SP FAZ ESCOLA

CADERNO DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

Ensino Médio

3º BIMESTRE

Governo do Estado de São Paulo

Governador
João Doria

Vice-Governador
Rodrigo Garcia

Secretário da Educação
Rossieli Soares da Silva

Secretário Executivo
Haroldo Corrêa Rocha

Chefe de Gabinete
Renilda Peres de Lima

Coordenador da Coordenadoria Pedagógica
Caetano Pansani Siqueira

Presidente da Fundação para o Desenvolvimento da Educação
Nourival Pantano Junior

Sumário

1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO 4

2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO 39

3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO 72

MATEMÁTICA

1ª Série – Ensino Médio

3° Bimestre

1. Organização das grades curriculares:

Apresentamos, a seguir, uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática, vigente e sua respectiva relação com o Currículo Paulista, além de algumas orientações pedagógicas para a etapa do Ensino Médio. A lista dos conteúdos curriculares e habilidades em Matemática não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números, probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é a de que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

Desta forma, os quadros apresentados destacam as habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes em cada unidade. Tais habilidades traduzem, de modo operacional, as ações que os alunos devem ser capazes de realizar, ao final de um determinado estágio de aprendizagem, após serem apresentados aos conteúdos curriculares listados.

1.1 Grade curricular da 1ª série do Ensino Médio – 3º Bimestre

ENSINO MÉDIO – CURRÍCULO DE MATEMÁTICA – 1ª SÉRIE (3º BIMESTRE)		
CURRÍCULO OFICIAL – SEDUC-SP		**Base Nacional Comum Curricular**
Tema/Conteúdo	**Habilidades**	**Competências Gerais**
• Relações • Funções exponenciais e logarítmicas. • Crescimento exponencial. • Função exponencial: equações e inequações. • Logaritmos, definição e propriedades. • Função logarítmica: equações e inequações.	• Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento. • Compreender o significado dos logaritmos como expoentes convenientes para a representação de números muito grandes ou muito pequenos, em diferentes contextos. • Conhecer as principais propriedades dos logaritmos, bem como a representação da função logarítmica, como inversa da função exponencial. • Saber resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos. • Conhecer o significado, em diferentes contextos, do crescimento e do decrescimento exponencial, incluindo-se os que se expressam por meio de funções de base e.	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

1.1.1 Funções exponenciais e logarítmicas.

Para iniciar os comentários referentes a esta seção convém ressaltar que o conceito base das funções exponencial e logarítmica remete à potência de um número, cujo desenvolvimento já foi tratado nos anos finais do Ensino Fundamental. No Ensino Médio, consolidamos seus significados, sistematizando os fatos e apresentando a função exponencial, com destaque para sua forma peculiar de crescimento ou decrescimento.

Apesar da abundância de recursos atuais, os logaritmos, uma "invenção" engenhosa do início do século XVII, cuja motivação inicial era a simplificação de cálculos em uma época de limitados instrumentos permanecem como um tema especialmente relevante, não em razão de tais simplificações, mas pela sua adequação em descrever fenômenos em que as variáveis aparecem no expoente. Apresentar seu significado que contribuiu para conservar sua importância, juntamente com as propriedades mais relevantes para seu uso em diferentes contextos.

É importante ressaltar que ambos os conteúdos, função exponencial e função logarítmica sejam abordados de maneira articulada, colocando em destaque que a distinção entre eles é estritamente ligada a uma troca de posições entre as variáveis, de tal forma que:

- se $y = a^x$, considerando x a variável independente e $0 < a \neq 1$, então escrevemos $y = f(x) = a^x$, e temos uma função exponencial.
- quando y é a variável independente e $0 < a \neq 1$, escrevemos $x = g(y) = \log_a y$, e temos uma função logarítmica.

As funções exponenciais e logarítmicas são inversas.

Apesar de que o caráter estritamente matemático seja importante no desenvolvimento de um conteúdo, não podemos deixar de contemplar suas aplicações em situ-ações-problema. Dessa forma, reiteramos que as diversas contextualizações dos logaritmos (graus de terremotos, acidez de líquidos, intensidade sonora, magnitude de estrelas, cálculos de juros etc.) são possibilidades de enriquecimento de uma determinada sequência de atividades em sala de aula.

Os tópicos apresentados, podem ser encontrados no **Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo,** nas respectivas Situações de Aprendizagem:

Situação de aprendizagem 1: As potências e o crescimento exponencial: A função exponencial, Vol. 2, 1ª série do Ensino Médio, p. 11 a 20.

Situação de Aprendizagem 2: Quando o expoente é a questão, o logaritmo é a solução: A força da ideia de logaritmo, Vol. 2, 1ª série do Ensino Médio, p. 20 a 38.

Situação de Aprendizagem 3: As funções com variável no expoente: A exponencial e sua inversa, a logarítmica, Vol.2, 1ª série do Ensino Médio, p. 38 a 46.

Situação de Aprendizagem 4: As múltiplas faces das potências e dos logaritmos: Problemas envolvendo equações e inequações e diferentes contextos, Vol. 2, 1ª série do Ensino Médio, p. 47 a 59.

Situação de Aprendizagem 4: Os fenômenos naturais e o crescimento ou decrescimento exponencial: O número e, Vol. 2, 3ª série do Ensino Médio, p. 40 a 55.

Além das situações de aprendizagem, sugerimos alguns recursos audiovisuais, da plataforma Matemática Multimídia:

- Osso duro de roer. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1146.. Acesso em 28 nov.2018.
- Baralho mágico. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/998. Acesso em 28 nov. 2018.
- Overdose. Disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1147. Acesso em 28 nov. 2018.
- A aparição. Disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1050.Aacesso em 28 nov. 2018
- Avalanches. Disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1364. Aacesso em 28 nov. 2018.

1.1.2 Comentários e recomendações pedagógicas.

Entendemos que a compreensão do texto na íntegra é de substancial importância para a compreensão do objeto de conhecimento apresentado e para o desenvolvimento das habilidades pretendidas.

O texto apresentado traz um olhar rico e pertinente sobre a importância e aplicabilidade das funções exponenciais e logarítmicas. Contudo, acreditamos que possam existir alunos que não o compreendam na totalidade sem as intervenções didáticas. Sugerimos que o aluno possa ler os dois primeiros parágrafos individualmente, anotando suas dúvidas. Em seguida, que possa ser proporcionada uma discussão entre eles para que falem o que entenderam e o que não entenderam sobre o texto. Após este momento pode ser iniciada uma leitura colaborativa, em que o professor sozinho lê trechos em voz alta e vai questionando os alunos sobre o que compreenderam de cada trecho lido. O importante é que o professor seja um mediador e que amplie os conhecimentos, oferecendo as informações paulatinamente e apenas à medida que os alunos não consigam compreendê-las.

Após a percepção de que os alunos compreenderam esta primeira parte, pode-se fazer da mesma forma com o restante do texto. Uma opção neste segundo momento é que os alunos possam fazer uma leitura em duplas e não mais individual, dado que as informações do texto começam a se apresentar de uma maneira ainda mais elaborada.

1.1.3 – Introdução ao volume 3

Professor, a seguir, apresentaremos as orientações pedagógicas referentes às diversas atividades deste caderno. Como já afirmado nos primeiros e segundos cadernos, o objetivo único dessas orientações é sugerir e/ou relembrar encaminhamentos didáticos (o que propor, já considerando uma metodologia) e procedimentos didáticos (como colocar em prática os encaminhamentos didáticos previamente planejados) que podem ser úteis na sua prática pedagógica e, principalmente, ampliar e qualificar as aprendizagens de todos os alunos. As orientações não devem ser encerradas em si mesmas. Devem ser consideradas, ampliadas, adaptadas e mesmo substituídas de acordo com as variáveis inerentes a cada grupo de alunos.

1.1.4 – Atividades

Tema 1: Crescimento/Decrescimento Exponencial e Função Exponencial

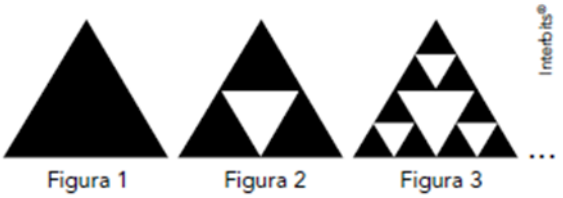
Orientações pedagógicas:

Espera-se que o aluno consiga resolver as atividades 1, 2 e 3 com base no que já foi desenvolvido anteriormente. Mas isso não quer dizer que ele já saiba resolvê-los. Ao propor esta atividade, circule pela sala e observe quais alunos apresentam dificuldade na resolução dessas atividades e anote seus nomes. Esses estudantes precisarão de um momento para desenvolver uma (ou mais) Situação de Aprendizagem significativa com o objetivo de recuperar sua aprendizagem. Essa atividade extra pode ser proposta em uma aula, apoiada pela formação de grupos por níveis de proficiência dos conhecimentos, na qual os demais alunos possam ter também Situações de Aprendizagem ou de Atividades a serem desenvolvidas, de acordo com seu nível de proficiência com o objetivo de consolidar e aprofundar seus conhecimentos e ampliar suas habilidades.

ATIVIDADE 1

(Adaptada ENEM, 2008) Fractal (do latim fractus, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:



Observe que, com base nesse desenho, podemos realizar algumas operações matemáticas com a utilização da potenciação.

Figura	Quantidade de triângulos	Potência correspondente
1	1	3^0
2	3	3^1
3	9	3^2
4	27	3^3
5	81	3^4
6	243	3^5
⋮	⋮	⋮
10		

Observe que em cada figura seguinte do fractal, em cada triângulo escuro temos 3 novos triângulos, que se subdividem regularmente obtendo uma potência de base 3 correspondente ao número de triângulos representados.

Complete a tabela, escrevendo em forma de potência quantos triângulos haveria na Figura 10 e qual é a potência correspondente a esse resultado.

Resolução comentada:

Na figura 10 teremos, de acordo com o padrão apresentado, um expoente, uma unidade menor que 10,, logo o expoente do 3 será 9.

$3^9 = 19.683$

ATIVIDADE 2

Observe cada sentença abaixo e preencha as lacunas.

- se $a^n = 3^4$ então, a = 3 e o valor de n = 4;
- se $2^m = 2^5$ então, m = 5;
- se $3^6 = 3^t$ então, _____;
- se $5^r = 25$, logo $5^r = 5^2$ então, r = _____;
- se $3^s = 81$, logo _____ então, _____;
- se $4^x = \frac{1}{16}$, logo, $4^x = \frac{1}{4^2}$, então, x = _____.

Resolução

- se $a^n = 3^4$ então, a = 3 e o valor de n = 4;
- se $2^m = 2^5$ então, m = 5;
- se $3^6 = 3^t$ então, t = 6;
- se $5^r = 25$, logo $5^r = 5^2$ então, r = 2;
- se $3^s = 81$, logo $3^s = 3^4$ então s= 4;
- se $4^x = \frac{1}{16}$, logo, $4^x = \frac{1}{4^2}$, então, x = –2

ATIVIDADE 3

Em um estacionamento há 4 automóveis, em cada automóvel há 4 rodas e em cada roda há 4 parafusos.
O total de parafusos das rodas desses quatro automóveis pode ser expresso por

(A) 4^0

(B) 4^1

(C) 4^2

(D) 4^3

(E) 4^4

Resolução:

Se são 4 carros e cada carro tem 4 rodas e cada roda tem 4 parafusos, então temos que: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$ (Alternativa D)

Orientações pedagógicas:

As atividades 4, 5 e o texto informativo entre elas propiciam, além do trabalho individual, o trabalho em duplas ou em pequenos grupos. Entendemos ser importante que o professor, que já diagnosticou as dificuldades dos estudantes, forme grupos com o objetivo de que os estudantes com proficiências semelhantes, sentem-se juntos. Dessa forma o trabalho de acompanhamento do docente poderá ser ainda mais eficaz, pois atenderá grupos de alunos com dúvidas iguais ou próximas e não, um estudante por vez.

ATIVIDADE 4

No quadrado mágico, cada letra representa uma potência de base 3, sabendo que o produto dos números de cada linha, coluna ou diagonal é 3^6.

3^5	A	3^3
B	3^2	C
3	D	E

A potência que a letra C representa é

(A) 3^4

(B) 3^2

(C) 3

(D) 3^0

(E) 3^{-1}

Resolução:

Para identificar o valor de C, temos que saber o valor de B. Chamaremos $B = 3^x$

$$3^5 \cdot B \cdot 3 = 3^5 \cdot 3^x \cdot 3^1 = 3^{6+x}$$

Se $3^{6+x} = 3^6$, $x = 0$ e $B = 3^0$

Chamaremos $C = 3^y$. Na linha que contém C, temos o produto:

$$B \cdot 3^2 \cdot C = 3^0 \cdot 3^2 \cdot 3^y = 3^{0+2+y} = 3^{2+y}$$

Se $3^{2+y} = 3^6$, $y = 4$ e $C = 3^4$

Sugere-se também outra maneira de se resolver a situação problema apresentada:

Considerando a diagonal do quadrado mágico formada pelos valores: 3^5, 3^2 e E, temos que:

$$3^5 \cdot 3^2 \cdot E = 3^6 = 3^7 \cdot E = 3^6 \Rightarrow E = \frac{3^6}{3^7} = 3^{-1}$$

Tomando-se a 3ª coluna da esquerda para a direita, temos que:

$$3^3 \cdot C \cdot 3^{-1} = 3^6 \Rightarrow 3^2 \cdot C = 3^6 \Rightarrow C = \frac{3^6}{3^2} = 3^4$$

Logo, alternativa correta (A).

Você sabia que...

Existem situações em que nos deparamos com multiplicações ou divisões de potências de bases diferentes. Quando isso ocorre, devemos nos lembrar que qualquer número inteiro ou é primo ou é composto por fatores primos e decompor todos a fatores primos.

Exemplo: qual o valor do produto das potências: $3^2 \cdot 12^{-3} \cdot 27^1 \cdot 2^6$?

Decompondo em fatores primos temos: $3^2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3)^{-3} \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3)^1 \cdot 2^6$ e podemos escrever da seguinte maneira: $3^2 \cdot (2^2 \cdot 3)^{-3} \cdot (3^3)^1 \cdot 2^6$.

Através da propriedade das potências temos que os expoentes que estão dentro dos parênteses deverão ser multiplicados pelos expoentes que estão fora dos parênteses:

$$3^2 \cdot 3^{-3} \cdot 3^3 \cdot 2^6 \cdot 2^{-6}$$

Pela propriedade das potências, quando ocorre a multiplicação de potências de mesma base, mantemos a base e somamos os expoentes.

Calculando as potências, temos:

$$9 \cdot 1 = 9$$

ATIVIDADE 5

a) $2^3 \cdot 4^2 \cdot 8^{-2} =$

b) $3^2 \cdot 27^{-1} \cdot 9^1 =$

c) $5^3 \cdot 25^{-1} \cdot 625^0 =$

d) $4^3 \cdot 27^2 \cdot 32^{-1} \cdot 2^1 \cdot 9^3 =$

e) $10^3 \cdot 25^{-2} \cdot 20^{-2} \cdot 2^2 \cdot 5^3 =$

Resolução:

a) $2^3 \cdot 4^2 \cdot 8^{-2} =$

$$2^3 \cdot (2^2)^2 \cdot (2^3)^{-2} = 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{-6} = 2^{3+4-6} = 2^1 = 2$$

b) $3^2 \cdot 27^{-1} \cdot 9^1 =$

$$3^2 \cdot 3^{-3} \cdot 3^2 = 3^{2-3+2} = 3^1$$

c) $5^3 \cdot 25^{-1} \cdot 625^0 =$

$$5^3 \cdot (5^2)^{-1} \cdot 1 = 5^3 \cdot 5^{-2} = 5^{3-2} = 5^1 = 5$$

Importante: $625^0 = 1$

d) $4^3 \cdot 27^2 \cdot 32^{-1} \cdot 2^1 \cdot 9^3 =$

$$= (2^2)^3 \cdot (3^3)^2 \cdot (2^5)^{-1} \cdot 2^1 \cdot (3^2)^3 =$$

$$= 2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^{-5} \cdot 2^1 \cdot 3^6 =$$

$$= 2^{6-5+1} \cdot 3^{6+6} = 2^2 \cdot 3^{12}$$

e) $10^3 \cdot 25^{-2} \cdot 20^{-2} \cdot 2^2 \cdot 5^3 =$

$$= (2 \cdot 5)^3 \cdot (5^2)^{-2} \cdot (2 \cdot 2 \cdot 5)^{-2} \cdot 2^2 \cdot 5^3 =$$

$$= 2^3 \cdot 5^3 \cdot 5^{-4} \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-2} \cdot 5^{-2} \cdot 2^2 \cdot 5^3 =$$

$$= 2^{3-2-2+2} \cdot 5^{3-4-2+3} =$$

$$= 2^1 \cdot 3^0 = 2 \cdot 1 = 2$$

ATIVIDADE 6

O valor da expressão $2^5 \cdot 10^5 \cdot 20^{-3}$ é

(A) 300

(B) 400

(C) 500

(D) 600

(E) 700

Orientações pedagógicas

Sugestão: solicite que o estudante realize esta atividade sozinho como forma de avaliar se houve progresso em sua autonomia.

Resolução:

$2^5 \cdot 10^5 \cdot 20^3 = 2^5 \cdot (2 \cdot 5)^5 \cdot (2^2 \cdot 5)^{-3} =$
$= 2^5 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot (2^2)^{-3} \cdot 5^{-3} =$
$= 2^5 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 2^{-6} \cdot 5^{-3} =$
$= 2^{5+5-6} \cdot 5^{5-3} =$
$= 2^4 \cdot 5^2 = 16 \cdot 25 = 400$
Alternativa (B) correta.

Equações exponenciais

Depois de revisar as propriedades das potências, podemos explorar e resolver as equações exponenciais: para tanto, é necessário conhecer e aplicar bem as regras e as propriedades das potências, assim como, dependendo do valor da base, utilizar tabelas e calculadoras científicas.

Observe o exemplo: $2^{x+3} = 32$

Utilizando as propriedades de potências de expoentes inteiros, já estudadas podemos escrever o número 32 em fatores primos ($32 = 2.2.2.2.2 = 2^5$), tornando possível trabalhar com os expoentes.

Se, $2^{x+3} = 2^5$, então $x + 3 = 5$ e, portanto, $x = 2$.

ATIVIDADE 7

Tomando como referência as propriedades observadas na atividade anterior, calcule o valor de *t* nas equações abaixo:

a) $3^{t+1} = 9$
b) $5^{2t-2} = 25$
c) $4^t = 2^4$
d) $2^{t+1} = \frac{1}{8}$

Resolução:

a) $3^{t+1} = 9$

$3^{t+1} = 9 = 3^{t+1} = 3^2$; $t = 1$

b) $5^{2t-2} = 25$

$5^{2t-2} = 5^2$; $t = 2$

c) $4^t = 2^4$

$2^{2t} = 2^4$; $t = 2$

d) $2^{t+1} = \frac{1}{8}$

$2^{t+1} = 2^{-3}$; $t = -4$

ATIVIDADE 8

Em um lago, há um grupo de vitórias-régias. Todo dia, o grupo dobra o número de plantas. Há um biólogo fazendo o acompanhamento desse crescimento desde o dia em que viu duas delas no lago. Os números observados são anotados em uma tabela.

Dia	Número de vitórias régias	Potência correspondente
1	2	2^1
2	4	2^2
3	8	2^3
4	16	2^4
5	32	2^5
6	64	2^6
7	128	2^7
8		
9		
10		
⋮		
D		

A regularidade da multiplicação pelo fator 2, a cada dia, conduz naturalmente à representação do número de vitórias-régias correspondente, de modo simplificado, por meio de uma potência de 2. Considerando a situação descrita pela tabela apresentada:

a) complete as linhas da tabela correspondente aos dias 8, 9 e 10.

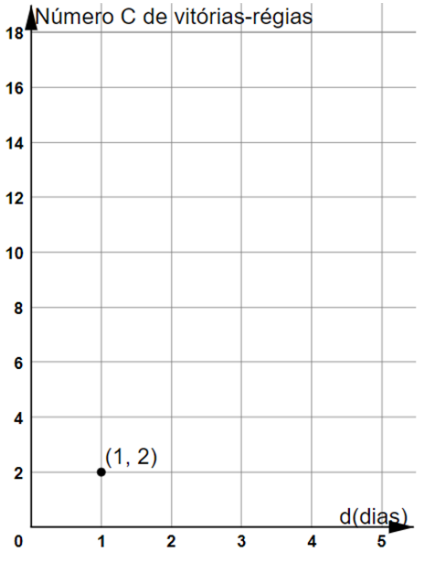
b) como você representaria o número C de vitórias-régias no dia D de observação deste biólogo?

c) como você representaria o número C de vitórias-régias um dia antes do biólogo iniciar esta observação?

Professor, considere o seguinte texto:

d) em 25 dias, o número de vitórias-régias foi suficiente para cobrir todo o lago. Quantos dias seriam necessários para que o número dessa planta cobrisse a metade do lago?

e) represente a situação descrita em um plano cartesiano e analise o crescimento do número de vitórias-régias observado neste lago.



Resolução:

a) complete as linhas da tabela correspondente aos dias 8, 9 e 10.

Dia 8: 256 plantas; potência: 2^8;
Dia 9: 512 plantas ;potência: 2^9
Dia 10: 1024 plantas; potência: 2^{10}

b) como você representaria o número C de vitórias-régias no dia D de observação deste biólogo?

$C=\{2^D\}$, $D \in N$.

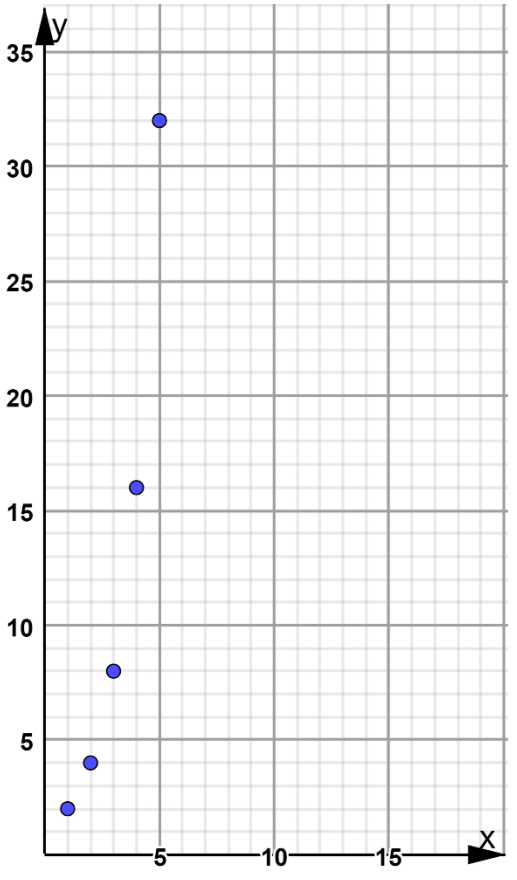
c) como você representaria o número C de vitórias-régias um dia antes de o biólogo iniciar esta observação?

$C=\{2^0\}$ ou $C=\{1\}$

d) em 25 dias, o número de vitórias-régias foi suficiente para cobrir todo o lago? Quantos dias seriam necessários para que o número dessa planta cobrisse a metade do lago?

24 dias

e) represente a situação descrita em um plano cartesiano e analise o crescimento do número de vitórias-régias observado neste lago.



Professor(a), como estamos considerando d como número de dias no conjunto dos números naturais, na representação gráfica não realizamos a ligação dos pontos representados no plano cartesiano.

ATIVIDADE 9

Para estudo dos gráficos das funções exponenciais do tipo $f(x)= a^x$, sendo $a>0$ e $a\neq1$, para todo número real, construímos a seguir uma tabela com diversos valores correspondentes de f(x) para alguns valores de a.

a) Preencha os espaços em branco da tabela abaixo:

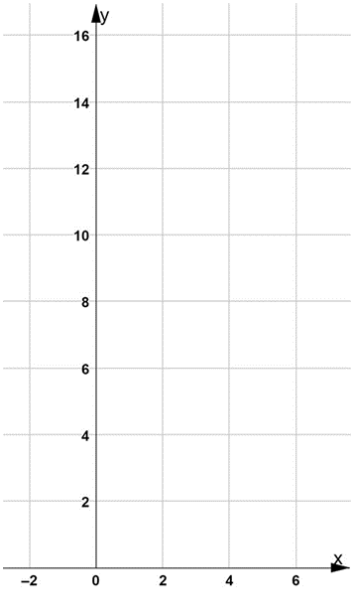
Resolução:

x	$f(x)= 2^x$	$g(x) = 3^x$	$h(x) = 4^x$
2	4	9	16
1	2	3	4
0	1	1	1
–1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

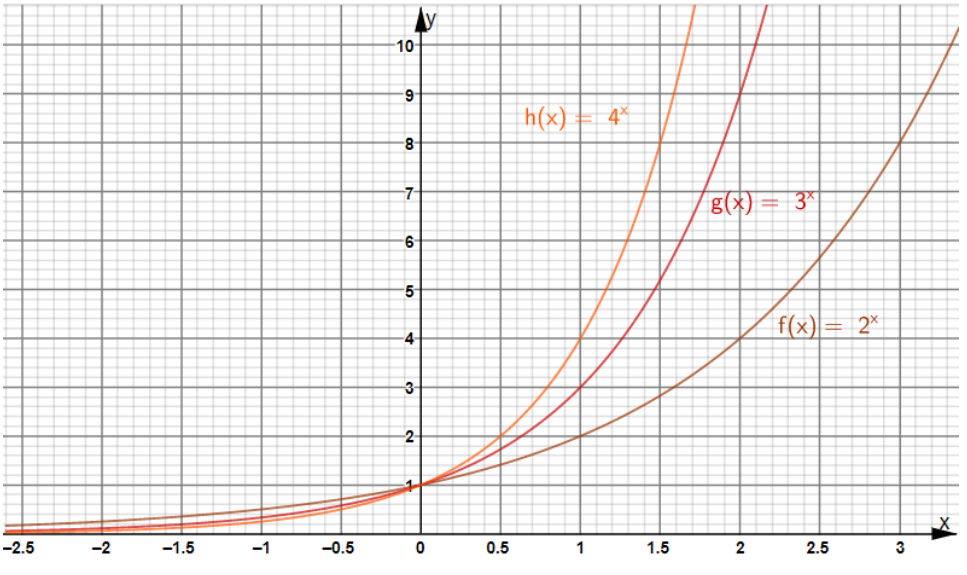
x	$i(x)= \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$j(x)= \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$m(x)= \left(\frac{1}{4}\right)^x$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
0	1	1	1
–1	2	3	4

b) Tendo como base os valores obtidos na tabela, vamos esboçar os gráficos das funções exponenciais a seguir para identificar suas características fundamentais, observando o domínio, a imagem e o crescimento ou o decrescimento em cada caso. Para isso, construa os gráficos das funções em um mesmo sistema de eixos e descreva as características fundamentais das funções indicadas em cada caso.

- $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ e $h(x) = 4^x$



Quais são as semelhanças entre f(x), g(x) e h(x)?

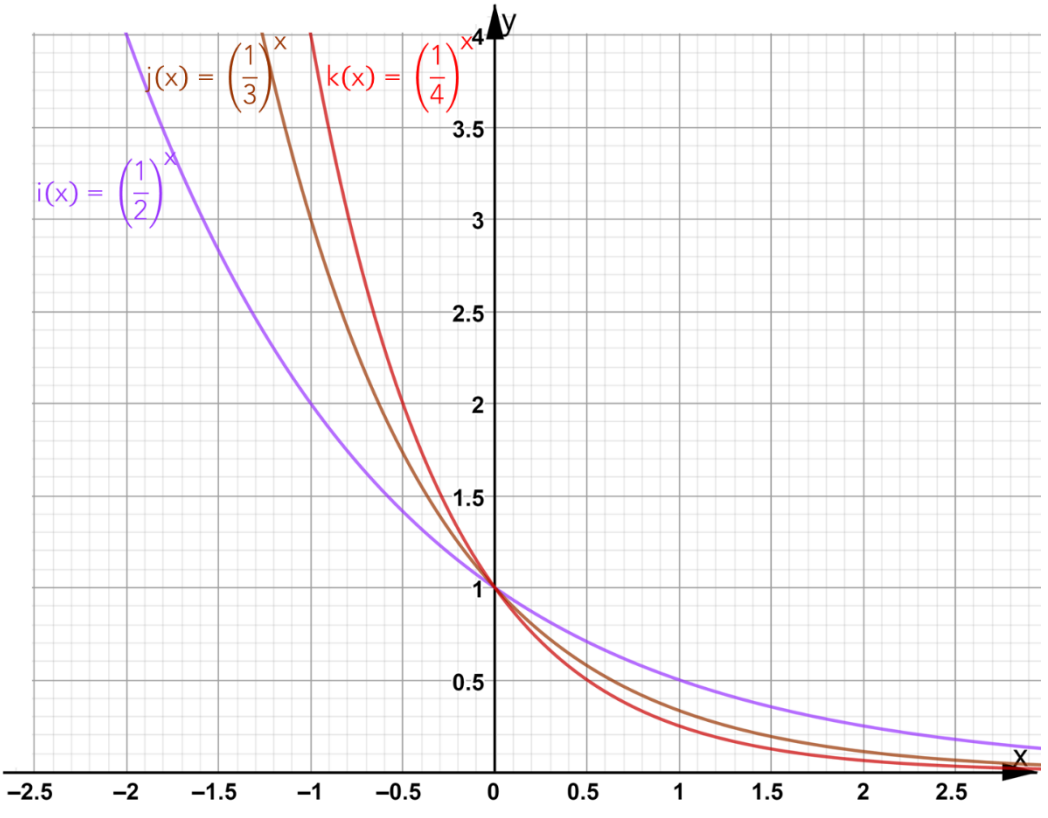


Fonte: Elaborada pelo autor

Quais são as semelhanças entre f(x), g(x) e h(x)?

- todas passam pelo ponto (0,1)
- observa-se que pelo esboço apresentado, à medida que o valor de x aumenta sua imagem também aumenta. Nesse caso, a função exponencial é crescente pode-se constatar que todas as bases das funções apresentadas são maiores que 1.
- nenhuma das curvas toca o eixo x.
- no esboço das funções exponenciais apresentadas as bases são sempre maiores que zero dessa forma, todas terão imagens positivas. Assim sendo, não apresentam imagens nos quadrantes III e IV (imagem negativa).

