou, em outras palavras, gerar uma tira de regiões claras ou escuras, serão lançados valores das quantidades de cada tipo de região, sem que, no entanto, sejam ainda conhecidas quais regiões têm esta ou aquela característica. Se isso for feito como no exemplo a seguir, saberemos que 4 quadrículas dessa linha deverão ser escuras. Mas quais?

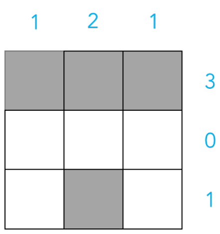
Registrando simultaneamente a quantidade de quadrículas escuras ou claras de cada coluna, é possível reconstituir a imagem, como no caso do desenho abaixo:



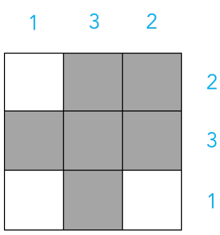
Observe o exemplo a seguir, da recomposição de uma imagem em um quadriculado de 3x3.



Observe nestes outros exemplos como podemos associar a reconstituição da imagem a uma matriz.



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

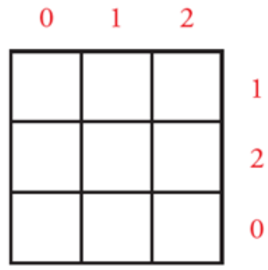


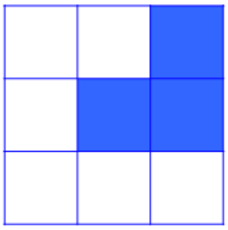
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora é com você!

Determine as regiões "escuras" de cada caso seguinte e escreva também uma matriz associada à composição.

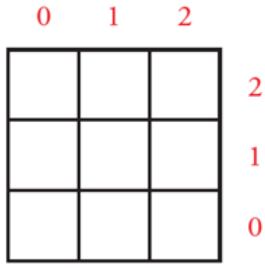
Problema 1

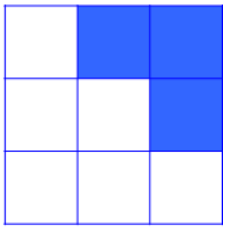




$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

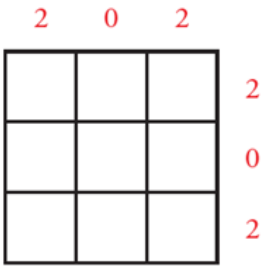
Problema 2

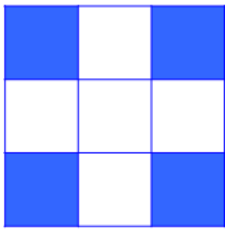




$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

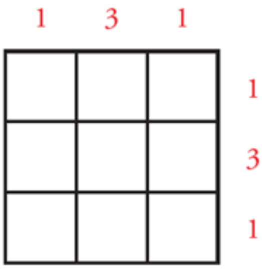
Problema 3

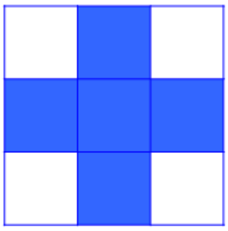




$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

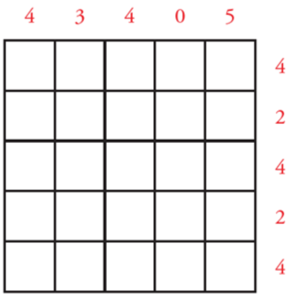
Problema 4

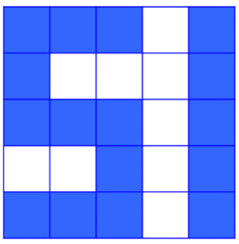




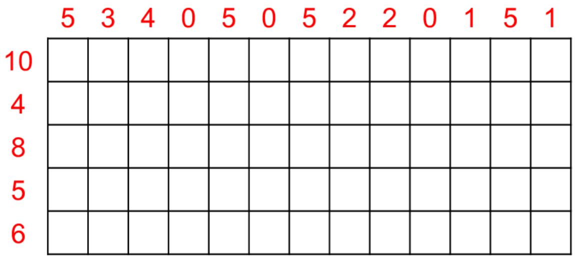
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

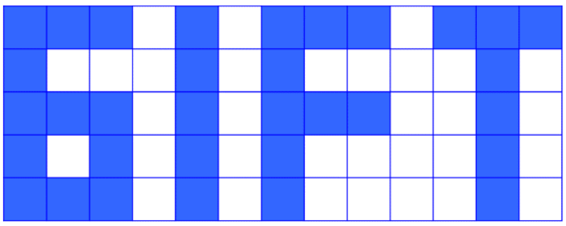
Problema 5





Problema 6

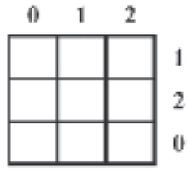




$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

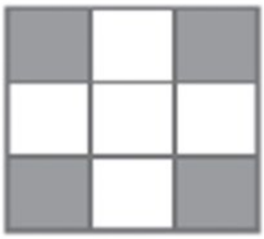
ATIVIDADE 24

Seguindo o mesmo princípio acima descrito, analise a figura abaixo e assinale a alternativa que ilustra sua recomposição.



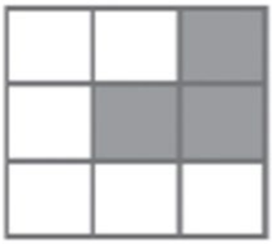
a)

b)



c)

d)



Resposta:
Alternativa D. Raciocínio análogo à atividade anterior.

Tema 2: Sistemas de Equações Lineares

As atividades contextualizadas que apresentaremos aos alunos podem envolver, inicialmente, sistemas de apenas duas equações lineares, como feito anteriormente no Ensino Fundamental. Essa estratégia permitirá que se retome o processo de resolução, bem como a análise da resposta final.

Será importante ainda apresentar aos alunos uma situação que envolva sistemas não quadrados, isto é, sistemas em que o número de equações e de incógnitas não seja igual, e também situações que conduzam à elaboração e à resolução de sistemas lineares indeterminados.

Para a resolução dos sistemas obtidos a partir de situações-problema, sugerimos que o(a) professor(a) estimule seus alunos a utilizar, inicialmente, os métodos estudados no Ensino Fundamental, isto é, os métodos de adição, substituição ou comparação. Salientamos a importância do(a) professor(a) priorizar que a resolução dos sistemas seja feita com base nesses métodos, ou por escalonamento, em detrimento do método de Cramer, com o uso de determinantes. Tal opção será contemplada adiante, nas atividades 39 a 44 deste caderno.

Para a aplicação dos sistemas lineares na resolução de problemas, propomos as atividades descritas a seguir:

ATIVIDADE 25

Duas locadoras de automóveis A e B estipulam a remuneração de seus serviços da seguinte maneira:

- Locadora A: valor fixo de 80 reais mais R$ 1,20 por quilômetro rodado.
- Locadora B: valor fixo de 120 reais mais R$ 1,00 por quilômetro rodado.

Com base nesses dados, determine:

a) O valor a ser pago às locadoras **A** e **B** pelo aluguel de um veículo que rodou 140 km.

b) O valor a ser pago às locadoras **A** e **B** pelo aluguel de um veículo que rodou 300 km.

c) A partir de quantos quilômetros rodados torna-se mais econômico alugar o automóvel em B do que em **A**.

Resolução:

a)

248 reais e 260 reais.

b)

440 reais e 420 reais.

c)

220 km.

Comentário pedagógico:

Apenas no item c pode ser necessário que o(a) aluno(a) escreva um sistema de equações para organizar a resolução. Nesse caso, poderá ser escrito o seguinte sistema:

- *Locadora A; V = 80 + 1,20 x*
- *Locadora B: V = 120 + 1,00 x*

Nessas equações, V é o valor a ser pago pela locação e x é a quantidade de quilômetros rodados. A resolução desse sistema induz claramente a opção pelo método da comparação, pois interessa descobrir o momento em que o valor V é o mesmo para as duas locadoras. Assim, 80 + 1,20x = 120 + 1,00x ⇒ x = 200.

Portanto, a partir de 200 km de percurso torna-se mais econômico alugar o automóvel na locadora B.

ATIVIDADE 26

Uma loja de eletrodomésticos está fazendo uma promoção para a compra conjunta de dois tipos de eletrodomésticos, de maneira que o consumidor interessado paga:

- R$590,00 por um forno de micro-ondas e um aspirador de pó;
- R$1.300,00 por um forno de micro-ondas e uma geladeira;
- R$1.250,00 por um aspirador de pó e uma geladeira.

Quanto a loja está cobrando por cada tipo de aparelho?

Resolução:

Denominando x o preço do forno de micro-ondas, y o preço do aspirador de pó, e z o preço da geladeira, podemos escrever o seguinte sistema de três equações lineares:

$$\begin{cases} x + y = 590 & \text{(I)} \\ x + z = 1300 & \text{(II)} \\ y + z = 1250 & \text{(III)} \end{cases}$$

A fim de reforçar os comentários anteriores, sugerimos que o(a) professor(a) estimule os alunos a resolverem esse sistema por substituição, adição ou comparação. Pelo método da comparação, obtemos:

$$\begin{cases} x = 590 - y \\ x = 1300 - z \end{cases}$$

Comparando as duas equações, temos:

$$590 - y = 1300 - z \Rightarrow -y + z = 710$$

O sistema original, de três equações lineares pode, então, ser reduzido ao seguinte sistema de duas equações:

$$\begin{cases} y + z = 1250 & \text{(III)} \\ -y + z = 710 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Adicionando (III) e (IV), temos:

$$2z = 1\,960 \Rightarrow z = 980$$

Sabendo-se o valor de z, determinaremos os valores de x e y.

$$y + z = 1250 \Rightarrow y + 980 = 1250 \Rightarrow y = 270$$
$$x + y = 590 \Rightarrow x + 270 = 590 \Rightarrow x = 320$$

Portanto, o micro-ondas custará R$ 320,00, o aspirador de pó custará R$ 270,00 e a geladeira custará R$ 980,00.

ATIVIDADE 27

Um funcionário recém-contratado por uma empresa recebeu em mãos a seguinte tabela, contendo as quantidades de 3 tipos de produtos, A, B e C, recebidos ou devolvidos em 3 lojas da empresa, acompanhadas dos respectivos valores que cada loja deveria remeter à matriz pela transação.

	Quantidade			**Valor da transação (em mil R$)**
Tipo	**A**	**B**	**C**	**Total**
Loja 1	**3**	**4**	**-1**	**8**
Loja 2	**4**	**5**	**2**	**20**
Loja 3	**1**	**-2**	**3**	**6**

Ajude o funcionário a calcular o valor unitário de cada tipo de produto.

Resolução:

O seguinte sistema de equações traduz as condições do problema:

$$\begin{cases} 3a + 4b - c = 8 & \text{(I)} \\ 4a + 5b + 2c = 20 & \text{(II)} \\ a - 2b + 3c = 6 & \text{(III)} \end{cases}$$

Vamos resolver esse sistema pelo método da adição. Para tanto, precisamos escolher uma incógnita que será eliminada a partir de combinações lineares entre pares de equações. Escolheremos a incógnita c e faremos:

1º) 2 · (I) + (II), isto é, multiplicaremos a equação (I) por 2 e, em seguida, adicionaremos a equação resultante à equação (II). A resolução será apresentada passo a passo, e caberá ao(à) professor(a) estimular seus alunos a cumprirem o mesmo percurso ou a eliminarem alguns passos, estimulando, dessa forma, o cálculo mental.

$$\begin{array}{r} 2 \cdot \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array} \begin{cases} 6a + 8b - 2c = 16 \\ \underline{4a + 5b + 2c = 20} \end{cases}$$
$$10a + 13b = 36 \quad \text{(IV)}$$

2º) 3 · (I) + (III), isto é, multiplicaremos a equação (I) por 3 e adicionaremos a equação resultante à equação (III).

$$\begin{array}{r} 3 \cdot \text{(I)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{cases} 9a + 12b - 3c = 24 \\ \underline{a - 2b + 3c = 6} \end{cases}$$
$$10a + 10b = 30 \quad \text{(V)}$$

3º) Escreveremos um sistema equivalente ao original, formado agora por 2 equações lineares com duas incógnitas:

$$\begin{cases} 10a + 13b = 36 & \text{(IV)} \\ 10a + 10b = 30 & \text{(V)} \end{cases}$$

4º) Por coincidência, obtivemos equações que apresentam coeficientes iguais para a mesma incógnita (a). Portanto, basta subtrair as duas equações, ou seja, multiplicar a equação (V) por (–1) para determinar o valor da incógnita b.

$$\begin{array}{r} \text{(IV)} \\ -1 \cdot \text{(V)} \end{array} \begin{cases} 10a + 13b = 36 \\ \underline{-10a - 10b = -30} \end{cases}$$
$$3b = 6 \Rightarrow b = 2$$

Portanto, o valor unitário do produto B é de R$ 2 mil. O preço dos demais tipos de produto pode ser obtido a partir da substituição do valor de B nas equações dos sistemas escritos.

Resposta: R$ 1 mil; R$ 2 mil; e R$ 3 mil.

A atividade a seguir permite introduzir a ideia de que podemos escrever sistemas indeterminados para situações nas quais não há uma única resposta possível. Como não se trata de um problema de difícil solução, sugerimos que o(a) professor(a) apresente-o aos alunos sem qualquer comentário inicial e, após discutir as diversas situações que surgirem, comente sobre o fato de que os resultados esperados são discretos, isto é, formados apenas por números naturais. Será muito provável que os alunos consigam chegar às respostas corretas sem escrever e resolver sistemas de equações, e, nesse caso, caberá ao(à) professor(a) mostrar-lhes que, em outros casos de respostas obtidas a partir de conjuntos contínuos, seria impossível a eles escreverem todas as infinitas respostas, o que exigiria a escrita de equações.

ATIVIDADE 28

O técnico de uma equipe de futebol estima que, ao final de 12 partidas, sua equipe consiga 24 pontos. Sabendo-se que a quantidade de pontos por vitória é 3, por empate é 1 e por derrota é 0, determine:

a) O número de pontos da equipe que vencer 4 jogos, empatar 4 e perder 4.

b) O número máximo de pontos que a equipe pode conseguir.

c) Uma combinação possível de números de vitórias-empates-derrotas para que a equipe consiga os almejados 24 pontos.

d) Todas as possibilidades para que a equipe consiga atingir 24 pontos.

Resolução:

a) $4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 16$ pontos.

b) Caso vença as 12 partidas, uma equipe conseguirá o máximo possível de pontos, igual a $3 \cdot 12 = 36$.

c)

Denominando o número de vitorias por x, o número de empates por y, e o de derrotas por z, podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x + 1y + 0z = 24 \end{cases}$$

Temos, portanto, um sistema de duas equações e três incógnitas que é indeterminado, isto é, tem mais de uma solução. Uma possível resposta para o problema pode ser obtida, por exemplo, com $x = 7$, isto é, supondo que a equipe vença 7 dos 12 jogos. Nesse caso, será preciso que $y = 3$, a fim de que a equipe consiga atingir, exatamente, 24 pontos. Portanto, uma resposta possível é: 7 vitórias, 3 empates e 2 derrotas.

d)

Queremos, neste caso, determinar as soluções naturais do sistema formado pelas duas equações descritas no item anterior, isto é:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x + 1y + 0z = 24 \end{cases}$$

Com $y = 24 - 3x$ na segunda equação, e substituindo em y na primeira equação, temos:

$$x + 24 - 3x + z = 12 \Rightarrow z = 2x - 12$$

Assim, podemos escrever a resposta geral do sistema em função de x, isto é, em função do número de vitórias:

$$S = \{(x;\ 24 - 3x;\ 2x - 12)\}$$

Como nos interessam apenas os casos em que $0 < x < 12$, $y > 0$ e $z > 0$, podemos atribuir à x apenas os valores 6, 7 e 8. Isso feito, teremos as seguintes possibilidades, expressas na tabela:

Vitória	Empate	Derrota	Total de jogos
8	0	4	12
7	3	2	12
6	6	0	12

ATIVIDADE 29

Na feira livre da quarta-feira, Helena foi comprar ingredientes para fazer um bolo. O kit de ingredientes continha farinha de trigo, fubá e chocolate em pó, totalizando 2 kg pelo custo de R$ 4,00 reais. Intrigada com o valor do kit, Helena questionou o feirante sobre o preço de cada produto, ouvindo dele que o quilo da farinha de trigo custava 1 real, o quilo do chocolate em pó custava 20 reais, e o quilo do fubá custava 2 reais. Quanto de cada produto havia no *kit* que Helena comprou?

Comentário:

Temos aqui um problema que não apresenta uma única solução e que pode ser resolvido por meio de um sistema indeterminado de equações lineares. De fato, os alunos poderão obter algumas das respostas antes que o(a) professor(a) apresente a eles a solução geral. Se esta for a opção do(a) professor(a), propomos que conduza as discussões colocando para seus alunos questões como:

- *É possível que o kit tenha sido composto por 800 g de farinha e 1 kg de fubá? Por quê?*

Não, isto não seria possível, porque, nesse caso, os 200 gramas restantes deveriam ser de chocolate, o que faria com que o preço do kit se elevasse além dos R$ 4,00 reais.

- *Se no kit havia 100 g de chocolate, quanto havia de farinha e de fubá?*

100 g de chocolate custam R$ 2,00 reais. Sobram R$ 2,00 reais para serem divididos entre farinha e fubá, em um total de 1,5 kg, o que nos permite escrever o seguinte sistema de duas equações::

$$\begin{cases} x + y = 1{,}9 \\ x + 2y = 2{,}0 \end{cases}$$

em que x representa a massa de farinha, em kg, e y representa a massa de fubá, também em kg.

Resolvendo o sistema, obtemos $y = 0,1$ e $x = 1,8$, isto é, havia 0,1 kg de fubá e 1,8 kg de farinha, ou 100 gramas de um produto e 1 kg e 800 gramas do outro. Apresentamos a solução geral do problema, considerando:

x: farinha de trigo, em kg

y: massa de fubá, em kg

z: chocolate em pó, em kg

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 20z = 4 \end{cases}$$

Sistemas lineares dessa natureza, indeterminados, apresentam solução em função de uma das incógnitas. Faremos a opção de escrever a solução geral em função do chocolate em pó (z). Assim, escrevemos as equações desta maneira:

$$\begin{cases} x + y = 2 - z & (I) \\ x + 2y = 4 - 20z & (II) \end{cases}$$

Por meio da subtração (II) – (I), temos:

$y = 2 - 19z$ (quantidade de fubá em função da quantidade de chocolate), e fazendo 2 . (I) – (II), temos:

$x = 18z$ (quantidade de farinha em função da quantidade de chocolate). Portanto, a solução geral do sistema é:

$$\{(18z, 2 - 19z, z)\}$$

Vale observar que não podemos ter valores negativos para qualquer das quantidades. Assim, será necessário que sejam obedecidas as seguintes condições:

$18z > 0$, $2 - 19z > 0$ e $z > 0$, ou, de outra forma, que $z < 2/19$, ou ainda que a quantidade de chocolate em pó seja inferior a, aproximadamente, 105 gramas, pois $2/19 \cong 0,105$ kg.

ATIVIDADE 30

Paulo realizou uma prova de Matemática formada por três partes. Paulo acertou 25% das questões da primeira parte, 50% das questões da segunda parte e 75% das questões da terceira parte, totalizando 120 pontos. O total máximo de pontos que qualquer aluno poderia obter na prova era igual a 230.

a) Escreva uma equação linear que relacione a quantidade de pontos conseguidos por Paulo nessa prova ao percentual de acertos em cada parte. **(Sugestão: chame de x, y e z os totais de pontos máximos possíveis em cada uma das três partes.)**

b) Se o total máximo de pontos da primeira parte da prova é 60, e o total máximo da segunda é 90, quantos pontos Paulo fez na terceira parte?

Resolução:

a)

Paulo fez 25% de x + 50% de y + 75% de z e conseguiu fazer ao todo 120 pontos.

Veja:

- 25% = 25/100 = 1/4
- 50% = 50/100 = 1/2
- 75% = 75/100 = 3/4

Então, temos que:

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z = 120$$

b)

Se $x = 60$ e $y = 90$, podemos calcular z, pois $60 + 90 + z = 230$, então

$z = 230 - 60 - 90$ isto é, $z = 80$.

Como Paulo fez 75% de z, ele fez 75% de 80 = $(75/100) \cdot 80 = (3/4) \cdot 80 = 60$

ATIVIDADE 31

Observe a tabela a seguir, que contém os dados sobre a audiência de 3 redes de televisão em 3 períodos do dia.

Audiência	Manhã	Tarde	Noite	Pontos
Rede 1	2	4	-1	11
Rede 2	4	3	2	27
Rede 3	3	-2	2	10

Nessa tabela, cada ponto positivo indica que 1 000 pessoas estão com a televisão conectada à rede, e cada ponto negativo indica que 1 000 pessoas deixaram de sintonizar a rede no período avaliado.

Considerando que são atribuídos diferentes pesos à audiência, em função do período do dia, descubra o peso atribuído a cada um dos períodos.

Resolução:
Sejam
x: pontuação no período da manhã;
y: pontuação no período da tarde;
z: pontuação no período da noite.

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 11 & (I) \\ 4x + 3y + 2z = 27 & (II) \\ 3x - 2y + 2z = 10 & (III) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por 2, somando o resultado à equação (II), multiplicando a equação (I) por 2 e somando o resultado à equação (III), temos:

$$\begin{array}{r} 2 \cdot (I) \\ (II) \end{array} \begin{cases} 4x + 8y - 2z = 22 \\ 4x + 3y + 2z = 27 \end{cases}$$
$$\overline{8x + 11y = 49}$$

e

$$\begin{array}{r} 2 \cdot (I) \\ (III) \end{array} \begin{cases} 4x + 8y - 2z = 22 \\ 3x - 2y + 2z = 27 \end{cases}$$
$$\overline{7x + 6y = 32}$$

$$8x + 11y = 49 \Rightarrow x = \frac{49 - 11y}{8} \quad (IV)$$

$$7x + 6y = 32 \Rightarrow x = \frac{32 - 6y}{7} \quad (V)$$

De (IV) e (V), temos que:

$$\frac{49 - 11y}{8} = \frac{32 - 6y}{7} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 7 \cdot (49 - 11y) = 8 \cdot (32 - 6y) =$

$= 343 - 77y = 256 - 48y = -29y = -87 \Rightarrow y = 3$

Desta forma, x = 2 e z = 5. Portanto, a pontuação no período da manhã é igual a 2, no período da tarde é igual a 3 e no período da noite é igual a 5.

Tema 3: Resoluções de sistemas

Escalonamento e situações problemas.

Um sistema linear pode ser resolvido de mais de uma maneira. Uma delas consiste em utilizar o método da adição, exemplificado na resolução a seguir do sistema de duas equações:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \overset{(-2)}{\Rightarrow} \end{matrix} \begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ -2x - 4y = -4 \end{cases}$$

$$-7y = 7 \Rightarrow y = 1$$

Se $y = -1 \Rightarrow x + 2 \cdot (-1) = 2 \Rightarrow x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4, \therefore S = (4, -1)$

Esse procedimento de multiplicar as equações por números diferentes de zero para, em seguida, adicioná-las com o objetivo de eliminar uma incógnita, é generalizado para a resolução de sistemas de duas ou mais equações, e é denominado método de **escalonamento**. Ao resolvermos sistemas pelo método de escalonamento, utilizamos, normalmente, matrizes formadas pelos coeficientes numéricos presentes nas equações. Para um sistema linear qualquer, podemos associar uma matriz denominada matriz **completa**, que é formada pelos coeficientes das incógnitas e também pelos termos independentes. Dizemos que o sistema linear está **escalonado** quando realizamos combinações lineares entre as linhas da matriz completa, de modo a zerar todos os elementos $a_{i,j}$ da matriz em que $i > j$. O exemplo seguinte retoma a resolução do sistema de equações anteriormente resolvido, explicitando o **escalonamento**.

Exemplo 1

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_1 - 2 \cdot L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Esta é a matriz **completa** do sistema, formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes das duas equações. Para escaloná-la, devemos tornar nulo o elemento $a_{21} = 1$, que é o único elemento a_{ij} em que $i > j$.

Aqui está a combinação linear entre as linhas 1 e 2 da matriz, gerando uma nova linha

A matriz do sistema foi escalonada.
Na nova equação da linha 2 da matriz temos:
$0x - 7y =$ ou $y = -1$
Substituindo esse valor em uma das equações iniciais, obtém-se $x = 4$.

Exemplo 2:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + 2z = 4 \end{cases} \qquad M_{Completa} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Na matriz escalonada deverão ser nulos os valores destacados.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{-2 \cdot L_1 + L_2} \\ \xrightarrow{-L_1 + L_2} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_1 + 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

A última linha da matriz nos fornece a equação: $7z = 7 \rightarrow z = 1$.

Substituindo o valor encontrado para z na segunda equação da matriz final, temos:

$-3y - 4z = -4$

$-3y - 4 \cdot 1 = -4 \Rightarrow y = 0$

A primeira linha da matriz nos ajuda a calcular o valor de x:

$x + y + z = 3$

$x + 0 + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

Assim, a solução do sistema é apresentada por: S = {(2, 0, 1)}.

ATIVIDADE 32

Agora, resolva os seguintes sistemas lineares utilizando as técnicas de escalonamento:

a) $\begin{cases} x - 2y + 2z = 4 \\ 2x + y + z = -1 \\ -3x - 14y + 19z = 63 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ -3x - 4y + z = 0 \\ 5x + 3y - 10z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 3y + z = 2 \\ -3x + 2z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 3y + 5z = 2 \\ 3x - y + 3z = 4 \\ -2x + 2y - 4z = -3 \end{cases}$

Respostas:

a) S = {(–2, 0, 3)}

b) S = {(–3, 2, -1)}

c) S = {(1, 0, 2)}

d) $S = \left\{\left(\frac{5-2z}{4}, \frac{6z-1}{4}, z\right)\right\}, z \in \mathbb{R}$

ATIVIDADE 33

Classifique os sistemas lineares seguintes em *determinado*, *indeterminado* ou *impossível*, em função do parâmetro **m**.

a) $\begin{cases} mx + 2y = m - 1 \\ 2x + 4y = 3m \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y + mz = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$

Respostas:

a)

- Se $2m - 2 \neq 0$, ou seja, $m \neq 1$, o sistema é possível e determinado.
- Se $2m - 2 = 0$, ou seja, $m = 1$, o sistema é impossível.

b)

- Se $-6 - 3m \neq 0$, ou seja, $m \neq -2$, o sistema é possível e determinado com $x=0$, $y=0$ e $z=0$.
- Se $-6 - 3m = 0$, ou seja, $m = -2$, o sistema é possível e indeterminado.

ATIVIDADE 34

Determine o valor de m para que o sistema de equações seguinte seja indeterminado. Depois disso, com o valor obtido para m, encontre duas possíveis soluções reais, isto é, determine dois conjuntos de valores de a, b e c que verifiquem simultaneamente as três equações.

$$\begin{cases} a + b + 2c = 1 \\ a - b - c = 0 \\ ma - b + c = 2 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix} \begin{cases} a + b + 2c = 1 \\ a - b - c = 0 \\ ma - b + c = 2 \end{cases}$$

Somando a equação (I) à equação (II), e somando a equação (I) à equação (III), temos:

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array} \begin{cases} a + b + 2c = 1 \\ \underline{a - b - c = 0} \end{cases} \oplus$$
$$2a + c = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{cases} a + b + 2c = 1 \\ \underline{ma - b + c = 2} \end{cases} \oplus$$
$$(m+1)a + 3c = 3$$

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ (m+1)a + 3c = 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de duas equações por substituição, temos:

$$c = 1 - 2a$$
$$(m + 1)a + 3(1 - 2a) = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ma + a + 3 - 6a = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ma + a - 6a = 3 - 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ma - 5a = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m - 5)a = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = 0 \text{ ou } m - 5 = 0$$

- Se $m - 5 = 0$, ou seja, $m = 5$, 0 sistema é possível e indeterminado.
  $a + b + 2(1 - 2a) = 1 \Rightarrow b = 1 - a - 2 + 4a \Rightarrow$
  $\Rightarrow b = 3a - 1$

Portanto, $S = \{(a, 3a - 1, 1 - 2a)\}$. O enunciado pede duas soluções possíveis:

- Para $a = 0$, temos $S = \{(0, -1, 1)\}$
- Para $a = -1$, temos $S = \{(-1, -4, 3)\}$

ATIVIDADE 35

Ana, Beto e Cadu foram comprar enfeites para a festa junina da escola. Em meio às compras, eles se perderam um do outro e resolveram, cada qual por sua conta, comprar aquilo que haviam combinado: pacotes de bandeirinhas, chapéus de palha e fantasias para a quadrilha. Quando se encontraram no dia seguinte na escola e perceberam que haviam comprado muito mais do que pretendiam, cada um tratou de se defender, argumentando sobre o quanto haviam gastado. Primeiro foi Ana:

- Gastei R$ 62 reais, mas comprei 4 pacotes de bandeirinhas, 4 montões de chapéus e 4 fantasias.

Depois, veio Beto:

- Eu comprei a mesma quantidade de enfeites que você, mas gastei menos, porque consegui 10% de desconto no preço dos chapéus. Quer dizer, gastei R$ 60 reais.

Por último, falou Cadu:

- Pois é, gente, eu comprei apenas a metade de cada enfeite que cada um de vocês comprou, mas, comparativamente, gastei bem menos, porque consegui 20% de desconto no preço das bandeirinhas e 10% no preço dos chapéus. Daí, gastei R$ 29 reais.

Sabendo que o preço pago pela unidade de cada artigo foi o mesmo para os três jovens, responda:

Quanto custou para Ana cada pacote de bandeirinhas, cada montão de chapéus e cada fantasia?

Resolução:
Sejam
B: preço das bandeirinhas;
C: preço dos chapéus;
F: preço das fantasias.
Transcrevendo os dados da situação-problema para um sistema de equações lineares, temos:

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{cases} 4B + 4C + 4F = 62 \\ 4B + 4C \cdot (0,9) + 4F = 60 \\ 2B \cdot (0,8) + 2C \cdot (0,9) + 2F = 29 \end{cases}$$

Subtraindo a equação (II) da equação (I), temos:

$$4C - 3,6C = 2 \Rightarrow 0,4C = 2 \Rightarrow C = 5$$

Substituindo o valor de C nas equações (I) e (III), temos:

$$\text{(I) } 4B + 20 + 4F = 62$$
$$\text{(III) } 1,6B + 9 + 2F = 29$$

Então temos que:

$$\begin{array}{l} \text{(IV)} \\ \text{(V)} \end{array} \begin{cases} 4B + 4F = 42 \\ 1,6B + 2F = 20 \end{cases}$$

Dividindo a equação (IV) por dois, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{array}{l} \text{(IV)} \\ \text{(V)} \end{array} \begin{cases} 2B + 2F = 21 \\ 1,6B + 2F = 20 \end{cases}$$

Subtraindo a equação (V) da equação (IV), temos:

$$2B - 1,6B = 1 \Rightarrow 0,4B = 1 \Rightarrow B = 2,5$$

Portanto, para Ana, o preço das bandeirinhas foi R$ 2,50; dos chapéus, R$ 5 reais, e das fantasias, R$ 8 reais.
Outra resolução possível, diferente da apresentada, baseia-se no fato de que Ana e Beto compraram quantidades iguais, mas Beto gastou R$ 2 reais a menos do que Ana. Assim, é possível concluir que esses R$ 2

reais correspondem a 10% do preço de 4 montões de chapéus. Então, se 10% correspondem a R$ 2 reais, 100% correspondem a R$ 20 reais. Logo, Ana gastou R$ 20 reais na compra de 4 montões de chapéus, o que significa ter pago R$ 5 reais por montão.