- $i(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $j(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $m(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$



Fonte: Elaborada pelo autor

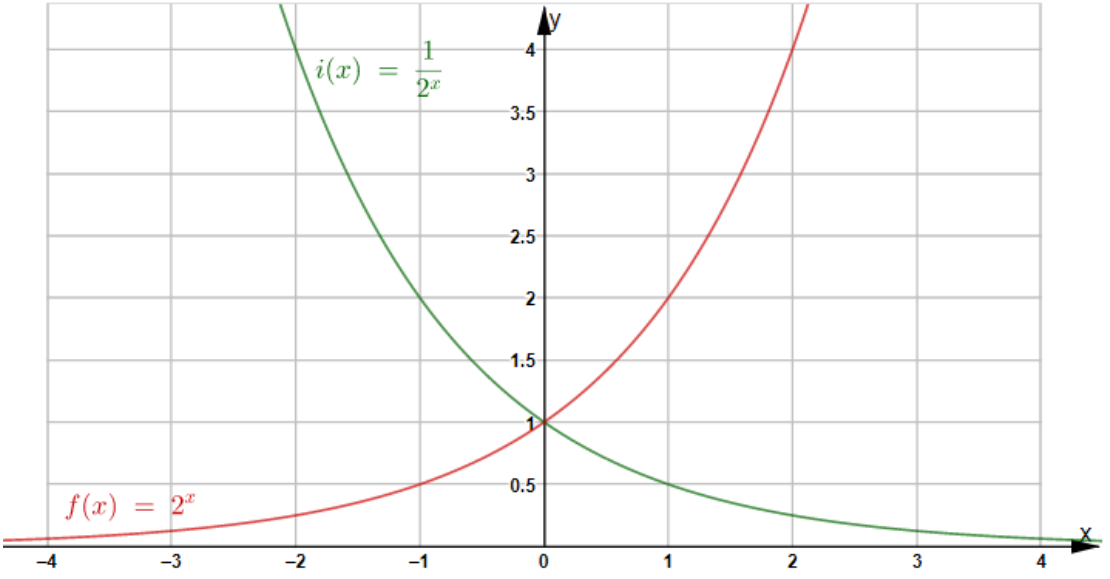
Quais são as semelhanças entre i(x), j(x) e k(x)?

- todas passam pelo ponto (0,1)
- observa-se que pelo esboço apresentado, à medida que o valor de x diminui sua imagem aumenta, neste caso a função exponencial é decrescente: pode-se constatar que todas as bases são maiores que zero e menores que 1.
- nenhuma das curvas toca o eixo x.
- no esboço das funções exponenciais apresentadas as bases são sempre maiores que zero e menores que 1, desta forma, todas as imagens são positivas. Assim sendo, não apresentam imagens nos quadrantes III e IV (imagem negativa).

Em f(x)= a^x, o que acontece com a curva da função quando o valor de a está entre 0 e 1 e vamos diminuindo-o cada vez mais?

- f(x)= 2^x e i(x)= $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Resolução:



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quais são as semelhanças entre f(x) e i(x)?

- todas passam pelo ponto (0,1);
- para valores simétricos de x, temos a mesma imagem, tanto para f(x) e i(x);
- nenhuma das curvas toca o eixo x;

Qual a principal diferença notada entre f(x) e i(x)?

- A principal diferença é o sentido de crescimento deles, que são opostos. Quando o valor de x cresce, o valor de f(x) aumenta e o valor de i(x) diminui.

ATIVIDADE 10

Analisando as tabelas e os gráficos que você construiu, preencha as lacunas do quadro abaixo com as palavras: *crescente, decrescente ou multiplicado por a*; de forma que a relação entre as colunas fique correta.

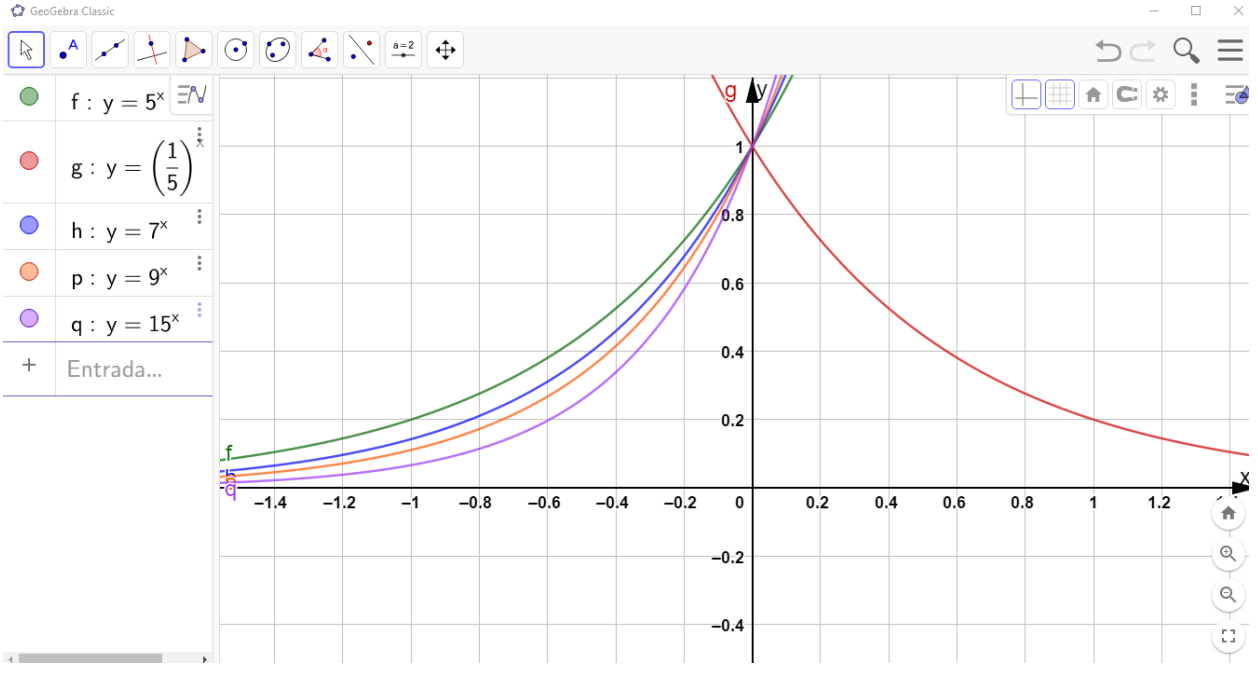
Quando x aumenta uma unidade a partir de qualquer valor ; a^x também aumenta, ou seja, a função $f(x) = a^x$ é:	Multiplicado por a
Sendo a > 1, quando o valor de x também aumenta, ou seja, a função $f(x) = a^x$ é: Professor, solicitamos a substituição do enunciado acima por: Sendo a > 1, quando o valor de x aumenta, a função $f(x)= a^x$ é:	Crescente
Sendo 0 < a < 1, quando o valor de x aumenta, o valor de a^x diminui, ou seja, a função $f(x) = a^x$ é:	Decrescente

Professor, solicitamos a substituição da variável x por a.

Momento Digital

Construção de um gráfico com auxílio de um software.

Alguns softwares livres, como o Geogebra, o Graphmatica ou o Winplot, podem ser utilizados para construir gráficos de funções de vários tipos. Veja a seguir, como exemplo, o gráfico das funções exponenciais desenhados com o auxílio do Geogebra:



Fonte: Imagem elaborada pelo autor.

Para aprofundar o estudo das funções exponenciais utilizando o software gratuito de geometria dinâmica "Geogebra", escolha uma das opções abaixo:

1. Geogebra para computador com sistema operacional Windows:

Disponível em:

https://download.geogebra.org/package/win-autoupdate , Acesso em: 01 abr. 2019.

2. Geogebra para celular com sistema operacional Android:

Disponível em:

https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra.android , Acesso em: 01 abr. 2019.

3. Geogebra para celular com sistema operacional IOS:

https://itunes.apple.com/us/app/geogebra-graphing- calculator/id1146717204. Acesso em 01 abr. 2019

4. Geogebra online:

Disponível em

https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc.Aacesso em 01 abr 2019.

Orientações Pedagógicas:

A atividade a seguir precisa ser planejada com maior antecedência. O docente precisa se atentar sobre quantas máquinas estão disponíveis na unidade escolar e como será a divisão dos estudantes pela quantidade de máquinas, incluindo, já no planejamento, o nome de quais alunos irão compor um grupo ou dupla. Importante também que os alunos saibam previamente, e como utilizar o software. Pensando nisso o docente pode apresentar algumas das ferramentas básicas, projetando a construção de alguns gráficos em uma aula ou indicando o link de tutoriais.

A ausência de máquinas não impede o trabalho, que pode ser realizado utilizando-se a projeção de filmes, slides, fotos etc. ficando assim apenas a aula no coletivo. Pode-se também apresentar vídeos curtos com demonstrações claras, simples e objetivas. Não parece ser interessante apenas a construção dos gráficos sem questionamentos que levem os alunos a refletirem sobre o comportamento das curvas e as particularidades de cada função.

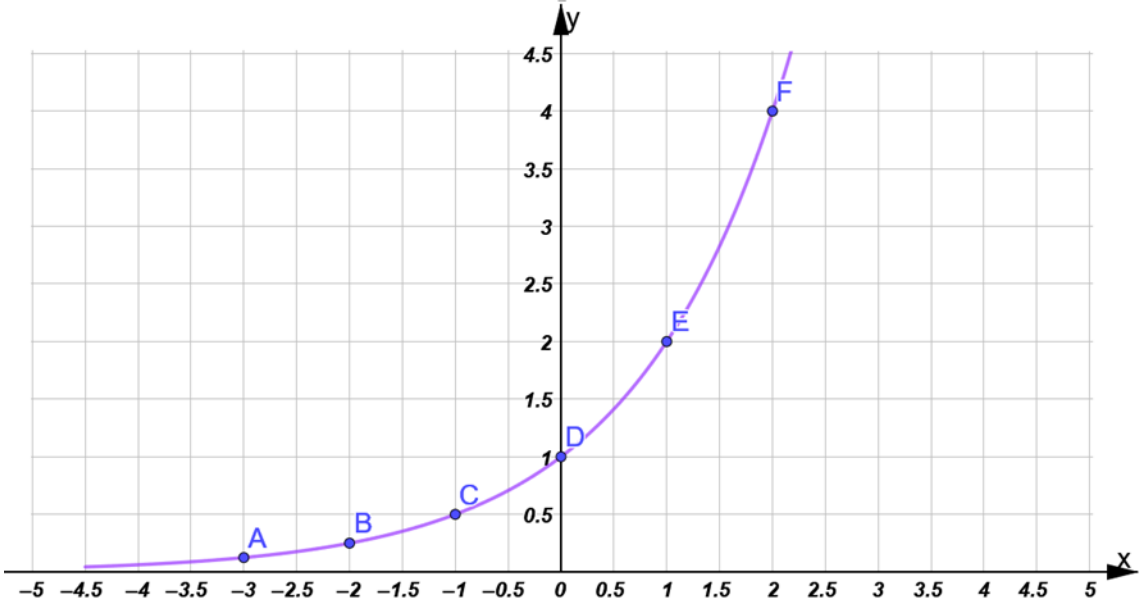
Agora é com você...

Com o auxílio do software, vamos construir as mesmas funções indicadas na figura, desta forma, digite na caixa de entrada, conforme as indicações a seguir.

a) f(x) = 5^x e tecle "Enter"
b) g(x) = (1/5)^x e tecle "Enter"
c) h(x)=7^x e tecle "Enter"
d) p(x)=9^x e tecle "Enter"
e) q(x)=15^x e aperte "Enter"

ATIVIDADE 11

Observe o gráfico de uma função exponencial.



Fonte: Elaborada pelo autor

a) A partir da observação das coordenadas dos pontos indicados no gráfico, escreva a função exponencial que corresponde a esse gráfico:

Ponto	x	y
A	–3	$\frac{1}{8}$
B	–2	$\frac{1}{4}$
C	–1	$\frac{1}{2}$
D	0	1
E	1	2
F	2	4

b) Observando os pontos dos gráficos, deduza a lei de formação e complete com os valores dos pontos de A a F

$$f(x) = 2^x$$

c) Faça uma pesquisa e indique uma situação que envolva um crescimento exponencial.

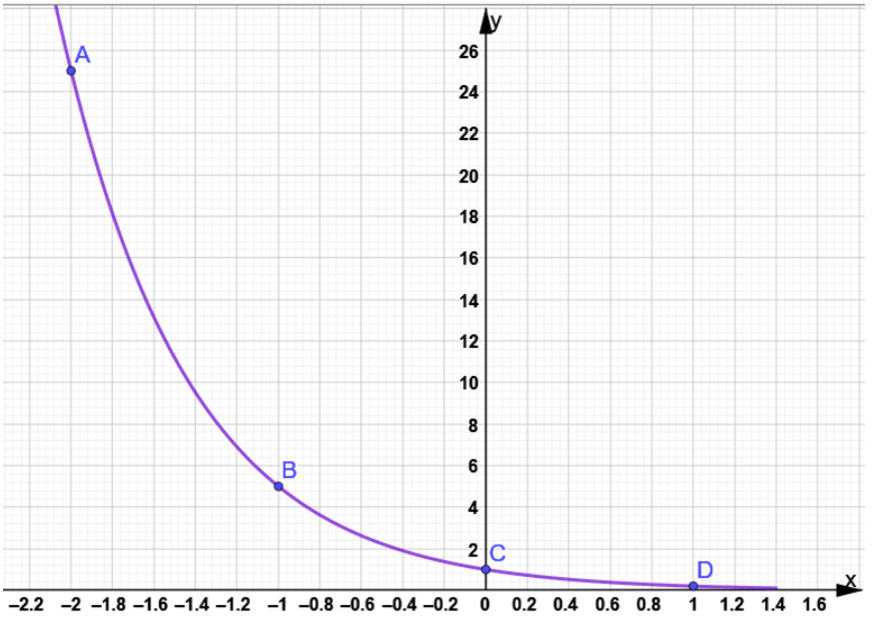
Resposta pessoal.

d) Crie um problema a partir da situação imaginada no item acima, propondo uma questão que possa ser respondida com os dados representados no gráfico

Resposta pessoal.

ATIVIDADE 12

No seu caderno de anotações, monte uma tabela com as coordenadas dos pontos de A a D e, a partir delas, escreva a função exponencial correspondente ao gráfico representado no plano cartesiano, conforme segue.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resolução:

Ponto	x	$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$
A	–2	25
B	–1	5
C	0	1
D	1	$\frac{1}{5}$

a) Analise o comportamento deste gráfico. A função exponencial representada é crescente ou decrescente?

A função exponencial descrita no esboço, é decrescente, pois , à medida que o valor de x diminui sua imagem aumenta.

b) Crie um problema, a partir da situação imaginada no item acima, propondo uma questão que possa ser respondida com os dados representados no gráfico

Resposta pessoal.

ATIVIDADE 13

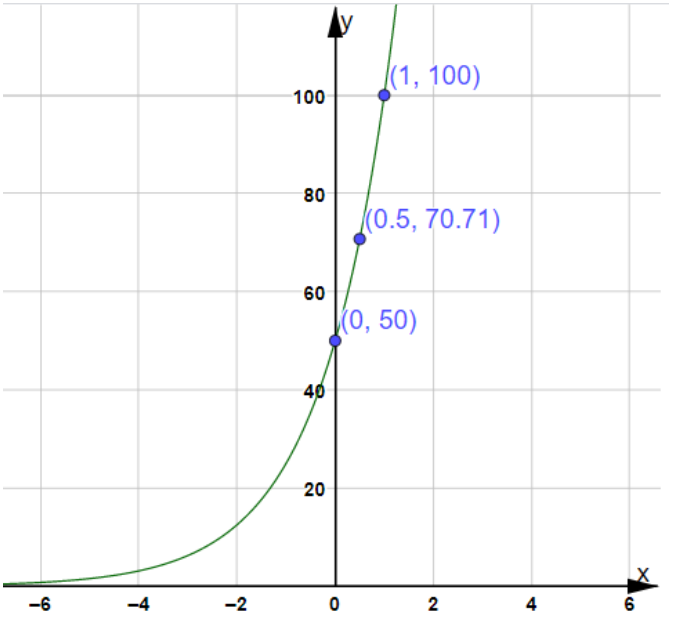
O crescimento exponencial de uma população microbiana em suspensão em meio líquido é caracterizado pela duplicação do número de células e, por conseguinte, da massa (biomassa). Durante o crescimento exponencial, o número de células aumenta de acordo com uma exponencial de base 2.

Uma população N de micróbios cresce exponencialmente de acordo com a expressão, $N = 50 \cdot 2^t$, sendo t em horas.

a) calcule o valor de N para os seguintes valores de t.

empo de observação	$N = 50 \cdot 2^t$
t = 1h	$N = 50 \cdot 2^1 = 50 \cdot 2 = 100$
t = 2h	$N = 50 \cdot 2^2 = 50 \cdot 4 = 200$
t = 5h	$N = 50 \cdot 2^5 = 50 \cdot 32 = 1600$
t = 30 min	$N = 50 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cong 50 \cdot 1{,}4 \cong 70$
t = 0h	$N = 50 \cdot 2^0 = 50 \cdot 1 = 50$

b) esboce o gráfico de N como função de t, N = f(t). (Dica: estabeleça uma escala apropriada no eixo y.)

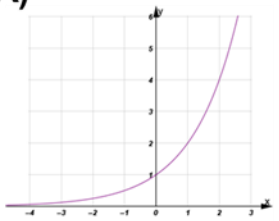


Fonte: Elaborada pelo autor

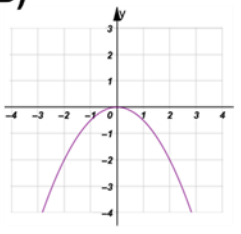
ATIVIDADE 14

A representação gráfica da função exponencial $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ é:

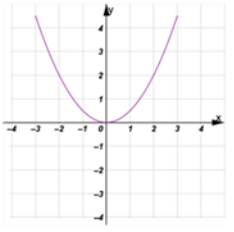
(A)



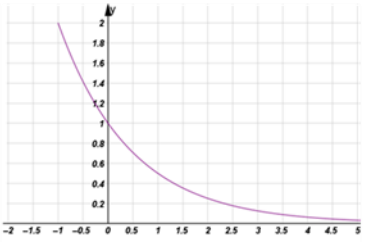
(B)



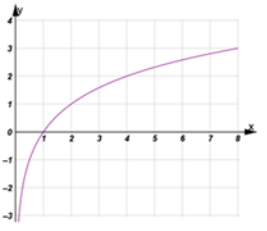
(C)



(D)



(E)



Orientações ao(à) Professor(a):

Esta atividade, que aparentemente é de uma escolha simples, permite ampla discussão no momento da correção. Tão importante quanto saber qual a opção correta é saber porque as demais opções não condizem com a função pedida e a qual tipo de função elas estão relacionadas. Você pode solicitar aos alunos que justifiquem a escolha, ou a não escolha, de cada uma delas.

Resolução:

De acordo com os gráficos apresentados, podemos concluir que:
Alternativa (A): Função exponencial crescente, com $a > 1$;
Alternativa (B): Função polinomial de grau 2, com coeficiente $a < 0$;
Alternativa (C): Função polinomial de grau 2, com coeficiente $a > 0$;
Alternativa (D): Função exponencial decrescente, com $0 < a < 1$;
Alternativa (E): Função logarítmica.
Portanto a alternativa que responde a comanda da questão será a (D).

ATIVIDADE 15

(ENEM 2016) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1 800.00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $S(t) = 1\,800 \cdot (1{,}03)^t$. De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais,[1]

(A) 7 416,00

(B) 3 819,24

(C) 3 709,62

(D) 3 708,00

(E) 1 909,62

Orientações ao(à) Professor(a):

Esta é uma questão que possibilita avaliar com um pouco mais de assertividade: a interpretação do enunciado, a devida substituição dos dados na função e o cálculo utilizando números na forma decimal. O professor pode utilizar este e mais critérios que achar pertinente para verificação da aprendizagem. A partir de suas observações, poderá preparar aulas com o intuito de sanar as defasagens apresentadas por cada grupo de estudantes.

Resolução:

Substituindo o valor de t referente a 2 anos na expressão indicada, temos:

$$S(t) = 1800 \cdot (1{,}03)^t$$
$$S(2) = 1800 \cdot (1{,}03)^2$$
$$S(2) = 1800 \cdot 1{,}0609$$
$$S(2) = 1909{,}62$$

Portanto, alternativa (E) correta.

[1] Disponível em http://e-escola.tecnico.ulisboa.pt/topico.asp?id=233. Acesso em 07/03/2019. (Adaptado)

ATIVDADE 16

(ENEM 2016) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades obteve-se a fórmula para a população: $P(t) = 40 \cdot 2^{3t}$ em que t é o tempo, em hora, e P(t) é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, qual será a população bacteriana após 3 min?

Prezado(a) Professor(a), na ocasião da aplicação desta atividade solicite aos estudantes, corrigirem a expressão apresentada no texto da atividade pela expressão: $P(t) = 40 \cdot 2^{3t}$.

Orientações ao(à) Professor(a):

Como t está sendo utilizado na unidade de medida horas, devemos transformar 3 minutos em horas. Nem sempre é interessante transformar um expoente fracionário em decimal, essa escolha depende da situação e o estudante precisa conhecer as possibilidades para que em outras situações ele tenha repertório e possa tomar a decisão mais adequada.

Resolução:

Transformando 3 minutos em horas:

$$\frac{3 \text{ min}}{60 \text{ min}} = \frac{1}{20} \text{horas} = 0{,}05 \text{ horas}$$

Agora basta aplicar o valor na função. Resolveremos três vezes, cada uma utilizando o valor em um formato de representação.

Primeira resolução, utilizando $\frac{3}{60}$ horas:

$$P\left(\frac{3}{60}\right) = 40 \cdot 2^{3 \cdot \frac{3}{60}} = 40 \cdot 2^{\frac{3}{20}} =$$

$$= 40 \cdot \sqrt[20]{2^3} \cong 40 \cdot 1{,}1096 \cong 44 \text{ mil bactérias}$$

Segunda solução, utilizando $\frac{1}{20}$ horas:

$P\left(\frac{1}{20}\right) = 40 \cdot 2^{3 \cdot \frac{1}{20}} = 40 \cdot 2^{\frac{3}{20}} = 40 \cdot \sqrt[20]{2^3} =$

$= 40 \cdot \sqrt[20]{8} \cong 40 \cdot 1{,}1096 \cong 44$ mil bactérias

Terceira solução, utilizando 0,05 horas

$P(0{,}05) = 40 \cdot 2^{3 \cdot 0{,}05} = 40 \cdot 2^{0{,}15} \cong 40 \cdot 1{,}1096 \cong$

$\cong 44$ mil bactérias.

ATIVIDADE 17

Alguns bens de uso pessoal, como automóvel e computador, perdem valor em função do tempo de uso, do consequente desgaste ou mesmo porque se tornam obsoletos. Para determinar o valor de um veículo que foi comprado por R$ 30.000,00, utiliza-se a fórmula $V(t) = 30.000 \cdot 2^{-0{,}25t}$, em que a variável V (valor do veículo) depende de t, que indica o tempo em anos. Depois de quanto tempo o valor desse veículo será de R$ 15.000,00?

Resolução

Sabemos que V(t) = 15000. Substituindo esse valor na função, temos:

$15000 = 30.000 \cdot 2^{-0{,}25t}$

$\frac{15000}{30000} = 2^{-0{,}25t}$

$\frac{1}{2} = 2^{-0{,}25t}$

$2^{-1} = 2^{-0{,}25t}$, na igualdade se as bases são iguais, então os expoentes também devem ser iguais.

$-1 = -0{,}25t \Rightarrow t = \frac{-1}{-0{,}25} = 4$

Portanto, após 4 anos, o valor do veículo será de R$ 15.000,00.

ATIVIDADE 18

A população de determinada cidade cresce 5% ao ano. No último censo, a população era de 12.345 habitantes. A fórmula que possibilita estimar o tamanho da população ano a ano é $P = 12.345 \cdot 1{,}05^t$. Em quantos anos a população dobrará?

Orientações ao(à) Professor(a):

Ao resolver essa questão deparamo-nos com a seguinte igualdade: $2 = 1{,}05^t$. *É importante que os estudantes cheguem a este impasse: que não é possível chegar rapidamente e facilmente ao valor de t. Incentive que estimem o valor de t por tentativas e/ou estimativas, podendo até utilizar uma calculadora. Na correção, considere os valores estimados e diga aos alunos que existe a possibilidade de se obter o valor exato e, para isso, eles precisam conhecer os logaritmos. Assim que aprenderem a operar utilizando as propriedades dos logaritmos, eles serão lembrados a voltar nesta questão para resolver da nova forma e comparar as resoluções. Esse movimento é importante para que o estudante perceba que novas ferramentas matemáticas foram sendo criadas ao longo do tempo, devido às necessidades que foram surgindo e que essas novas ferramentas têm o objetivo de obter soluções mais exatas.*

Resolução:

Sabemos que o valor inicial da população é de 12345 habitantes. Queremos saber o tempo gasto para dobrar a população: 24690. Substituindo P por 24690, obteremos o tempo t procurado.

$P = 12.345 \cdot 1{,}05^t$

$24690 = 12.345 \cdot 1{,}05^t$

$\frac{24690}{12345} = 1{,}05^t$

$2 = 1{,}05^t$

$t \cong 14$ anos (estimado)

ATIVIDADE 19

Certa substância radioativa se decompõe de tal forma que sua massa "m" se altera a cada quatro horas, conforme a função: $m = m_0 \cdot 2^{-0{,}25t}$.

O valor inicial da massa, m_0, é igual a 60 g, e o tempo é dado em horas.

Após 12 horas a massa (m), será de

(A) 60g

(B) 30g

(C) 7,5g

(D) 6,0g

(E) 3,5g

Resolução:

De acordo com o enunciado temos t=12. Note que o –0,25do expoente já está fazendo a função de reduzir o valor em 4 vezes. O expoente negativo tem relação com diminuição/decomposição da substância.

$m = m_0 \cdot 2^{-0,25t}$

$m = 60 \cdot 2^{-0,25 \cdot 12}$

$m = 60 \cdot 2^{-3}$

$m = \frac{60}{2^3}$

$m = \frac{60}{8}$

m =7,5g, Logo alternativa (C)

Tema 2: Logaritmos

Em nosso cotidiano ouvimos falar no pH (potencial Hidrogeniônico) da água e também de outras soluções como os itens de higiene pessoal (shampoo, sabonete, entre outros). Através do pH, constatamos se uma solução é ácida, neutra ou alcalina. A escala compreende valores de 0 a 14, sendo que o 7 é considerado o valor neutro. O valor 0 (zero) representa a acidez máxima e o valor 14 a alcalinidade máxima. As substâncias são consideradas ácidas quando o valor de pH está entre 0 e 7 e alcalinas (ou básicas) entre 7 e 14. Seguem abaixo algumas soluções e respectivos valores de pH:

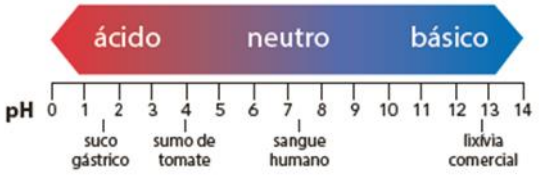
Vinagre: 2,9 Coca-cola: 2,5

Saliva humana: 6,5 – 7,4 Água natural: 7,0

Água do mar: 8,0 Cloro: 12,5

Para manter o equilíbrio do pH é importante evitar alimentos com pH baixo (refrigerante, café, etc.) e consumir alimentos alcalinos como vegetais, frutas com pouco açúcar etc.

A diminuição do pH no sangue humano está relacionado com o surgimento de doenças. O valor normal do pH sanguíneo deve ser 7,4. Abaixo desse valor, a acidez do sangue torna-se um meio propício para os mais variados fungos, bactérias e vírus. Medições do pH da saliva de pacientes com câncer registraram valores entre 4,5 e 5,7. (https://www.significados.com.br/ph/ . Acesso em 24 mar..2019)



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/PH , acesso em 24/03/2019

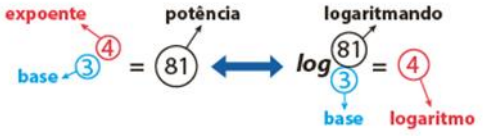
A escala apresentada tem como referência a água destilada com temperatura de 25°C, cuja concentração de cátion (hidrogeniônica H^+) e de ânion (hidroxiliônica OH-) são exatamente as mesmas $(H^+ = 10^{-7}$ e $OH^- = 10^{-7})$, por isso, nessa escala, o 7 representa o neutro.

O mais curioso de tudo isso é que o cálculo do pH utiliza um conceito matemático chamado logaritmo.

$$pH = -\log H^+$$

O logaritmo é uma forma diferente de escrever as potências facilitando essas operações.
Quando estudamos as equações exponenciais, podemos pensar: será que existe uma operação inversa a exponencial? A resposta está nos logaritmos, pois esses escrevem os expoentes de uma forma diferente.
Por exemplo:

Sabemos que dois elevado ao cubo é igual a oito: ($2^3 = 8$), mas se quiséssemos saber qual o expoente de dois cuja potência é oito, precisaríamos do auxílio dos logaritmos: $\log_2 8 = 3$



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

Note que a base de um é a mesma base do outro, o expoente de um é o logaritmo do outro e a potência de um é o logaritmando do outro.

ATIVIDADE 21

Represente em forma de logaritmo:

a) $3^2 = 9$
b) $5^3 = 125$
c) $256 = 4^4$
d) $243 = 3^5$
e) $2^x = 128$
f) $216 = 6^x$

Dica: quando a base escolhida para expressar um número **N** como uma potência é igual a 10, convenciona -se que ela pode ficar subentendida, se optarmos por outra base **a,** diferente de 10, somos obrigados a registra-la

Orientações ao(à) Professor(a):

Professor, observe atentamente como seus alunos estão resolvendo as atividades, circule pela sala, e anote as diferentes respostas, em seguida, convide os alunos para expressarem suas respostas na lousa, a partir das mais simples. Caso tenha respostas equivocadas, aproveite a oportunidade para discutir com todos os alunos a definição de logaritmo, sua relação com a potenciação, sobre a escrita correta dos logaritmos. Também é momento de perceber e sanar possíveis defasagens e rever conteúdos que julgue necessário.

As atividades 21, 22 e 23 são importantes para a familiarização com a linguagem dos logaritmos.

Resolução:

a) $3^2 = 9$
$\log_3 9 = 2$

b) $5^3 = 125$
$\log_5 125 = 3$

c) $256 = 4^4$
$\log_4 256 = 4$

d) $243 = 3^5$
$\log_3 243 = 5$

e) $2^x = 128$
$\log_2 128 = x$

f) $216 = 6^x$
$\log_6 216 = x$

ATIVIDADE 22

Represente em forma de potência:

a) $\log_2 8 = 3$ $2^3 = 8$
b) $\log_3 81 = 4$ $3^4 = 81$
c) $4 = \log_5 625$ $5^4 = 625$
d) $4 = \log_4 256$ $4^4 = 256$
e) $\log_3 27 = x$ $3^x = 27$
f) $3 = \log_5 x$ $5^3 = x$
g) $\log 1000 = 3$ $10^3 = 1000$
h) $\log x = 2$ $10^2 = x$

ATIVIDADE 23

É possível escrever cada número positivo N como uma potência de 10.

Se $N = 10^n$, então $n = \log N$

Se $625 = 5^4$, então

(A) $4 = \log_5 625$

(B) $5 = \log_5 625$

(C) $10 = \log 625$

(D) $625 = \log_4 625$

(E) $625 = \log_5 625$

Resolução:

$5^4 = 625$

ATIVIDADE 24

O resultado de $\log_2 128$ é

(A) 27

(B) $\log 27$

(C) 7

(D) 4

(E) 64

Resolução:

O valor de $\log_2 128$ é igual a 7, pois $2^7 = 128$. Portanto a alternativa C é a resposta correta.

ATIVIDADE 25

Sejam a, b e c três números reais tais que $\log_a(b) = c$

O valor de $\log_a(ab)$ é

(A) a^c

(B) $1 + c$.

(C) $1 - c$.

(D) $a + b \cdot c$

(E) $a + c$

Orientações ao(à) Professor(a):

Para calcular o $\log_a(ab)$ fazemos uso das propriedades dos logaritmos. O logaritmando é um produto de dois números reis e para multiplicar potências de mesma base mantém-se a base e somam-se os expoentes, ou seja, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Simultaneamente está se afirmando que o expoente de a é igual a $(x + y)$. Em outras palavras, o logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores.

Resolução:

Assim, $\log_a(ab) = \log_a a + \log_a b$, como $\log_a a = 1$ e $\log_a b = c$ (enunciado da atividade), temos que:
$\log_a(ab) = 1 + c$
Alternativa B.

Você sabia que...

Os logaritmos comuns ou decimais auxiliaram e ainda auxiliam muito nos cálculos com potências de base 10 (utilizada, por exemplo, em notação científica). Para simplificar os cálculos com os logaritmos comuns ou decimais existem as famosas tabelas ou tábuas logarítmicas, como a exemplificada a seguir:

Número	Potência de base 10	Representação logarítmica	Logaritmo
10 000	10^4	log 10 000	4
7 000	$10^{3,84510}$	log 7 000	3,84510
5 000	$10^{3,69897}$	log 5 000	3,69897
3 000	$10^{3,47712}$	log 3 000	3,47712
2 000	$10^{3,30103}$	log 2 000	3,30103
1 000	10^3	log 1 000	3
700	$10^{2,84510}$	log 700	2,84510
500	$10^{2,69897}$	log 500	2,69897
300	$10^{2,47712}$	log 300	2,47712
200	$10^{2,30103}$	log 200	2,30103
100	10^2	log 100	2
70	$10^{1,84509}$	log 70	1,84509
50	$10^{1,6989}$	log 50	1,6989
30	$10^{1,47712}$	log 30	1,47712
20	$10^{1,30103}$	log 20	1,30103
10	10^1	log 10	1
7	$10^{0,84509}$	log 7	0,84509
5	$10^{0,69897}$	log 5	0,69897
3	$10^{0,47712}$	log 3	0,47712
2	$10^{0,30103}$	log 2	0,30103
1	10^0	log 1	0

Podemos notar muitas regularidades matemáticas nesta tabela, como por exemplo as semelhanças entre log7, log70, log700 e log7000, onde apenas a parte inteira se modifica log7 ≅. 1,84509 , log700 ≅ 2,84509 e log7000 ≅ 3,84509. O modo de perceber porque a parte inteira se modifica é observando que como 7 está entre 1 e 10, seu logaritmo estará entre 0 (10^0=1) e 1 (10^1=10); o 70 está entre 10 e 100, ou seja, seu logaritmo estará entre 1 (10^1=10) e 2 (10^2=100); o 700 está entre 100 e 1000, ou seja, seu logaritmo estará entre 2 (10^2=100) e 3 (10^3=1000); o7000 está entre 1000 e 10000, ou seja, seu logaritmo estará entre 3 (10^3=1000) e 4 (10^4=10000). Com os valores da tabela acima, um pouco de conhecimento de logaritmo e a observação das regularidades é possível encontrar o valor da maioria dos logaritmos comuns ou decimais. Para exemplificar, vamos encontrar o valor de log6, log60 e log600:

Como 6 = 2 · 3, temos: log6 = log(2 · 3) = log2+log3. Segundo a tabela acima, log2≈0,30103 e log3≈0,47712, temos que log6≈0,30103+0,47712, portanto log6≈0,77815. Utilizando a associação feita acima, podemos concluir que, como 60 está entre 10 (10^1) e 100 (10^2), log60≈1,77815. O 600 está entre 100 (10^2) e 1000 (10^3), portanto log600 ≈ 2,77815

ATIVIDADE 26

Utilizando a tabela acima, encontre o valor dos logaritmos:

a) $\log 4 \cong$ b) $\log 40 \cong$ c) $\log 400 \cong$
d) $\log 9 \cong$ e) $\log 9000 \cong$ f) $\log 14 \cong$
g) $\log 140 \cong$ h) $\log 15 \cong$ i) $\log 45 \cong$

Orientações ao(à) Professor(a):

Professor, antes de propor a atividade, explore os dados da tabela, de modo que os alunos percebem naturalmente as propriedades dos logaritmos observando os resultados dessa tabela.

Por exemplo: log 10 =1

Podemos obter o número 10 de várias maneiras diferentes como:

$10 = 2 \cdot 5$

$\log 10 = \log (2 \cdot 5) = \log 2 + \log 5 \cong 0{,}30103 + 0{,}69897 = 1$

$\log 10 = \log \frac{20}{2} = \log 20 - \log 2 \cong 1{,}30103 - 0{,}30103 = 1$

Resolução:

a) $\log 4 \cong 0{,}60206$

$\log 4 = \log(2 \cdot 2) = \log 2 + \log 2$
Observando a tabela, $\log 2 \cong 0{,}30103$, temos $\log 4 \cong 0{,}30103 + 0{,}30103 \cong 0{,}60206$
Outra forma de resolução:
$\log 4 = \log 2^2 = 2 \cdot \log 2 \cong 2 \cdot 0{,}30103 \cong 0{,}60206$

b) $\log 40 \cong 1{,}60206$

Pela associação feita anteriormente, como 40 está entre 10 (10^1) e 100 (10^2), $\log 40 \cong 1{,}60206$.

c) $\log 400 \cong 2{,}60206$

O 400 está entre 100 (10^2) e 1000 (10^3), portanto $\log 400 \cong 2{,}60206$.

d) $\log 9 \cong 0{,}95424$

$\log 9 = \log 3 \cdot 3 = \log 3 + \log 3 \cong 0{,}47712 + 0{,}47712 \cong 0{,}95424$

e) $\log 9000 \cong 3{,}95424$

Como 9000 está entre 1000 (10^3) e 10000 (10^4), portanto $\log 9000 \cong 3{,}95424$

f) $\log 14 \cong 1{,}14612$

$\log 14 = \log 2 \cdot 7 = \log 2 + \log 7$. Observando os valores da tabela, $\log 2 \cong 0{,}30103$ e $\log 7 \cong 0{,}84509$
$\log 14 \cong 0{,}30103 + 0{,}84509 \cong 1{,}14612$

g) $\log 140 \cong 2.14612$

O 140 está entre 100 (10^2) e 1000 (10^3), portanto $\log 140 \cong 2{,}14612$

h) $\log 15 \cong 1{,}17609$

$\log 15 = \log 3 \cdot \log 5 \cong 0{,}47712 + 0{,}69897 \cong 1{,}17609$

i) $\log 45 \cong 1{,}65321$

$\log 45 = \log (3 \cdot 3 \cdot 5) = \log 3 + \log 3 + \log 5$
$\log 45 \cong 2 \cdot 0{,}47712 + 0{,}69897 \cong 1{,}65321$

Propriedades fundamentais dos logaritmos

Como vimos os logaritmos são formas diferentes de trabalhar com os expoentes, facilitando os cálculos. Suas propriedades fundamentais decorrem das correspondentes propriedades das potências.

Propriedade	Potências	Logaritmos
	$M = a^m \quad N = a^n$	$m = \log_a M \quad n = \log_a N$
Produto	$M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$
Quociente	$\frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
Potência	$M^k = (a^m)^k = a^{m \cdot k}$	$\log_a (M^k) = k \cdot \log_a M$
Raiz	$\sqrt[k]{M} = M^{\frac{1}{k}} = (a^m)^{\frac{1}{k}} = a^{\frac{m}{k}}$	$\log_a \left(M^{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1}{k} \cdot \log_a M$

Uma propriedade que facilita muito o cálculo com os expoentes através dos logaritmos é a troca de base. Essa troca pode simplificar os cálculos. Uma troca bastante usada é feita para a base 10, pois se apoia em valores obtidos em tabelas ou calculadoras..

Quando precisamos, por exemplo, calcular o valor de $\log_3 2$, a troca de base auxilia muito, pois podemos transformá-lo em logaritmos comuns ou decimais:

$$\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0{,}30103}{0{,}47712} \cong 0{,}63093$$

ATIVIDADE 27

Calcule o valor dos logaritmos:

a) $\log_2 3 \cong$

b) $\log_7 5 \cong$

c) $\log_6 10 \cong$

d) $\log_{100} 10000 =$

Resolução:

a) $\log_2 3 \cong 1{,}58496$

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \cong \frac{0{,}47712}{0{,}30103} \cong 1{,}58496$$

b) $\log_7 5 \cong 0{,}82709$

$$\log_7 5 = \frac{\log 5}{\log 7} \cong \frac{0{,}69897}{0{,}84509} \cong 0{,}82709$$

c) $\log_6 10 \cong 1{,}2851$

$$\log_6 10 = \frac{\log 10}{\log 6} \cong \frac{1}{0{,}77815} \cong 1{,}2851$$

d) $\log_{100} 10000 = 2$

$$\log_{100} 10000 = \frac{\log 10000}{\log 100} = \frac{4}{2} = 2$$

ATIVIDADE 28

O pH do suco de laranja é 3, enquanto o pH do café é 5, qual a diferença da concentração hidrogeniônica (H^+) entre eles? Lembre-se: $pH = -\log H^+$

Professor: solicitamos a substituição do e por é

Resolução:

Dizer que o suco de laranja tem pH igual a 3 significa dizer que existe 1 íon grama de H^+ para cada 10^3 litros. No caso do café que tem pH 5, existe 1 íon grama de H^+ para cada 10^5 litros.

Suco de laranja	Café
$pH = -\log H^+$	$pH = \log H^+$
$3 = \log \frac{1}{H^+}$	$5 = \log \frac{1}{H^+}$
$10^3 = \frac{1}{H^+}$	$10^5 = \frac{1}{H^+}$
$H^+ = \frac{1}{10^3}$	$H^+ = \frac{1}{10^5}$
$H^+ = 10^{-3}$	$H^+ = 10^{-5}$

Logo, a diferença de concentração hidrogeniônica (H^+) é:

$H^+_{suco} - H^+_{café} = 10^{-3} - 10^{-5} =$

$= 0{,}001 - 0{,}00001 = 0{,}00099 = 9{,}9 \cdot 10^{-4}$

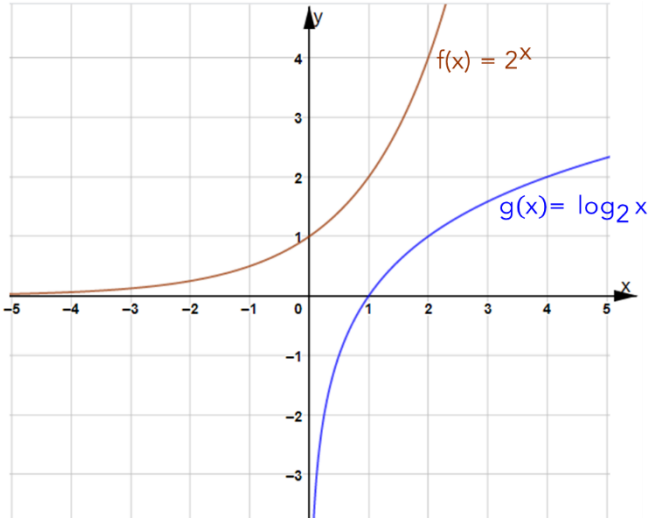
Tema 3 : Função Logarítmica

Você já ouviu falar em funções inversas? Em matemática, o termo inversa é usado para indicar que uma desfaz a ação da outra, no sentido que cada uma desfaz o efeito da outra.

As funções exponenciais e as funções logarítmicas são funções inversas.

Para analisar a relação inversa que existe entre essas funções, complete a tabela abaixo e construa o gráfico de ambas no mesmo plano cartesiano.

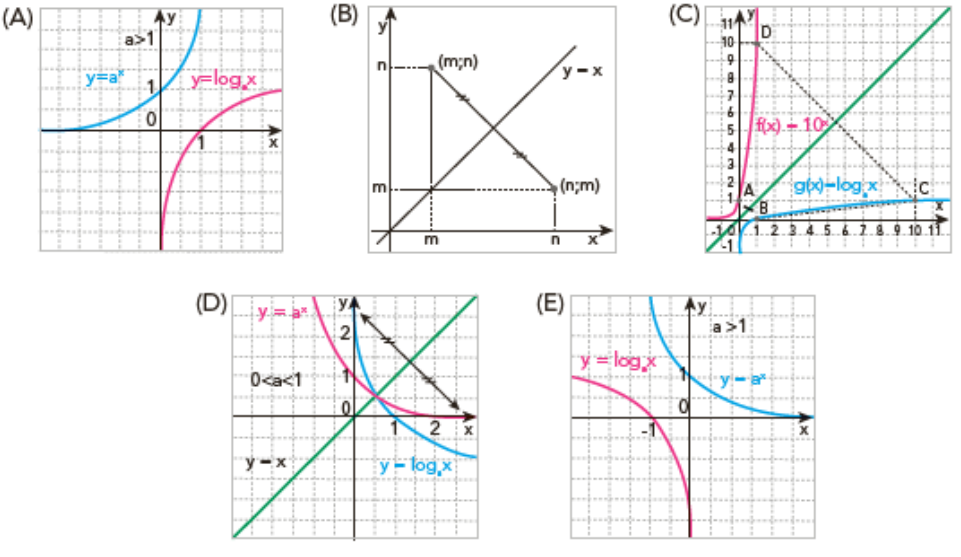
x	$f(x) = 2^x$	$g(x) = \log_2 x$
2	$2^2 = 4$	$\log_2 2 = 1$
1	$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$
0,5	$2^{0,5} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$	$\log_2 0,5 = \log_2 \frac{1}{2} = -1$



Fonte: Elaborada pelo autor.

ATIVIDADE 29

Considere as funções $f(x) = 10^x$ e $\log x$. O gráfico que representa as duas funções no mesmo sistema de coordenadas é



Fonte: Elaborada pelo autor

Resolução

Como podemos observar nas indicações dos esboços, o único gráfico que apresenta as informações referentes ao enunciado da atividade, é a alternativa (C).

ATIVIDADE 30

Para melhor compreensão do comportamento da função logarítmica, complete a tabela abaixo e esboce os gráficos solicitados:

x	$\log x$	$\log_{0,1} x$
$\frac{1}{10}$	$\log\frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$	$\log_{0,1}\frac{1}{10} = \log_{\frac{1}{10}}\frac{1}{10} = 1$
$\frac{2}{10}$	$\log\frac{2}{10} = -0{,}69897$	$\log_{0,1}\frac{2}{10} = 0{,}69897$
$\frac{4}{10}$	$\log\frac{4}{10} = -0{,}39794$	$\log_{0,1}\frac{4}{10} = 0{,}39794$
1	$\log 1 = 0$	$\log_{0,1} 1 = 0$

Resolução:

$$\log\frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 = 0{,}30103 - 1 = -0{,}69897$$

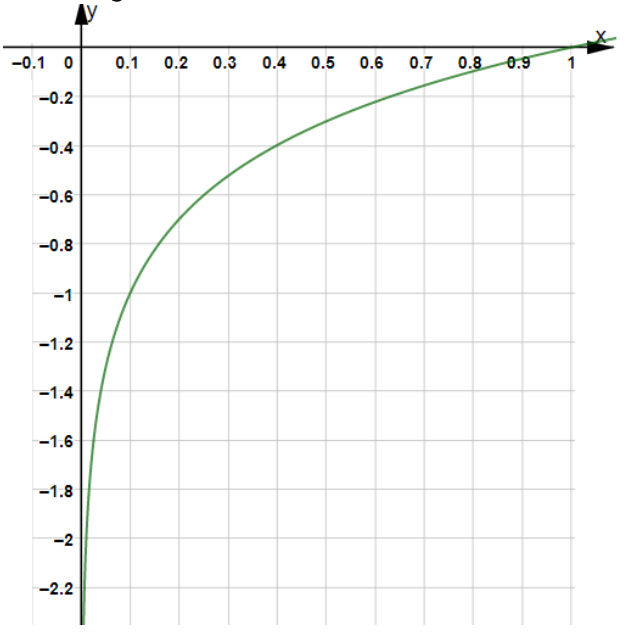
$$\log\frac{4}{10} = \log 4 - \log 10 = 0{,}60206 - 1 = -0{,}39794$$

$$\log_{0,1}\frac{2}{10} = \log_{0,1} 2 - \log_{0,1} 10 = \frac{\log 2}{\log 0{,}1} - (-1) = \frac{0{,}30103}{-1} + 1 = -0{,}30103 + 1 = 0{,}69897$$

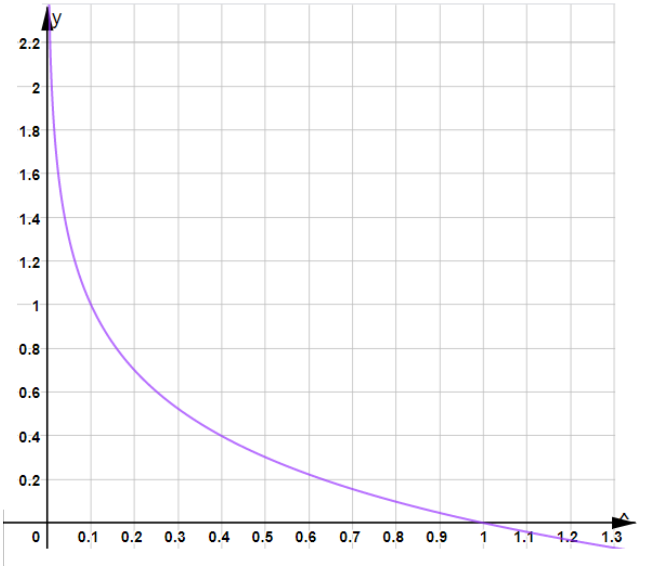
$$\log_{0,1}\frac{4}{10} = \log_{0,1} 4 - \log_{0,1} 10 = \frac{\log 4}{\log 0{,}1} = -(-1) = \frac{0{,}60206}{-1} + 1 = -0{,}60206 + 1 = 0{,}39794$$

a) Esboce os gráficos de $\log x$ e $\log_{0,1} x$

$f(x) = \log x$



$g(x) = \log_{0,1} x$



b) o que ocorre quando a base do logaritmo é maior que 1?

A função é crescente, ou seja, se o valor do x aumenta, o valor de f(x) também aumenta.

c) o que ocorre quando a base do logaritmo está entre 0 e 1?

A função é decrescente, ou seja, quando o valor de x aumenta, o valor de g(x) diminui.

d) o que há de semelhante entre $\log x$ e $\log_{0,1} x$?

- ambas passam pelo ponto (1, 0)
- Domínio = $\mathbb{R}_+^*$
- Imagem = $\mathbb{R}$

e) qual a diferença marcante entre as funções acima?

- a função $\log x$ é crescente por ter base 10, que é maior que 1;
- a função $\log_{0,1} x$ é decrescente por ter base (0,1) que é um número compreendido entre 0 e 1.

Ou seja,

- se $a > 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é crescente;
- se $0<a<1$, a função $f(x) = \log_a x$ é decrescente.

ATIVIDADE 31

Complete a tabela abaixo (se necessário utilize a calculadora):

x	$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = \log_3 x$	$h(x) = \log_4 x$	$q(x) = \log_5 x$
1	$\log_2 1 = 0$, pois $2^0=1$	$\log_3 1 = 0$	$\log_4 1 = 0$	$\log_5 1 = 0$
2	$\log_2 2=1$	$\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0,3010}{0,4771} \cong 0,6309$	$\log_4 2 \cong 0,5$	$\log_5 2 \cong 0,4306$
3	$\log_2 3 \cong 1,58496$	$\log_3 3 = 1$	$\log_4 3 \cong 0,79248$	$\log_5 3 \cong 0,6826$
4	$\log_2 4 = 2$	$\log_3 4 \cong 1,2618$	$\log_4 4 = 1$	$\log_5 4 \cong 0,86135$
5	$\log_2 5 \cong 2,3219$	$\log_3 5 \cong 1,4650$	$\log_4 5 \cong 1,1609$	$\log_5 5 = 1$

$\log_4 2 = \frac{\log 2}{\log 4} = \frac{0,3010}{0,6021} \cong 0,5$

$\log_5 2 = \frac{\log 2}{\log 5} = \frac{0,3010}{0,6990} \cong 0,4306$

$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,4771}{0,3010} \cong 1,58496$

$\log_4 3 = \frac{\log 3}{\log 4} = \frac{0,4771}{0,6020} \cong 0,79248$

$\log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{0,4771}{0,6990} \cong 0,6826$

$\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{0,6020}{0,4771} \cong 1,2618$

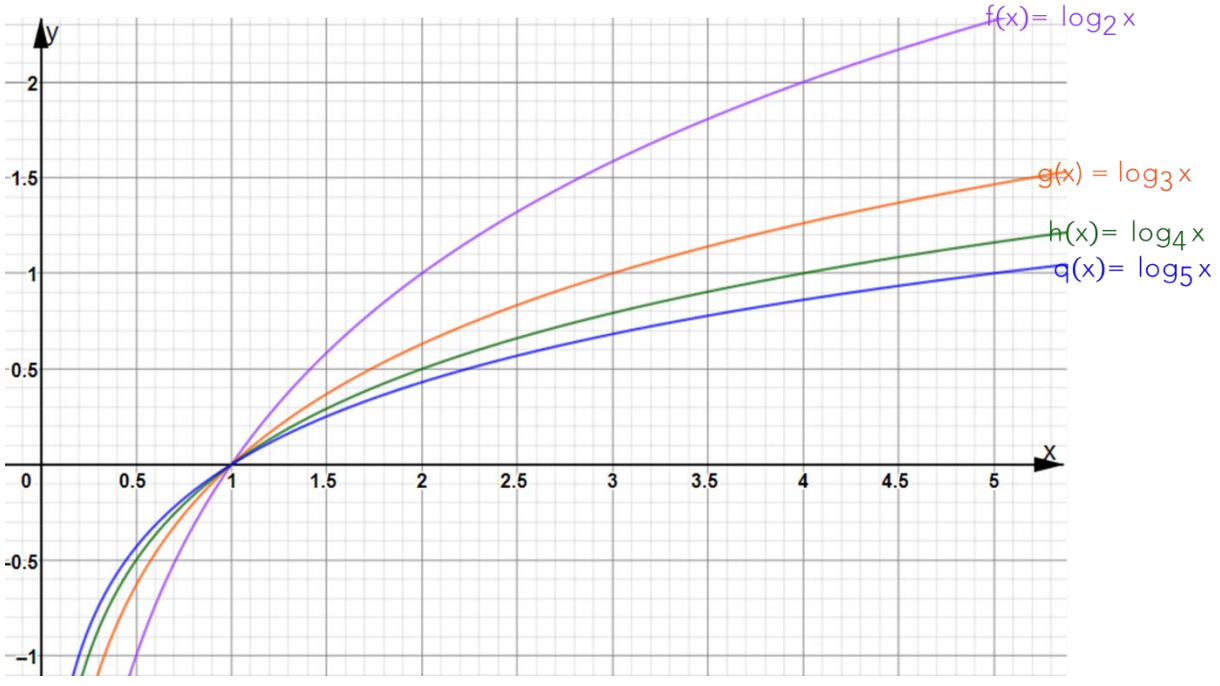
$\log_5 4 = \frac{\log 4}{\log 5} = \frac{0,6021}{0,6990} \cong 0,86135$

$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{0,6990}{0,3010} \cong 2,3219$

$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{0,6990}{0,4771} \cong 1,4650$

$\log_4 5 = \frac{\log 5}{\log 4} = \frac{0,6990}{0,6020} \cong 1,1609$

Utilizando uma folha de papel quadriculado, esboce os gráficos das funções f(x), g(x), h(x) e q(x)



Fonte: Elaborada pelo autor.

a) quais as principais semelhanças entre as funções acima?

- as funções apresentadas são crescentes, pois, a >1;
- todas passam pelo ponto (1, 0)
- Domínio: $\mathbb{R}_+^*$, Imagem: $\mathbb{R}$

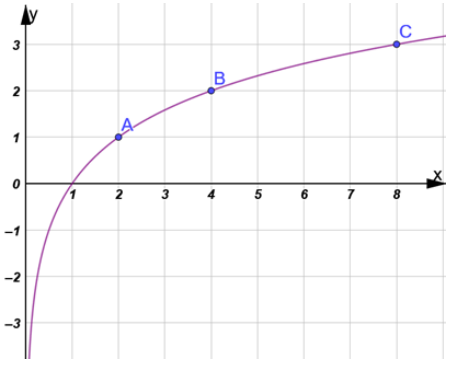
b) O que ocorreu de diferente entre as funções logarítmicas acima?

Conforme o valor da base do logaritmo aumenta, o crescimento da função logarítmica ocorre de forma mais lenta.

Por que todas as funções se encontram no ponto 1 do eixo das abscissas?

O logaritmo de 1 em qualquer base é sempre igual a zero, ou seja, $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$ e $a \neq 1$.

Para o reconhecimento da função logarítmica, alguns pontos devem ser ressaltados. Observe a função $f(x) = \log_2 x$



Lembrando que a base do logaritmo em questão é 2, podemos notar que o ponto A (2; 1) possui essas coordenadas, pois $2^1 = 2$, o ponto B(4: 2) possui tais coordenadas, pois $2^2 = 4$ e o ponto C (8; 3) possui essas coordenadas, pois $2^3 = 8$

Orientações ao(à) Professor(a):

Professor, observe que podemos destacar algumas das coordenadas dos pontos que representam a função $f(x) = \log_a x$, em que a abscissa é representada pelo logaritmando (resultado da potenciação) e a ordenada é representada pelo logaritmo (expoente da potenciação).

Assim, os pontos (1, 0), (2, 1), (4,2), (8,3) pertencem à função logarítmica. Para encontrar a base da função logarítmica, devemos procurar um número que, quando elevado ao expoente 1 resulta em 2 (2,1); se elevado ao expoente 2, dá como resultado, 4 (4,2), quando elevado ao expoente 3, o resultado é 8 (8,3).

$2^2 = 4$ $\qquad$ $\log_2 4 = 2$

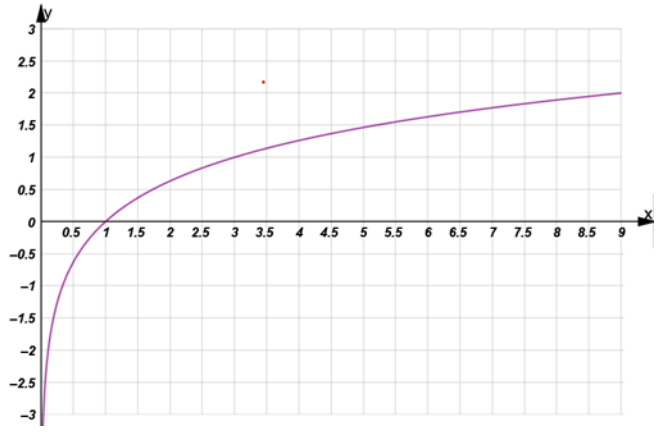
$2^3 = 8$ $\qquad$ $\log_2 8 = 3$

Logo, a base é 2 e a função logarítmica é representada por $f(x) = \log_2 x$.

ATIVIDADE 32

Observe o gráfico da função logarítmica.

A função f(x) com x > 0 representada pelo gráfico é



(A) $f(x) = \log 3$.

(B) $f(x) = \log x$.

(C) $f(x) = \log_x 3$

(D) $f(x) = \log_3 x$.

(E) $f(x) = \log_9 3$.

Resolução:

Observando o gráfico da função podemos destacar as coordenadas de alguns pontos: (1,0), (3,1) e (9,2). Como o gráfico representa uma função logarítmica, procuramos encontrar a base do logaritmo, ou seja, um número que elevado ao expoente 1 resulta em 3, e quando elevado ao expoente 2 resulta em 9. O número 3, satisfaz simultaneamente às condições acima, pois $3^1 = 3$ e $3^2 = 9$. Logo, a base é 3.

Portanto, $f(x) = \log_3 x$. Alternativa D.

Outra solução:

$f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, $x > 0$

$f(1) = \log_a 1 = 0 \Rightarrow a^0 = 1$

$f(3) = \log_a 3 = 1 \Rightarrow a^1 = 3 \Rightarrow a = 3$

$f(9) = \log_a 9 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

Logo, $f(x) = \log_3 x$

ATIVIDADE 33

(FUVEST) Sabendo-se que $5^n = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a:

(A) 2/n $\qquad$ (B) 2n

(C) $2 + n^2$ $\qquad$ (D) 2 + 2n

(E) (2 + 2n)/n

Resolução:

Como $5^n = 2$, pela definição de logaritmo, temos que: $n = \log_5 2$.