ATIVIDADE 36

Ernesto e Adamastor participaram de uma competição que avaliou suas pontarias. Tudo era muito rápido. Eles ficavam em uma sala, com várias bolas de borracha na mão, enquanto três alvos eram projetados rapidamente em uma parede. O objetivo era acertar em cada alvo a maior quantidade de bolas que conseguissem.

Primeiro foi Adamastor. Ele acertou três bolas no alvo 1, duas bolas no alvo 2 e apenas uma bola no alvo 3. Ernesto, por sua vez, acertou uma bola no alvo 1, duas bolas no alvo 2 e duas bolas no alvo 3. Cada bola certeira valia uma quantidade de pontos que dependia do alvo acertado. Quer dizer, o alvo 1 não tinha a mesma pontuação do alvo 2, nem do alvo 3, assim como os alvos 2 e 3 também tinham pontuações diferentes.

Ao final da prova, Adamastor e Ernesto terminaram empatados, com 40 pontos cada um, mas ficaram sem saber quanto valia cada bola acertada em cada alvo.

a) É possível que cada bola certeira nos alvos 1, 2 e 3 tenha valido, respectivamente, 4, 16 e 3 pontos?

b) Supondo que cada bola certeira no alvo 1 tenha valido x pontos, encontre, em função de x, o total de pontos de cada bola certeira no alvo 2 e também no alvo 3.

Resolução:

a)

Vamos considerar o seguinte sistema de equações para representar as pontuações de cada jogador:

Sejam

x: alvo 1;

y: alvo 2;

z: alvo 3.

Logo, temos que:

$$\begin{array}{r} \text{(Adamastor)} \\ \text{(Ernesto)} \end{array} \begin{cases} 3x + 2y + z = 40 \\ x + 2y + 2z = 40 \end{cases}$$

Se cada bola certeira nos alvos 1, 2 e 3 tiver valido, respectivamente, 4, 16 e 3 pontos, então vamos substituir os valores das pontuações nas incógnitas do sistema:

$3 \cdot 4 + 2 \cdot 16 + 3 = 12 + 32 + 3 = 47 \neq 40$

$4 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 3 = 4 + 32 + 6 = 42 \neq 40$

Logo, não é possível que os alvos tenham esses valores.

b)

Considerando o sistema de equações do item anterior, temos que:

$$\begin{array}{r} \text{(Adamastor)} \\ \text{(Ernesto)} \end{array} \begin{cases} 3x + 2y + z = 40 \\ x + 2y + 2z = 40 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos:

$2x - z = 0 \Rightarrow z = 2x$

Substituindo na primeira equação do sistema, temos que:

$$3x + 2y + z = 40 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{40 - z - 3x}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{40 - 2x - 3x}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{40 - 5x}{2}$$

Portanto, $S = \left\{\left(x, \frac{40-5x}{2}, 2x\right), x \in \mathbb{R}\right\}$, ou seja, o total de pontos de cada bola certeira nos alvos 2 e 3, em função de x, é respectivamente: $\frac{40-5x}{2}$ e 2x.

ATIVIDADE 37

Encontre o conjunto solução dos sistemas caso seja possível.

a) $\begin{cases} x + 7y - 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ 7x + 3y - z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -3x + 9y = -15 \end{cases}$

a)

$$M_{completa}\begin{pmatrix}1 & 7 & -3 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 1\\ 7 & 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1\\ L_2\\ L_3\end{array}\begin{pmatrix}1 & 7 & -3 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 1\\ 7 & 3 & -1 & -1\end{pmatrix}\underset{\xrightarrow{7\cdot L_1 - L_3}}{\xrightarrow{3\cdot L_1 - L_2}}\begin{pmatrix}1 & 7 & -3 & 0\\ 0 & 23 & -10 & -1\\ 0 & 46 & -20 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{2\cdot L_2 - L_3}\begin{pmatrix}1 & 7 & -3 & 0\\ 0 & 23 & -10 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

De acordo com o resultado, temos que 0 = -3 , o que torna o sistema impossível.

b)

$$M_{completa} = \begin{pmatrix}2 & -6 & 10\\ -3 & 9 & -15\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1\\ L_2\end{array}\begin{pmatrix}2 & -6 & 10\\ -3 & 9 & -15\end{pmatrix}\underset{\xrightarrow{-\frac{1}{3}\cdot L_2}}{\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot L_1}}\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix}$$

Trata-se de um sistema com duas variáveis e apenas uma equação, ou seja, um sistema indeterminado, com $x = 5 + 3y$.

Portando a solução desse sistema é dada por: $S=\{(5+3y, \quad y)\}$, com $y \in \mathbb{R}$.

ATIVIDADE 38

Em uma compra de 3 quilos de batata, 0,5 quilo de cenoura e 1 quilo de abobrinha, Arnaldo gastou R$ 14,45, porque não pediu desconto ao seu Manuel, dono da barraca na feira livre. Juvenal, por sua vez, comprou 2 quilos de batata, 1 quilo de cenoura e 2 quilos de abobrinha, pediu desconto de 50 centavos no preço do quilo da batata e de 20 centavos no preço do quilo da abobrinha, e gastou R$ 11,50. Rosa, conhecida antiga de seu Manuel, conseguiu desconto de R$ 1,00 no preço do quilo da batata, 50 centavos de desconto no preço do quilo da cenoura, e 20 centavos de desconto no preço da abobrinha, gastando, no total, R$ 18,00 pela compra de 3 quilos de cada produto. Quanto seu Manuel cobra, sem descontos, pelo quilo da batata?

Resolução:
Sejam
a: preço da abobrinha;
b: preço da batata;
c: preço da cenoura.

Temos:

$$\begin{cases} 3b + 0{,}5c + a = 14{,}45 & \text{(Arnaldo)}\\ 2(b - 0{,}5) + c + 2(a - 0{,}2) = 11{,}50 & \text{(Juvenal)}\\ 3(b - 1) + 3(c - 0{,}5) + 3(a - 0{,}2) = 18{,}00 & \text{(Rosa)}\end{cases}$$

Efetuando e ordenando o sistema, temos:

$$\begin{matrix}(I)\\(II)\\(III)\end{matrix}\begin{cases}a + 3b + 0{,}5c = 14{,}45\\2a + 2b + c = 12{,}90\\3a + 3b + 3c = 23{,}10\end{cases} \Rightarrow M_{completa}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0{,}5 & 14{,}45\\2 & 2 & 1 & 12{,}90\\3 & 3 & 3 & 23{,}10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 0{,}5 & 14{,}45\\2 & 2 & 1 & 12{,}90\\3 & 3 & 3 & 23{,}10\end{pmatrix}\xrightarrow[6 \cdot L_1 - L_3]{2 \cdot L_1 - L_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0{,}5 & 14{,}45\\0 & 4 & 0 & 16{,}00\\3 & 15 & 0 & 63{,}60\end{pmatrix}$$

Da linha 2 da matriz, temos que: $4b = 16 \Rightarrow b = 4$

Da linha 3 da matriz, temos que:

$3a + 15b = 63{,}60$ e como $b=4$, obtemos: $3a + 15 \cdot 4 = 63{,}60 \Rightarrow 3a = 3{,}60 \Rightarrow a = 1{,}20$

Sendo: $a = 1{,}20$ e $b = 4$, o valor de c será encontrado da seguinte forma:

$a + 3b + 0{,}5c = 14{,}45 \Rightarrow 1{,}20 + 3 \cdot 4 + 0{,}5c = 14{,}45 \Rightarrow 0{,}5c = 14{,}45 - 13{,}20 \Rightarrow 0{,}5c = 1{,}25 \Rightarrow c = 2{,}5$

Portanto, seu Manoel cobra R$ 4,00 pelo quilo de batatas, R$ 1,20 pelo quilo de abobrinhas e R$ 2,50 pelo quilo de cenouras.

Tema 4: Determinante de uma matriz e algumas aplicações

ATIVIDADE 39

Encontre o valor dos determinantes das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0{,}3\\3 & 8\end{bmatrix}$

b) $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, onde $a_{ij} = i + j$

Resolução:

a)

$\text{Det } A = \frac{1}{2} \cdot 8 - 0{,}3 \cdot 3 = 4 - 0{,}9 = 3{,}1$

b)

Primeiramente, vamos encontrar a matriz gerada pela lei de formação $a_{ij} = i + j$.

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 4\end{bmatrix}$$

Então, $\text{Det } A = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1$

ATIVIDADE 40

Considere a matriz A dada por: $A = \begin{bmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{bmatrix}$.

Ao calcular o seu determinante, temos:

(A) aei + dch + bfg – ceg – bdi – afh.

(B) aei + dch + bfg + ceg + bdi + afh.

(C) ceg +bdi + afh – aei – dch – bfg.

(D) abc + def + ghi – adg – beh – cfi.

(E) aei – ceg + bfi – bdg + aeh – ceh.

Resolução:

Aplicando a Regra de Sarrus, temos que:

Det A = aei + bfg + cdh – ceg – afh – bdi

ATIVIDADE 41

Uma pesquisa foi realizada com um grupo de 500 crianças de 3 a 12 anos de idade. Para esse grupo, em função da idade x da criança, concluiu-se que o peso médio p(x), em quilogramas, era dado pelo determinante da matriz A, em que:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -x \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

Com base na fórmula p(x) = det A, determine:

a) o peso médio de uma criança de 7 anos;

b) a idade mais provável de uma criança cujo o peso(massa) é 30 kg.

Resolução:

a)

Seja o det A = 2x + 8. Como o peso (massa) médio, em quilogramas, é dado por $p(x) = det\ A$, onde x é a idade da criança, então:

$$p(5) = 2 \cdot 5 + 8 = 18 \text{ kg.}$$

b)

$$p(x) = 30 \Rightarrow 2x + 8 = 30 \Leftrightarrow x = 11 \text{ anos.}$$

ATIVIDADE 42

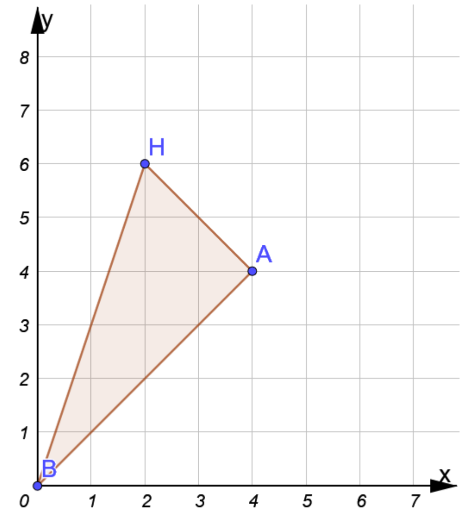
Encontre a solução dos sistemas da atividade número 32 utilizando a regra de Cramer.

Resolução:

Professor(a), é importante destacar que o(a) aluno(a) poderá optar pelo escalonamento ou pela regra de Cramer, desde que o número de equações seja o mesmo do número de incógnitas, caso contrário deverá utilizar escalonamentos, método da adição ou método da substituição, por exemplo.

ATIVIDADE 43

Qual é a área do triângulo BAH de vértices B(0, 0), A(4,4) e H(2,6), representado no sistema de eixos cartesianos da figura a seguir?

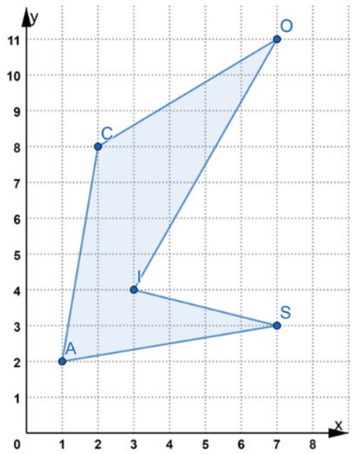


Resolução:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \|D\| \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \text{ u.a}$$

ATIVIDADE 44

Calcule a área do pentágono COISA, representado a seguir:



$$A = \frac{1}{2} \cdot \|D\| \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 2 & 8 \\ 6 & 11 \\ 3 & 4 \\ 7 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{matrix} \right\| =$$

$$\frac{1}{2}|(22 + 24 + 9 + 14 + 8) - (48 + 32 + 28 + 3 + 4)|$$

$$A = \frac{1}{2}|77 - 116| = \frac{39}{2} \text{ u . a}$$

3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

1. Organização das Grades Curriculares

Apresentamos a seguir a grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática vigente e sua respectiva relação com algumas das Competências Gerais da Educação Básica, da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), além de orientações pedagógicas para cada série que compõe o Ensino Médio.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades em Matemática não é rígida nem inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem de conteúdos que valorizem a cultura e o mundo do trabalho e a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

Desta forma, os quadros apresentados destacam as habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes em cada unidade. Tais habilidades traduzem, de modo operacional, as ações que os alunos devem ser capazes de realizar ao final de um determinado estágio de aprendizagem, após serem apresentados aos conteúdos curriculares listados.

1.1. Grade Curricular da 3ª série do Ensino Médio – 2º Bimestre

Currículo Oficial		BNCC
Tema/Conteúdo	Habilidades	Competência Geral - BNCC
Números • Equações algébricas e números complexos; • Equações polinomiais; • Números complexos: operações e representação geométrica; • Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial; • Relações de Girard.	• Compreender a história das equações, com o deslocamento das atenções das fórmulas para as análises qualitativas; • Conhecer as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica; • Saber reduzir a ordem de uma equação a partir do conhecimento de uma raiz; • Saber expressar o significado dos números complexos por meio do plano de Argand-Gauss; • Compreender o significado geométrico das operações com números complexos, associando-as a transformações no plano.	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

1.1.1. Estudo funcional de Equações Polinomiais e o Conjunto dos Números Complexos.

De forma geral, as equações polinomiais são instrumentos fundamentais para a representação das relações de interdependência entre grandezas, conforme foram desenvolvidas durante a aprendizagem dos alunos no aprendizado da Matemática.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, já foram apresentados aos alunos diversos problemas, em diferentes contextos, cuja solução conduz a equações do primeiro e do segundo graus. O aluno já está acostumado a resolver equações de 1° grau ($ax + b = 0$, com $a \neq 0$) e de 2° grau ($ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$). Trata-se agora de enfrentar equações correspondentes a situações um pouco mais enredadas, que conduzem a equações de 3°, 4° e 5° graus.

A história da busca por soluções para tais equações, chamadas equações algébricas, é muito instrutiva, pois, com base nela, compreendemos mais facilmente as sucessivas ampliações nos conjuntos numéricos, dos números naturais até os números complexos, que viabilizam a atribuição de significado à raiz quadrada de um número negativo. Aprendemos também com a história que, com as equações de 3° grau, a busca por uma fórmula envolvendo radicais que nos forneça as raízes, do mesmo tipo da que nos dá as soluções de uma equação de 2° grau $\left(x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$, não costuma ser o melhor caminho para resolver as equações de graus 3 e 4, e é um caminho impossível de ser trilhado para equações de grau maior ou igual a 5.O caminho mais conveniente, nesses casos, é uma análise qualitativa da pergunta que cada equação representa, extraindo da própria pergunta informações relevantes sobre as raízes.