Realizando a mudança de base 2 para base 5, temos:

$$\log_2 100 = \frac{\log_5 100}{\log_5 2} =$$

$$\log_2 100 = \frac{\log_5 10^2}{n} =$$

$$\log_2 100 = \frac{2 \cdot \log_5 10}{n} =$$

$$\log_2 100 = \frac{2 \cdot (\log_5 (2 \cdot 5))}{n} =$$

$$\log_2 100 = \frac{2 \cdot (\log_5 2 + \log_5 5)}{n} =$$

$$\log_2 100 = \frac{2 \cdot (n + 1)}{n} =$$

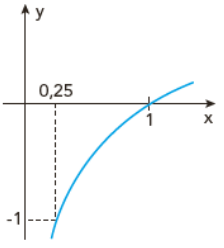
$$\log_2 100 = \frac{2n + 2}{n}$$

Portanto, alternativa (E) correta.

ATIVIDADE 34

(FUVEST) A figura a seguir mostra o gráfico da função logaritmo na base b.

O valor de b é:



(A) $\frac{1}{4}$ (B) 2

(C) 3 (D) 4

(E) 10

Resolução:

Seja a função logaritmo: $y = \log_b x$ e considerando as coordenadas (0,25, –1) do esboço apresentado, temos:

$-1 = \log_b 0{,}25 \Rightarrow b^{-1} = 0{,}25$ ou $b^{-1} = \frac{1}{4}$ (I)

De (I), temos que:

$\frac{1}{b} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = 4$

Portanto, alternativa (D) correta.

ATIVIDADE 35

(FUVEST) O número $x > 1$ tal que $\log_x 2 = \log_4 x$ é:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $2^{\sqrt{2}}$

(C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

(E) $4^{\sqrt{2}}$

Resolução:

Do enunciado da questão: $\log_x 2 = \log_4 x$

Estabelecendo-se uma mesma base para os dois termos da expressão algébrica, temos:

$\frac{\log 2}{\log x} = \frac{\log x}{\log 4} =$

$(\log x)^2 = \log 2 \cdot \log 4$

$(\log x)^2 = \log 2 \cdot \log 2^2$

$(\log x)^2 = \log 2 \cdot 2\log 2$

$(\log x)^2 = 2 \cdot (\log 2)^2$

Como $x > 1$, temos:

$\log x = \sqrt{2 \cdot (\log 2)^2}$

$\log x = \sqrt{2} \cdot \log 2$

$\frac{\log x}{\log 2} = \sqrt{2} \Rightarrow \log_2 x = \sqrt{2}$

Pela definição de logaritmo, temos que:

$\boxed{2^{\sqrt{2}} = x}$ Alternativa (B)

ATIVIDADE 36

(Unesp) Seja $n > 0$, $n \neq 1$, um número real. Se $\log_n x = 3\log_{10} x$ para todo número real $x > 0$, $x \neq 1$, então:

(A) $n = 3$ (B) $n = 10/3$

(C) $n = 30$ (D) $n = \sqrt[3]{10}$

(E) $n = 10^3$

Resolução:

Do enunciado, temos:

$$\log_n x = 3 \cdot \log_{10} x$$

Realizando a mudança de base do segundo termo para a base n, temos que:

$$\log_n x = 3 \cdot \frac{\log_n x}{\log_n 10}$$

$$\log_n x = \frac{3 \cdot \log_n x}{\log_n 10}$$

Dividindo ambos os termos por: $3 \cdot \log_n x$

$$\frac{\log_n x}{3 \cdot \log_n x} = \frac{3 \cdot \log_n x}{\frac{\log_n 10}{3 \cdot \log_n x}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3 \cdot \log_n x}{\log_n 10} \cdot \frac{1}{3 \cdot \log_n x}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{\log_n 10}$$

$$\log_n 10 = 3$$

Pela definição de logaritmo, temos:

$$n^3 = 10$$

Portanto:

$$\boxed{n = \sqrt[3]{10}}$$

Portanto, alternativa (D) correta.

ATIVIDADE 37

(PUCPR) Se $\log(3x+23) - \log(2x-3) = \log 4$, encontrar x

(A) 4 (B) 3

(C) 7 (D) 6

(E) 5

Resolução:

Aplicando uma das propriedades operatórias dos logaritmos, na equação apresentada, temos:

$\log(3x+23) - \log(2x-3) = \log 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\frac{(3x+23)}{(2x-3)} = \log 4$

Como temos uma igualdade de logaritmos de mesma base, os logaritmandos de ambos os lados são iguais, ou seja:

$$\frac{3x+23}{2x-3} = 4$$

$$8x - 12 = 3x + 23$$

$$5x = 35 \Rightarrow x = 7$$

Condição de existência:

$3x + 23 > 0$ e $2x - 3 > 0$

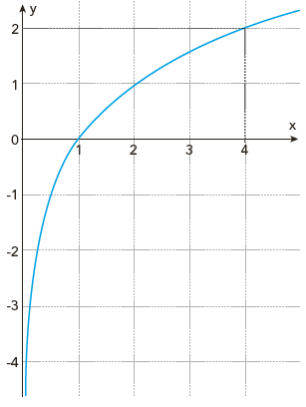
$x > -\frac{23}{3}$ e $x > \frac{3}{2}$

O valor de $x = 7$ satisfaz a condição de existência.

Logo, $x = 7$, Alternativa (C)

ATIVIDADE 38

(PUCRS) A representação:



é da função dada por $y = f(x) = \log_n(x)$. O valor de $\log_n(n^3+8)$ é

(A) 2 (B) 4

(C) 6 (D) 8

(E) 10

Resolução:

Observando a representação gráfica, percebemos que o ponto (4, 2) pertence ao gráfico da função $y = f(x) = \log_n x$, substituindo os valores de x e y, temos:

$2 = f(4) = \log_n 4$, aplicando a definição de logaritmo:

$n^2 = 4 \Rightarrow n = 2$

Então temos que:

$\log_n(n^3+8) = \log_2(2^3+8) = \log_2 16 = 4$

Portanto, alternativa (B) correta.

ATIVIDADE 39

(UNIRIO) Na solução do sistema a seguir, o valor de x é:

$$\begin{cases} \log(x+1) - \log y = 3\log 2 \\ x - 4y = 7 \end{cases}$$

(A) 15 (B) 13

(C) 8 (D) 5

(E) 2

Resolução:

Condição de existência de log (x+1)
$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$
Condição de existência de log y
$y > 0$
Aplicando a propriedade dos logaritmos na 1ª equação, obtemos:

$\log \frac{(x+1)}{y} = \log 2^3 \Rightarrow \frac{x+1}{y} = 8 \Rightarrow x + 1 = 8y.$
ou $x - 8y = -1$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x - 8y = -1 & (L_1) \xrightarrow{L_1 + (-2)\cdot L_2} = \\ x - 4y = 7 & (L_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 8y = -1 & (L_1) \xrightarrow{L_1 + L_2} = \\ -2x + 8y = -14 & (L_2) \end{cases}$$

$= -x = -15 \Rightarrow x = 15$ (satisfaz a condição de existência.
Portanto, a alternativa correta é (A).

Tema 4: Equações Exponenciais

ATIVIDADE 40

A massa de carbono 14 varia com o tempo de acordo com a seguinte expressão:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

(cada vez que t assume valores múltiplos sucessivos de 5730, a massa reduz-se a metade). Se for constatada que a massa de carbono 14 restante no fóssil é apenas 10% da massa inicial, a idade estimada do fóssil é de aproximadamente:

(Dado: log2 ≅ 0,301)

(A) 11.460 anos. (B) 17.190 anos.

(C) 19.036 anos. (D) 28.650 anos.

(E) 40.110 anos.

Resolução:

Se a massa restante de carbono 14 é apenas 10% da massa inicial, indicada por m_0, e sendo m(t) = 10% de m_0, ou seja, $m(t) = 0{,}1\ m_0$, segue que,

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow 0{,}1 \cdot m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow 0{,}1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow \boxed{0{,}1 = (2)^{-\frac{t}{5730}}}$$

Do resultado obtido anteriormente, temos que:

$$0{,}1 = (2)^{-\frac{t}{5730}} \Rightarrow \boxed{\log_2 0{,}1 = -\frac{t}{5730}}$$

Resolvendo a equação logarítmica obtida temos que:

$$-t = 5730 \cdot \log_2 0{,}1$$

$$-t = 5730 \cdot \left(\frac{\log 0{,}1}{\log 2}\right)$$

$$-t = 5730 \cdot \left(\frac{-1}{0{,}301}\right)$$

$$t = \frac{5730}{0{,}301} \Rightarrow \boxed{t \cong 19036 \text{ anos}}$$

ATIVIDADE 41

Um capital C_o é aplicado a uma taxa de juros compostos de 12% ao ano. Nesse regime, os juros gerados a cada período são incorporados ao capital para o cálculo dos juros do período seguinte. Sabendo-se que o capital em função do tempo é dado pela função:

$C = C_0 \cdot (1 + i)^t$, sendo que C_0 é o capital inicial e "i" a taxa de juros.

Levando em conta que os juros são incorporados ao capital apenas ao final de cada ano, o capital dobrará seu valor em:

(A) 5 anos.

(B) 6 anos.

(C) 7 anos

(D) 8 anos.

(E) 9 anos.

Considere:

log 2 ≈ 0,301

log 7 ≈ 0,845

Resolução:

O valor C_1 do capital ao final do primeiro ano será: $C_1 = C_0 + 12\%$ de C_0, ou seja, $C_1 = C_0 \cdot (1 + 0{,}12) = 1{,}12 \cdot C_0$.
O valor C_2 do capital ao final do segundo ano será: $C_2 = C_1 + 12\%$ de C_1, ou seja , $C_2 = C_1 \cdot (1 + 0{,}12) = 1{,}12 \cdot C_1 =$
$= 1{,}12 \cdot 1{,}12 \cdot C_0 = (1{,}12)^2 \cdot C_0$
O valor C(t) do capital ao final de **t** anos será: $C(t) = C_0 \cdot 1{,}12^t$.
O capital dobrará quando $C = 2 \cdot C_0$, ou seja, quando $C_0 \cdot 1{,}12^t = 2 \cdot C_0$, o que significa que $1{,}12^t = 2$
Calculando o logaritmo dos dois membros dessa igualdade, temos:

$$\log 1{,}12^t = \log 2$$

$$t \cdot \log 1{,}12 = \log 2$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}12}$$

Calculando o log 1,12, obtemos:

$$\log \frac{112}{100} = \log 112 - \log 100 = \log(2^4 \cdot 7) - 2 = 4 \cdot \log 2 + \log 7 - 2 = 4 \cdot 0{,}301 + 0{,}845 - 2 \cong 0{,}049$$

O valor de **t**, portanto, será

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}12} = \frac{0{,}301}{0{,}049} \cong 6{,}14 \text{ anos} \cong 6 \text{ anos e } 2 \text{ meses}$$

Como os juros são incorporados ao capital apenas ao final de cada ano, somente após 7 anos será possível dispor do capital dobrado.

MATEMÁTICA

2ª Série – Ensino Médio

3° Bimestre

1. Organização das grades curriculares

Apresentamos, a seguir, uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais da Base Nacional Comum (BNCC) do Ensino Médio, além de algumas orientações pedagógicas para as três séries que compõem o referido estágio de ensino da escolaridade básica.

A lista de conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas; e o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

1.1 Grade Curricular da 2ª série do Ensino Médio – 3º Bimestre

ENSINO MÉDIO – CURRÍCULO DE MATEMÁTICA –2ª SÉRIE (3º BIMESTRE)		
CURRÍCULO OFICIAL – SEDUC-SP		**Base Nacional Comum Curricular**
Tema/Conteúdo	**Habilidades**	**Competências Gerais**
Números ▸ Análise combinatória e probabilidade. • Princípios multiplicativo e aditivo; • Probabilidades simples; • Arranjos, combinatória e permutações. • Probabilidade da reunião e/ou da interseção de eventos. • Probabilidade condicional; • Distribuição binomial de probabilidades: • O triângulo de Pascal e o binômio de Newton.	• Compreender os raciocínios combinatórios aditivo e multiplicativo na resolução de situações-problema de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento. • Saber calcular probabilidades de eventos em diferentes situações-problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas específicas. • Saber resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidades de eventos simples repetidos, como os que conduzem ao binômio de Newton. • Conhecer e saber utilizar as propriedades simples do binômio de Newton e do triangulo de Pascal.	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação , a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. 4. Utilizar diferentes linguagens verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

1.1.1 Probabilidade e análise combinatória.

O tratamento tradicional do tema em questão, parte da classificação dos problemas utilizando os conceitos de permutação, arranjos e combinações, de acordo com determinado critério, na tentativa de facilitar a resolução a partir da aplicação de algumas fórmulas de cálculo.

Se, por um lado, tal formalização permite agilizar a resolução de situações-padrão, por outro, dificulta o enfrentamento de situações-problema reais, com contextos e dificuldades inéditas. Dessa forma, um curso de Matemática, que priorize a resolução de problemas como principal metodologia de aprendizado, não pode se basear, unicamente, na classificação das situações em grupos determinados, sob pena de limitar demais as estratégias de raciocínio que o estudante pode e deve mobilizar ao se confrontar com uma dificuldade real. Desta forma propomos que a classificação e o formalismo tradicional sejam inicialmente relegados a um segundo plano e, apenas ao final, sejam realizados nos moldes conhecidos.

O raciocínio combinatório e o cálculo de probabilidades são conceitos apresentados aos alunos desde o Ensino Fundamental Anos Iniciais, etapa em que tais conceitos não costumam gerar qualquer dificuldade além dos habituais para esse segmento de ensino.

Dessa maneira, trata-se agora, no Ensino Médio, de partir dos conhecimentos e das habilidades anteriormente construídos e promover os aprofundamentos necessários.

Com base nessa premissa básica, propomos que a apresentação dos conteúdos seja iniciada com as probabilidades desprovidas de cálculo combinatório.

Apresentar o cálculo de probabilidades sem a exigência de raciocínio combinatório significa priorizar o fato de que podemos expressar a chance de ocorrência de um evento por intermédio de uma razão entre dois valores: a parte e o todo. O numerador dessa razão coincide com o número de resultados esperados para o experimento, enquanto o denominador coincide com o número de resultados possíveis, todos eles considerados igualmente prováveis. Por exemplo, em uma classe de 40 alunos, se qualquer um tem uma chance em quarenta de ser sorteado, precisamos apenas formalizar essa condição, que expressamos na língua materna por intermédio de uma fração, $\frac{1}{40}$, por uma porcentagem, 2,5%, e também por um número real maior que 0 e menor que 1, nesse caso, 0,025. Nada disso, de fato, acarreta maiores dificuldades, visto se tratar de um conhecimento abordado no Ensino Fundamental dos anos finais. Cremos, portanto, que os alunos trazem na 2ª série do Ensino Médio, o terreno preparado para o estudo formalizado das probabilidades, desde que os casos a eles apresentados não envolvam, inicialmente, raciocínio combinatório

Agora pensando nos raciocínios aditivos e multiplicativos, pode-se concluir que em uma adição de n parcelas iguais a p pode ser representada pelo produto $n \cdot p$. Muitas são as situações-problema resolvidas por intermédio de uma adição desse tipo. Outras adições, não formadas por parcelas iguais, também podem ser expressas por intermédio de um produto, como é o caso de $5 + 4 + 3 + 2 + 1$, que é igual a $(6 \cdot 5) \div 2 = 15$.

Expressões desse tipo também podem explicitar a solução de uma situação-problema, por exemplo, o cálculo de número de grupos diferentes de duas pessoas formados a partir de 6 indivíduos.

Problemas envolvendo raciocínio combinatório são, na maioria das vezes, resolvidos por intermédio de uma adição ou de uma multiplicação, embora quase sempre a escolha pela multiplicação seja a mais aconselhável, pois envolve um raciocínio mais elaborado e eficiente. Perceber a existência das duas possibilidades apontadas para resolver um problema de análise combinatória e as vantagens de uma sobre a outra é fundamental e cabe ao professor

verificar a viabilidade de discutir os possíveis encaminhamentos e aplicá-los em sala de aula.

A solução de situações-problema envolvendo simultaneamente raciocínio combinatório e cálculo de probabilidades costuma acarretar dificuldades maiores do que aquelas em que se aplicam esses conteúdos de maneira independente. Entre as diversas justificativas possíveis, podemos enunciar o fato de que as características conjuntas desses conteúdos impedem que os problemas sejam facilmente agrupados em tipos padrão, de maneira que resolver um deles sempre passe pela mobilização da estratégia de raciocínio que o associa a algum anteriormente resolvido e compreendido, como ocorre, mais facilmente, com problemas de outros grupos de conteúdos matemáticos. Essa impossibilidade de padronização exige, mais do que em outros casos, que os alunos mobilizem diversas estratégias de raciocínio. **Portanto, cabe ao professor estimular a resolução de diversos problemas de análise combinatória e probabilidades com o foco voltado para o tipo de raciocínio exigido, em vez da clássica separação em problemas típicos, baseada no tipo de operação matemática envolvida.**[1]

Podemos afirmar sem perder a generalidade que um cálculo de probabilidades sempre está associado a um "sim" e a um "não", ou a um "sucesso" e a um "fracasso" sem que esses aspectos sejam expressos por probabilidades iguais. Em outras palavras, nem sempre há 50% de chance para o "sim" e 50% para o "não", como no caso da face observada no lançamento de uma moeda em que o "sim" pode ser coroa e o "não" pode ser cara. Para o comprador de um número de uma rifa, em um total de 200, o "sim" é 0,5% e o "não" é 99,5%.

O que ocorre então com o cálculo de probabilidades de eventos que se repetem n vezes sob as mesmas condições, isto é, situações em que "sim" ou "não" são esperados, cada um, mais de uma vez, como no caso do lançamento de quatro dados, com o objetivo de se conseguir duas vezes o número seis na face superior?

A resolução desse tipo de problema pode ser associada ao desenvolvimento de um binômio do tipo $[(\text{sim})+(\text{não})]^n$, de modo que, assim procedendo, estamos atribuindo significado real à busca do termo geral do Binômio de Newton, bem como aos elementos das linhas do Triângulo de Pascal.

Todos os tópicos acima apresentados, podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem, conforme segue:

Situação de Aprendizagem 1 – Probabilidade e proporcionalidade: No início era o jogo, Vol. 2, 2ª série do Ensino Médio, pg. 13 a 24.

Situação de Aprendizagem 2 – Análise combinatória: Raciocínios aditivo e multiplicativo, Vol. 2, 2ª série do Ensino Médio, pg. 24 a 44.

Situação de Aprendizagem 3 – Probabilidades e raciocínio combinatório, Vol. 2, 2ª série do Ensino Médio, pg. 44 a 51.

Situação de Aprendizagem 4 – Probabilidades e raciocínio combinatório: O binômio de Newton e o triângulo de Pascal.

Lembrando que ao final de cada situação de aprendizagem constam algumas considerações sobre a avaliação dos conhecimentos bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências e habilidades enunciadas.

Além das situações de aprendizagem, sugerimos alguns recursos audiovisuais, da plataforma Matemática Multimídia:

✓ 37% Namorados. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1327, Acesso em: 30/11/2018.

✓ Apostas no relógio. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1365, Acesso em: 30/11/2018.

[1] Grifo do autor

✓ Baralhos e Torradas. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/997, Acesso em: 30/11/2018.

✓ Brasil x Argentina. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1056, Acesso em: 30/11/2018.

✓ Caminhões de açúcar Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1056. Acesso em: 30/11/2018.

✓ Cara ou coroa. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1062 Acesso em 30/11/2018.

✓ Coisa de passarinho. Disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1070. Acesso em 30/11/2018.

✓ Coisas do amor. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1071. Acesso em 30/11/2018.

✓ Curva do Sino. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1071. Acesso em 30/11/2018.

✓ Dados não-transitivos. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1309. Acesso em: 30/11/2018.

✓ Exoplanetas e probabilidades. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1335. Acesso em: 30/11/2018.

✓ Explorando o Jogo do Máximo. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1237. Acesso em: 30/11/2018.

✓ Fraude 171. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1313. Acesso em 30/11/2018.

História da Estatística. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1252. Acesso em: 30/11/2018.

✓ Histórica da Probabilidade. Disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1253. Acesso em 30/11/2018.

✓ Grande Hotel 2. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1110. Acesso em 30/11/2018.

✓ Jankenpon. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1016. Acesso em: 30/11/2018.

✓ Jogo da trilha. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1380. acesso em: 30/11/2018.

✓ Jogo das Amebas. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1017. Acesso em 30/11/2018.

✓ O jogo de Dados de Mozart: Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1122. Acesso em: 30/11/2018.

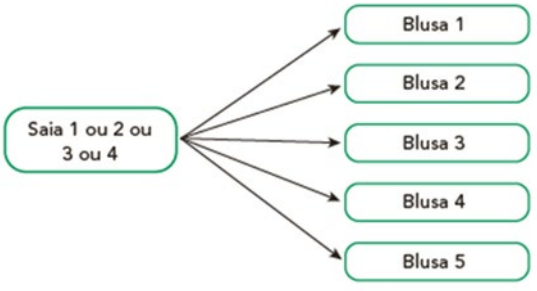
✓ Táxi e combinatória. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1035. Acesso em: 30/11/2018.

1.1.2 Atividades

Tema 1: Princípios aditivos e multiplicativos

ATIVIDADE 1

Considere a seguinte situação: uma menina deseja vestir-se com uma saia e uma blusa, e dispõe de 4 saias diferentes e 5 blusas diferentes. O esquema a seguir representa as possibilidades de escolha da menina.



Fonte: Elaborada pelo autor

Escreva uma multiplicação para indicar o total das diferentes possibilidades de escolha da menina.

Uma maneira mais simplificada e eficaz de resolver tal situação consiste em determinar a multiplicação entre a quantidade de elementos de cada conjunto. Observe que no conjunto de saia há 4 elementos e no conjunto de blusa há 5 elementos, temos assim: $4 \cdot 5 = 20$ combinações.

ATIVIDADE 2

Um roteiro turístico prevê a visita a duas cidades do conjunto conhecido por "Cidades Históricas de Minas Gerais", formado pelas cidades de Ouro Preto, Mariana, Tiradentes e São João del Rei. Quantos roteiros diferentes poderão ser traçados se:

a) Ouro Preto sempre estiver fazendo parte do roteiro?

Com Ouro Preto sempre fazendo parte do roteiro, temos três roteiros distintos:
(Ouro Preto; Mariana),
(Ouro Preto; Tiradentes) e

(Ouro Preto; São João Del Rei).

b) não houver restrição à escolha das duas cidades?

Se não há restrição quanto a escolha de cidades que farão parte do roteiro, temos seis roteiros distintos:
(Ouro Preto; Mariana),
(Ouro Preto; Tiradentes),
(Ouro Preto; São João Del Rei),
(Mariana; Tiradentes),
(Mariana; São João Del Rei),
(Tiradentes; São João Del Rei).

ATIVIDADE 3

Os números 342, 335, 872 e 900 são, entre tantos outros, números de três algarismos. Entre esses exemplos, os números 342 e 872 não repetem algarismos, contrariamente ao que ocorre, por exemplo, com os números 335 ou 900. Quantos números de 3 algarismos podemos escrever se:

a) todos começarem por 1 e os algarismos puderem ser repetidos?

Como sabemos, temos os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (10 algarismos). Para a resolução deste exercício, temos o número 1 como elemento fixo na posição numérica da centena. Para a posição numérica da dezena e unidade, podemos utilizar qualquer algarismo. Logo, a quantidade de números de 3 algarismos que começam com o algarismo 1 e que podem ter algarismos repetidos será igual a: $1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$ números.

b) todos começarem por 1 e os algarismos não puderem ser repetidos?

Assim, como no item anterior, temos 10 algarismos. Para a resolução deste problema, temos o

número 1 como elemento fixo na posição numérica da centena. Para a posição numérica da dezena e da unidade, podemos utilizar qualquer algarismo, exceto aquele já utilizado anteriormente, assim restando 9 algarismos para a dezena e 8 algarismos para a unidade. Logo, a quantidade de números de 3 algarismos que começam com o algarismo 1 e que não podem ter algarismos repetidos será igual a: $1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$ números.

c) não houver qualquer restrição, isto é, desde 100 até 999?

Temos 10 algarismos. Para a resolução deste exercício, o 1º algarismo só poderá ser um algarismo entre 1 e 9, sem o zero, ou seja, 9 algarismos. Os demais podem ser qualquer um entre 0 e 9, ou seja, 10 algarismos na unidade e na dezena. Logo, a quantidade de números será igual a: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números.

Prezado(a) Professor(a), proponha também aos estudantes, o seguinte caso:

d) os números não contiverem algarismos repetidos?

Como colocado anteriormente, temos 10 algarismos. Para a resolução deste problema, o 1º algarismo só poderá ser um algarismo entre 1 e 9, sem o zero, ou seja, 9 algarismos. Para a posição numérica da dezena e unidade, podemos utilizar qualquer algarismo, **exceto o já utilizado anteriormente,** assim restando 9 algarismos para a dezena e 8 algarismos para a unidade. Logo: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números.

ATIVIDADE 4

Existem 9 000 números de 4 algarismos, dos quais 1 000 é o menor deles e 9 999 o maior. Entre esses 9 000 números há muitos que não repetem algarismos, como 1 023, 2 549, 4 571 ou 9 760. Quantos são esses números de 4 algarismos distintos?

Como sabemos, temos os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (10 algarismos). Para a resolução desta atividade, temos que o primeiro algarismo não pode ser 0, pois o número não seria de 4 algarismos. Para a posição numérica da centena, da dezena e da unidade, podemos utilizar qualquer algarismo, **exceto o já utilizado anteriormente,** assim restando 9 algarismos para a centena, 8 algarismos para a dezena e 7 algarismos para a unidade. Logo, a quantidade de números de 4 algarismos distintos são: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$ números.

ATIVIDADE 5

Para que um número de 3 algarismos seja par, é preciso que ele "termine" por um algarismo par, ou, em outras palavras, é preciso que o algarismo das unidades seja 0, ou 2, ou 4, ou 6, ou 8, como: 542, 134, 920, 888 etc.

a) quantos números pares de 3 algarismos existem?

Como sabemos, temos os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (10 algarismos). Para a resolução deste problema, temos que o primeiro algarismo não pode ser 0, pois o número não seria de 3 algarismos. O algarismo da unidade deve ser 0, ou 2, ou 4, ou 6, ou 8 (5 algarismos); logo, a quantidade de números pares de 3 algarismos é igual a: $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ números.

b) quantos números ímpares de 3 algarismos existem?

Como sabemos, temos os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (10 algarismos). Para a resolução deste item, temos que o primeiro algarismo não pode ser 0, pois o número não seria de 3 algarismos. O algarismo da unidade deve ser 1, ou 3, ou 5, ou 7, ou 9 (5 algarismos); logo, a quantidade de números ímpares de 3 algarismos é igual a: $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ números.

c) quantos números ímpares de 3 algarismos distintos existem?

Temos os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (10 algarismos). Para a resolução deste problema, devemos considerar que o primeiro algarismo não pode ser o zero, pois o número não teria 3 algarismos. Visto que os algarismos

devem ser distintos, devemos lembrar que o algarismo já usado na centena também deve ser restrito ao algarismo da unidade. O algarismo da unidade deve estar restrito as seguintes possibilidades 1, 3, 5, 7 ou 9 (5 algarismos). Logo, a quantidade de números ímpares de 3 algarismos distintos é igual a: $8 \cdot 8 \cdot 5 = 320$ números. Professor, ressaltamos aqui que há outros modos de resolver o problema.

d) quantos números pares de 3 algarismos distintos existem?

Como sabemos, temos os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (10 algarismos). Para a resolução deste item, temos que o primeiro algarismo não pode ser o zero, pois o número não teria 3 algarismos e o último deve ser 0, 2, 4, 6 ou 8 (5 algarismos). Dividiremos o problema em 2 casos:

- Número de algarismos distintos que terminam com 0 (zero): $9 \cdot 8 \cdot 1 = 72$ números;
- Número de algarismos distintos que terminam com 2, 4, 6 ou 8: $8 \cdot 8 \cdot 4 = 256$ números;

Assim o total = 72 + 256 = 328 números. Professor, ressaltamos aqui que há outros modos de resolver o problema.

e) a soma dos resultados obtidos nos itens c e d deste problema deve ser igual ao resultado do item d da atividade 3, verifique se isso ocorreu com os resultados que você obteve. Se não, procure descobrir o que saiu errado.

320 + 328 = 648 números. Portanto, igual à resposta do item d da atividade 3.

ATIVIDADE 6

Considere os numerais 1, 2, 3 e 4, e todos os números de 4 algarismos distintos que podemos formar com eles. Imagine que todos esses números serão ordenados, do menor para o maior. Isso feito, o primeiro da fila será o 1 234, o segundo será o 1 243, o terceiro, 1 324, e assim por diante, até o último, que será o 4 321.

a) qual é a posição do número 4 321 nessa fila?

Calculando a quantidade total de números distintos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 temos 4.3.2.1= 24 números. Portanto, como o número 4 321 é o maior número possível de ser formados, frente as informações propostas, assim este ocupa a 24ª posição.

b) qual é a posição do número 3 241 nessa fila?

Para a resolução deste item, temos os algarismos: 1, 2, 3 e 4. Para encontrar a posição do número 3241 os mesmos devem ser ordenados. Assim, para valores começando com número 1, temos: $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades. O mesmo ocorre para os valores que começam com número 2. Assim, já temos 12 valores ordenados na ordem crescente. Em outras palavras: para ordenar de forma crescente os valores que se iniciam com número 3, temos então os números que começam com 31: ($1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$ possibilidades: 3 124 e 3 142). E números que começam com 32: ($1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 =$ 2 possibilidades: 3 214 e 3 241). Assim, o valor 3241 ocupa a 16ª posição, acrescentando o numeral 5 aos numerais 1, 2, 3 e 4, e ordenando todos os números de 5 algarismos distintos que podem ser formados, qual é o número que ocupa a 72ª posição?

c) acrescentando o numeral 5 aos numerais 1, 2, 3 e 4, e ordenando todos os números de 5 algarismos distintos que podem ser formados qual é o número que ocupa a 72ª posição?

Para a resolução deste item, temos os algarismos: 1, 2, 3, 4 e 5. Para encontrar o número na 72ª posição, sabemos que os valores começando com número 1, temos: $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades. O mesmo ocorre para os valores que começam com número 2. Assim, já temos 48 valores colocados em ordem crescente. Realizando o mesmo raciocínio para o número 3, também encontramos 24 possibilidades, somando 72 valores ordenados. Desta maneira, o valor que ocupa a 72ª posição é o maior valor

ordenado dos que começam com o número 3, a saber, 35421.

Tema 2: Formação de filas sem e com elementos repetidos

As Filas

Quando duas pessoas A e B colocam-se em fila, há apenas duas possibilidades: primeiro vem A e depois B, ou primeiro vem B e depois A. Se uma pessoa C juntar-se a essas duas a fila poderá, agora, ser formada de 6 maneiras diferentes:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Se uma quarta pessoa juntar-se a essas, serão, agora, 4 vezes mais filas do que o número anterior. Isto é, serão 4.6 = 24 filas

ATIVIDADE 7

Quantas filas diferentes poderão ser formadas com 5 pessoas, apenas alternando suas posições na fila?

Para a resolução desta atividade temos cinco possibilidades de ocupar a primeira posição na fila. Após definida a primeira pessoa da fila, sobrarão quatro possibilidades para que as pessoas ocupem a segunda posição da fila. O mesmo raciocínio vale para a terceira posição com 3 possibilidades, na quarta 2 possibilidades e na última 1 possibilidade. Ou seja: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ possibilidades de filas distintas. Observação: o produto apresentado pode ser representado por 5!

ATIVIDADE 8

Quantos anagramas diferentes podem ser formados com as letras das palavras:

a) BIA

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ anagramas diferentes podem ser formados.

b) NICO

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ anagramas diferentes podem ser formados.

c) LUCIA

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ anagramas diferentes podem ser formados.

d) CAMILO

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ anagramas diferentes podem ser formados.

ATIVIDADE 9

Considere a palavra CABO. Se trocarmos a ordem entre as letras dessa palavra, formando agrupamentos de letras que podem ou não formar palavras conhecidas, formaremos "anagramas". Veja alguns dos anagramas da palavra CABO:

COBA, BACO, OCBA, ABOC, ACOB

a) começando por A, quantos anagramas diferentes poderemos formar?

As opções de letras que podem ser utilizadas em cada posição: $\underline{1} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ anagramas (ACBO, ACOB, ABCO, ABOC, AOCB e AOBC).

b) quantos anagramas terminados em O existem?

Seguindo o mesmo raciocínio do item a: As opções de letras que podem ser utilizadas em cada posição: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \underline{1} = 6$ anagramas.

c) no total, quantos anagramas existem?

Ao todo são 4 opções de letras que podem ser utilizadas. E para cada posição utilizar qualquer uma, **exceto a letra utilizada anteriormente**, temos então: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ anagramas.

ATIVIDADE 10

Em uma caixa foram colocadas 9 bolinhas, numeradas de 1 a 9. Para retirar uma bolinha dessa caixa, temos 9 maneiras diferentes: pegar a bolinha 1, ou a bolinha 2, ou a bolinha 3, e assim por diante. Para retirar duas bolinhas da

caixa, temos já um número bem maior de maneiras diferentes: temos 8 vezes mais, isto é, 72 maneiras diferentes. Isso porque há 8 possibilidades de pegar a segunda bolinha depois de a primeira delas ter sido apanhada. Responda:

a) quantas maneiras diferentes existem para pegar 3 bolinhas dessa caixa?

Como temos 9 bolinhas numeradas em uma caixa, teremos 9 possibilidades para a primeira retirada, 8 possibilidades para a segunda e 7 para a terceira. Sendo assim, teremos $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ maneiras diferentes de retirar a bolinha.

b) quantas maneiras diferentes existem para pegar 4 bolinhas dessa caixa?

Por meio de um raciocínio análogo ao desenvolvido no item a, obtemos: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3\,024$ maneiras diferentes de retirar a bolinha.

ATIVIDADE 11

Suponha que, no caso do problema anterior, a bolinha que for pega seja jogada novamente na caixa antes que a próxima bolinha seja sorteada. Em outras palavras, a bolinha é reposta na caixa a cada sorteio. Nessa condição, de quantas maneiras diferentes podemos retirar dessa caixa:

a) duas bolinhas?

Como temos 9 bolinhas numeradas em uma caixa, teremos 9 possibilidades para a primeira retirada **e** 9 possibilidades para a segunda, visto que ela vai ser reposta. Sendo assim, teremos $9 \cdot 9 = 81$ maneiras diferentes.

b) três bolinhas?

Analogamente para 3 bolinhas temos: $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ maneiras diferentes de retirada.

c) quatro bolinhas?

$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6.561$ maneiras diferentes de retirar as 4 bolinhas.

ATIVIDADE 12

Sete pessoas formarão ao acaso uma fila indiana. Em quantas ordenações diferentes poderá ser formada a fila?

Como temos 7 pessoas que serão ordenadas para formar fila, teremos 7 possibilidades para a primeira pessoa, 6 possibilidades para a segunda e 5 para a terceira e assim sucessivamente. Sendo assim, teremos:

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$ ordenações diferentes de pessoas formando filas diferentes.

ATIVIDADE 13

Trocando a ordem das letras INA, podem ser formados 6 anagramas diferentes:

INA, IAN, AIN, ANI, NAI, NIA

Com as letras da palavra ANA, o número de anagramas é menor; são apenas 3:

ANA, AAN, NAA

Por que o número de anagramas dessas palavras não é o mesmo, se ambas têm 3 letras? A resposta é: a palavra ANA tem letras repetidas.

A palavra LUTA tem 24 anagramas, enquanto a palavra LULU, que tem 2 "L" e 2 "U", tem apenas 6 anagramas, pois a troca de um "L" com outro ou a troca entre os dois "U" não gera novo anagrama. Quer dizer, o total de 24 anagramas de uma palavra com 4 letras distintas fica, no caso de LULU, duas vezes dividido por 2!, por causa dos "L" e dos "U" repetidos. Então, $24 \div 2! \div 2! = 6$.

Veja por exemplo, a palavra INICIOU: apesar de ter 7 letras não tem $7! = 5040$ anagramas distintos, pois tem o "I" repetido três vezes, uma vez que a troca de um "I" com outros dois "I" não gera novo anagrama. Quer dizer, o total de 5040 anagramas de uma palavra com 7 letras distintas fica, no caso de INICIOU dividido por 3!, em decorrência dos "I" repetidos. Assim, INICIOU tem $5040 \div 3! = 5040 \div 6 = 840$ anagramas distintos.

Agora, responda: qual é o total de anagramas das palavras a seguir?

a) CARRO

Para a resolução deste problema, podemos observar que a palavra CARRO tem 5 letras, mas duas delas se repetem. Com 5 letras não repetidas conseguiremos formar 120 anagramas (resultado de 5!, ou seja, 5.4.3.2.1 = 120). Como nessa combinação há repetição de duas letras, é necessário dividir esse total por 2!, ou seja, 2 · 1 = 2, logo, o resultado será:

$$\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2!} = 60 \text{ anagramas}$$

Relação fundamental para permutação com repetição:

$$P_n^{a,b\ldots} = \frac{n!}{a!\,b!}$$

Em que, a, b são as quantidades de elementos repetidos.

b) CORPO

Utilizando o mesmo raciocínio, chegamos em:

$$\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60 \text{ anagramas}$$

c) CORRO

Agora com duas repetições, sendo as letras O e R, obtemos:

$$\frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{120}{4} = 30 \text{ anagramas}$$

ATIVIDADE 14

Quantos anagramas podem ser formados com as letras das palavras a seguir?

a) ANA

Temos uma permutação de 3 letras com repetição da letra A, obtendo assim:

$$\frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3 \text{ anagramas}$$

a) CASA

Analogamente ao item anterior, temos uma permutação de 4 letras com repetição de A duas vezes, obtendo:

$$\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12 \text{ anagramas}$$

b) CABANA

Faremos a permutação de 6 letras com a repetição de três letras A:

$$\frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} \ 120 \text{ anagramas}$$

ATIVIDADE 15

Quando três meninas, Ana, Bia e Carla, e um menino, Dan, formam uma fila, temos 24 filas diferentes, como já vimos em problemas anteriores. Se, no entanto, o critério para a formação da fila não for a individualidade das pessoas, mas apenas o sexo, serão apenas 4 filas diferentes formadas por 3 mulheres (M) e um homem (H), da seguinte forma:

MMMH, MMHM, MHMM, HMMM

Com 5 pessoas, sendo 2 meninas e 3 meninos, quantas filas diferentes poderão ser formadas no caso de

a) ser considerada a individualidade das pessoas?

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ possibilidades diferentes de filas.

b) ser considerado apenas o sexo das pessoas?

Por meio de um raciocínio análogo ao desenvolvido no item anterior, temos 5 pessoas para permutar, sendo que são duas meninas e três meninos, assim:

$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{12} = 10$ filas.

ATIVIDADE 16

Três livros de Geografia diferentes e três livros de História diferentes serão colocados, um sobre o outro, de modo a formar uma pilha de livros. Quantas pilhas diferentes poderão ser formadas se:

a) não importar a matéria, e sim os livros, que, no caso, são todos diferentes?

Para a resolução deste problema, podemos observar que temos 6 livros distintos.

Assim, 6! = 720 pilhas.

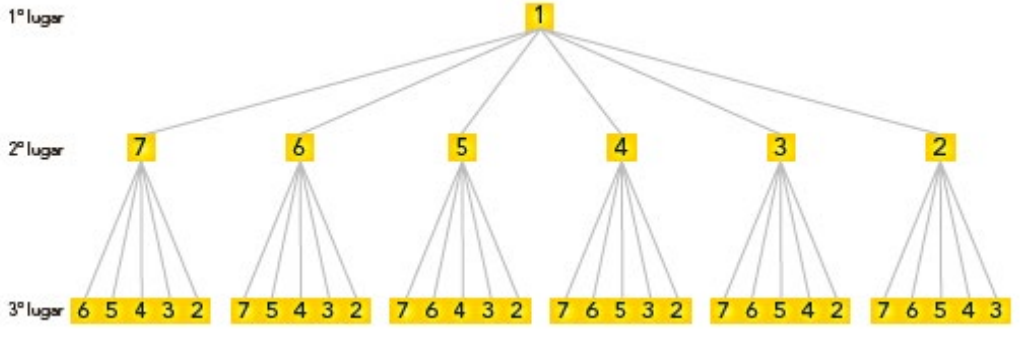
b) a diferença entre os livros não for levada em conta, mas apenas o fato de que são de duas disciplinas diferentes?

Analogamente ao item anterior, temos 6 livros para permutar, sendo que três são de história e três de geografia, assim:

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{720}{36} = 20 \text{ pilhas}$$

Tema 3: Formação de grupos com elementos de uma outra ou mais categorias.

Observe a representação de uma parte da árvore de possibilidades para o seguinte problema: quantos grupos ordenáveis (filas) de 3 elementos podemos formar com 7 pessoas?



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao observar a árvore percebemos que, para determinada pessoa em 1° lugar, há 6 opções para o 2° colocado e, para cada um destes, há 5 possibilidades de escolha para o 3° colocado. Assim, a quantidade de grupos ordenáveis é, nesse caso, igual ao produto $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

Agora, vamos mudar a questão e perguntar: a quanto ficaria reduzido o número de agrupamentos se eles não fossem ordenáveis? Isto é, se o agrupamento "João, José, Maria" fosse o mesmo de "João, Maria, José", o mesmo de "Maria, José, João" e igual a todos os demais em que só é trocada a ordem dos participantes? Em outras palavras, se em vez de serem feitas filas, fossem feitos grupos de pessoas? Para responder, retomamos os problemas anteriormente resolvidos, mostrando que haverá 3! = 6 ordenações possíveis. Portanto, quaisquer 3 elementos que considerarmos entre 7 permitirão 3! = 6 ordenações possíveis. Assim, se temos 7.6.5 conjuntos ordenáveis, temos $(7 \cdot 6 \cdot 5) \div 3!$ conjuntos não ordenáveis, e a resposta do problema é $210 \div 6 = 35$ grupos diferentes de 3 pessoas.

ATIVIDADE 17

Cinco pessoas, Arnaldo, Benedito, Carla, Débora e Eliane, estão juntas em uma sala.

a) Quantos agrupamentos ordenáveis diferentes (filas) de 5 pessoas podem ser formados com essas 5 pessoas?

Permutação de 05 pessoas, 5! = 120 agrupamentos.

b) Quantos agrupamentos não ordenáveis diferentes (grupos) de 5 pessoas podem ser formados com essas 5 pessoas?

Para a resolução deste problema, devemos observar que a ordem das pessoas não importa, sendo assim temos apenas 1 grupo possível, formado por estas pessoas. Podemos também observar que este é o resultado obtido da divisão da contagem da ordenação (de 5!) pelo desconto da não ordenação (5!), ou seja, trata-se de uma situação de combinação e não de permutação como no item a.

Prezado Professor, inclua o item a seguir na atividade para complementar o raciocínio combinatório.

c) Quantos grupos diferentes de 2 pessoas podem ser formados com as pessoas presentes na sala?

Neste caso devemos calcular a combinação de 5 pessoas tomadas 2 a 2. Veja:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10 \text{ possibilidades}$$

Comentário

A combinação simples pode ser definida como sendo um agrupamento dos elementos de um conjunto em subconjuntos. Na combinação simples a ordem dos elementos não é considerada na formação dos subconjuntos, devendo ser considerado uma única vez na contagem da quantidade de combinações. A expressão matemática utilizada para encontrar as quantidades de combinações simples de um conjunto é representada por:

$$C_{(n,p)} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

ATIVIDADE 18

Há 10 bolas em uma caixa, todas iguais com exceção da cor, sendo 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Quantos conjuntos de 4 bolas podem ser formados sendo:

a) todas brancas

Observe que temos apenas 4 bolas de cor branca. Assim, temos apenas uma possibilidade de conjunto, contendo apenas bolas brancas. Podemos também observar que este é o resultado da divisão de 4! por 4!. (Combinação de 4 bolas tomadas 4 a 4).

b) duas brancas e duas pretas?

Primeiramente encontraremos todas as possibilidades de agrupamentos de 2 bolas brancas calculando a combinação de 4 bolas tomadas 2 a 2.

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4} = 6$$

Em seguida as possibilidades de agrupamentos de duas bolas pretas calculando a combinação de 6 bolas tomadas 2 a 2.

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = \frac{30}{2} = 15$$

Multiplicando as duas combinações temos $15 \cdot 6 = 90$ possibilidades.

ATIVIDADE 19

Sobre a prateleira de um laboratório repousam 8 substâncias diferentes. Quantas misturas diferentes com iguais quantidades de 2 dessas substâncias podem ser feitas se:

a) não houver qualquer restrição?

Para a resolução deste item, observe que se trata de formar um conjunto não ordenado de dois elementos a partir de 8 disponíveis. Podemos calcular a combinação de 08 elementos tomados 2 a 2. Veja:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 6!} =$$

$$= \frac{56}{2} = 28 \text{ possibilidades}$$

b) entre elas há 3 substâncias que não podem ser misturadas duas a duas por formarem um composto que exala gás tóxico?

De acordo com o item anterior temos 28 possíveis agrupamentos de 2 substâncias com as 08 disponíveis. Como 3 delas não podem se misturar entre si, podemos calcular o total de agrupamentos tomados 2 a 2 com essas 3 substâncias e subtrair do valor total.

$$C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!} = 3 \text{ possibilidades}$$

Subtraindo do valor total temos: 28 – 3 = 25 misturas diferentes.

ATIVIDADE 20

Uma seleção de basquete com 5 jogadores será formada por atletas escolhidos de apenas duas equipes A e B. Da equipe A, que possui 12 atletas, serão selecionados 2, enquanto a equipe B, que possui 10 atletas, cederá 3 para a seleção. Se todos os atletas têm potencial igual de jogo, quantas seleções diferentes poderão ser formadas?

Para a resolução deste problema, observe que um time de basquete é, claramente, um agrupamento não ordenável.

Como temos duas categorias envolvidas, atletas da equipe A e atletas da equipe B, trata-se de calcular individualmente a quantidade de grupos formados a partir de cada equipe para, no final, multiplicá-los e obter a quantidade total.

- Grupos de 2 atletas obtidos a partir dos 12 da equipe A:

$$C_{12,2} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2 \cdot 10!} =$$

$$= \frac{132}{2} = 66 \text{ grupos}$$

- Grupos de 3 atletas obtidos a partir dos 10 da equipe B:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{6 \cdot 7!} =$$

$$= \frac{720}{6} = 120 \text{ grupos}$$

Temos assim: 66 · 120 = 7.920 grupos distintos de 5 atletas, sendo 2 da equipe A e 3 da equipe B.

ATIVIDADE 21

A partir de um conjunto de 15 bolas iguais, a não ser pela cor (8 são brancas, 4 pretas e 3 amarelas), serão formados grupos de 3 bolas. De quantas maneiras diferentes poderão ser formados esses grupos se não são desejáveis grupos que contenham bolas de uma única cor?

Observe que podemos calcular, inicialmente, a quantidade de grupos indesejáveis, isto é, formados apenas por bolas pretas, apenas por bolas brancas ou apenas por bolas amarelas, temos:

- Grupos não ordenáveis de 3 bolas brancas:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{6 \cdot 5!} = 56 \text{ grupos}$$

- Grupos não ordenáveis de 3 bolas pretas:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!} = 4 \text{ grupos}$$

- Grupos não ordenáveis de 3 bolas amarelas:

$$C_{3,3} = 1 \text{ grupo}$$

Somando 61 possibilidades indesejáveis.

Em seguida, calculamos o total de grupos de 3 bolas obtidos a partir das 15 bolas disponíveis.

Total de grupos de 3 bolas obtidos a partir do total de 15 bolas:

$$C_{15,3} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{6 \cdot 12!} =$$

$$= \frac{2730}{6} = 455 \text{ grupos}$$

Por fim, subtraímos do total de grupos a quantidade de grupos indesejáveis.

Total de grupos de 3 bolas de 2 ou 3 cores: 455 – 61 = 394 grupos.

ATIVIDADE 22

Na classe de Luiza e Roberta estudam, contando com elas, 34 alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser formados grupos de trabalho de 4 alunos se Roberta e Luiza não podem participar juntas de um mesmo grupo?

Uma possibilidade de raciocínio é, calcular a quantidade total de grupos de 4 alunos formados a partir dos 34 disponíveis:

- Grupos não ordenáveis de 4 alunos:

$$C_{34,4} = \frac{34!}{4! \cdot 30!} =$$

$$= \frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30!}{24 \cdot 30!} = 46.376 \text{ grupos}$$

Em seguida, calcular a quantidade de grupos de 4 alunos em que Luiza e Roberta participam juntas.

- Grupos não ordenáveis de 4 alunos, divididos em dois subgrupos de 2 alunos: um com Luiza e Roberta e outro com 2 dos demais 32 alunos:

$$C_{32,2} = \frac{32!}{2! \cdot 30!} =$$

$$= \frac{32 \cdot 31 \cdot 30!}{2 \cdot 30!} = 496 \text{ grupos}$$

Por fim, encontramos a diferença entre o total de grupos e número de grupos em que Luiza e Roberta estão juntas: 46.376 – 496 = 45.880 maneiras diferentes.

ATIVIDADE 23

Dispomos de 8 pessoas para formar grupos de trabalho. De quantas maneiras diferentes o grupo poderá ser formado se dele participar(em):

a) apenas uma das 8 pessoas?

Com apenas 1 elemento no grupo, poderemos formar 8 grupos diferentes.

b) duas das 8 pessoas?

Com duas pessoas, teremos a seguinte quantidade duplas:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 6!} = \frac{56}{2} = 28 \text{ duplas}$$

c) três das 8 pessoas?

Com três pessoas, teremos a seguinte quantidade de trios: $C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{6 \cdot 5!} = 56 \text{ trios}$

d) quatro das 8 pessoas?

Com quatro pessoas, teremos a seguinte quantidade de grupos:

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{24 \cdot 4!} = \frac{1680}{24} = 70 \text{ quartetos}$$

ATIVIDADE 24

Em uma sala há n pessoas com as quais formaremos grupos, ordenáveis ou não. De quantas maneiras diferentes podemos formar o grupo se ele tiver:

a) apenas 1 elemento?

Serão n maneiras diferentes de formar grupo com 1 único elemento.

b) 2 elementos?

- Grupos ordenáveis, de 2 elementos, dispondo de n possibilidades, temos:

$$n \cdot (n-1)$$

- Grupos não ordenáveis nessa condição pode ser observada em:

$$C_{n,2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2!)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2! \cdot (n-2)!} =$$

$$= \boxed{\frac{n-(n-1)}{2!}}$$

c) 3 elementos?

- Grupos ordenáveis de 3 elementos, dispondo de n possibilidades, temos que:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$

- Grupos não ordenáveis nessa condição podem ser observadas em:

$$C_{n,3} = \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{3 \cdot (n-3)!} =$$

$$= \boxed{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}}$$

d) 4 elementos?

- Grupos ordenáveis de 3 elementos, dispondo de n possibilidades, temos que:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$$

- Grupos não ordenáveis nessa condição podem ser observadas em:

$$C_{n,4} = \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)!}{4! \cdot (n-4)!} =$$

$$= \boxed{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!}}$$

e) p elementos, p < n?

- Grupos ordenáveis de p elementos, dispondo de n:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots [n-(p-1)]$$

- Grupos não ordenáveis nessa condição podem ser observáveis em:

$$C_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots [n-(p-1)]}{p!}$$

ATIVIDADE 25

Em dupla, elabore um problema como os exercícios anteriores envolvendo análise combinatória. Troque o exercício elaborado com outra dupla que terá a missão de resolver e socializar com a turma. Vocês podem auxiliar a dupla que ficou responsável em resolver o problema elaborado.

Registre no seu caderno o problema elaborado e a resolução.

Comentário:

Livre criação do aluno. Contudo, a mediação do professor torna esta atividade uma forma de acompanhamento das habilidades desenvolvidas até aqui, e como o aluno organiza as informações para expressá-las na forma escrita e contextualizada. É importante a troca de saberes tanto no momento da escrita, quanto nas diferentes resoluções que possam surgir. Valorizar este momento é possibilitar o desenvolvimento dos saberes matemáticos em construção, pois é a hora de o aluno colocar em jogo

tudo o que aprendeu, posicionar-se para defender as concepções adquiridas até o momento e sua linha de raciocínio.

ATIVIDADE 26

Sete pessoas, 3 meninas e 4 meninos, entram em um cinema e vão ocupar 7 cadeiras. Uma pessoa em cada cadeira, colocadas lado a lado. De quantas maneiras diferentes essa ação poderá ser realizada se:

a) não houver qualquer restrição?

Temos: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5\,040$ maneiras.

b) na primeira cadeira sentar um menino e na última uma menina?

Observemos que, na primeira cadeira apenas os homens podem se sentar. Temos assim: 4._._._._._._.

Na última, apenas as mulheres, ou seja, 4._._._._._.3.

Temos, então, que para a primeira há 4 possibilidades e na última 3 possibilidades. Assim, restam 5 pessoas em posições intermediárias, entre homens e mulheres, para se sentarem,. nas 5 cadeiras restantes. Logo, para a segunda cadeira, tem-se 5 possibilidades, para a terceira, 4 possibilidades, e assim por diante:

$$4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 1440$$

c) duas meninas sempre ficarem lado a lado?

Considerando as duas meninas como uma só pessoa, teremos 6 pessoas para 6 lugares, isto é, 6!. Precisamos, entretanto, permutar a ordem entre as duas meninas. Assim, temos $6! \cdot 2 = 1\,440$

d) todas as meninas ficarem lado a lado?

Para a resolução deste item, vamos calcular a permutação das meninas entre si: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, e a permutação dos meninos entre si: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Temos então: $6 \cdot 24 = 1446$ possibilidades.

E, por fim, multiplicamos o resultado por 5, pois são os possíveis lugares, intercalando entre os grupos de meninos e o grupo de meninas. Portanto, $144 \cdot 5 = 720$ maneiras.

e) todas as meninas ficarem lado a lado e os meninos também?

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \cdot 4! = 144$, ainda temos de multiplicar esse resultado por 2, referente à troca de ordem, primeiro as meninas ou primeiro os meninos. Portanto, $144 \cdot 2 = 288$ maneiras.

ATIVIDADE 27

A fim de angariar fundos para uma viagem de estudos com sua turma, um professor de Matemática organizou uma rifa. Para tanto, ele imprimiu a maior quantidade possível de bilhetes contendo um número de 4 algarismos distintos. Depois, vendeu esses bilhetes a R$ 2,00 cada um para comprar as passagens que custavam, ao todo, R$ 4 000,00. Supondo que o professor tenha vendido todos os bilhetes, responda: ele conseguiu ou não comprar todas as passagens?

Considerando que 0 não pode estar na primeira posição, pois se trata de números com 4 algarismos, e que os algarismos são distintos, temos: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$ números; multiplicando o resultado obtido pelo preço de cada bilhete, temos: $4\,536 \cdot 2 =$ R$ 9 072,00 arrecadados. Portanto, o professor conseguiu, sim, comprar as passagens.

ATIVIDADE 28

Em uma arquibancada há 12 pessoas sentadas, sendo que na fileira de trás estão 5 homens e uma mulher. Na fileira da frente estão 4 homens e 2 mulheres. Entre as pessoas deste grupo, duas, da fileira da frente, usam óculos, e dois homens da fileira de trás, também. Pensando apenas nas pessoas da fileira de trás, de quantas maneiras elas podem trocar as posições entre si:

a) sem qualquer restrição?

6! = 720 maneiras.

b) de modo que as duas pessoas de óculos fiquem sempre separadas?

Vamos calcular o total de filas em que duas pessoas de óculos estejam juntas e subtrair do total calculado no item a, logo: $2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$; multiplicando esse resultado por 5, pois são os possíveis lugares que as duas pessoas de óculos poderão ocupar, temos: $48 \cdot 5 = 240$ maneiras. Portanto, $720 - 240 = 480$ maneiras em que as pessoas de óculos estão separadas.

c) de modo que a mulher esteja sempre entre os dois homens que usam óculos?

Considerando os dois homens de óculos e a mulher como sendo uma única pessoa, teremos, portanto, 4 pessoas, ou seja, 4! = 24 maneiras. Multiplicando o resultado obtido por 2, referente à troca de ordem dos homens de óculos, temos: $24 \cdot 2 = 48$ maneiras em que a mulher está entre os 2 homens de óculos.

ATIVIDADE 29

Pensando apenas nas pessoas da fileira da frente, de quantas maneiras elas podem trocar as posições entre si:

a) se as duas pessoas que usam óculos estiverem sempre lado a lado?

Considerando as duas pessoas de óculos como sendo uma só, teremos 5! (5 pessoas). É preciso multiplicar 5! por 2, referente à troca de posição entre as duas pessoas. Logo: $5! \cdot 2 = 120 \cdot 2 = 240$ maneiras.

b) se os homens sempre ficarem juntos e as mulheres também?

- Homens juntos em qualquer ordem = 4!;
- Mulheres juntas em qualquer ordem = 2!;
- Homens juntos e mulheres também: $4! \cdot 2! \cdot 2 = 96$.

ATIVIDADE 30

Uma das pessoas sentadas será sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja sorteado um homem da fileira da frente?

Na fila da frente estão sentados 4 homens, logo: $p = \frac{4}{12} \cong 33{,}3\%$

ATIVIDADE 31

Se foram sorteadas duas pessoas, uma da fileira da frente e outra da fileira de trás, qual é a probabilidade de que sejam sorteadas duas pessoas de óculos?

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \cong 11{,}11\%$$

Tema 4: Estudando as probabilidades

ATIVIDADE 1

Leia o trecho a seguir retirado do texto "O difícil acaso" do livro "A matemática das coisas". Autor: Nuno Crato (adaptado)

UM FATO CURIOSO!

"...No século XVIII, o naturalista francês Georges Louis Leclerc (1707-1788), conhecido dos matemáticos como Conde de Buffon, resolveu fazer uma experiência. Ele, ou talvez algum dos seus criados, lançou uma moeda ao ar 4040 vezes e obteve 2084 vezes "cara". Já no século XX, o estatístico inglês Karl Pearson (1857- 1936) repetiu a experiência 24 mil vezes, obtendo 12012 caras. Durante a guerra, um matemático inglês prisioneiro dos Nazis ocupou o tempo da mesma forma, contando 5067 caras em dez mil lançamentos. Estes dados sugerem que uma moeda pode ser um razoável instrumento aleatório quando há um equilíbrio entre dois resultados possíveis. Se o leitor quiser repetir estas experiências, terá de ter cuidado e apanhar a moeda ainda no ar - quando se deixa a moeda rolar pelo chão antes de assentar numa das faces, a diferença de desenho dos dois lados favorece habitualmente um deles..."

Prezado(a) Professor(a), ao término da leitura do texto, apresente aos estudantes a seguinte questão norteadora: *Sendo o total de lançamentos o espaço amostral, calcule a proporção de ocorrências de "cara" de cada matemático.*

Veja a sugestão de resolução, após o desenvolvimento da atividade 3.

ATIVIDADE 2

Considerando a probabilidade experimental apresentada, em dupla complete a tabela a seguir lançando uma moeda 20 vezes. Utilize C para cara e K para coroa.

Lançamentos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										

Lançamentos	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Resultado										

a) a partir da sua experimentação, calcule a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda.

Veja a sugestão de resolução, após o desenvolvimento da atividade 3.

ATIVIDADE 3

Repita a experimentação com o lançamento da moeda e complete a tabela a seguir

Lançamentos	20	40	60
Nº de ocorrências de cara (C)			
Probabilidade experimental			

a) analisando os resultados da probabilidade experimental, o que podemos concluir?

Atividades 1, 2 e 3

O estudo dos fenômenos que envolviam determinadas possibilidades fez surgir a Probabilidade. Alguns livros indicam que o surgimento da teoria das probabilidades teve início com os jogos de azar disseminados na Idade Média. Esse tipo de jogo é comumente praticado por meio de apostas. Na ocasião também era utilizado no intuito de antecipar o futuro, por isso é comum encontrarmos muitos problemas envolvendo dados, cartas de baralho e moedas. As estratégias didáticas, propostas nas atividades a seguir, desenvolverão habilidades importantes que partem da análise e descrição dos espaços amostrais até o raciocínio combinatório, propiciando a diversidade de etapas de avaliação. Uma dessas etapas pode ser realizada em duplas ou trios de alunos, uma vez que a comparação entre diferentes estratégias de raciocínio permite compreender a situação-problema sob o ponto de vista mais amplo, estimulando-se tanto a escolha de estratégias mais eficientes, quanto a recuperação de estratégias anteriormente mobilizadas em situações semelhantes.