Portanto, é muito importante e decisivo, em muitos casos, sempre pensar efetivamente em uma equação como se pensa em uma pergunta, aprendendo a examiná-la criticamente para se chegar à sua resposta. Mais do que mera intenção de ensinar técnicas de solução, nosso objetivo aqui é a plena compreensão desse fato.

Em relação aos números complexos, a ênfase não será posta nos cálculos algébricos, mas sim no significado de tais números, responsáveis por uma notável expansão dos conjuntos numéricos já conhecidos. A representação geométrica de um número complexo z no plano de Argand-Gauss, que tem como imagem um ponto no plano, como um par (x; y) de números reais, pode ser escrita na forma $z = x + yi$.

Assim, como a reta foi necessária e suficiente para se incluir todos os números reais, racionais e irracionais, desta forma, com a inclusão de números que possam ser raízes quadradas de números negativos, será necessário (e suficiente) todo o plano cartesiano, que servirá de inspiração para a construção do plano complexo e suporte para a representação de todos os números complexos. A unidade imaginária i, que representa o novo número cujo quadrado é igual a –1, serve de padrão para a representação no eixo vertical de números como 2i, 6i, –4i etc.

Tema 1: Introdução ao Conjunto dos Números Complexos.

O estudo sobre números complexos avançou graças à grande contribuição do matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576). Antes dele, os matemáticos julgavam não ser possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. Posteriormente, Friedrich Gauss (1777-1855) foi o responsável pela sua formalização, tendo maior cardinalidade por conter todos os demais conjuntos e possuir uma representação geométrica, sendo necessário compreender os processos das operações (aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo os elementos dos números complexos. A expressão $i^2 = -1$ aparece na definição de números complexos, assunto que gera muita dúvida, por isso é importante compreender o motivo de tal igualdade.

Partindo das definições estabelecidas abaixo, temos:

1. Admitimos como número complexo o ordenado (x, y) no plano de Argand Gauss.
2. Os números complexos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são iguais se, e somente se: $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$
3. A adição e a multiplicação de números complexos são definidas por:

$(x_1 , y_1) + (x_2 , y_2) = (x_1 + x_2, \ y_1 + y_2)$ (Professor(a), essa é a forma correta. Solicite que os alunos façam a correção.)

$(x_1 , y_1) \cdot (x_2 , y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, \ x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$

Os números complexos (x, y) se comportam como números reais para adição e produto, assim, podemos estabelecer a seguinte relação: (x, 0)=x

Usaremos o símbolo i para representar o número complexo (0, 1), podendo escrever qualquer número complexo (x, y) da maneira a seguir:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy$$

Assim como (x, 0) é igual a x, (–1, 0) é igual –1.

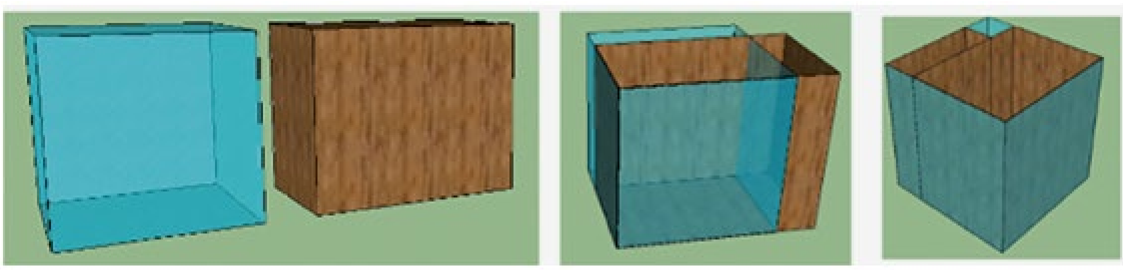
$$(-1, 0) = -1$$

$$i^2 = (-1, 0)$$

$$i^2 = -1$$

Um problema interessante...

Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta x, outra com a forma de um paralelepípedo com a base retangular, de lados 3 dm e 5 dm, e de altura igual à altura do cubo. O valor de x deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja 4 dm^3 maior que o volume do paralelepípedo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Escrevendo uma equação que traduz a exigência a ser satisfeita pelo valor de x no problema acima, podemos pensar:

- O volume do cubo de aresta x é igual a x^3;
- O volume do paralelepípedo de base 15 dm^2 e aresta x é igual a 15x;
- O volume do cubo precisa ser 4 dm^3 maior do que o volume do paralelepípedo;
- A equação $x^3 = 15x + 4$, ou seja, $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Agora que temos a equação que representa a situação descrita no problema, precisamos achar um jeito de resolvê-la, e uma maneira muito curiosa, mas não muito usual, seria recorrer à história da matemática e à origem dos números complexos.

Para saber mais sobre os conceitos em números complexos, consulte o *site* recomendado a seguir:

Origem dos números complexos. Matemática Complexa. Disponível em:
<https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/iniciodoprojeto/origem-dos-numeros-complexos>.
Acesso em: 22 abr. 2019.

Em uma das passagens da História da Matemática, ocorre um fato muito curioso entre Niccolò Fontana, conhecido como Tartaglia, e Girolano Cardano.

> " ...chega aos ouvidos de Girolamo Cardano que Tartaglia sabia resolver tal tipo de equação. Cardano implorou a fórmula para resolver estas equações. Tartaglia recusou e acabou sendo acusado de ser mesquinho e egoísta. Com a insistência de Cardano, e jurando que não divulgaria o resultado, Tartaglia revelou a solução. Porém, Cardano não cumpriu com sua palavra, e em 1545, fez a publicação no livro Ars Magna com o seguinte problema: 'Determinar dois números cuja soma seja 10 e o produto seja 40', e o resolve através dos radicais, de maneira similar às equações de 2° grau. Ele somente fez uma menção de Tartaglia na sua obra e, até hoje, a fórmula é conhecida como 'Fórmula de Cardano'. Esta descoberta foi tão inusitada que ficou conhecida como o início da matemática moderna[1]"

A fórmula de "Cardano-Tartaglia" para determinar as raízes da equação do 3° grau do tipo $y^3 + Mx + N = 0$ ficou da seguinte forma:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{2} + \frac{M^3}{27}}}}$$

Caso tenha interesse em saber como é possível chegar na fórmula, a mesma se encontra no Caderno do Professor volume 1, da 3ª série do Ensino Médio.

Calculando o valor de x pela fórmula de "Cardano-Tartaglia" para equações de 3° grau, obtemos:

---

[1] Fonte: Origem dos números complexos. Matemática Complexa. Disponível em: <https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/iniciodoprojeto/origem-dos-numeros-complexos>. Acesso em: 22 abr. 2019.

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

E agora, como fica a solução? Pela fórmula, parece não existir raiz da equação, uma vez que nos deparamos, durante os cálculos, com a raiz quadrada de um número negativo. Porém, quando verificamos o valor 4 para x, temos:

- O volume do cubo de aresta 4 dm é igual a $4^3 = 64\ dm^3$;
- O volume do paralelepípedo de base 15 dm^2 e aresta 4 dm é igual a 60 dm^3;
- O volume do cubo deve ser 4 dm^3 maior do que o volume do paralelepípedo;
- A equação $x^3 = 15x + 4$, ou seja $x^3 - 15x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4^3 - 15 \cdot (4) - 4 = 0$ (verdadeiro).

Observe que podemos escrever $-121 = 121 \cdot (-1)$, e a raiz quadrada de 121 é 11, só falta saber a raiz quadrada de -1. Como –1 não tem raiz real, vamos considerar que sua raiz é um número imaginário, que representaremos por i.

Assim, i é um número tal que $i^2 = -1$.

Agora, podemos escrever $\sqrt{-121} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1} = 11 \cdot i$

Substituindo $\sqrt{-121}$ por 11i na expressão

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\text{, obtemos:}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$

Usando o fato de que a raiz cúbica de um número é outro número que, elevado ao cubo, reproduz o primeiro, mostre que 2 + i é uma raiz cúbica de 2 + 11i. Ou seja, mostre que $(2 + i)^3 = 2 + 11i$.

Vamos elevar ao cubo o "número" 2 + i, que é composto por uma parte real e uma parte imaginária, e verificar que, efetuados os cálculos, obtemos $(2 + i)^3 = 2 + 11i$.

De fato, temos:

$(2 + i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3$

$(2 + i)^3 = 8 + 12 \cdot i + 6 \cdot i^2 + i^2 \cdot i$

Como $i^2 = -1$, então: $(2 + i)^3 = 8 + 12i + 6 \cdot (-1) + (-1) \cdot i$

Ou seja, $(2 + i)^3 = 2 + 11i$

Substituindo os valores das raízes cúbicas encontradas, temos:

$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$, ou seja, $x = 2 + i + 2 - i = 4$.

Assim, reconciliamos a fórmula com o **fato** de que a equação tinha x = 4 como uma de suas raízes.

Pensando nas equações do 2º grau.

Normalmente, quando resolvemos uma equação do 2º grau completa, usamos a fórmula de Bháskara, onde inevitavelmente nos deparamos com a extração de raiz quadrada, o que não é muito complicado para chegar ao resultado. O problema surge quando essa raiz é de um número negativo e temos que recorrer a outros métodos para resolver a questão.

Veja o exemplo abaixo:

$x^2 - 6x + 10 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Note que:

$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4}$

Sabendo que:

$-1 = i^2$

então,

$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{i^2} \cdot \sqrt{4} = i \cdot 2$

A solução foi representar a raiz quadrada de -1 como um número imaginário *i*, e a resposta para a equação é:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} \Rightarrow x' = 3 + i \text{ e } x'' = 3 - i$$

ATIVIDADE 1

Considerando os números complexos como recurso para dar sentido ao cálculo de equações algébricas, composto por parte real x e parte imaginária **yi**, sendo $i = \sqrt{-1}$, encontre os valores das raízes a seguir:

a) $\sqrt{-121}$

b) $\sqrt{-16}$

c) $\sqrt{-49}$

d) $\sqrt{-25}$

Resolução:

a)

$\sqrt{-1} \,.\, \sqrt{121} = \sqrt{i^2} \cdot \sqrt{121}$

$i \cdot 11 = 11i$

b)

$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{i^2} \cdot \sqrt{4}$

$i \cdot 2 = 2i$

c) $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{49} = \sqrt{i^2} \cdot \sqrt{49}$

$i \cdot 7 = 7i$

d)

$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{i^2} \cdot \sqrt{25}$

$i \cdot 5 = 5i$

ATIVIDADE 2

Vamos supor que possamos continuar a operar com os números complexos como se opera com os números reais, respeitando-se apenas a novidade que decorre do fato de termos $i^2 = -1$. Determine as soluções para as situações a seguir:

a) i^7

b) $i^5 + i^8$

c) $i^4 + i^9 - i^6$

d) $(-1 + i)^3$

Resolução:

a)

$i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i =$

$= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot i =$

$= (+1) \cdot (-1) \cdot i =$

$-1i = -i$

b)

$i^5 = i^2 \cdot i^2 \cdot i = (-1) \cdot (-1) \cdot i = +1i = i$

$i^8 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$

$i^5 + i^8 = i + 1$

c)

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = +1$

$i^9 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i =$

$= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot i =$

$= (+1) \cdot i = i$

$i^6 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) . (-1) = -1$

$i^4 + i^9 - i^6 = +1 + i - (-1) = 2 + i$

d)

$(-1 + i)^3 =$

$(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 \cdot i + 3 \cdot (-1) \cdot i^2 + i^3 =$

$= -1 + 3i - 3i^2 + i^3 = -1 + 3i - 3i^2 + \left(i^2 \cdot i\right) =$

$= -1 + 3i - 3 \cdot (-1) + \left((-1) \cdot i\right) =$

$= -1 + 3 + 3i - i = 2 + 2i$

ATIVIDADE 3

Efetue as operações a seguir, supondo que são válidas as propriedades das operações com números reais para os números formados por uma parte real e uma parte imaginária:

a) $(5 - 3i) + (-3 + 4i)$

b) $(7i - 5) - (-2 - 8i)$

c) $(2i - 4) \cdot (3 + 6i)$

d) $(8 + i) \cdot (8 - i)$

Resolução:

a) $(5 - 3i) + (-3 + 4i)$

$5 - 3i - 3 + 4i = 5 - 3 - 3i + 4i = \mathbf{2 + i}$

b) $(7i - 5) - (-2 - 8i)$

$7i - 5 + 2 + 8i = -5 + 2 + 8i + 7i = \mathbf{-3 + 15i}$

c) $(2i - 4) \cdot (3 + 6i)$

$6i + 12i^2 - 12 - 24i = 12i^2 - 18i - 12 =$

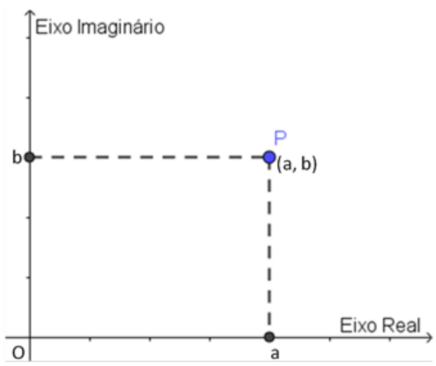
$12 \cdot (-1) - 18i - 12 = \mathbf{-24 - 18i}$

d) $(8 + i) \cdot (8 - i)$

$\left(64 - i^2\right) = 64 - (-1) = 65$

Plano de Argand - Gauss

A representação geométrica de um número complexo foi associada aos estudos dos matemáticos Wessel, Argand e Gauss. Os números a e b do número complexo a + bi (sendo *a* a parte real e *b* a parte imaginária) são associados a coordenadas de um ponto no plano, criando uma representação geométrica para o complexo.

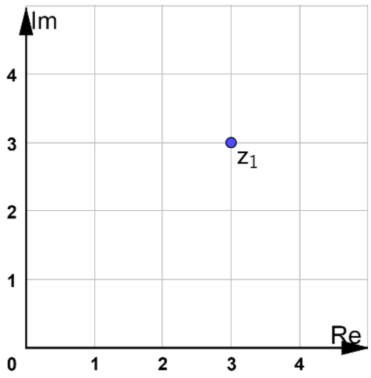


Fonte: Elaborada pelo autor.

ATIVIDADE 4

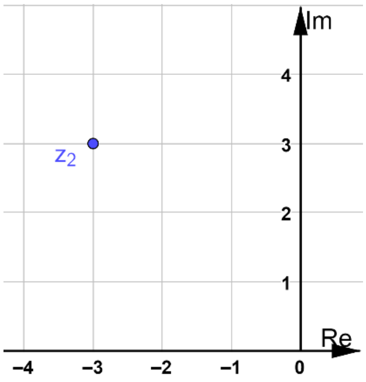
Dados os complexos a seguir, represente-os no plano complexo.

a) $z_1 = 3 + 3i$



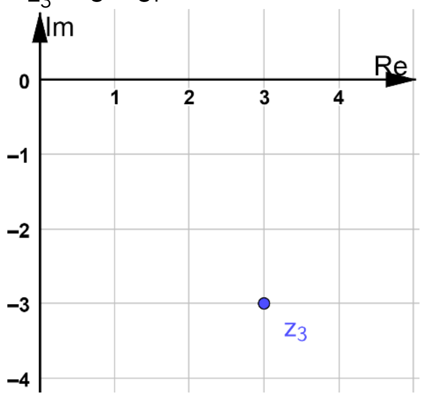
Fonte: Elaborado pelo autor.

b) $z_2 = -3 + 3i$



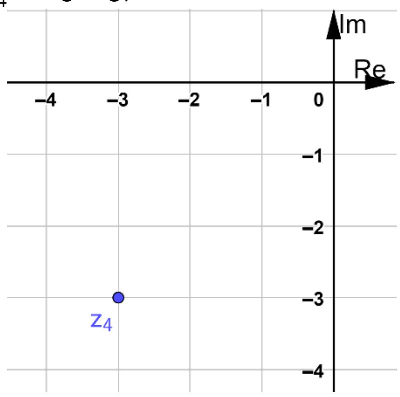
Fonte: Elaborado pelo autor.

c) $z_3 = 3 - 3i$



Fonte: Elaborado pelo autor.