Caro professor, analise as sugestões de resolução das questões propostas sem deixar de validar e considerar o raciocínio lógico dedutivo e quantitativo dos alunos.

Para o desenvolvimento dessas atividades sugerimos a organização dos alunos em duplas os quais vivenciarão um experimento semelhante ao realizado por matemáticos que desenvolveram a teoria das probabilidades. É importante comentar com seus alunos que o resultado se aproxima de $\frac{1}{2}$ à medida que o número de repetições do experimento aumenta e que, dificilmente, o resultado do quociente do número de caras do total de lançamentos é exatamente $\frac{1}{2}$. Destaque que o valor $\frac{1}{2}$ é a probabilidade, mas que, na prática, isso não significa que $\frac{1}{2}$ dos lançamentos resulta em cara e a outra metade, em coroa. Outro fator importante, é o relato escrito dos alunos quanto ao desenvolvimento do experimento e o cálculo das probabilidades, que poderá ser explorado na forma fracionária, decimal e porcentagem. Veja a probabilidade de cada matemático nos experimentos:

- Georges Louis Leclerc:

$$\frac{2084}{4040} \cong 0{,}5158$$

- Karl Pearson

$$\frac{12012}{24000} = 0{,}5005$$

- Prisioneiro dos Nazis:

$$\frac{5067}{10000} = 0{,}5067$$

ATIVIDADE 4

Descreva o espaço amostral para cada uma das situações a seguir:

a) no lançamento de 01 dado não viciado;

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

b) no lançamento de dois dados não viciados;

Veja tabela a seguir:

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

c) no lançamento de uma moeda 3 vezes consecutivas;

Seja C = cara e K = coroa temos o espaço amostral no lançamento de 3 moedas:

C = {KKK, KKC, KCC, KCK, CCC, CCK, CKK, CKC}

d) escolher, aleatoriamente um homem e uma mulher em grupo de 8 pessoas com 03 homens e 05 mulheres;

Seja H = homem e M = mulher, temos o espaço amostral de 08 pessoas sendo 3 homens e 5 mulheres representado por D = {H, H, H, M, M, M, M, M}

e) escolher uma carta de um baralho completo.

Um baralho completo tem 52 cartas. Veja:

BARALHO COMPLETO			
CARTAS VERMELHAS		CARTAS PRETAS	
♥	♦	♣	♠
A	A	A	A
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
J	J	J	J
Q	Q	Q	Q
K	K	K	K

ATIVIDADE 5

A professora Paula da 2ª série A começou a aula de probabilidade com um desafio, colocou sobre a mesa 50 fichas numeradas de 01 a 50 e pediu para três alunos, Ana, Carla e Marcos, respectivamente, retirarem uma ficha cada um sem colocar de volta e perguntou aos demais:

a) qual a probabilidade de Ana retirar uma ficha com um número múltiplo de 08?

Evento: E = {8, 16, 24, 32, 40, 48}, assim N(E) = 6 ;

Espaço amostral: 1 a 50, N(Ω) = 50

$$P = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{6}{50} = \frac{3}{25} = 0{,}12 = 12\%$$

b) qual a probabilidade de Carla retirar uma ficha que tenha um número primo?

E= {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47}

N(E) = 15

Ω = 49 números (uma carta com um número composto já foi retirada por Ana).

$$P = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{15}{49} = 0{,}3061 = 30{,}61\%$$

c) qual probabilidade de Marcos ter tirado um número múltiplo de 15?

E = {15, 30, 45}

N(E) = 3

N(Ω) = 48

$$P = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = 6{,}25\%$$

d) o que mudaria nos cálculos de probabilidade se cada um que retirasse a ficha colocasse de volta na mesa antes do outro aluno retirar?

Se houvesse a reposição, o espaço amostral seria 50 em todos os eventos, e **diminuiria** a probabilidade nos itens b e c.

No item a) 0,12 = 12%, b) 0,3 = 30% e c) 0,06 = 6%.

ATIVIDADE 6

O dodecaedro é um poliedro regular com 12 faces. As figuras a seguir mostram a planificação e um dodecaedro com suas faces numeradas de 01 a 12.

Ao lançar esse dodecaedro, com relação às faces voltadas para cima encontre:

Figura 1

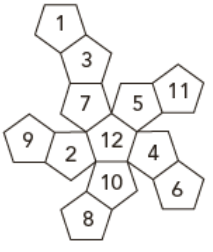


Figura 2

Fonte: Elaborada pelo autor

Espaço amostral Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} para os itens de a) até d).

a) a probabilidade de cair um número par;

E = {2, 4, 6, 8, 10, 12},

$$P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

b) a probabilidade de cair um número primo;

E = {2, 3, 5, 7, 11}

$P = \frac{5}{12} = 0,416 = 41,6\%$

c) a probabilidade de cair um número par e primo;

E = {2}

$P = \frac{1}{12} = 0,0833 = 8,33\%$

d) a probabilidade de cair um primo ou par;

E = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12}

$P = \frac{10}{12} = 0,833 = 83,3\%$

e) a probabilidade de cair um número par e um número ímpar respectivamente em dois lançamentos.

$N(\Omega) = 12 \cdot 12 = 144$ possibilidades. N(E) = 36 possibilidades. (temos 72 possibilidades de cair primeiro um número par, ([Par, Par] e [Par, Ímpar]), porém em apenas 36 delas o segundo número será ímpar).

$P = \frac{36}{144} = \frac{1}{4} = 25\%$

ATIVIDADE 7

No lançamento de um dado não viciado o resultado foi um número maior do que 3, qual é a probabilidade de esse ser um número par?

Este problema é de probabilidade condicional e teremos duas possibilidades de encontrar a solução:

A = {4, 5, 6} número maior que 3 no lançamento do dado.

B = {4, 6} número par e maior que 3 no lançamento do dado.

$P = \frac{2}{3} = 0,666 = 66,6\%$

Podemos, também, usar a relação de probabilidade condicional:

$$P = (B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

A = {ser maior que 3} = {4, 5, 6}

B = {ser par} = {2, 4, 6}

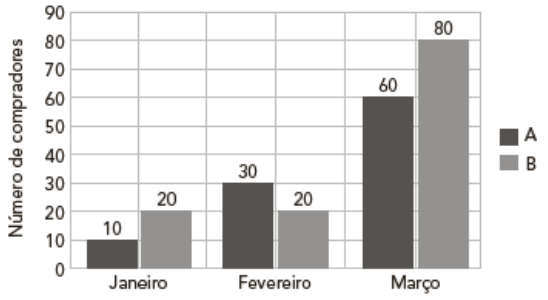
$A \cap B$ = {ser maior que 3 e ser par} = {4, 6}

Assim, também, teremos 2 eventos em um universo de 3 possibilidades.

$$P = \frac{2}{3} = 0,666 = 66,6\%$$

ATIVIDADE 8

(Enem 2013) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

(A) 1/20

(B) 3/242

(C) 5/22

(D) 6/25

(E) 7/15

Registre seu raciocínio para assinalar a alternativa correta.

A probabilidade de dois eventos independentes ocorrerem simultaneamente é calculada por meio do produto das probabilidades de cada um ocorrer separadamente.

A probabilidade do ganhador do sorteio dos compradores do produto A ter realizado a compra no mês de fevereiro é de 30/100, pois 30 fizeram a compra em fevereiro em um total de: 10 + 30 + 60 = 100 produtos A comprados. Já a probabilidade para o produto B é de 20/120, pois 20 compraram em fevereiro em um total de 20 + 20 + 80 = 120 produtos B.

Assim a probabilidade pedida é de:

$$\frac{30}{100} \cdot \frac{20}{120} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

Portanto, alternativa (A) correta.

ATIVIDADE 9

Um Buffet comprou em uma liquidação de fábrica duas caixas com pratos de porcelana de marcas diferentes A e B porém alguns pratos estavam com defeito. A porcentagem de pratos defeituosos, respectivamente, nas caixas A e B é de 15% e de 5%. Foram misturados, numa caixa 100 pratos do tipo A e 100 pratos do tipo B. Se tirarmos um prato ao acaso e ele for defeituoso, a probabilidade de que ele seja da marca A é de

(A) 10%

(B) 15%

(C) 30%

(D) 50%

(E) 75%

A caixa possui um total de 200 pratos de porcelana e há 15% de 100, que corresponde a 15 pratos defeituosos do tipo A e 5% de 100 que corresponde a 5 pratos defeituosos do tipo B. Logo, há um total de 20 pratos defeituosos no total. Como já foi detectado que o prato retirado é defeituoso, o espaço amostral fica reduzido de 200 para 20.

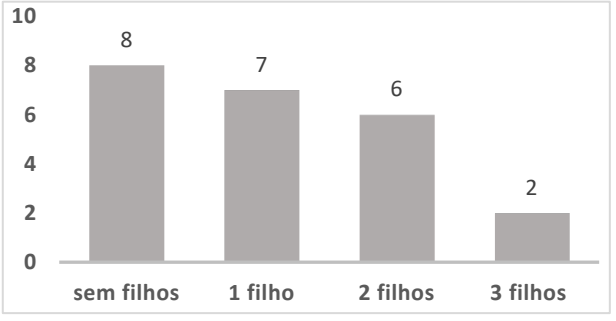
Pratos	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Defeituosos	15	5	20
Não defeituosos	85	95	180
Total	100	100	200

$$P = (A/Defeituoso) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$$

Alternativa (E)

ATIVIDADE 10

(ENEM) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico mostrado.



Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) é:

(A) $1/3$

(B) $1/4$

(C) $7/15$

(D) $7/23$

(E) $7/25$

Professor, atente-se ao fato de que o filho sorteado é o filho único.

Ao analisar o gráfico, obtemos a quantidade total de filhos:

- 08 mulheres não tem filhos: $8 \cdot 0 = 0$;
- 07 mulheres têm apenas 01 filho: $7 \cdot 1 = 7$;
- 06 mulheres têm 02 filhos: $6 \cdot 2 = 12$ filhos;
- 02 mulheres têm 03 filhos: $2 \cdot 3 = 6$ filhos.

Logo, a quantidade total de filhos é:

$0 + 7 + 12 + 6 = 25$.

Desse total, 7 são filhos únicos, portanto a probabilidade de escolhermos um filho único é:

$\frac{7}{25} = 28\%$

Alternativa (E)

Atenção para as próximas atividades!

Uma vez discutidos o cálculo de probabilidades de ocorrência de eventos que dispensam o raciocínio combinatório, e também os casos de formação de grupos ordenáveis e não ordenáveis, as próximas atividades (11 a 24), apresentarão aos alunos o cálculo de probabilidades de eventos que exigem a mobilização do raciocínio combinatório. Os casos mais comuns de probabilidade envolvendo raciocínio combinatório estão associados à formação de grupos não ordenáveis, sendo esse o principal aspecto que merece atenção no desenvolvimento metodológico que ora será proposto.

Com base nessas premissas, propomos que o professor apresente à turma alguns problemas típicos e que, na discussão sobre o "como resolver", chame a atenção dos alunos para a questão da ordenação dos sorteios e para a importância dos fatoriais nessas situações. Apresentamos, em seguida, algumas dessas situações-problema, acompanhadas de resolução e eventuais comentários que julgamos importante salientar.

ATIVIDADE 11

Considere a seguinte situação: duas pessoas serão sorteadas de um grupo formado por 8 pessoas, em que 3 são homens e 5 mulheres. Para essa situação, calcule a probabilidade de ocorrência de:

a) dois homens:

$$p = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{28} \cong 10{,}7\%$$

b) duas mulheres:

$$p = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{14} \cong 35{,}7\%$$

c) uma pessoa de cada sexo:

$$p\ (\text{Homem e Mulher}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56} \cong 26{,}8\%$$

$$p\ (\text{Mulher e Homem}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56} \cong 26{,}8\%$$

Ou seja:

$$p(\text{1 pessoa de cada sexo}) \cong 2 \cdot 26{,}8\% \cong 53{,}6\%$$

ATIVIDADE 12

Calcule a soma dos resultados que você obteve nos itens a, b e c da atividade anterior e, se não obtiver 100%, descubra o que está errado.

10,7% + 35,7% + 53,6% = 100%, portanto, os cálculos da atividade 11 estão corretos.

Veja:

$$\left(\frac{3}{28}\right) + \left(\frac{5}{14}\right) + \left(2 \cdot \frac{15}{56}\right) = \frac{6}{56} + \frac{20}{56} + \frac{30}{56} = \frac{56}{56} = 1$$

ATIVIDADE 13

Será realizado um sorteio de 3 pessoas entre 8, em um grupo formado por 5 mulheres e 3 homens. Determine a probabilidade de que sejam sorteados:

a) um homem, outro homem e uma mulher, nessa ordem;

$$p = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{56} \cong 8{,}9\%$$

b) dois homens e uma mulher, em qualquer ordem;

$$p = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{2} \cdot 3 = \frac{5}{56} \cdot 3 \cong 26{,}8\%$$

(Multiplica-se pelas 3 possibilidades: HHM, MHH e HMH)

c) um homem, uma mulher e outra mulher, nesta ordem;

$$p = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{28} \cong 17{,}9\%$$

d) um homem e duas mulheres, em qualquer ordem.

$$p = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot 3 = \frac{5}{28} \cdot 3 \cong 53{,}6\%$$

(Multiplica-se pelas 3 possibilidades: MMH, HMM e MHM).

ATIVIDADE 14

Considere um cofre com 3 rodas de fechaduras sendo cada uma delas com 12 letras (A a L).

a) quantas combinações serão possíveis ao escolher uma letra para cada roda?

Considere as 12 letras em cada roda: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L.

Temos 12 possibilidades em cada roda, então o total de combinações será:

$12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728.$

b) o dono desse cofre esqueceu o segredo, porém lembra que as letras da primeira e segunda roda são vogais diferentes e na última é uma consoante. Quantos são os códigos que satisfazem essa condição?

Temos 03 vogais {A, E, I} e 09 consoantes {B, C, D, F, G, H, J, K, L}, considerando que nas duas primeiras temos duas vogais diferentes e na terceira uma consoante, o total de combinações será:

$3 \cdot 2 \cdot 9 = 54$ códigos diferentes.

c) qual a probabilidade de o dono do cofre acertar na primeira tentativa?

A probabilidade de acertar na primeira tentativa é: $P = {}^{1}/_{54} \cong 0{,}0185 = 1{,}85\%$

ATIVIDADE 15

Em grupo, elabore um problema como o exercício anterior envolvendo segredos de cofre com números. Troque o exercício elaborado com outro grupo que terá a missão de resolver e socializar com a turma. O seu grupo poderá auxiliar o grupo que ficou responsável em resolver o que foi elaborado por você.

Registre no seu caderno de anotações, o problema elaborado pelo grupo e sua resolução.

Comentários:

Professor, salientamos que a habilidade desenvolvida prevê, além da resolução, a elaboração de problemas. A proposta desta atividade é organizar os alunos em grupos produtivos para a elaboração de um problema tendo como modelo a atividade anterior (nº 14). Além da elaboração, sugerimos que os grupos troquem entre si o que foi elaborado para que o outro grupo possa tentar encontrar a solução do problema e socializar com toda a turma.

Observamos que por se tratar de uma livre criação do aluno a atividade poderá ser uma forma de avaliação e que o acompanhamento do professor torna essa atividade uma forma de verificação das habilidades desenvolvidas até aqui, assim como o aluno organiza as informações para expressá-las de forma escrita e contextualizada. Valorizar esta construção é possibilitar o desenvolvimento dos saberes matemáticos em construção, pois é o momento de o aluno colocar em prática tudo o que aprendeu, e posicionar-se para defender suas percepções.

ATIVIDADE 16

Joaquim guarda suas economias em uma caixa, ao verificar o que já tinha guardado constatou que tinha na caixa: 3 notas de R$100,00; 5 notas de R$ 50,00; 6 notas de R$10,00 e 8 notas de R$ 5,00. Se ele retirar da caixa duas notas simultaneamente e ao acaso, qual a probabilidade de que uma seja uma de R$100,00 e a outra de R$50,00 em qualquer ordem?

No total, temos 22 notas na caixa. Ao retirar a primeira nota haverá 22 notas na caixa e ao retirar a segunda nota, haverá 21 notas na caixa, sendo:

- 3 notas de R$ 100,00;
- 5 notas de R$ 50,00.

Assim, temos que:

$$p = \left(\frac{3}{22}\right) \cdot \left(\frac{5}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right) \cdot \left(\frac{3}{21}\right)$$

$$p = \left(\frac{15}{462}\right) + \left(\frac{15}{462}\right)$$

$$p = \left(\frac{30}{462}\right)$$

$$p \cong 0{,}0649 \cong 6{,}49\%$$

ATIVIDADE 17

Uma pessoa joga uma moeda quatro vezes, qual a probabilidade de sair CARA nas quatro jogadas.

Podemos encontrar a quantidade de eventos do espaço amostral calculando: $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ eventos possíveis.

(Número de possibilidades no lançamento de uma moeda, cara ou coroa (2), elevado ao número de lançamentos consecutivos (4)).

Eventos favoráveis: 1 evento (C, C, C, C), então a probabilidade (P) será:

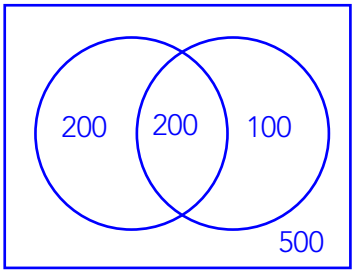
$$(P) = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = 6{,}25\%$$

ATIVIDADE 18

Foi realizada uma pesquisa com todos os 1000 alunos de uma escola de ensino fundamental e médio com relação à preferência no uso de redes sociais. Foi constatado que 400 alunos preferem utilizar a rede social A, 300 preferem a rede social B e 200 alunos disseram que ambas são utilizadas igualmente. Escolhendo-se um aluno ao acaso, qual a probabilidade desse aluno preferir a rede social A ou B?

Comentário:

Nesta atividade a teoria dos conjuntos facilitará a identificação da quantidade exata do número de alunos que preferem exclusivamente uma das redes sociais A ou B. Para isso utilizaremos o Diagrama de Venn.



$N(A * B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) =$

$= 400 + 300 - 200 = 500$

Então:

$$P(A \cup B) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

ATIVIDADE 19

No jogo de loteria oficial Mega-Sena, um apostador escolhe no mínimo 6 dezenas entre 60. São sorteadas 6 dezenas e o ganhador do prêmio maior deve ter escolhido todas as dezenas sorteadas. Qual é a probabilidade de um apostador que escolheu 8 dezenas ganhar o maior prêmio?

Supondo que o apostador acertou todas as dezenas, como pede o enunciado da questão, não será necessário considerar a troca de ordem dos sorteios, uma vez que há apenas uma categoria envolvida: acertos.

Desta forma a probabilidade de 6 acertos em 6 sorteios tendo escolhida 8 dezenas, será:

$$P = \underbrace{\frac{8}{60} \cdot \frac{7}{59} \cdot \frac{6}{58} \cdot \frac{5}{57} \cdot \frac{4}{56} \cdot \frac{3}{55}}_{\text{6 sorteios}} = 0,000056\%$$

ATIVIDADE 20

Qual é a probabilidade de o apostador descrito no enunciado da atividade anterior acertar 4 das 6 dezenas sorteadas?

Fixaremos uma ordem para os resultados do sorteio. Calcularemos a probabilidade dessa ordenação e, em seguida, introduziremos o fator que considera a troca de ordem. A ordem fixada será esta: Acerto, Acerto, Acerto, Erro, Erro.

$$P(A, A, A, \mathbf{A}, E, E) = \frac{8}{60} \cdot \frac{7}{59} \cdot \frac{6}{58} \cdot \frac{5}{57} \cdot \frac{52}{56} \cdot \frac{51}{55}$$

Então:

$$P(A, A, A, \mathbf{A}, E, E) \cong 0,012\%$$

É preciso atentar para os dois últimos fatores dessa multiplicação, que correspondem à chance de erros. Nesse caso, devemos lembrar que são 60 dezenas no total e que o apostador escolheu 8 delas. Assim, há 52 dezenas não escolhidas e que poderão ser sorteadas no caso de o apostador não ter sucesso em suas escolhas.

O fator que considera todas as ordenações possíveis entre os 6 elementos AAAAEE é este: $\frac{6!}{4!2!}$.

Assim, a possibilidade de 4 acertos, portanto, de 2 erros, em 6 sorteios consecutivos é esta:

P(4 acertos e 2 erros em 6 sorteios)=

$$= \underbrace{\frac{8}{60} \cdot \frac{7}{59} \cdot \frac{6}{58} \cdot \frac{5}{57} \cdot \frac{52}{56} \cdot \frac{51}{55}}_{\text{6 sorteios}} \cdot \frac{6!}{4!2!} = 0,18\%$$

ATIVIDADE 21

Em uma caixa há 20 bolas iguais, a não ser pela cor. Dessas bolas, 1/4 é verde, 2/5 são amarelas e o grupo restante é formado apenas por bolas da cor rosa. Serão realizados três sorteios com reposição de uma bola a cada vez. Nessa condição, uma mesma bola pode ser sorteada mais de uma vez. Qual é a chance de serem sorteadas:

a) bolas de uma única cor?

As frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$ determinam as razões na caixa de bolas, respectivamente, das cores verde e amarela. A razão referente às bolas da cor rosa é:

$$1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{7}{20}\right)$$

Essas frações correspondem, portanto, à probabilidade de cada cor, uma vez que podemos ter bolas verdes, bolas amarelas ou bolas da cor rosa. Assim, trata-se de calcular os três resultados, visto não haver qualquer interseção entre eles.

$$P(3 \text{ verdes}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$P(3\ amarelas) = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$P(3 \text{ rosas}) = \left(\frac{7}{20}\right)^3$$

Comentário:

Vale ressaltar dois aspectos da resolução desse problema. Em primeiro lugar, o fato de que não foi necessário considerar a não ordenação do conjunto, visto que cada um deles é formado por elementos de mesma categoria: todos são verdes, ou todos são amarelos, ou todos são rosa. Em segundo lugar, é preciso notar que nos sorteios "com reposição" a probabilidade de ocorrência de cada evento é constante, visto não se alterarem as condições entre um sorteio e outro.

b) apenas bolas verdes ou amarelas?

O fato de que apenas verdes ou amarelas sejam sorteadas implica que não sejam sorteadas bolas da cor rosa. Há duas maneiras aparentemente diferentes de resolver esse problema.

Analisemos cada uma delas.

Primeira maneira: podemos analisar as possibilidades de que sejam sorteadas 3 bolas divididas entre (V) e amarelas (A). São estes os casos e suas probabilidades:

$$P(VVV) = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

(Atenção para a $C_{3,2}$)

$$P(VVA) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{3!}{2!}$$

A probabilidade procurada é a soma desses casos. Assim:

$$P(\text{não rosa}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{3!}{2!} + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3!}{2!} + \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

Segunda maneira: visto que as bolas da cor rosa não podem ser sorteadas, podemos adicionar a probabilidade de bolas de cor verde com a de bolas de cor amarela, para ter a probabilidade desejada em cada sorteio.

$$P(\text{não rosa em cada sorteio}) = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right)$$

$$P(\text{não rosa em 3 sorteios consecutivos com reposição}) = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right)^3.$$

Comentário

Chamamos a atenção do professor para o fato de que as duas respostas são idênticas e que ,talvez, valha a pena mostrar aos estudantes que a adição apresentada na primeira maneira de resolver o problema coincide com o desenvolvimento do binômio que representa a segunda maneira. Com essa ação, o professor preparará

o terreno para discussão do Tema 5, acerca da probabilidade binomial.

ATIVIDADE 22

Lucia e Jair estão, com outras 8 pessoas, esperando o sorteio de 4 pessoas para a formação de um grupo de trabalho. Qual é a probabilidade de Jair e Lucia não fazerem parte, os dois, do grupo sorteado?

Podemos resolver esse problema de duas maneiras.

Primeira maneira: calculamos a probabilidade de que Jair e Lucia façam parte do grupo sorteado e, em seguida, consideramos o complemento para 100% do valor obtido.

P(Jair, Lucia e outras duas pessoas) =

$$= \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{8}{8}\right) \cdot \left(\frac{7}{7}\right) \cdot \frac{4!}{2!} = \frac{2}{15}$$

Devemos observar o fator que representa os fatoriais, que considera a não ordenação da sequência (Jair, Lucia, Pessoa, Pessoa). Se a probabilidade de os dois serem sorteados juntos é igual a 2/15, a probabilidade de que não sejam sorteados juntos é 13/15.

Segunda maneira: vamos analisar os casos possíveis, que são estes: apenas Jair sem Lucia, apenas Lucia sem Jair, nem Lucia nem Jair.

P(apenas Jair sem Lucia)=

$$= \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{4!}{3!}$$

P(apenas Lucia sem Jair) =

$$= \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{4!}{3!}$$

P(nem Lucia nem Jair) =

$$= \left(\frac{8}{10}\right) \cdot \left(\frac{7}{9}\right) \cdot \left(\frac{6}{8}\right) \cdot \left(\frac{5}{7}\right)$$

A probabilidade desejada é o resultado da adição desses três casos, isto é:

$$P = \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{4!}{3!} +$$

$$+ \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\right) \cdot \left(\frac{6}{7}\right) \cdot \frac{4!}{3!} +$$

$$+ \left(\frac{8}{10}\right) \cdot \left(\frac{7}{9}\right) \cdot \left(\frac{6}{8}\right) \cdot \left(\frac{5}{7}\right) =$$

$$= \frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{13}{15}$$

Confirmamos então, que a probabilidade procurada é igual a $^{13}/_{15}$.

ATIVIDADE 23

Imagine 9 pessoas, sendo 4 homens e 5 mulheres, e calcule o que se pede.

a) quantas filas diferentes podem ser formadas?

9! = 362.880 filas

b) quantas filas diferentes podem ser formadas se os homens ficarem juntos?

Considerando os 4 homens como uma única pessoas, teremos, portanto, 6 pessoas, ou seja, 6! = 720 filas. Considerando agora a troca de ordem dos 4 homens, teremos 720 · 4! = 17.280 filas.

c) quantas filas diferentes podem ser formadas se os homens ficarem juntos e as mulheres também?

4! · 5! · 2! = 5.760 filas.

d) quantos grupos diferentes de 9 pessoas podem ser formados?

1 grupo pois temos exatamente 9 pessoas.

e) quantos grupos diferentes de 4 pessoas podem ser formados?

$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!}$ =126 grupos.

f) quantos grupos diferentes de 4 pessoas, com 2 homens e 2 mulheres, podem ser formados?

$\frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} = 6 \cdot 10 = 60$ grupos.

g) quantos grupos diferentes de 4 pessoas do mesmo sexo podem ser formados?

- Grupos de 4 homens: 1 grupo, pois temos exatamente 4 homens.
- Grupos de 4 mulheres:

$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} = 5$ grupos

Portanto, poderão ser formados 5 + 1 = 6 grupos de 4 pessoas do mesmo sexo.

h) qual a probabilidade de sortearmos ao acaso duas pessoas do mesmo sexo? E três pessoas?

Primeiramente, vamos calcular o espaço amostral para cada caso (duplas e trios) considerando o grupo de 9 pessoas sendo 4 homens e 5 mulheres.

- total de duplas considerando homens e mulheres:

$C_2^9 = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$

- total de trios considerando homens e mulheres:

$C_3^9 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$

Vamos calcular o total de duplas com pessoas do mesmo sexo (eventos).

- total de duplas de homens:

$C_2^4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

- total de duplas de mulheres:

$C_2^5 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$

Portanto, a probabilidade de escolhermos ao acaso duas pessoas do mesmo sexo será:

$P(\text{dois homens}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \cong 0{,}166 \cong 16{,}6\%$

$P(\text{duas mulheres}) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \cong 0{,}277 \cong 27{,}7\%$

Somando as duas probabilidades, temos:

16,6% + 27,7% = 44,3% aproximadamente.

Vamos calcular agora o total de trios com pessoas do mesmo sexo (eventos).

- total de trios de homens:

$C_3^4 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$

- total de trios de mulheres:

$C_3^5 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

A probabilidade de escolhermos ao acaso um trio de pessoas do mesmo sexo será:

$P(\text{três homens}) = \frac{4}{84} = \frac{1}{21} \cong 0{,}0476 \cong 4{,}76\%$

$P(\text{três mulheres}) = \frac{10}{84} = \frac{5}{42} \cong 0{,}119 \cong 11{,}9\%$

Somando as duas probabilidades temos: 4,76% + 11,9% = 16,66% aproximadamente.

ATIVIDADE 24

(UFF–RJ) Em um jogo de bingo são sorteadas, sem reposição, bolas numeradas de 1 a 75, e um participante concorre com a cartela reproduzida abaixo. Qual é a probabilidade de que os três primeiros números sorteados estejam nessa cartela?

BINGO				
5	18	33	48	64
12	21	31	51	68
14	30		60	71
13	16	44	46	61
11	27	41	49	73

Professor, utilize o princípio fundamental da contagem. Veja que a cartela contém 24 números entre um universo de 75 que serão sorteados. A chance dos três primeiros números dessa cartela serem sorteados nas três primeiras rodadas respeita a seguinte ordem:

1º sorteio *24/75*

2º sorteio *23/74*

3º sorteio *23/73*

Calculamos a chance realizando o produto entre os eventos:

$$P = \frac{24}{75} \cdot \frac{23}{74} \cdot \frac{22}{73} = \frac{12144.}{405150} \cong 0{,}03$$

A chance dos três primeiros números sorteados serem da cartela é de aproximadamente 3%.

Tema 5: Distribuição binomial de probabilidades

Se um evento é repetido n vezes nas mesmas condições e de modo independente, e queremos a probabilidade da ocorrência do resultado esperado em p dessas n vezes, estamos diante de um caso binomial, isto é, um caso em que devemos considerar, a cada repetição do experimento, apenas duas possibilidades, sucesso ou fracasso. Daí o termo binômio, que tem como um dos exemplos mais comuns o lançamento de uma moeda certo número de vezes.

ATIVIDADE 1

Uma moeda comum, ao ser lançada, determina probabilidade 1/2 para cada uma de suas faces, cara ou coroa. Lançando-se, por exemplo, 8 vezes uma moeda, qual é a probabilidade de ocorrência de 3 caras nos três primeiros lançamentos e de 5 coroas nos demais?