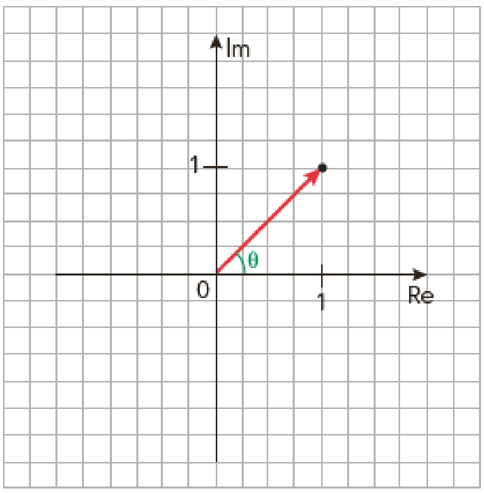
d) $z_4 = -3 - 3i$



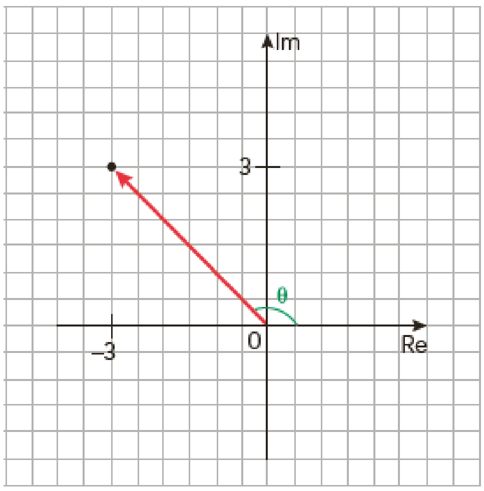
Fonte: Elaborado pelo autor.

ATIVIDADE 5

Observe os números complexos $a + b_i$ representados no plano de *Argand–Gauss* e determine, para cada um, a medida do ângulo θ e do segmento que une o ponto (a; b) à origem do sistema.



Fonte: Elaborada pelo autor.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução:

a) $z = 1 + i$

$p^2 = a^2 + b^2$

$p^2 = 1^2 + 1^2$

$p^2 = 1 + 1$

$p = \sqrt{2}$

$\Theta = Arg\ (z)$

$$tg\ \Theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$tg\ \Theta = \frac{1}{1} = 1$$

Assim sendo, $\Theta = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad

b) $z = -3 + 3i$

$p^2 = a^2 + b^2$

$p^2 = (-3)^2 + 3^2$

$p^2 = 9 + 9$

$p = \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} \Rightarrow p = 3\sqrt{2}$

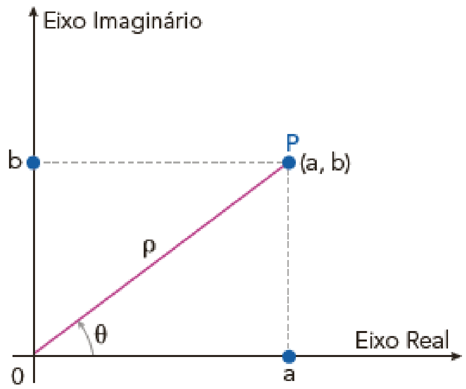
$\Theta = Arg\ (z)$

$$tg\Theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$tg\Theta = \frac{-1}{1} = -1$$

Assim sendo, $\Theta = 135° = \frac{3\pi}{4}$ rad

O ponto P é a imagem geométrica ou afixo do número complexo (a + bi)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na imagem acima, foi evidenciada a distância de P até origem O representada pela letra grega ρ(Rho). Esse segmento ρ representa o módulo do número complexo (a + bi) e pode ser encontrado usando o Teorema de Pitágoras, em que a e b representam os catetos do triângulo, e ρ, a hipotenusa. O ângulo formado entre o Eixo Real e o seguimento ρ, aqui representado pela letra grega Θ(theta), é o argumento do número complexo (a + bi). Determinado o triângulo retângulo aOP, podemos fazer uso das razões trigonométricas estudadas nos anos anteriores, mais especificamente sen Θ, cos Θ e tg Θ.

$$\text{sen}\ \theta = \frac{b}{\rho}\ ,\ \cos\ \theta = \frac{a}{\rho}\ ,\ tg\ \theta = \frac{a}{b}$$

Possibilitando a representação trigonométrica ou polar do complexo (a + bi), temos:

$$\rho \cdot (\cos\ \theta + i \cdot \text{sen}\ \theta)$$

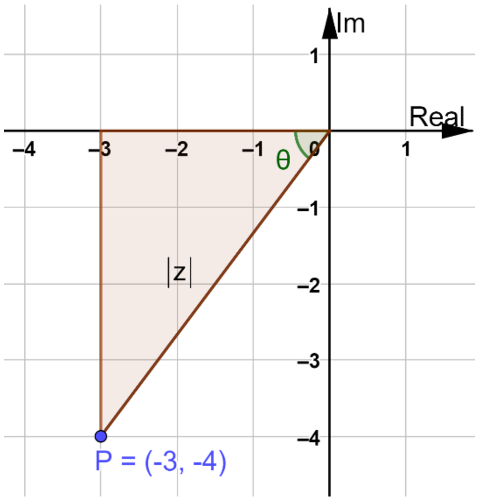
ATIVIDADE 6

Determine o argumento do número complexo $z = -3 - 4i$.

θ	tg θ
50°	1,1918
51°	1,2349
52°	1,2799
53°	1,3270
54°	1,3764
55°	1,4281
56°	1,4826

Professor(a), na ocasião da aplicação da atividade, solicitamos que corrija o valor da tangente do arco de 53° para: 1,3333...

Resolução:



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para determinar o argumento do número complexo $z = -3 - 4i$, precisamos calcular o valor de $|z|$. Como $a = -3$ e $b = -4$, teremos:

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Segue que:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{-4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} = \frac{-3}{5}$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{-4}{5} \cdot \frac{5}{-3} = \frac{-4}{-3} = 1{,}3333...$$

Portanto, o argumento (θ) será o arco cuja tangente é 1,3333, que é aproximadamente a 53,13°.

ATIVIDADE 7

Professor(a), ao aplicar esta atividade, informe aos alunos o seguinte enunciado:

Represente no plano complexo os números a seguir e, em seguida, escreva-os na forma trigonométrica:

a) $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$

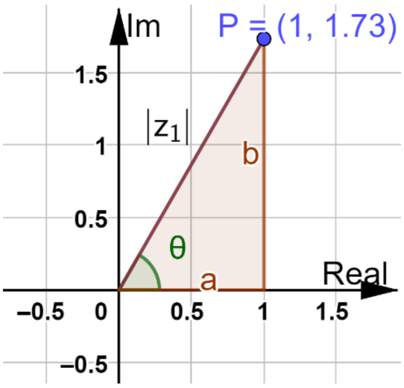
b) $z_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$

c) $z_3 = -\sqrt{3} + 3i$

d) $z_4 = \sqrt{3} - i$

Resolução:

a) $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$|z_1| = \left|\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}\right| = \left|\sqrt{1+3}\right| = \left|\sqrt{4}\right| = 2$$

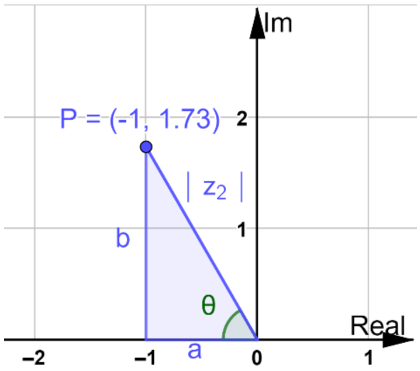
$$\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60° \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\boxed{\therefore z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)}$$

b) $z_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$|z_2| = \left|\sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}\right| = \left|\sqrt{1+3}\right| = \left|\sqrt{4}\right| = 2$$

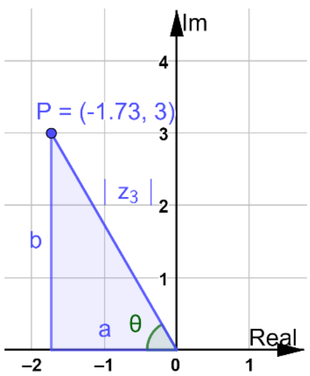
$$\text{sen}\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot -\frac{2}{1} = -\sqrt{3}\ \text{(3° quadrante)} \Rightarrow \theta = 60° \text{ ou } \theta = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad}$$

$$\boxed{\therefore z_2 = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)}$$

c) $z_3 = -\sqrt{3} + 3i$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$|z_3| = \left|\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2}\right| = \left|\sqrt{3+9}\right| = \left|\sqrt{12}\right| = 3\sqrt{2}$$

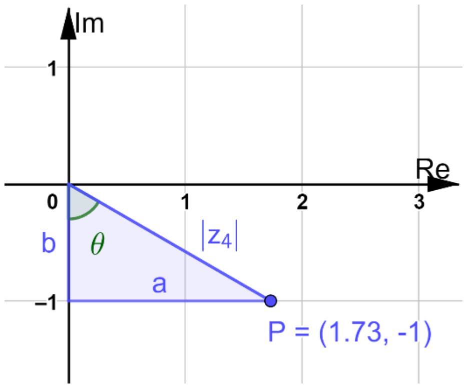
$\text{sen } \theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$

$\text{tg } \theta = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{3\sqrt{2}}{-\sqrt{3}} = \dfrac{6}{-2\sqrt{3}} = -\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$ (2° quadrante) $\Rightarrow \theta = 60° = \dfrac{2\pi}{3}$ rad

$\boxed{\therefore z_3 = 3\sqrt{2} \cdot \left(\cos \dfrac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\, \dfrac{2\pi}{3}\right)}$

d) $z_4 = \sqrt{3} - i$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$|z_4| = \left|\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2}\right| = \left|\sqrt{3+1}\right| = \left|\sqrt{4}\right| = 2$

$\text{sen } \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \theta = -\dfrac{1}{2}$

$\text{tg } \theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot -\dfrac{2}{1} = -\sqrt{3}$ (4° quadrante) $\Rightarrow \theta = 60° = \dfrac{5\pi}{3}$ rad

$\boxed{\therefore z_4 = 2 \cdot \left(\cos \dfrac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\, \dfrac{5\pi}{3}\right)}$

Tema 2: Das fórmulas à análise quantitativa – coeficientes e raízes

Uma equação de 1º grau com uma raiz igual a p pode ser assim escrita:

$$x - p = 0.$$

Uma equação de 2º grau com uma raiz igual a p e outra raiz igual a m pode ser assim escrita:

$$(x - p) \cdot (x - m) = 0$$

Escrita dessa maneira, dizemos que a equação está em sua forma fatorada. Aplicando a propriedade distributiva nessa expressão, obtemos:

$$x^2 - \underbrace{(p + m)}_{\text{Soma de raízes}}x + \underbrace{pm}_{\text{Produto de raízes}} = 0$$

Exemplos práticos

Considere a equação do 2º grau , $x^2 - 5x + 6 = 0$. Não é difícil verificar que os valores 2 e 3 são raízes da equação, pois satisfazem a igualdade:

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \Rightarrow 10 - 10 = 0$$

$$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0 \Rightarrow 15 - 15 = 0$$

As raízes 2 e 3, quando somadas, dão resposta 5, e quando multiplicadas, dão resposta 6.

De forma reduzida, podemos escrever:

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Agora é com você.

Na equação $x^2 - 7x + 12 = 0$, quais seriam as raízes?

- Quais são os números cuja soma é 7 e o produto é 12?

Resolução:
$4 + 3$ e $4 \cdot 3$

Formalizando:

Uma forma genérica de se escrever uma equação do 2º grau é $ax^2 + bx + c = 0$. Comparando a forma generalizada com a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, podemos estabelecer uma relação de correspondência, como a seguinte:

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 6$$

E pensando na soma e produto das raízes, temos que:

- Quando o valor do coeficiente **a** for diferente de 1, uma opção para a resolução do problema é dividir toda equação por a, obtendo assim $a = 1$;
- O coeficiente c é o produto das raízes, quando $a = 1$, então as raízes são divisores de **c**;
- 6 tem como divisores inteiros (–1, 1, –2, 2, –3, 3, –6, 6). De fato, de todos os divisores de 6, temos 2 e 3, que são raízes da equação.

ATIVIDADE 1

Professor(a) no Caderno do Aluno, esta atividade consta como 5, porém solicitamos que considerem como Atividade 1.

Encontre ao menos uma raiz das seguintes equações de 3º grau:

a) $x^3 + x - 10 = 0$

b) $x^3 - 5x + 6x = 0$

c) $8 + x^3 = 0$

d) $2x^3 + 4x - 2x - 4 = 0$

Resolução:

a) $x^3 + x - 10 = 0$

Pode-se constatar que a equação acima possui apenas uma raiz, conforme segue:

Para $x = 2$, temos: $2^3 + 2 - 10 = 8 + 2 - 10 = 0$

b) $x^3 - 5x + 6x = 0$

Agrupando os termos semelhantes, temos: $x^3 + x = 0$. Desta forma, a única raiz será $x = 0$

c) $8 + x^3 = 0$. A única raiz da equação será $x = -2$, pois: $x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$

d) $2x^3 + 4x - 2x - 4 = 0$

Agrupando os termos semelhantes, temos: $2x^3 + 2x - 4$, e pode-se verificar que a soma dos coeficientes é igual a 0. Então, concluímos que $x = 1$ é a raiz da equação, pois: $2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 - 4 = 2 + 2 - 4 = 0$.

Formas fatoradas de equações polinomiais de grau 2, 3 e 4.

Você sabia que quando conhecemos as raízes de uma dada equação polinomial podemos escreve-la na forma fatorada?

Sim, no caso de uma equação polinomial de grau 2, $ax^2 + bx + c = 0$, de raízes r_1 e r_2, sabemos que, após a divisão de todos os coeficientes por **a**, ela pode ser escrita na forma $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, que podemos imaginar fatorada e escrita na forma $(x - r_1) \cdot (x - r_2) = 0$. Ou seja:

- $x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2 = 0$. Então:
- $x^2 - S_1x + S_2 = 0$, onde $S_1 = r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ é a soma das raízes e $S_2 = r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$ é o produto das raízes.

No caso de uma equação de 3º grau, temos $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Mesmo sem conhecer fórmulas para as soluções, se a equação tiver como raízes r_1, r_2 e r_3, procedendo de maneira análoga ao que fizemos para a equação polinomial de grau 2, após a divisão por a de todos os seus coeficientes, ela pode ser escrita na forma $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$, que poderíamos imaginar na forma fatorada e escrita como:

$$(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) = 0$$

Efetuando as multiplicações indicadas e ordenando os resultados, obtemos a forma equivalente:

$$x^3 - (r_1 + r_2 + r_3) \cdot x^2 + (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3)x - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

ou seja:

$$x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$$

onde:

$$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 \text{ é a soma das raízes,}$$

$$S_2 = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 \text{ é a soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas}$$

e $S_3 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ é a soma dos produtos das raízes tomadas três a três, ou seja, é o produto das raízes.

Por exemplo, se uma equação polinomial de grau 3 tiver como raízes 2, 3 e 5, então ela poderá ser escrita na forma:

$$(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-5) = 0$$

e ao efetuarmos as multiplicações, obtemos:

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0;$$

Podemos notar que $S_1 = 2 + 3 + 5 = 10$,

$$S_2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 31$$

$$S_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

ou seja, a equação pode ser escrita na forma:

$$x^3 - S_1x - S_3 = 0$$

Se procedermos analogamente no caso de uma equação de 4° grau: $ax^4+bx^3+cx^2+dx + e = 0$, de raízes r_1, r_2, r_3 e r_4 , chegaremos à forma equivalente:

$$x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$$

onde:

$$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

$$S_2 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4$$

$$S_3 = r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4$$

$$S_4 = r_1r_2r_3r_4$$

Tal relação pode ser generalizada para uma equação algébrica de grau **n**. É importante notar a alternância nos sinais das somas S: as somas das raízes tomadas de 1 em 1, de 3 em 3, de 5 em 5, ... aparecem como coeficientes na equação com o sinal trocado; as somas de 2 em 2, de 4 em 4, de 6 em 6, ... aparecem como coeficientes com o próprio sinal.

Essas relações entre as raízes e sua forma fatorada são conhecidas como as Relações de Girard.

ATIVIDADE 2

Professor(a), no Caderno do Aluno esta atividade consta como 1, porém solicitamos que considerem como Atividade 2.

Levando em consideração os apontamentos anteriormente descritos, e considerando o quadro de soma e produto das raízes para equações polinomiais de graus maiores que 2, responda:

a) Escreva na forma fatorada uma equação de 3° grau com raízes **m**, **p** e **k.**

b) Escreva na forma fatorada de uma equação de 3° grau com raízes 2, 3 e 4.

c) Desenvolva a equação do item anterior aplicando a propriedade distributiva e identifique a soma e o produto das raízes na equação final.

d) Como foi descrito anteriormente, uma equação polinomial de grau 3 pode ser escrita da seguinte maneira: $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$. Retome a equação do item c e responda quanto é nessa equação:

$\frac{b}{a}$? ____

$\frac{c}{a}$? ____

$\frac{d}{a}$? ____

Resolução:

a) $(x - m) \cdot (x - p) \cdot (x - k) = 0$

b) $(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

c)

$x^3 - (2 + 3 + 4)x^2 + (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4)x - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0$

$$x^3 - \underbrace{9x^2}_{\text{Soma das raízes}} + 26x - \underbrace{24}_{\text{Produto das raízes}}$$

d)

$\frac{b}{a}$: é igual à soma das raízes da equação com sinal trocado.

$\frac{c}{a}$: é igual à soma dos produtos das raízes duas a duas.

$\frac{d}{a}$: é igual ao produto das raízes com o sinal trocado.

ATIVIDADE 3

Professor(a), no Caderno do Aluno esta atividade consta como 2, porém solicitamos que considerem como Atividade 3.

Já vimos que uma equação polinomial de grau 3 $\mathbf{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$ pode ser escrita na forma:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

E também que, se essa equação tiver como raízes r_1, r_2, r_3, ela pode ser fatorada e escrita na forma:

$$(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) = 0$$

Efetuando as multiplicações indicadas e ordenando os resultados, obtemos a forma equivalente:

$$x^3 - \underbrace{(r_1 + r_2 + r_3)}_{S_1}x^2 + \underbrace{(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)}_{S_2}x - \underbrace{(r_1r_2r_3)}_{P} = 0$$

onde $S_1 = r_1 + r_2 + r_3$ é a soma das raízes, $S_2 = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3$ é a soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas e $P = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ é a soma dos produtos das raízes tomadas três a três, ou seja, é o produto das raízes.

a) Se uma equação polinomial de grau 3 tem como raízes –2, 3 e 4, calcule $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$ e $\mathbf{P}$.

b) Escreva a equação na forma fatorada.

c) Aplicando a propriedade distributiva e eliminando os parênteses na equação do item anterior, qual será a forma final da equação obtida?

Resolução:

a)

$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 = -2 + 3 + 4 = 5$

$S_2 = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 4 = -6 - 8 + 12 = -2$

$P = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -2 \cdot 3 \cdot 4 = -24$

b)

$(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

c)

$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$

ATIVIDADE 4

Professor(a), no Caderno do Aluno esta atividade consta como 3, porém solicitamos que considerem como Atividade 4.

Uma equação polinomial de grau 3 tem como raízes 2, 3 e 5. Escreva essa equação na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Resolução:

$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 = 2 + 3 + 5 = 10$

$S_2 = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 6 + 10 + 15 = 31$

$P = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

Equação: $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$

ATIVIDADE 5

Professor(a), no Caderno do Aluno esta atividade consta como 4, porém solicitamos que considerem como Atividade 5.

Escreva na forma fatorada uma equação algébrica de grau 4 cujas raízes são:

a) 2, 3, 4 e 5;

b) –2, 3, 4 e –5;

c) 1, 0, 3 e 7.

Resolução:

a) $(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) \cdot (x - 5) = 0$

b) $(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) \cdot (x + 5) = 0$

c) $(x - 1) \cdot x \cdot (x - 3) \cdot (x - 7) = 0$

ATIVIDADE 6

Escreva todas as equações da Atividade 5 na forma: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Para isso, faça as multiplicações que forem indicadas.

Professor(a), na ocasião da aplicação da atividade, solicitamos que corrija a equação, como indicada no enunciado.

Resolução:

Da equação: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, vamos dividir todos os coeficientes por a, então temos:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$$

onde:

$$\frac{b}{a} = -(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$$

$$\frac{c}{a} = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4 + r_3 \cdot r_4$$

$$\frac{d}{a} = -(r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_3 \cdot r_4)$$

$$\frac{e}{a} = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4$$

Aplicando aos itens da atividade anterior, teremos:

a)

Calculando as somas das raízes tomadas 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3 e 4 a 4, temos

$S_1 = -(2 + 3 + 4 + 5) = -14$

$S_2 = (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5) = (6 + 8 + 10 + 12 + 15 + 20) = 71$

$S_3 = -(2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5) = -(24 + 30 + 40 + 60) = -154$

$S_4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

A equação cujas raízes são: 2, 3, 4 e 5 será dada por: $x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$

b)

Da mesma maneira, temos:

$S_1 = -(-2 + 3 + 4 - 5) = 0$

$S_2 = (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-5) + 3 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) + 4 \cdot (-5) = (-6) + (-8) + 10 + 12 + (-15) + (-20) = -27$

$S_3 = -\big((-2) \cdot 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 + (-5) + (-2) \cdot 4 \cdot (-5) + 3 \cdot 4 \cdot (-5)\big) =$

$= -\big((-24) + 30 + 40 + (-60)\big) = -(-14) = 14$

$S_4 = (-2) \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-5) = 120$

A equação cujas raízes são: –2, 3, 4 e –5 será dada por: $x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$

c)

Efetuando os cálculos, temos:

$S_1 = -(1 + 0 + 3 + 7) = -11$

$S_2 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 3 + 7 + 21 = 31$

$S_3 = -(1 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 7 + 0 \cdot 3 \cdot 7) = -21$

$S_4 = 1 \cdot 0 \cdot 3 \cdot 7 = 0$

A equação cujas raízes são: 1, 0, 3 e 7 será dada por: $x^4 - 11x^3 + 31x^2 - 21x = 0$

ATIVIDADE 7

Dada a equação polinomial $x^3 - 8x^2 + kx - 24=0$, responda:

a) Quais são as possíveis raízes inteiras da equação?

b) Se a equação tiver duas raízes simétricas, qual será a terceira raiz?

c) Se uma das raízes for o inverso da outra, qual será a terceira raiz?

d) É possível que a equação tenha uma raiz nula?

Resolução:

a)

Observando os coeficientes, concluímos que 24 é igual ao produto das três raízes. Logo, os divisores de 24 são possíveis raízes inteiras da equação, ou seja, ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12 e ±24. Naturalmente, dependendo do valor de **k,** tal equação pode não admitir qualquer um desses divisores como raiz. O que se pode afirmar é precisamente o fato de que, se houver raiz inteira, ela terá de ser um dos divisores de 24.

b)

Como a soma das raízes simétricas é zero e a soma das três raízes é 8, então a terceira raiz deverá ser igual a 24.

c)

Como o produto das duas raízes inversas é igual a 1 e o produto das três raízes é 24, então a terceira raiz deverá ser igual a 24.

d)

Não é possível que a equação tenha raiz nula, pois, nesse caso, o produto das raízes seria zero, e já vimos que o produto das raízes é igual a 24.

ATIVIDADE 8

Considere a equação polinomial $3x^4 - 12x^3 + kx^2 - 6x + 3 = 0$.

a) Quais são as possíveis raízes inteiras da equação?

b) Quais são os valores de **k** que fazem com que a equação proposta tenha raízes inteiras?

Resolução:

a)

Dividindo os coeficientes da equação por 3, que é o coeficiente do termo de maior grau, obtemos a equação equivalente (com as mesmas raízes) expressa na forma:

$$x^4 - 4x^3 + \frac{k}{3}x^2 - 2x + 1 = 0$$

Comparando com a forma $x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$, concluímos que o produto das raízes da equação é igual a $S_4 = 1$. Logo, as possíveis raízes inteiras da equação são os divisores de 1, ou seja, +1 ou –1.

b)

Para que a equação tenha raízes inteiras, ou seja, para que ela tenha +1 ou –1 como raízes, quando substituirmos os valores de **x** por +1 ou por –1 no primeiro membro da equação, o resultado deve ser igual ao segundo membro, ou seja, zero.

Para $x = 1$, temos:

$$1^4 - 4 \cdot 1^3 + \frac{k}{3} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0, \text{ ou seja } k = 12$$

Para $x = -1$, temos:

$(-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 + \frac{k}{3} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1$, ou seja $k = -24$

ATIVIDADE 9

Sabendo que 1 é raiz da equação $x^3 + 7x^2 + kx - 15 = 0$, determine o valor de **k** e encontre as outras raízes.

Resolução:

Como 1 é raiz, substituindo **x** por 1 devemos ter a igualdade verdadeira, logo, $1 + 7 + k - 15 = 0$, e então, $k = 7$.

Como a soma das três raízes é igual a –7, sendo uma delas igual a 1, a soma das outras duas deve ser igual a –8.

Como o produto das três raízes é igual a 15, sendo uma delas igual a 1, o produto das outras duas é igual a 15.

Logo, além da raiz dada $r_1 = 1$, as outras duas raízes da equação são tais que sua soma é –8 e seu produto é 15, sendo as raízes da equação de segundo grau $x^2 + 8x + 15 = 0$.

Resolvendo tal equação, obtemos $r_2 = -3$ e $r_3 = -5$.

Concluímos que a equação proposta no enunciado tem como raízes os números reais 1, –3 e –5.

Observação:

Outras atividades como as anteriores podem ser propostas, mas lembramos que não interessa tanto, nesse caso, a realização de muitos cálculos, quanto, por exemplo, a percepção do fato de que, conhecendo uma raiz da equação, é possível reduzi-la a uma equação mais simples

Equações e polinômios: divisão por x – k e redução do grau de uma equação polinomial.

Como se sabe, um polinômio de grau **n** é uma expressão algébrica do tipo:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \text{ com } a_0 \neq 0$$

Então, uma equação algébrica também pode ser chamada uma equação polinomial, uma vez que ela pode ser escrita na forma $P(x) = 0$, sendo $P(x)$ um polinômio.

Dessa forma, se o valor de $P(x)$ para $x = k$, que indicaremos por $P(k)$, for igual a zero, ou seja $P(k) = 0$, então isso significa que **k** é uma raiz da equação polinomial $P(x) = 0$.

Sendo $P_1(x)$ um polinômio e $P_2(x)$ outro polinômio, podemos ter o caso de $P_1(x) = P_2(x)$ para alguns valores particulares de x, e $P_1(x) \neq P_2(x)$ para outros valores de x.

Por exemplo:

$P_1(x) = x^2 + 3x - 1$ e $P_2(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 13$, então temos:

$P_1(2) = 9$ e $P_2(2) = 9$, mas $P_1(0) = -1$ e $P_2(0) = 13$

Quando dois polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são tais que, para todos os valores possíveis para x, temos $P_1(x) = P_2(x)$, então dizemos que os polinômios são idênticos, e escrevemos $P_1(x) \equiv P_2(x)$.

Sendo $P_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + \cdots + a_n$ um polinômio de grau n e $P_2(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + b_3x^{m-3} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$ outro polinômio de grau m, para termos $P_1(x) \equiv P_2(x)$, ou seja, para os dois polinômios serem iguais para todos os valores de x, tal como $a_n = b_m$, pois $a_n = P_1(0)$ e $b_m = P_2(0)$, podemos mostrar que a igualdade entre os dois polinômios para todos os valores de x obriga a igualdade de todos os coeficientes dos termos de mesmo grau, ou seja:

$a_n = b_m$; $a_{n-1} = b_{m-1}$; $a_{n-2} = b_{m-2}$, e assim por diante.

Em consequência, dois polinômios idênticos devem ser sempre do mesmo grau, uma vez que, se forem de graus diferentes, os coeficientes dos termos de maior grau serão distintos, um deles será zero, e o outro diferente de zero.

Por exemplo, podemos ter $P_1(x) = x^2 + 3x - 1$ e $P_2(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 13$ iguais para alguns valores de x, ou seja, não é verdade que $P_1(x) \equiv P_2(x)$ nesse caso, pois os termos de grau 3 são distintos (1 em $P_2(x)$ e 0 em $P_1(x)$).

Operações com polinômios.

Para somar, subtrair e multiplicar polinômios, basta operar com as expressões algébricas que compõem suas parcelas, que são os monômios. Assim, é necessário realizar as operações indicadas recorrendo à propriedade distributiva quando for o caso, e reunir os termos que correspondem a potências de **x** de mesmo grau, chamados "termos semelhantes".

ATIVIDADE 1

Considere os polinômios $A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$.

Professor(a), solicitamos que considere o polinômio A(x) conforme a indicação acima.

a) Calcule A(1) e B(1).

b) Calcule **x** para que A(x) = 0.

c) Se **a**, **b** e **c** forem raízes de B(x), quanto é o produto de $a \cdot b \cdot c$?

d) É possível termos A(x) = B(x)?

e) É possível termos $A(x) \equiv B(x)$?

Resolução:

a)

$A(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 \Rightarrow A(1) = 0$
$B(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = B(1) = -2$

b)

$A(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

c)

O produto das raízes (a, b e c) do polinômio B(x) é –2.

d)

Sim, é possível.

Resolvendo a equação algébrica A(x) = B(x), temos: $x^2 - 3x + 2 = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$; logo, $x^3 - 3x^2 = 0$. Fatorando, obtemos $x \cdot x \cdot (x - 3) = 0$, portanto, para o produto ser nulo, um dos fatores deve ser nulo, ou seja, ou x = 0, ou x = 0 (0 é uma raiz dupla), ou então x = 3. Logo, a equação A(x) = B(x) tem como raízes 0 e 3. Para todos os valores de **x** diferentes de 0 e de 3, os polinômios A(x) e B(x) assumem valores distintos.

e)

Não. Os polinômios têm graus diferentes. Em consequência, os coeficientes de $\mathbf{x^3}$ são diferentes em A(x) e B(x).

ATIVIDADE 2

Considere os polinômios $A(x) = x^3 - 3x + 2$ e $B(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10$.

a) É possível termos $A(x) = B(x)$?

b) É possível termos $A(x) \equiv B(x)$?