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

ATIVIDADE 2

Serão realizados 5 sorteios sucessivos utilizando-se 20 bolas e sendo 4 delas vermelhas. Ha- verá reposição de uma bola a cada vez. Escreva a probabilidade de saírem:

a) 5 bolas vermelhas;

$$P = \frac{4}{20} \cdot \frac{4}{20} \cdot \frac{4}{20} \cdot \frac{4}{20} \cdot \frac{4}{20} = \left(\frac{4}{20}\right)^5 = \left(\frac{1}{5}\right)^5$$

b) 4 bolas vermelhas e uma não vermelha;

$$P = \frac{4}{20} \cdot \frac{4}{20} \cdot \frac{4}{20} \cdot \frac{4}{20} \cdot \frac{16}{20} \cdot \frac{5!}{4!\,1!} =$$

$$= \left(\frac{4}{20}\right)^4 \cdot \frac{16}{20} \cdot \frac{5!}{4!1!} = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \frac{4}{5} \cdot 5.$$

c) 3 bolas vermelhas e duas não vermelhas;

$$P = \frac{4}{20} \cdot \frac{4}{20} \cdot \frac{4}{20} \cdot \frac{16}{20} \cdot \frac{16}{20} \cdot \frac{5!}{3!2!}$$

$$= \left(\frac{4}{20}\right)^2 \cdot \left(\frac{16}{20}\right)^2 \cdot \frac{5!}{3!2!} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot 10$$

ATIVIDADE 3

O que é mais provável: duas caras no lança mento de 4 moedas ou uma face 6 no lança mento de 2 dados?

Chamamos P_1 a probabilidade de 2 caras, portanto 2 coroas, no lançamento de 4 moedas, e de P_2 a probabilidade de apenas uma face 6 no lançamento de dois dados.

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{3}{8} \cong 37{,}5\%$$

$$P_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 2 = \frac{5}{18} \cong 27{,}8\%$$

Portanto, como $P_1 > P_2$, é mais provável duas caras no lançamento de 4 moedas.

ATIVIDADE 4

Uma prova é formada por 10 testes com 5 alternativas cada um, em que apenas uma delas é correta. Qual é a probabilidade de um aluno acertar, "chutando", 4 testes nesta prova?

Em cada teste, a chance de acerto é igual a 1/5 e a chance de erro é de 4/5. Para acertar "chutando", 4 testes e, portanto, errar 6 testes, a chance é:

$$P = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 \cdot \frac{10!}{6!4!} = \frac{172\,032}{1\,953\,125} \cong 8{,}5\%$$

ATIVIDADE 5

Estatisticamente, 1 em cada 10 televisores de determinada marca apresenta problemas de funcionamento. Uma loja de eletrodomésticos acaba de comprar 6 desses televisores para revender. Supondo que todos sejam vendidos, qual é a probabilidade de a loja receber reclamações de:

a) nenhum comprador?

b) apenas 1 comprador?

c) apenas 2 compradores?

d) 3 compradores?

e) 4 compradores?

f) 5 compradores?

g) todos os compradores?

A probabilidade de "sucesso", nesse caso, pode ser a de o televisor apresentar problema, ou seja, $^1/_{10}$, enquanto a probabilidade de "fracasso" é a de o televisor não apresentar problema, isto é, $^9/_{10}$. Dessa maneira, a resolução esperada dos estudantes deve apresentar os seguintes resultados:

a) $\left(\frac{9}{10}\right)^6$

b) $\left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^5 \cdot \binom{6}{1}$

c) $\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 \cdot \binom{6}{2}$

d) $\left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \binom{6}{3}$

e) $\left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \binom{6}{4}$

f) $\left(\frac{1}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{9}{10}\right) \cdot \binom{6}{5}$

g) $\left(\frac{1}{10}\right)^6$

Lembrando que: $\binom{n}{p}$ são coeficientes binomiais e calculados da seguinte forma:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

MATEMÁTICA

3ª Série – Ensino Médio

3° Bimestre

1. Organização das grades curriculares

Apresentamos a seguir uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio, além de algumas orientações pedagógicas, para as três séries que compõe o referido estágio de ensino da escolaridade básica.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

1.1 Grade Curricular da 3ª série do Ensino Médio – 3º Bimestre

ENSINO MÉDIO – CURRÍCULO DE MATEMÁTICA – 3ª SÉRIE (3º BIMESTRE)		
CURRÍCULO OFICIAL – SEDUC-SP		**Base Nacional Comum Curricular**
Tema/Conteúdo	**Habilidades**	**Competências Gerais**
Relações ▸ Estudo das funções • Qualidade das funções; • Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais; • Gráficos: análise de sinal crescimento e taxa de variação. • Composição: translações e reflexões; • Inversão.	• Saber usar de modo sistemático as funções para caracterizar relações de interdependência, reconhecendo as funções de 1º e 2º graus, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica, com suas propriedades características. • Saber construir gráficos de funções por meio de transformações em funções mais simples (translações horizontais, verticais, simetrias, inversões). • Compreender o significado da taxa de variação unitária (variação de f(x) por unidade a mais de x), utilizando o crescimento, o decrescimento e a concavidade de gráficos. • Conhecer o significado, em diferentes contextos, do crescimento e do decrescimento exponencial, incluindo-se os que expressam por meio de funções de base e.	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

1.1.1 Estudo funcional de funções do primeiro e segundo graus.

De forma geral, as funções polinomiais são instrumentos fundamentais para a representação das relações de interdependência entre grandezas, conforme foram desenvolvidos durante a aprendizagem dos alunos em anos anteriores. Por exemplo, no 7º ano do Ensino Fundamental foram exploradas situações envolvendo a proporcionalidade direta e inversa entre grandezas, que conduzem a relações do tipo $y = k \cdot x$, ou, então, $y = \frac{k}{x}$, de modo que **k** é uma constante não nula.

Já no 9º ano, foram estudadas as funções $y = ax + b$ e $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, além da representação destas em gráficos.

Recorrendo às considerações anteriores, destacamos as funções que traduzem matematicamente os processos que envolvem relações de proporcionalidade direta (gráficos lineares), ou relações em que uma grandeza é proporcional ao quadrado de outra (gráficos com a forma de parábola).

Convém ressaltar, que a construção de gráficos das funções acima indicadas é objeto de atenção na Competência Específica 1, na habilidade (EM13MAT101). No desenvolvimento da habilidade descrita nesta Competência Específica, pensamos na resolução e elaboração de sequências de atividades que envolvem situações concretas em que a consideração das grandezas envolvidas conduz a uma função polinomial de 1º ou de 2º grau, que contemplem com destaque problemas de otimização, ou seja, problemas que envolvem a obtenção do valor máximo ou mínimo de uma função.

Este encadeamento metodológico, propicia o desenvolvimento de importantes competências básicas, tais como:

- o recurso à linguagem das funções para representar interdependências, o que conduz a um aumento na capacidade de expressão, favorecendo a construção de um discurso mais eficaz para enfrentar problemas em diferentes contextos.

- a capacidade de compreensão de uma variada gama de fenômenos, uma vez que muitas situações de interdependência estão naturalmente associadas a modelagens que conduzem a explicações dos referidos fenômenos.

- o reconhecimento das funções envolvidas em um fenômeno, o que possibilita a sistematização de propostas de intervenção consciente sobre a realidade representada.

A título de aprofundamento podemos nos referir a um panorama sobre todas as relações de interdependência, revisando e incluindo diferentes linguagens com recursos mais amplos, buscando estabelecer suas qualidades essenciais e permitindo que colaborem mutuamente, favorecendo uma compreensão mais ampla de múltiplos fenômenos da realidade.

Desta forma, as competências básicas: expressão, compreensão, contextualização, argumentação e decisão estarão presentes nas diversas situações-problema, uma vez que o estudo funcional proposto seria a busca de uma linguagem apropriada para compreender os fenômenos de diferentes tipos, objetivando sempre a argumentação e a tomada de decisões em situações concretas.

Os assuntos apresentados podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem:

- **Situação de Aprendizagem 5 -** Funções como relações de interdependência: Múltiplos exemplos, Vol. 1, 1ª série do Ensino Médio, p. 55 a 64;

- **Situação de Aprendizagem 6 -** Funções Polinomiais de 1º grau: Significado, gráficos, crescimento, decrescimento e taxas. Vol. 1, 1ª série do Ensino Médio, p. 65 a 74.

- **Situação de Aprendizagem 7 -** Funções Polinomiais de 2º grau: Significado, gráficos,

interseções com os eixos, vértices e sinais. Vol. 1, 1ª série do Ensino Médio, p. 74 a 96;

- **Situação de Aprendizagem 8:** Problemas envolvendo funções de 2º grau em múltiplos contextos: Problemas de máximo e mínimo. Vol. 1, 1ª série do Ensino Médio, p. 96 a 104.

Lembrando que ao final de cada situação de aprendizagem constam algumas considerações sobre a avaliação dos conhecimentos bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências e habilidades enunciadas.

Além das situações de aprendizagem, sugerimos alguns recursos audiovisuais, da plataforma Matemática Multimídia:

- Problema da cerca, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1160 (acesso em 28/nov./2018)

- A mãe, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1160 (acesso em 28/nov./2018)

1.1.2 Funções exponenciais e logarítmicas

Para iniciar os comentários referentes a esta seção convém ressaltar que o conceito base das funções exponencial e logarítmica, remete à potência de um número, cujo desenvolvimento já vem sendo tratado nos anos finais do Ensino Fundamental. No Ensino Médio, consolidamos seus significados, sistematizando os fatos e apresentando a função exponencial, com destaque para sua forma peculiar de crescimento ou decrescimento.

Os logaritmos, uma "invenção" engenhosa do início do século XVII, cuja motivação inicial era a simplificação dos cálculos em uma época de limitados instrumentos para tal, apesar da abundância de recursos atuais, permanecem como um tema especialmente relevante, não em razão de tais simplificações, mas pela sua adequação em descrever fenômenos em que as variáveis aparecem no expoente. Apresentar seu significado mais profundo, o que contribuiu para conservar sua importância, juntamente com as propriedades mais relevantes para seu uso em diferentes contextos, talvez seja o objetivo principal em se abordar tal conteúdo.

É importante ressaltar que ambos os conteúdos sejam abordados de maneira articulada, a distinção entre eles, é estritamente ligada a uma troca de posições entre as variáveis, de tal forma que:

- se $y = a^x$, considerando x a variável independente e $0 < a \neq 1$, escrevemos $y = f(x) = a^x$, e temos uma função exponencial.

- quando y é a variável independente e $0 < a \neq 1$, escrevemos $x = g(y) = \log_a y$, e temos uma função logarítmica.

As funções exponenciais e logarítmicas são inversas.

Apesar de que o caráter estritamente matemático seja importante no desenvolvimento de um conteúdo, não podemos deixar de contemplar suas aplicações em situ-ações-problema. Desta forma, reiteramos que as diversas contextualizações dos logaritmos (graus de terremotos, acidez de líquidos, intensidade sonora, magnitude de estrelas, cálculos de juros etc.) são possibilidades de enriquecimento de uma determinada sequência de atividades em sala de aula.

A título de aprofundamento, apresentamos uma função exponencial, do tipo $y=a^x$, particularmente importante na representação de diversos fenômenos naturais, em que a base **a** é o número neperiano representado pela letra e, cujo valor é 2,71828188459045. ou seja, é aproximadamente igual a 2,7183. Tal como o número π que representa a razão constante entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, o número e tem um significado especialmente importante quando se estudam as diversas formas de uma função f(x) crescer ou decrescer. O estudo de fenômenos que envolvem crescimento ou decrescimento de populações, desintegração radioativa, juros

compostos, entre outros, torna natural o aparecimento deste número.

Tal como o número π, o número e é irracional e transcendente. Os irracionais como $\sqrt{2}$ não são razões entre inteiros, são raízes de equações algébricas com coeficientes inteiros (por exemplo, $x^2 - 2 = 0$). Um número irracional é transcendente quando não existe equação algébrica com coeficientes inteiros que o tenha como raiz, e esse o é o caso de números como π e e.

O mais importante no momento é a utilização de uma função exponencial particular, que vai ampliar significativamente o repertório de recursos para o tratamento matemático de diversos fenômenos em diferentes contextos.

Os tópicos apresentados, podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem:

- **Situação de aprendizagem 1 -** As potências e o crescimento exponencial: A função exponencial, Vol. 2, 1ª série do Ensino Médio, p. 11 a 20.

- **Situação de Aprendizagem 2 -** Quando o expoente é a questão, o logaritmo é a solução: A força da ideia de logaritmo, Vol. 2, 1ª série do Ensino Médio, p. 20 a 38.

- **Situação de Aprendizagem 3 -** As funções com variável no expoente: A exponencial e sua inversa, a logarítmica, Vol.2, 1ª série do Ensino Médio, p. 38 a 46.

- **Situação de Aprendizagem 4**: As múltiplas faces das potências e dos logaritmos: Problemas envolvendo equações e inequações e diferentes contextos, Vol. 2, 1ª série do Ensino Médio, p. 47 a 59.

- **Situação de Aprendizagem 4**: Os fenômenos naturais e o crescimento ou decrescimento exponencial: O número e, Vol. 2, 3ª série do Ensino Médio, p. 40 a 55.

Lembrando que ao final de cada situação de aprendizagem constam algumas considerações sobre a avaliação dos conhecimentos bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências e habilidades enunciadas.

Além das situações de aprendizagem, sugerimos alguns recursos audiovisuais, da plataforma Matemática Multimídia:

- Osso duro de roer, disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1146 (acesso em 28/nov./2018).

- Baralho mágico, disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/998 (acesso em 28/nov./2018).

- Overdose, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1147 (acesso em 28/nov./2018).

- A aparição, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1050 (acesso em 28/nov./2018).

- Avalanches, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1364 (acesso em 28/nov./2018).

1.1.3 Fenômenos periódicos

As funções são maneiras que encontramos para representar a interdependência entre grandezas, sem perder a generalidade. No Ensino Médio, o estudo de números e funções é um dos mais importantes e amplia sobremaneira, em relação às etapas anteriores. Com base nessa premissa, apresentamos os tipos de função estudados no Ensino Médio, identificando os significados que normalmente lhes são associados.

O primeiro grupo de funções com o qual os alunos tem contato no Ensino Médio são as funções polinomiais de 1º e 2º grau, complementadas ao fim da 3ª série do Ensino Médio, com a apresentação das funções polinomiais de grau qualquer. Há uma variedade de situações possíveis de serem modeladas com funções polinomiais de

diferentes graus. É comum, no início do trabalho com funções, a proposição aos alunos situações que exijam, por exemplo, a análise de como o preço da corrida de táxi depende da quilometragem ou da verificação de que a quantidade de calor que um corpo absorve ocorre em função do aumento de sua temperatura ou, ainda, o fato de que um corpo em queda livre aumenta cada vez mais a distância que percorre a cada segundo sucessivo.

Outro grupo de funções, analisado no Ensino Médio, é aquele que discute o crescimento exponencial de uma grandeza em função da variação de outra. Nesse grupo, incluem-se, além das funções exponenciais propriamente ditas, as funções logarítmicas. Enquanto as funções exponenciais tratam dos processos de crescimento ou decrescimento rápidos, as funções logarítmicas modelam fenômenos que crescem ou decrescem de modo mais lento. Processos de crescimento populacional e também de acumulação financeira constituem contextos fecundos para a significação de funções desse grupo, e normalmente são apresentados em diversos materiais didáticos. Além disso, os logaritmos e as exponenciais estão presentes na determinação da intensidade dos terremotos, no nível de intensidade sonora e no cálculo da capacidade de armazenagem de informação.

As funções trigonométricas, que constituem o terceiro grupo das funções estudadas no Ensino Médio, caracterizam-se por permitir a modelagem de fenômenos periódicos, isto é, fenômenos que se repetem e que mantêm as características de dependência entre as grandezas envolvidas. A existência de uma gama de fenômenos dessa natureza contrasta com a baixa frequência com que as funções trigonométricas são contextualizadas nos materiais didáticos. Na maioria das vezes, o tratamento dado aos senos, cossenos e tangentes fica única e exclusivamente restrito aos cálculos de valores para arcos notáveis e seus côngruos, e para a relação algébrica entre estas funções, sem que a periodicidade, foco principal do estudo, seja analisada com a importância merecida.

Para concluir, reiteramos que a motivação pelo estudo das funções trigonométricas deve ser o reconhecimento de que elas são necessárias para a modelagem de fenômenos periódicos. Nesse sentido, antes da apresentação dos conceitos, os alunos precisam ser sensibilizados para a observação real, virtual ou imaginativa de uma série de manifestações naturais de caráter periódico.

Os tópicos apresentados podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem:

- Situação de Aprendizagem 1 - O reconhecimento da periodicidade, Vol.1, 2ª série do Ensino Médio, p. 12 a 22;

- Situação de Aprendizagem 2 - A periodicidade e o modelo da circunferência trigonométrica, Vol.1, 2ª série do Ensino Médio, p. 23 a 38.

- Situação de Aprendizagem 3 - Gráficos de funções periódicas envolvendo senos e cossenos, Vol. 1, 2ª série do Ensino Médio, p. 39 a 52.

- Situação de Aprendizagem 4 - Equações trigonométricas, Vol.1, 2ª série do Ensino Médio, p. 53 a 60.

Lembrando que ao final de cada situação de aprendizagem constam algumas considerações sobre a avaliação dos conhecimentos bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências e habilidades enunciadas.

Além das situações de aprendizagem, sugerimos alguns recursos audiovisuais, da plataforma Matemática Multimídia:

- Tempestades solares, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1353 (acesso em 28/nov./2018);

- A dança do sol, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1080 (acesso em 28/nov./2018);

- A roda gigante, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1364 (acesso em 28/nov./2018);

- Aventuras do Geodetetive 1: A circunferência da Terra, disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1102 (acesso em 28/nov./2018).

1.1.4 (Re)significando o estudo das funções

O objetivo maior da proposição é a de explorar sistematicamente as caracterizações das funções já estudadas, ampliando-se as possibilidades de construção de gráficos e da compreensão das formas básicas de crescimento ou decrescimento. Com isso, a possibilidade de utilização de funções para compreensão de fenômenos da realidade será ampliada, e os alunos poderão analisar com mais nitidez a riqueza da linguagem das funções.

Desta forma, é preciso ir além da constatação do crescimento ou do decrescimento, procurando qualificá-lo e tentando caracterizar sua rapidez com que ocorre o crescimento ou decrescimento por meio da taxa de variação, ou seja, da variação da variável independente por unidade a mais da variável dependente. Tal preocupação com as taxas de variação não é muito comum no estudo das funções no Ensino Médio, porém é, um assunto importante para o estudo das funções na escola básica quanto para descortinar uma série de ideias simples sobre variação de funções, que serão muito úteis para a compreensão de inúmeros fenômenos, naturais ou econômicos, envolvendo variações e taxas de variação, como a descrição dos movimentos, ou a compreensão das taxas de inflação, por exemplo.

Destacamos que neste estudo, todas as competências básicas podem ser desenvolvidas por meio deste tratamento qualitativo das funções: a expressão/compreensão de fenômenos, a argumentação/tomada de decisão e a contextualização/abstração de relações.

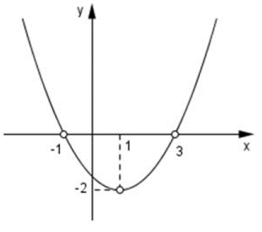
O tópico acima apresentado, pode ser encontrado no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, na respectiva Situação de Aprendizagem, conforme segue:

- **Situação de Aprendizagem 3** – As três formas básicas de crescimento ou decrescimento: A variação e a variação da variação, Vol. 2, 3ª série do Ensino Médio, pg.31 a 40.

Além da referência citada acima, o professor poderá recorrer a outros materiais que abordem o assunto tratado.

1.1.5 Os pontos críticos de uma função de grau 2

Um assunto recorrente após o estudo das representações algébrica e gráfica, de funções polinomiais de 2º grau é o estabelecimento das situações de máximo ou mínimo, identificando e calculando as coordenadas dos pontos críticos (máximos ou mínimos), no desenvolvimento relativo a este tópico. Ressaltamos a importância do aspecto qualitativo da análise de situações-problema, em detrimento do aspecto quantitativo, no qual se baseia em repetição de problemas modelo.



$$M = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Desta forma, consideramos que não é decisiva para uma compreensão adequada do tema a quantidade de questões a serem trabalhadas, mas sim o modo como elas são exploradas em classe garantindo-se uma abordagem que favoreça um aprendizado consciente e efetivo, sobretudo quando envolvem modelos matemáticos utilizados em outras situações-problema.

O ponto máximo ou mínimo de uma função polinomial do 2º grau poderá ser abordado também como média aritmética de suas raízes ou de dois pontos simétricos, quando essas raízes não existirem. Ressaltamos que quando uma função polinomial do 2º grau tem uma única raiz, esta é o ponto máximo ou mínimo da função conforme sua concavidade (coeficiente ***a*** positivo ou negativo).

O tópico acima apresentado pode ser encontrado no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, na respectiva Situação de Aprendizagem, conforme segue:

- Situação de Aprendizagem 8 – Problemas envolvendo funções de 2º grau em múltiplos contextos: Problemas de máximos e mínimos, Vol. 1, 1ª série do Ensino Médio, pg. 96 a 104.

Sugerimos a utilização do software Geogebra para a construção e análise de gráficos de funções.

1.1.6 Atividades

Tema 1: Estudo das Funções

ATIVIDADE 1

Determine a lei da função que relaciona o lado x de um quadrado ao seu perímetro.

$$x + x + x + x = 4x$$

ATIVIDADE 2

Determine a lei da função que relaciona o lado x de um quadrado com a sua área.

$$x \cdot x = x^2$$

ATIVIDADE 3

Complete a tabela com algumas relações entre os valores dos exercícios anteriores.

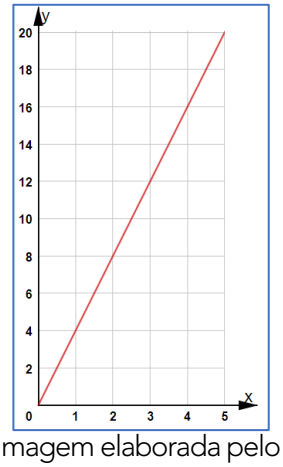
Lado(x)	1	2	3	4	5
Perímetro	4	8	12	16	20
Área	1	4	9	16	25

ATIVIDADE 4

a) Esboce o gráfico que representa a função relacionada do lado x de um quadrado com o seu perímetro.

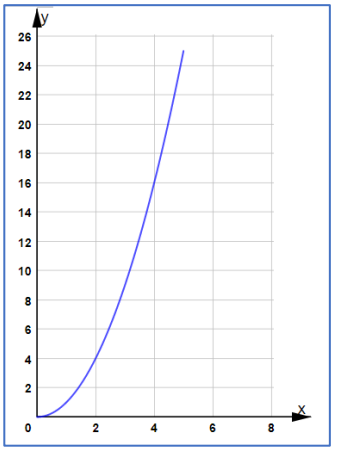
b) Esboce o gráfico que representa a função relacionada do lado x de um quadrado com a sua área.

a)



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

b)



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

ATIVIDADE 5

Classifique as funções a seguir em (C) crescente ou (D) decrescente:

(C) $f(x) = 5x + 2$

(D) $g(x) = -3x + 4$

(D) $h(x) = 5 - x$

ATIVIDADE 6

Defina a característica observada no exercício anterior, para determinar se a função é crescente ou decrescente.

São decrescentes as funções em que se pode verificar a diminuição do valor de y ao aumentar o valor de x.

São crescentes as funções em que se pode verificar o aumento do valor de y ao aumentar o valor de x.

ATIVIDADE 7

Identifique se a representação gráfica das funções a seguir é uma parábola, com a concavidade direcionada para cima(∪) ou com a concavidade direcionada para baixo (∩):

(∪) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

(∪) $g(x) = -x^2 + 2x^2$

(∩) $h(x) = -4x^2 + 5x + 2$

ATIVIDADE 8

Defina a característica observada, no exercício anterior, para determinar se a concavidade da parábola é direcionada para cima ou a concavidade direcionada para baixo.

As funções quadráticas cujo coeficiente de x^2 é positivo têm concavidade voltada para cima.

Quando o coeficiente de x^2 é negativo a concavidade é voltada para baixo.

ATIVIDADE 9

No gráfico de uma função polinomial do 1° grau podemos notar as seguintes características:

- a reta que representa a função intercepta em um único ponto no eixo x;
- a reta que representa a função intercepta em um único ponto no eixo y.

Dadas as equações de retas a seguir encontre os pontos de intersecção nos eixos (x e y):

a) $y = x + 3$

Corta o eixo x quando $y = 0$

$$0 = x + 3$$

$$x = -3$$

Corta o eixo y quando $x = 0$

$$y = 0 + 3$$

$$y = 3$$

b) $y = 2x - 8$

Corta o eixo x quando $y=0$

$$0 = 2x - 8$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

Corta o eixo y quando $x = 0$

$$y = 2 \cdot (0) - 8$$

$$y = -8$$

c) $y = -3x - 3$

Corta o eixo x quando $y = 0$

$$0 = -3x - 3$$

$$x = -\frac{3}{3}$$

$$x = -1$$

Corta o eixo y quando x = 0

$$y = -3 \cdot (0) - 3$$

$$y = -3$$

d) $y = 6 - x$

Corta o eixo x quando y=0

$$0 = 6 - x$$

$$x = 6$$

Corta o eixo y quando x=0

$$y = 6 - 0$$

$$y = 6$$

ATIVIDADE 10

Podemos observar como característica das funções polinomiais de 2° grau a quantidade de raízes reais (ou zeros da função) dependendo do valor obtido no radicando $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

- quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- quando Δ é zero, há só uma raiz real (para ser mais preciso, há duas raízes iguais);
- quando Δ é negativo, não há raiz real.

Sabendo-se disto, encontre o valor do Δ e identifique a quantidade de raízes reais nas seguintes funções:

a) $y = x^2 + 3$

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$$

$$\Delta = 0 - 12$$

$$\Delta = -12$$

Não há raiz Real

b) $y = 3x^2 - 8x$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0$$

$$\Delta = 64 - 0$$

$$\Delta = 64$$

Há duas raízes distintas

c) $y = -4x^2 - x - 3$

$$\Delta = -(1)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-3)$$

$$\Delta = 1 - 48$$

$$\Delta = -47$$

Não há raiz Real

d) $y = 5 + 6x - x^2$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5$$

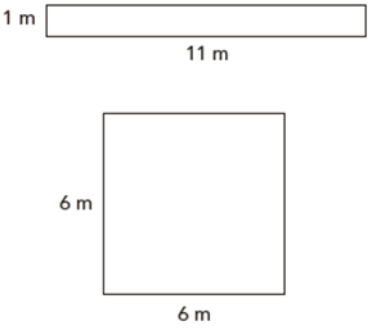
$$\Delta = 36 + 20$$

$$\Delta = 56$$

Há duas raízes distintas

ATIVIDADE 11

Entre todos os retângulos com perímetro de 24 m, como os exemplificados a seguir, qual tem a maior área? Registre sua resposta no espaço a seguir

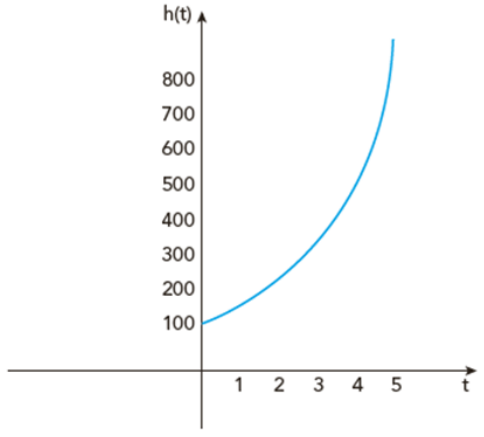


Fonte: Imagem elaborada pelo autor

O quadrado de lado 6m tem maior área

ATIVIDADE 12

O gráfico a seguir exibe a curva de potencial biótico h(t) para uma população de microrganismos, ao longo do tempo t.



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

Considerando a representação gráfica acima e as constantes reais m e n, a função que pode descrever esse potencial é:

Professor(a), solicitamos a substituição das variáveis m e n por **a** e **b,** no enunciado da atividade.

(A) $h(t) = at + b$

(B) $h(t) = at^2 + bt$

(C) $h(t) = ab^2$

(D) $h(t) = a + \log_b t$

$h(t) = at^2 + bt$

ATIVIDADE 13

A massa m de uma substância radioativa diminui com o tempo, ou seja, é uma função do tempo de decomposição t: $m = f(t)$. Para certa substância, tem-se $m = m_0 \cdot 10^{-t}$, onde m_0 é a massa inicial igual a 4000g e t, o tempo de decomposição em horas. Determine quantos gramas estarão presentes após 5 horas.

$m = 4000 \cdot 10^{-5}$

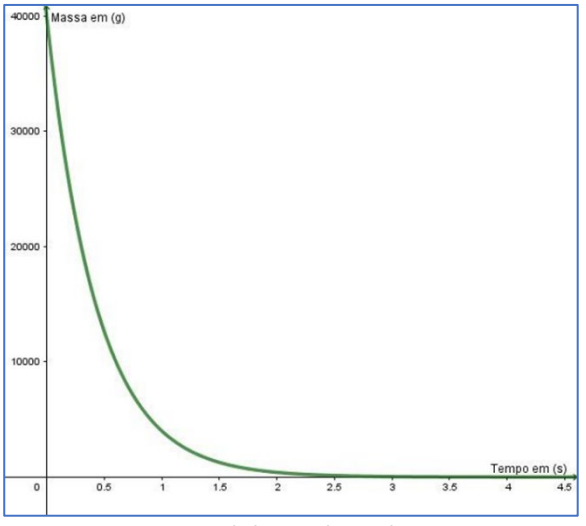
$m = 4000 \cdot \frac{1}{100000}$

$m = 0{,}04g$

ATIVIDADE 14

Esboce o gráfico da função anterior. (Sugestão: atribua para t valores múltiplos de 10.)

(Utilize uma folha de papel quadriculado para esboçar o gráfico).



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

Atenção professor! Seus alunos podem ter a falsa impressão de que o gráfico toca o eixo x, por isso sugerimos que o QR CODE seja disponibilizado à eles para possam dar zoom na imagem e verificarem que a curva se aproxima do eixo x sem nunca tocá-lo.