Resolução:

a)

Sim. Basta resolver a equação correspondente: $x^3 - 3x + 2 = x^3 - 2x^2 - 3x + 10$. Efetuando os cálculos, obtemos: $2x^2 = 8$, e então, $x = \pm 2$.

b)

Não, pois os coeficientes de $\mathbf{x^2}$ são diferentes nos dois polinômios.

ATIVIDADE 3

Considere os polinômios:

$P_1(x) = ax^5 - 11x^4 - 2x^3 + 7x^2 + bx + d$

$P_2(x) = bx^5 + bx^4 + cx^3 - 2x^3 + 7x^2 - \sqrt{3}x + d$

a) Determine os valores de **a**, **b** e **c**, de modo que os polinômios sejam idênticos.

b) Calcule o valor de **d**, sabendo que –1 é raiz da equação $P_1(x) = 0$.

Resolução:

a)

Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau, temos:
$a = b$, $c = -11$ e $b = -\sqrt{3} = a$

b)

Se 1 é raiz da equação $P_1(x)=0$, então devemos ter $P_1(x) = 0$. Logo, substituindo **x** por –1, e igualando o resultado a zero, obtemos:

$$-\sqrt{3} \cdot (-1)^5 - 11 \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 - \sqrt{3} \cdot (-1) + d = 0$$

Concluímos, efetuando os cálculos, que $\boxed{d = 2 - 2\sqrt{3}}$

ATIVIDADE 4

Considere o polinômio $P(x)= 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12$

a) Mostre que $x = 1$ é raiz da equação $P(x) = 0$.

b) Calcule o quociente da divisão de P(x) pelo binômio x – 1.

Resolução:

a)

Basta substituir **x** por 1 em P(x) e verificar que o resultado é zero, ou seja, que temos P(1) = 0. Isso significa que P(x) pode ser fatorado e apresenta x – 1 como um fator, ou seja, é divisível por x – 1. Podemos, então, escrever:
$P(x) \equiv (x-1) \cdot Q(x)$, sendo Q(x) o quociente da divisão de P(x) por x – 1.

b)

O quociente da divisão será um polinômio de grau 4, podendo ser escrito na forma geral $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Devemos ter a identidade:

$3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12 \equiv (x-1) \cdot \left(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\right)$.

Efetuando as operações indicadas no segundo membro, obtemos:

$3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12 \equiv ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e$

Agrupando os termos semelhantes do segundo membro, obtemos:

$$3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12$$

$$\equiv$$

$$\overbrace{a}x^5 + \overbrace{(b-a)}x^4 + \overbrace{(c-b)}x^3 + \overbrace{(d-c)}x^2 + \overbrace{(e-d)}x - \overbrace{e}$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau nos dois membros da identidade, temos:

$$\begin{aligned} 3 &= a \\ -2 &= b - a \\ 5 &= c - b \\ -11 &= d - c \\ -7 &= e - d \\ 12 &= -e \end{aligned}$$

Logo, concluímos que a = 3, b = 1, c = 6, d = –5, e = –12 e, em consequência, $Q(x) = 3x^4 + x^3 + 6x^2 - 5x - 12$.

Assim, para resolver a equação P(x) = 0, sabendo que uma de suas raízes é x = 1, obtemos o quociente de P(x) por x –1, chegando ao quociente Q(x); as demais raízes de P(x) = 0 são as raízes da equação Q(x) = 0.

Reduzindo o grau da equação: divisão por (x – k).

Na equação $2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$, podemos descobrir uma possível raiz utilizando os conceitos apresentados. Primeiro dividimos a equação toda pelo coeficiente a, que resulta em: $\frac{2}{2}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - \frac{2}{2}x - \frac{4}{2} = 0$, representada por $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$, o que nos leva a supor que uma de suas raízes seria um de seus divisores (–1, 1, –2, 2) e, por verificação, podemos chegar aos números (–2, –1, 1), pois:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$(-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 2 = 0$$

$$10 - 10 = 0$$

Do mesmo modo, podemos verificar que -1 e 1 também satisfazem a igualdade, sendo, assim, raízes da equação.

Podemos escrever, então, que o polinômio $P(x) = 2x^3 + 4x - 2x - 4$ tem uma de suas raízes -2 , pois, $P(-2) = 0$, ou seja, substituindo o valor -2 na variável x, verificamos que a igualdade se estabelece.

Ampliando essa ideia, podemos dizer que se um polinômio P(x) tem como raiz o número k, então a divisão de P(x) por $(x - k)$ dá resto zero, além de obtermos uma equação (quociente da divisão) com grau menor que P(x).

$P(x)= 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4;\ [x - (-2)]$

$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4;\ (x+2)$

$$
\begin{array}{llll|l}
2x^3 & +\,4x^2 & -\,2x & -\,4 & x+2 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & -\,4x^2 & & & 2x^2-2 \\ \cline{1-2}
0 & 0 & -2x & -\,4 & \\
 & & +2x & +\,4 & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & &
\end{array}
$$

ATIVIDADE 5

Agora descubra as raízes das seguintes equações polinomiais:

a) $x^3 + x - 10 = 0$

b) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $8 + x^3 = 0$

Resolução:

a)

O número 10 tem como divisores $(\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10)$, sendo qualquer um desses divisores uma de suas possíveis raízes.

Teste de raízes do polinômio: $x^3 + x - 10$

Para x=1	Para x=2	Para x=5
$1^3+1-10=0$	$2^3+2-10=0$	$5^3+5-10=0$
$1+1-10=0$	$8+2-10=0$	$125+5-10=0$
$-8 \neq 0$	$10-10=0$	$120 \neq 0$
$\therefore$não é raiz	$\therefore$2 é raiz	$\therefore$não é raiz

Dividindo o polinômio por (x-raiz)=(x – 2); teremos:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \cancel{x^3} + x - 10 & x - 2 \\ \cline{3-3}
- & \left(\cancel{x^3} - 2x^2\right) & x^2 - 2x + 5 \\ \cline{1-2}
 & -\cancel{2x^2} + x - 10 & \\
- & \left(-\cancel{2x^2} + 4x\right) & \\ \cline{1-2}
 & \cancel{5x} - \cancel{10} & \\
 & -(\cancel{5x} - \cancel{10}) & \\ \cline{1-2}
 & 0x+0 &
\end{array}
$$

Encontrando as raízes da equação quociente, temos:

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$
$$a = 1;\ b = -2 ; c = 5$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Como não existem raízes reais para a equação quociente, concluímos que a única raiz do Polinômio é 2.

b)

Como o polinômio não possui termo independente, conclui-se que uma de suas raízes é zero. Dividindo o polinômio por (x – raiz) = (x – 0), teremos:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \cancel{x^3} - 5x^2 + 6x & x \\ \cline{3-3}
- & \left(\cancel{x^3}\right) & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{1-2}
 & -\cancel{5x^2} + 6x & \\
- & \left(-\cancel{5x^2}\right) & \\ \cline{1-2}
 & \cancel{6x} & \\
 & -\cancel{6x} & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Encontrando as raízes da equação quociente, temos:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$a = 1;\ b = -5; c = 6$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$
$$x' = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
$$x'' = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

As raízes do polinômio $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ são (0, 2, 3).

c)

Neste caso, a única raiz do polinômio é –2, pois $x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$

Algoritmo de Briot–Ruffini

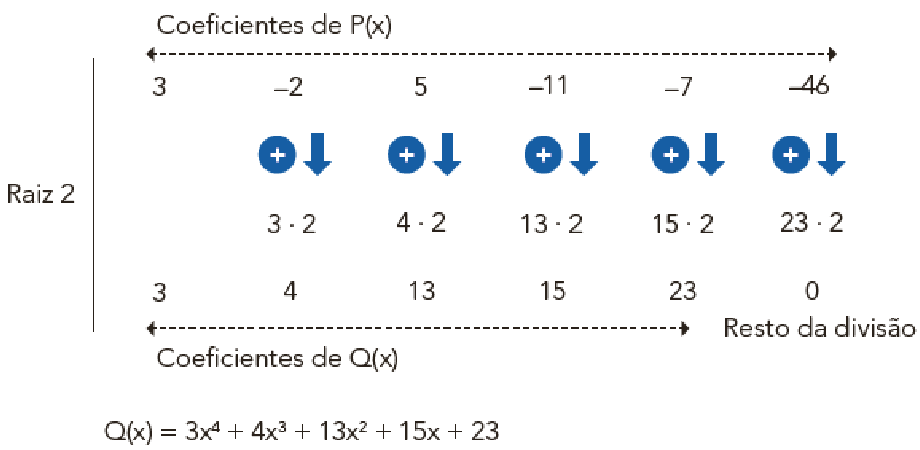
Uma das maneiras de se obter o quociente de um polinômio por um binômio seria a aplicação do algoritmo de Briot–Rufini, cujas características principais são destacadas a seguir:

Tomando-se como exemplo, calcularemos o quociente de $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x - 46$ pelo binômio $x - 2$.

Sendo $Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$:

- O coeficiente **a** é igual ao coeficiente de x^5 em P(x): **a = 3**;
- O coeficiente **b** é obtido somando-se ao coeficiente de $\mathbf{x^4}$ em P(x) o produto de 2 por a: **b = –2 + 2a**;
- O coeficiente **c** é obtido somando-se ao coeficiente de $\mathbf{x^3}$ em P(x) o produto de 2 por b: **c = 5 + 2b**;
- O coeficiente **d** é obtido somando-se ao coeficiente de $\mathbf{x^2}$ em P(x) o produto de 2 por e: **d = –11 + 2c**;
- O coeficiente **e** é obtido somando-se ao coeficiente de **x** em P(x) o produto de 2 por d: **e = –7 + 2d.**

Esses cálculos podem ser organizados no algoritmo seguinte, conhecido como algoritmo de Briot-Rufini, para a divisão de um polinômio por um binômio da forma $x - k$:



Fonte: Elaborada pelo autor.

ATIVIDADE 6

a) Para verificar o entendimento do conteúdo apresentado, construa o algoritmo *Briot–Rufini* para determinar o quociente de $P(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x + 57$ por $x - 3$

b) Calcule o resto da divisão de $P(x) = 3x^5 + x^4 + 3x^3 - 7x + \pi$ pelo binômio $x + 3$.

Resolução:

a)

	Coeficientes de P(x)					
	1	-2	-7	3	8	57
Raiz 3		$1 \cdot 3$	$1 \cdot 3$	$-4 \cdot 3$	$-9 \cdot 3$	$-19 \cdot 3$
	1	1	-4	-9	-19	0
	Coeficientes de Q(x)					Resto da divisão

$Q(x) = 1x^4 + 1x^3 - 4x^2 - 9x - 19$

Fonte: Elaborada pelo autor.

b)

	Coeficientes de P(x)					
	3	1	3	0	-7	π
Raiz -3		$3 \cdot (-3)$	$-8 \cdot (-3)$	$27 \cdot (-3)$	$-81 \cdot (-3)$	$236 \cdot (-3)$
	3	-8	27	-81	236	$-708 + \pi$
	Coeficientes de Q(x)					Resto da divisão

$Q(x) = 3x^4 - 8x^3 - 27x^2 - 81x + 236$

Fonte: Elaborada pelo autor.

ATIVIDADE 7

Responda às seguintes questões:

a) Mostre que a equação $2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$ apresenta raízes inteiras.

b) Resolva a equação do item anterior.

Resolução:

a)

Dividindo os coeficientes por 2, obtemos a equação equivalente:

$$x^4 - \frac{9}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{11}{2}x - 3 = 0.$$

Escrita nessa forma, já vimos que os divisores de -3 serão possíveis raízes inteiras, pois esse coeficiente representa o produto das raízes da equação. Calculando os valores numéricos do polinômio do primeiro membro da equação para $x = \pm 1$ e $x = \pm 3$, concluímos que -1 e 3 são raízes da equação dada.

b)

A equação dada é, portanto, equivalente à equação:

$(x + 1) \cdot (x - 3) \cdot \left(mx^3 + nx + p\right) = 0$

Para encontrar o trinômio $mx^2 + nx + p$ e descobrir as outras raízes da equação, basta dividir o polinômio do primeiro membro sucessivamente por $(x + 1)$ e $(x - 3)$, conforme indicamos a seguir:

$$2\,x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6 \equiv (x - 1)\cdot\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)$$

Coeficientes de P(x)

	2	-9	6	11	-6
Raiz -1		2 · (-1)	-11 · (-1)	17 · (-1)	-6 · (-1)
	2	-11	17	-6	0

Coeficientes de Q(x) — Resto da divisão

$Q(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$

Dividindo-se agora $Q_1(x)$ por $(x - 3)$, obtemos $Q_2(x)$:

Coeficientes de P(x)

	2	-11	17	-6
Raiz 3		2 · 3	-5 · 3	2 · 3
	2	-5	2	0

Coeficientes de Q(x) — Resto da divisão

$Q(x) = 2x^2 - 5x + 2$

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\left(2\,x^3 - 11x^2 + 17x - 6\right) \equiv (x - 3)\cdot\left(2x^2 - 5x + 2\right)$$

Sendo assim, concluímos que:

$2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6 \equiv (x + 1)\cdot(x - 3)\cdot\left(2x^2 - 5x + 2\right)$

Resolvendo a equação de 2º grau $2x^2 - 5x + 2 = 0$, obtemos as raízes: $r_3 = 2$ e $r_4 = \frac{1}{2}$

Logo, as raízes da equação dada inicialmente são:

$r_1 = -1,\ r_2 = 3,\ r_3 = 2$ e $r_4 = \dfrac{1}{2}$

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

COORDENADORIA PEDAGÓGICA – COPED

Coordenador
Caetano Pansani Siqueira

Diretora do Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica – DECEGEP
Valéria Arcari Muhi

Diretora do Centro de Ensino Médio – CEM
Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Diretora do Centro de Anos Finais do Ensino Fundamental – CEFAF
Carolina dos Santos Batista Murauskas

ÁREA DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

BIOLOGIA
Aparecida Kida Sanches – *Equipe Curricular de Biologia*; Beatriz Felice Ponzio – *Equipe Curricular de Biologia*; Airton dos Santos Bartolotto – *PCNP da D.E. de Santos*; Evandro Rodrigues Vargas Silvério – *PCNP da D.E. de Apiaí*; Ludmila Sadokoff – *PCNP da D.E. de Caraguatatuba*; Marcelo da Silva Alcantara Duarte – *PCNP da D.E. de São Vicente*; Marly Aparecida Giraldelli Marsulo – *PCNP da D.E. de Piracicaba*; Paula Aparecida Borges de Oliveira – *PCNP da D.E. Leste 3*

FÍSICA
Ana Claudia Cossini Martins – *PCNP D.E. José Bonifácio*; Debora Cíntia Rabello – *PCNP D.E. Santos*; Carina Emy Kagohara *PCNP D.E. Sul 1* – Dimas Daniel de Barros – *PCNP D.E. São Roque*; Jefferson Heleno Tsuchiya – *Equipe Curricular de Física*; José Rubens Antoniazzi Silva – *PCNP D.E. Tupã*; Juliana Pereira Thomazo – *PCNP D.E. São Bernardo do Campo*; Jussara Alves Martins Ferrari – *PCNP D.E. Adamantina;* Sara dos Santos Dias – *PCNP D.E. Mauá;* Thaís de Oliveira Müzel – *PCNP D.E. Itapeva;* Valentina Aparecida Bordignon Guimarães – *PCNP DE Leste 5*.

QUÍMICA
Alexandra Fraga Vasquez – *Equipe Curricular de Química*; Cristiane Marani Coppini – *PCNP D.E. São Roque*; Gerson Novais Silva – *PCNP D.E. Região de São Vicente;* Laura Camargo de Andrade Xavier – *PCNP D.E. Registro*; Natalina de Fátima Mateus – *PCNP D.E. Guarulhos Sul;* Wilian Guirra de Jesus – *PCNP D.E. Franca*; Xenia Aparecida Sabino – *PCNP D.E. Leste 5*.

ÁREA DE CIÊNCIAS HUMANAS

GEOGRAFIA
Andréia Cristina Barroso Cardoso – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; Sergio Luiz Damiati – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; André Baroni - *PCNP da D.E. Ribeirão Preto*; Alexandre Cursino Borges Júnior – *PCNP da D.E. Guaratinguetá*; Beatriz Michele Moço Dias – *PCNP da D.E. Taubaté*; Bruna Capóia Trescenti – *PCNP da D.E Itu*; Daniel Ladeira Almeida – *PCNP da D.E. São Bernardo do Campo*; Camilla Ruiz Manaia – *PCNP da D.E. Taquaritinga*; Cleunice Dias de Oliveira Gaspar – *PCNP da D.E. São Vicente*; Cristiane Cristina Olímpio – *PCNP da D.E. Pindamonhangaba*; Dulcinéa da Silveira Ballestero – *PCNP da D.E. Leste 5*; Elizete Buranello Perez – *PCNP da D.E. Penápolis*; Maria Julia Ramos Sant'Ana – *PCNP da D.E. Adamantina*; Márcio Eduardo Pedrozo – *PCNP da D.E. Americana*; Patrícia Silvestre Águas; Regina Célia Batista – *PCNP da D.E. Piraju*; Roseli Pereira De Araujo – *PCNP da D.E. Bauru*; Rosenei Aparecida Ribeiro Libório – *PCNP da D.E. Ourinhos*; Sandra Raquel Scassola Dias – *PCNP da D.E. Tupã*; Sheila Aparecida Pereira de Oliveira – *PCNP da D.E. Leste 2*; Shirley Schweizer – *PCNP da D.E. Botucatu*; Simone Regiane de Almeida Cuba – *PCNP da D.E. Caraguatatuba*; Telma Riggio – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Viviane Maria Bispo – *PCNP da D.E. José Bonifácio.*

FILOSOFIA
Produção, organização e revisão: Erica Cristina Frau – *PCNP da DRE Campinas Oeste*; Tânia Gonçalves – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular*

HISTÓRIA
1ª Série – Edi Wilson Silveira – *COPED – SEDUC*; Bruno Ferreira Matsumoto – *PCNP da D.E. de Itapetininga*. **2ª Série** – Tadeu Pamplona Pagnossa – *PCNP da D.E. de Guaratinguetá*. **3ª Série** – Clarissa Bazzanelli Barradas – *COPED – SEDUC; Rodrigo Costa Silva – PCNP da D.E. de Assis.*
Organização e revisão
Edi Wilson Silveira – *COPED – SEDUC;* Clarissa Bazzanelli Barradas – *COPED – SEDUC*

Colaboradora – Revisora de Língua Portuguesa
Caroline Cavalli.

SOCIOLOGIA
Emerson Costa – SEDUC/COPED/CEM – *Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Ilana Henrique dos Santos – *PCNP de Sociologia da D.E. Leste 1*

Revisão
Emerson Costa – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Ilana Henrique dos Santos – *PCNP de Sociologia da D.E. Leste 1*

Organização
Emerson Costa – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas*

ÁREA DE LINGUAGENS

ARTE
Carlos Eduardo Povinha – *Equipe Curricular de Arte – COPED – SEDUC*; Eduardo Martins kebbe – *Equipe Curricular de Arte – COPED – SEDUC*; Evania Rodrigues Moraes Escudeiro – *Equipe Curricular de Arte – COPED – SEDUC*; Adriana Marques Ursini Santás – *PCNP da D.E. Santos;* Ana Maria Minari de Siqueira – *PCNP da D.E. são José dos Campos*; Débora David Guidolín – *PCNP da D.E. Ribeirão Preto*; Djalma Abel Novaes – *PCNP da D.E. Guaratinguetá*; Eliana Florindo – *PCNP da D.E. Suzano*; Elisangela Vicente Prismit – *PCNP da D.E. Centro Oeste*; Madalena Ponce Rodrigues – *PCNP da D.E. Botucatu*; Marilia Marcondes de Moraes Sarmento e Lima Torres – *PCNP da D.E. São Vicente*; Patrícia de Lima Takaoka – *PCNP da D.E. Caraguatatuba;* Pedro Kazuo Nagasse – *PCNP da D.E. Jales*; Renata Aparecida de Oliveira dos Santos – *PCNP da D.E. Caieiras*; Roberta Jorge Luz – *PCNP da D.E. Sorocaba*; Rodrigo Mendes – *PCNP da D.E. Ourinhos*; Silmara Lourdes Truzzi – *PCNP da D.E. Marília;* Sonia Tobias Prado – *PCNP da D.E. Lins.*

EDUCAÇÃO FÍSICA
Luiz Fernando Vagliengo – *Equipe Curricular de Educação Física*; Marcelo Ortega Amorim – *Equipe Curricular de Educação Física;* Mirna Leia Violin Brandt – *Equipe Curricular de Educação Física;* Sandra Pereira Mendes – *Equipe Curricular de Educação Física*; Diego Diaz Sanchez – *PCNP da D.E. Guarulhos Norte*; Felipe Augusto Lucci – *PCNP da D.E. Itu*; Flavia Naomi Kunihira Peixoto – *PCNP da D.E. Suzano*; Gislaine Procópio Querido – *PCNP da D.E. São Roque*; Isabela Muniz dos Santos Cáceres – *PCNP da D.E. Votorantim*; Janaina Pazeto Domingos – *PCNP da D.E. Sul 3*; Katia Mendes Silva – *PCNP da D.E. Andradina*; Lígia Estronioli de Castro – *PCNP da D.E. Bauru*; Maria Izildinha Marcelino – *PCNP da D.E. Osasco*; Nabil José Awad – *PCNP da D.E. Caraguatatuba*; Neara Isabel de Freitas Lima – *PCNP da D.E. Sorocaba*; Sandra Regina Valadão – *PCNP da D.E. Taboão da Serra*; Tiago Oliveira dos Santos – *PCNP da D.E. Lins* ; Thaisa Pedrosa Silva Nunes – *PCNP da D.E. Tupã*

INGLÊS
Aderson Toledo Moreno – *PCNP da D.E. SUL 1*; Catarina Reis Matos da Cruz – *PCNP da D.E. Leste2*; Cíntia Perrenoud de Almeida – *PCNP da D.E. Pindamonhangaba;* Eliana Aparecida Oliveira Burian – *COPED – CEM – LEM*; Emerson Thiago Kaishi Ono – *COPED - CEFAF – LEM;* Gilmara Aparecida Prado Cavalcante – *PCNP da D.E. Mauá;* Jucimeire de Souza Bispo – *COPED – CEFAF – LEM;* Liana Maura Antunes da Silva Barreto – *PCNP da D.E. Centro*; Luiz Afonso Baddini – *PCNP da D.E Santos;* Marisa Mota Novais Porto – PCNP – *D.E. Carapicuíba*; Nelise Maria Abib Penna Pagnan – *PCNP – D.E. Centro-Oeste*; Pamella de Paula da Silva Santos – *COPED – CEM – LEM;* Renata Andreia Placa Orosco de Souza – *PCNP da D.E. Presidente Prudente;* Rosane de Carvalho – *PCNP da D.E. Adamantina;* Sérgio Antonio da Silva Teressaka – *PCNP da D.E Jacareí;* Viviane Barcellos Isidorio – *PCNP – D.E. São José dos Campos;* Vlademir Oliveira Ismael – *PCNP da D.E. SUL 1.*

LÍNGUA PORTUGUESA
Alessandra Junqueira Vieira Figueiredo, Alzira Maria Sá Magalhães Cavalcante, Andrea Righeto, Cristiane Alves de Oliveira, Daniel Carvalho Nhani; Danubia Fernandes Sobreira Tasca, Débora Silva Batista Eilliar, Eliane Cristina Gonçalves Ramos, Helena Pereira dos Santos, Igor Rodrigo Valério Matias, Jacqueline da Silva Souza, João Mário Santana, Katia Amâncio Cruz, Letícia Maria de Barros Lima Viviani, Lidiane Máximo Feitosa, Luiz Eduardo Divino da Fonseca, Luiz Fernando Biasi, Márcia Regina Xavier Gardenal, Maria Madalena Borges Gutierre, Martha Wassif Salloume Garcia, Neuza de Mello Lopes Schonherr, Patrícia Fernanda Morande Roveri, Reginaldo Inocenti, Rodrigo Cesar Gonçalves, Shirlei Pio Pereira Fernandes, Sônia Maria Rodrigues, Tatiana Balli, Valquíria Ferreira de Lima Almeida, Viviane Evangelista Neves Santos, William Ruotti.
Leitura crítica e validação: Cristiane Aparecida Nunes; Edvaldo Cerazze; Fabiano Pereira dos Santos; Fabrício Cristian de Proença; Glauco Roberto Bertucci; Marcia Aparecida Barbosa Corrales; Maria José Constâncio Bellon; Maria Madalena Borges Gutierre; Mariângela Soares Baptistello Porto; Paula de Souza Mozaner; Raquel Salzani Fiorini; Reginaldo Inocenti; Ronaldo Cesar Alexandre Formici; Rosane de Paiva Felício; Roseli Aparecida Conceição Ota; Selma Tavares da Silva; Silvia Helena Soares.
Professores responsáveis pela organização, revisão adaptação e validação do material: Katia Regina Pessoa, Mara Lucia David, Marcos Rodrigues Ferreira, Mary Jacomine da Silva, Teônia de Abreu Ferreira.

MATEMÁTICA
Ilana Brawerman – *Equipe Curricular de Matemática*; João dos Santos Vitalino – *Equipe Curricular de Matemática;* Marcos José Traldi – *Equipe Curricular de Matemática;* Otávio Yoshio Yamanaka – Equipe Curricular de Matemática; Vanderley Aparecido Cornatione – *Equipe Curricular de Matemática;* Lilian Silva de Carvalho – *PCNP da D.E. de São Carlos;* Marcelo Balduíno – *PCNP da D.E. Guarulhos Norte;* Maria Regina Duarte Lima – *PCNP da D.E. José Bonifácio;* Simone Cristina do Amaral Porto –*PCNP da D.E. Guarulhos Norte;* Talles Eduardo Nazar Cerizza – *PCNP da D.E. Franca;* Willian Casari de Souza – *PCNP da D.E. Araçatuba.*

TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
Adilson Vilas Boas – *PCNP da D.E. São José dos Campos*; Alessandro Antônio Bernardo – *PCNP da D.E. Jaú*; Alet Rosie de Campos Silva – *PCNP da D.E. Mirante do Paranapanema*; Aparecido Antonio de Almeida – *PCNP da D.E. São José dos Campos*; Arlete Aparecida de Almeida Oliveira – *SEDUC/COPED/ Centro de Inovação*; Aydê Pereira Salla – *PCNP da D.E. Campinas Leste*; Bruna Waitman – *SEDUC/COPED/ Assessora Educação Integral*; *CIEB;* Camila Aparecida Carvalho Lopes – *SEDUC/ COPED/Assessora Técnica*; Camilla Ruiz Manaia – *PCNP da D.E. Taquaritinga*; Debora Denise Dias Garofalo – *SEDUC/COPED/Assessora de Tecnologia*; Eduardo de Moura Almeida – *Assessora da Universidade de São Paulo*; *EducaMídia – Palavra Aberta;* Elaine Leite de Lima – *SEDUC/EFAPE/Técnico III*; Fabiano Pereira dos Santos – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Fábio Granella de Jesus – *PCNP da D.E. Fernandópolis*; Fabrício Cristian de Proença – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Fernanda Henrique De Oliveira – *SEDUC/EFAPE/Diretora do DETED*; Fernando Carlos Rodrigues Pinto – *PCNP da D.E. Presidente Prudente*; *Fundação Telefonica Vivo; Fundação Vanzolini;* Grasiela Cabrio dos Santos Oliveira – *PCNP da D.E. Araraquara*; *Grupo Mais Unidos;* Helder Alexandre de Oliveira – *PCNP da D.E. Tupã*; Jacqueline Peixoto Barbosa – *Assessora da Universidade Estadual de Campinas;* José Armando Valente – *Assessora da Universidade Estadual de Campinas*; Liliane Pereira – *SEDUC/COPED/ Diretora do Centro de Inovação*; Leonardo Granado Garcia – *PCNPda D.E. Franca*; Lucy Mary Padilha Domingos – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Marcelo Suwabe – *PCNP da D.E. Santos*; Márcio Greyck Guimarães Correa – *PCNP da D.E. Centro Oeste*; Marcos Vinícius Marcondes de Menezes – *PCNP da D.E. Andradina*; Maria Elizabeth de Almeida – *Assessora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*; Mariana Moreira Martines – *PCNP da D.E. Bauru*; Matheus Lima Piffer – *PCNP da D.E. Limeira*; Patricia Pinto Santiago – *PCNP da D.E. Registro*; *Mundo Maker;* Pedro Henrique Eneas Ferreira – *PCNP da D.E. São Carlos*; Raquel Villa Nova Pedroso de Almeida – *PCNP da D.E. Norte 1*; Rebeka de Moraes Garcia – *PCNP da D.E. Mogi das Cruzes*; Rodrigo Prizoto – *PCNP da D.E. Taubaté*; Roseli Aparecida Conceição Ota – *PCNP da D.E. São Roque*; Roxane Helena Rodrigues Rojo – *Assessora da Universidade Estadual de Campinas*; Salete Cristina Venarusso – *PCNP da D.E. Jaú*; Sandra Heloisa Mancebo Henrique – *PCNP da D.E. Registro*; Sandra Pereira Jardim – *PCNP da D.E. Osasco*; Sidemar Rodrigues (Nino) – *PCNP da D.E. Mogi Mirim*; Silene Kuin – *SEDUC/ EFAPE/Técnico I*; Silvia Helena Soares – *PCNP da D.E. Mogi Mirim*; Sílvia Nogueira – *PCNP da D.E. Leste 1*; *Triade Educacional; Undime;* Viviane Artioli – *PCNP da D.E. Campinas Leste*; Viviane Camilo de Andrade – *PCNP da D.E. Carapicuíba*; Wagner Aparecido da Silva – *PCNP da D.E. Itapecerica da Serra.*

PROJETO DE VIDA
Bruna Waitman – *SEDUC/COPED/Assessora Educação Integral*; Cassia Moraes Targa Longo – *SEDUC/COPED/CEART*; Claudia Soraia Rocha Moura – *SEDUC/COPED/ DEMOD/CEJA*; Helena Claudia Soares Achilles – *SEDUC/COPED/DECEGP*; Instituto Ayrton Senna; Instituto de Corresponsabilidade pela Educação; Instituto Proa; Simone Cristina Succi – *SEDUC/EFAPE*; Walter Aparecido Borges – *SEDUC/EFAPE.*

Impressão e Acabamento
Imprensa Oficial do Estado S/A – IMESP

Projeto Gráfico
Fernanda Buccelli e Ricardo Ferreira

Diagramação, Tratamento de Imagens e Colaboradores:
Aline Navarro; Ana Lúcia Charnyai; Dulce Maria de Lima Pinto; Fátima Regina de Souza Lima; Isabel Gomes Ferreira; Leonídio Gomes; Marcelo de Oliveira Daniel; Maria de Fátima Alves Gonçalves; Marilena Camargo Villavoy; Marli Santos de Jesus; Paulo César Tenório; Ricardo Ferreira; Rita de Cássia Diniz; Robson Minghini; Sandra Regina Brazão Gomes; Selma Brisolla de Campos; Teresa Lucinda Ferreira de Andrade; Tiago Cheregati e Vanessa Merizzi.