ATIVIDADE 15

Com base na resolução das atividades 13 e 14, determine o instante em que a massa restante será igual a 20g.

$$20 = 4000 \cdot 10^{-t}$$

$$\frac{20}{4000} = 10^{-t}$$

$$0{,}005 = 10^{-t}$$

$$0{,}005 = \frac{1}{10^{t}}$$

$$10^{t} \cdot 0{,}005 = 1$$

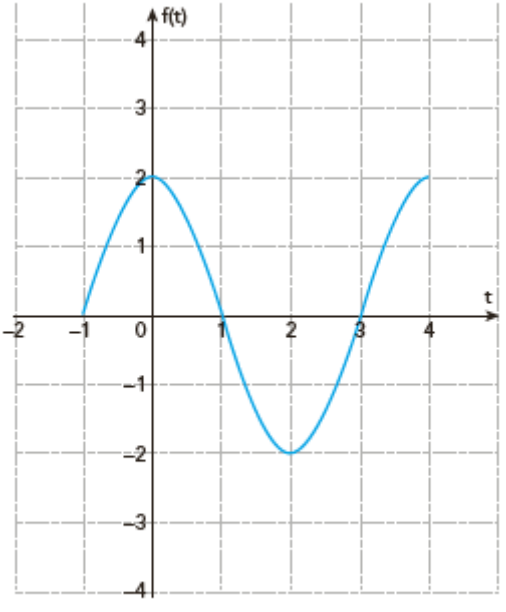
$$10^{t} = \frac{1}{0{,}005}$$

$$\log 200 = t$$

$$t \cong 2{,}3 \text{ s}$$

ATIVIDADE 16

No gráfico a seguir está descrita a função periódica $f(t) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$, em que o valor de t refere-se ao tempo em segundos.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Calcule os valores de f(t) para: t=1, t = 2 e $t = {}^{7}/_{2}$

I) t = 1

$$f(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right)$$

$$f(t) = 2 \cos\frac{\pi}{2}$$

$$f(t) = 0$$

II) t = 2

$$f(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right)$$

$$f(t) = 2 \cos \pi$$

$$f(t) = -2$$

III) $t = \frac{7}{2}$

$$f(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{7}{2}\right)$$

$$f(t) = 2 \cos\frac{7\pi}{4}$$

$$f(t) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(t) = \sqrt{2}$$

ATIVIDADE 17

Defina as raízes das seguintes funções polinomiais.

a) $f(x) = (x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

Um dos fatores precisa ser igual a zero, portanto:

$(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$

ou

$(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$

ou

$(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2$

b) $f(x) = x \cdot (x - 3) \cdot (x + 4)$

Um dos fatores deve ser igual a zero, portanto:

$x = 0$

ou

$(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3$

ou

$(x + 4) = 0 \Rightarrow x = -4$

c) $f(x) = (x - 5) \cdot x \cdot (x + 2)$

Um dos fatores deve ser igual a zero, portanto:

$x = 0$

ou

$(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 5$

$(-x + 2) = 0 \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2$

d) $f(x) = (1 - x) \cdot (x + 1) \cdot (x - 4) \cdot (3 + x)$

Um dos fatores precisa ser igual a zero, portanto:

$(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 1$

ou

$(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$

ou

$(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 4$

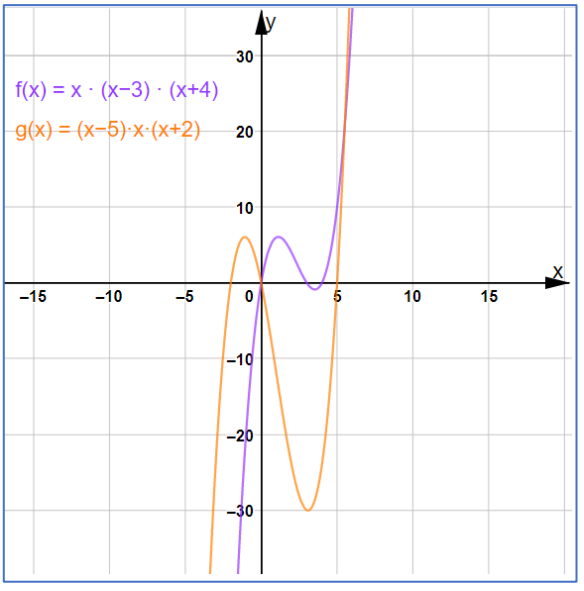
ou

$(3 + x) = 0 \Rightarrow x = -3$

ATIVIDADE 18

Esboce os gráficos das funções dos itens b e c da atividade 17 em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

(Utilize uma folha de papel quadriculado para esboçar o gráfico)



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Tema 2: Gráficos de Funções

Geralmente quando queremos esboçar um gráfico, recorremos primeiramente a uma tabela com a indicação de alguns valores do domínio da função e posterior cálculo da imagem da função. Contudo muitos gráficos, podem ser obtidos sem tomar por base as conclusões de uma representação de pontos isolados. Nesse trabalho, o ponto central consiste em "ler" e interpretar as indicações de quais operações devemos realizar com a variável independente x para obter valores referentes à variável dependente y.

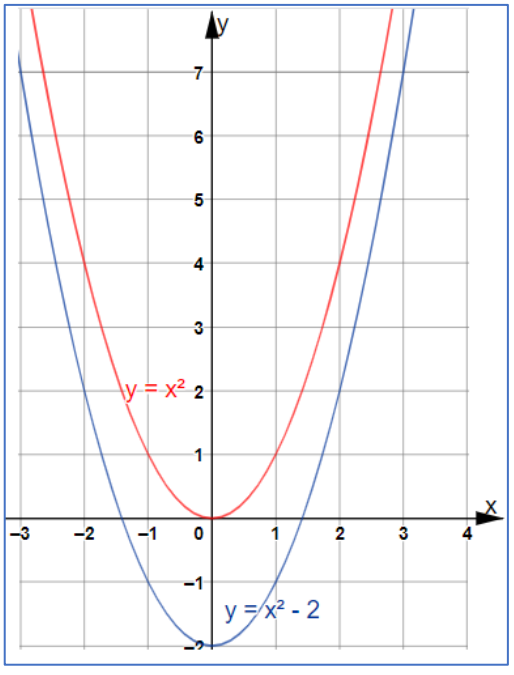
Para iniciar o que pretendemos dizer, exploraremos a construção de alguns gráficos de funções, na qual você já aprendeu durante o Ensino Médio.

Para as funções quadráticas, nota-se uma particularidade interessante quando temos funções do tipo $f(x) = x^2 - 2$, neste caso para encontrar o valor de $y = f(x)$, basta elevar a variável independente x, ao quadrado e diminuir 2 unidades do resultado obtido. Desse modo, para representar os pontos (x; y) em que $y = x^2 - 2$, podemos imaginar que o gráfico de y =

x^2 foi deslocado 2 unidades para baixo na direção do eixo y.

Dessa forma, o gráfico de $f(x) = x^2 - 2$, pode ser construído a partir da elaboração de um

gráfico mais simples: $f(x) = x^2$.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

ATIVIDADE 1

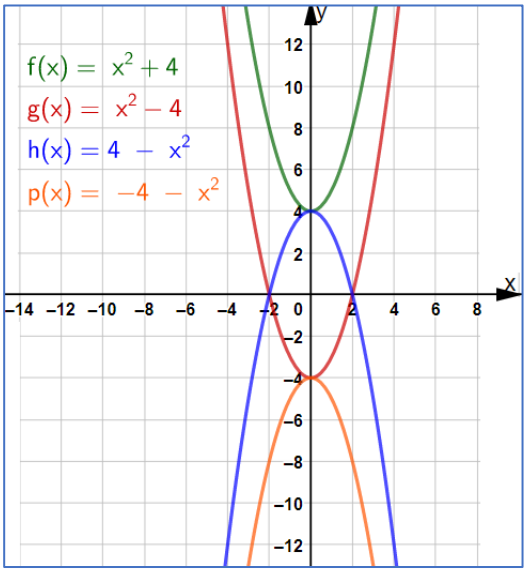
Utilizando o mesmo sistema de coordenadas esboce os gráficos das seguintes funções.

a) $f(x) = x^2 + 4$

b) $g(x) = x^2 - 4$

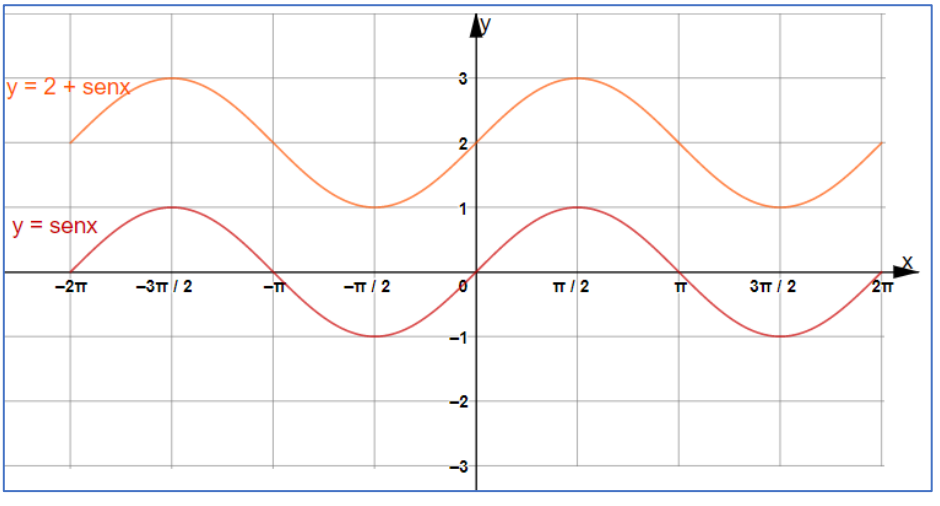
c) $h(x) = 4 - x^2$

d) $p(x) = -4 - x^2$



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Para as funções trigonométricas do tipo $f(x) = 2 + \text{sen } x$ os valores de **y** serão determinados depois que encontrarmos o valor do seno da variável independente **x** e a esse valor adicionarmos 2 unidades. Nesse caso, podemos imaginar que o gráfico mais simples da função de $y = \text{sen } x$ será deslocado 2 unidades para cima na direção do eixo **y,** conforme mostra o gráfico a seguir:



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

ATIVIDADE 2

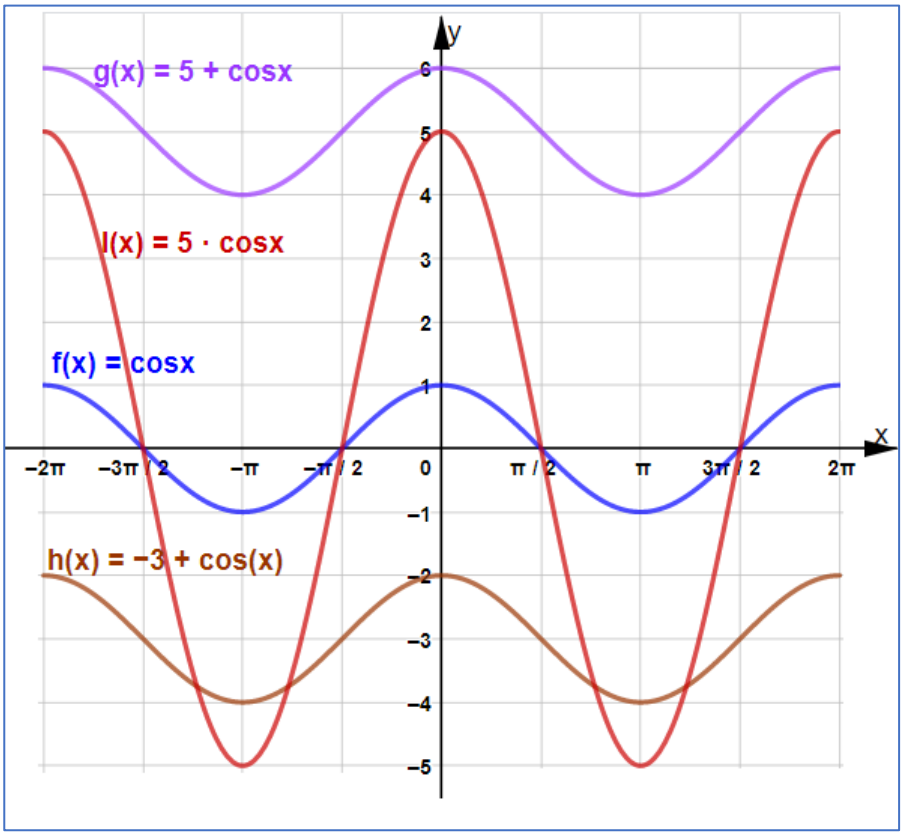
Esboce os gráficos das funções indicadas a seguir no mesmo sistema de coordenadas.

a) f(x) = cos x

b) g(x) = 5 + cos x

c) h(x) = –3 + cos x

d) i(x) = 5 · cos x



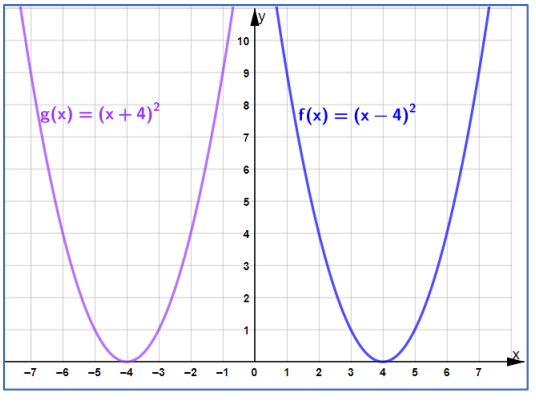
Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

No estudo dos gráficos das funções quadráticas, podemos destacar o estudo de funções do tipo: $(x-4)^2$, de modo que, pode-se imaginar o gráfico de $y = x^2$ deslocado 4 unidades para a direita na direção do eixo x O gráfico de $y= (x-4)^2$ é como se fosse o de $y = m^2$, sendo m= x – 4. O vértice da parábola desloca-se do ponto em que x = 0 para o ponto em que x = 4.

ATIVIDADE 3

Sabendo-se disto, esboce no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = (x-4)^2$ e $g(x) = (x+4)^2$

(Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para esboçar os gráficos solicitados)



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Atenção ,Professor! Facilite aos alunos o acesso ao QR CODE para que eles possam variar o valor entre -4 e 4 positivo por meio do controle no alto da tela e analisarem as diferenças nos gráficos das duas funções.

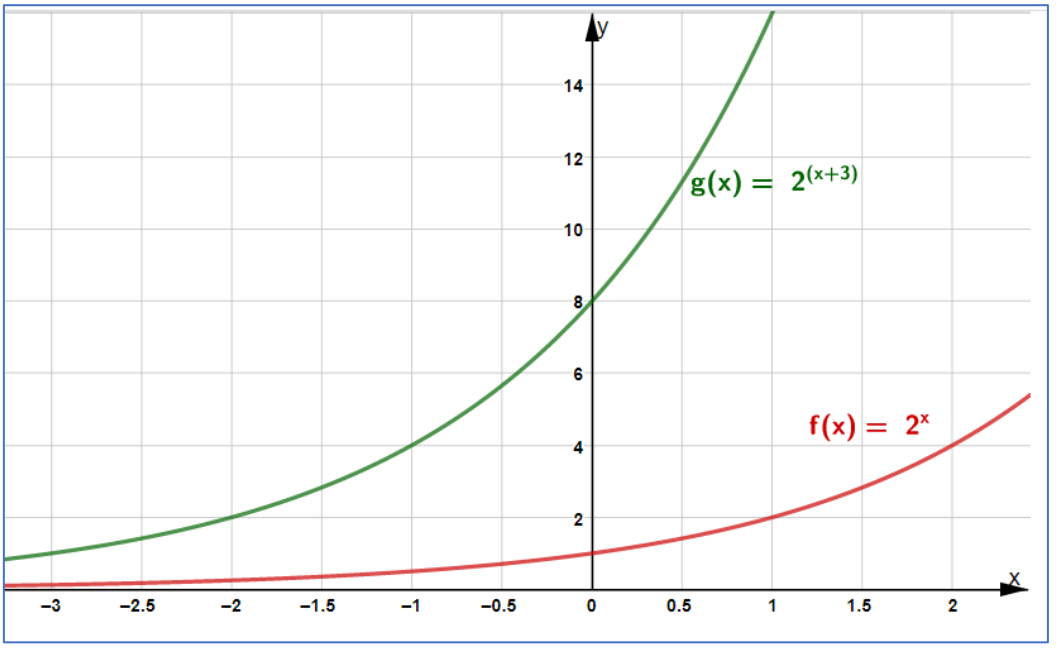
Ou acesse o link: https://www.geogebra.org/classic/fgvrserj

Agora vamos relembrar o gráfico da função exponencial, e tomaremos como exemplo a função $f(x) = 2^{(x+3)}$, que será construído a partir do gráfico de $y= 2^x$, deslocado para a esquerda na direção do eixo x. O gráfico de $y= 2^{(x+3)}$ é como se fosse de $y =2^m$, sendo $m = x + 3$. É como se o eixo **y** se deslocasse horizontalmente, de tal forma que o antigo ponto em que $x = 0$ coincidisse com o novo ponto em que $x = –3$ (ou seja $m = 0$).

ATIVIDADE 4

Sabendo-se disto, esboce o gráfico, no plano cartesiano, da situação proposta anteriormente.

(Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para esboçar o gráfico solicitado)



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Atenção, Professor! Facilite ao aluno o acesso ao QR CODE para que eles possam variar o valor entre 0 e 3 positivo por meio do controle no alto da tela e analisa as diferenças nos gráficos das duas funções.

Ou pelo link a seguir:

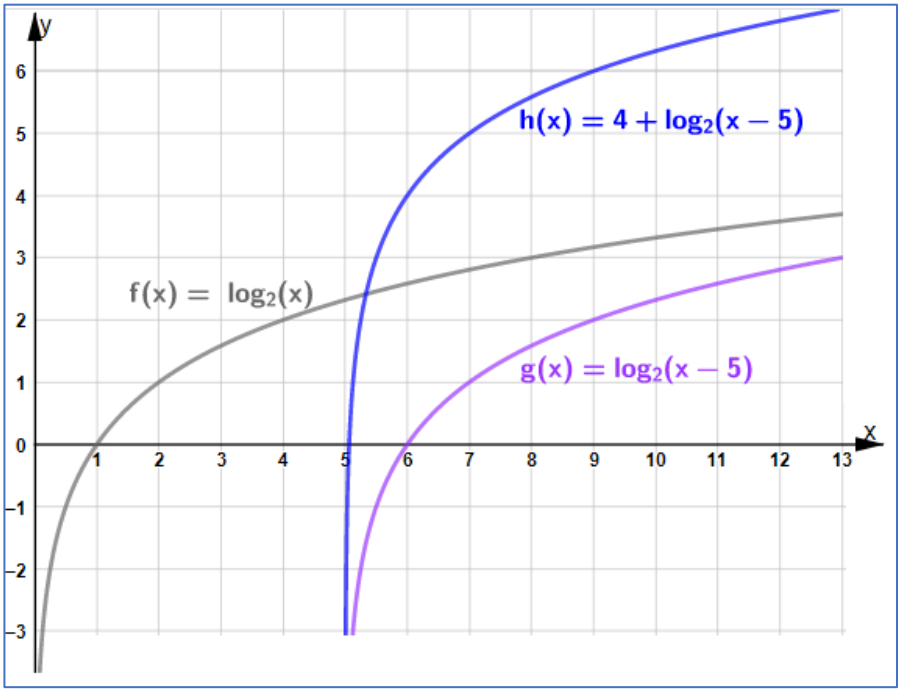
https://www.geogebra.org/classic/nxnmfqbb

No caso das funções logarítmicas, vamos estudar a função $y= 4 + \log_2(x - 5)$, podemos imaginar o gráfico de $y = \log_2 x$ deslocado 5 unidades para a direita, como se estivéssemos construindo o gráfico de $y = \log_2 m$, sendo $m = x - 5$

ATIVIDADE 5

Faça o esboço da situação descrita para obter o gráfico de $y= 4 + \log_2(x - 5)$.

(Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para esboçar o gráfico solicitado)



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Atenção, professor! Facilite aos alunos o acesso ao QR CODE para que eles possam variar os valores de a e b na função: $y = a + \log_2(x - b)$, por meio dos controles deslizantes no alto da tela e analisar as diferenças nos gráficos das funções.

Ou pelo link:

https://www.geogebra.org/classic/nbqcsm69

Vamos agora pensar no gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Para construir o gráfico de f(x), podemos começar com o de $y = x^2$. Na sequência construímos o de $y = x^2 + 1$, deslocando uma unidade para cima o gráfico de $y = x^2$, na direção do eixo **y**. A partir daí, para obter o gráfico de f(x), representamos os pontos (x; y) de modo que o valor de **y** seja o inverso de $x^2 + 1$, para cada valor de **x**.

É importante notar que:

- no ponto onde $x = 0$, $x^2 + 1$ vale 1 e o inverso de x^2+1 também é igual a 1;
- em todos os outros pontos, x^2+1 é positivo e maior que 1; logo seu inverso é positivo e menor que 1;
- assim, o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ situa-se sempre acima do eixo x, aproximando-se mais e mais dele, a medida que o valor de x aumenta, pois quanto maior for o valor de x^2+1, menor será o valor de seu inverso.

Resumindo, na construção do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, podemos observar os seguintes passos:

- construir o gráfico de $y = x^2$;
- construir o gráfico de $y = x^2+1$;
- construir o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

ATIVIDADE 6

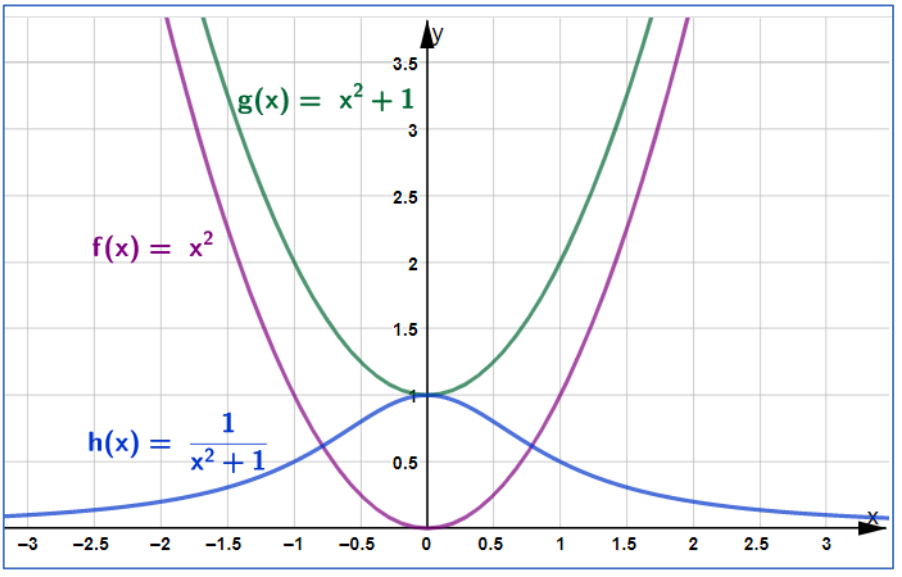
Faça o esboço da situação descrita para traçar o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$,

(Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para esboçar o gráfico solicitado)

Uma sugestão de resolução, seria a elaboração de uma tabela contendo as funções descritas anteriores e alguns valores para x, conforme segue:

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2+1$	$h(x) = \frac{1}{x^2+1}$
–2	4	5	$\frac{1}{5}$
–1	1	2	$\frac{1}{2}$
0	0	1	1
1	1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	5	$\frac{1}{5}$

Então, o esboço das funções apresentadas na tabela, será:



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Para o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, podemos tomar como pontos de referências os gráficos de $y = x^2$ e $y = x^2 - 1$ em seguida representar os pontos com abscissa **x** e ordenada o inverso de $x^2 - 1$.

É importante notar que:

- quando $x^2 - 1 = 0$, ou seja, quando temos $x = 1$ ou $x = -1$, então a função f(x) não está definida;
- quando **x** assume valores próximos de 1 ou de –1,os valores absolutos dos inversos tornam-se muito grandes. Se **x** se aproxima de 1 por valores maiores do que 1, os inversos tornam-se muito grandes (positivos); por outro lado, se **x** se aproxima de 1 por valores menores do que 1, os inversos tornam-se muito grandes em valor absoluto, mas negativos. Algo similar ocorre quando **x** se aproxima de –1.

ATIVIDADE 7

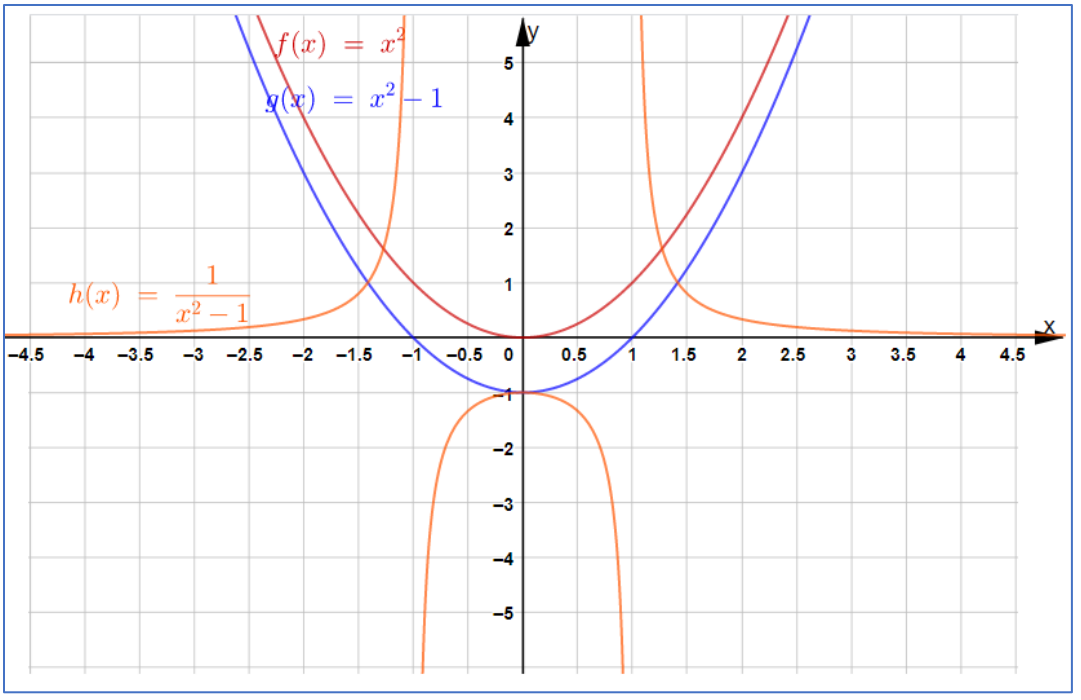
Sabendo-se disto, faça o esboço da situação descrita para traçar o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

(Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para esboçar o gráfico solicitado)

Uma sugestão de resolução, seria a elaboração de uma tabela, contendo as funções descritas anteriores e alguns valores para x, conforme segue:

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 - 1$	$h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$
–2	4	3	$\frac{1}{3}$
–0,5	0,25	–0,75	$-\frac{4}{3}$
0	0	–1	–1
0,5	0,25	–0,75	$-\frac{4}{3}$
2	4	3	$\frac{1}{3}$

Então, o esboço das funções apresentadas na tabela, será:



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Para o gráfico de f(x) = $\frac{1}{x}$, podemos esboçar primeiramente o gráfico de y = x e representar, para cada valor de **x**, a ordenada **y**, que é o inverso de **x**.

É importante notar que:

- quando x = 0, não existe o inverso de **x**, ou seja, a função f(x) não está definida;
- quanto mais próximo de 0 é o valor de **x**, maior é o valor absoluto do inverso de **x**, sendo que os valores de **x** positivos têm inversos positivos e os valores de **x** negativos têm inversos negativos;
- quanto mais próximo de 0 é o valor de **x**, maior é o valor absoluto do inverso de **x**, sendo que os valores de **x** positivos têm inversos positivos e os valores de **x** negativos têm inversos negativos;

ATIVIDADE 8

Faça o esboço da situação descrita para traçar o gráfico de f(x) = $\frac{1}{x}$.

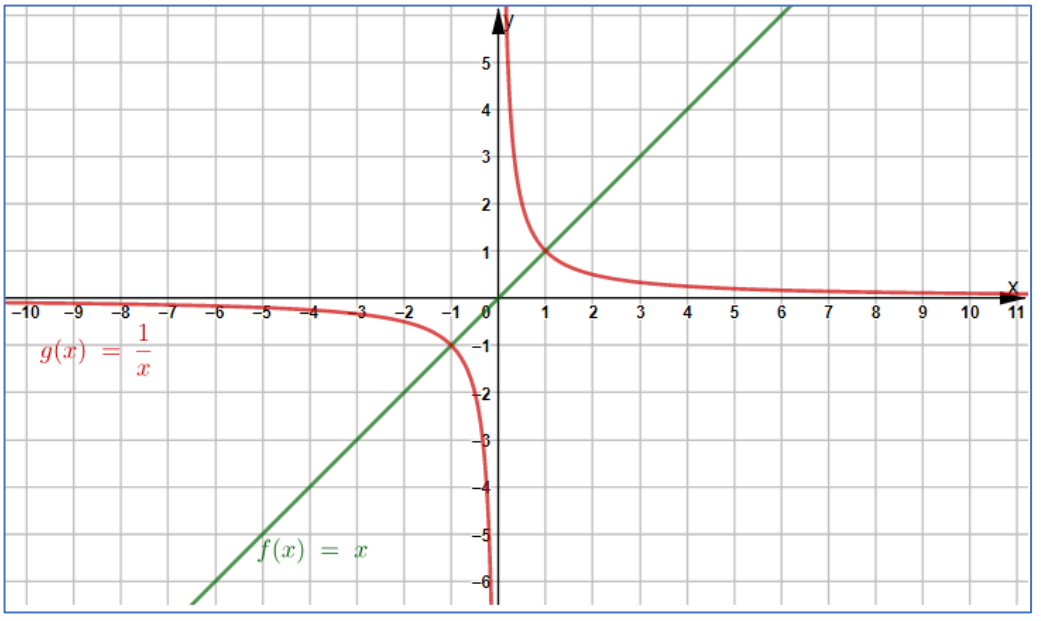
(Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado para esboçar o gráfico solicitado).

Uma sugestão de resolução, seria a elaboração de uma tabela, contendo as funções descritas anteriores e alguns valores para x, conforme segue:

x	y = x	y = $\frac{1}{x}$
–2	–2	$-\frac{1}{2}$
–0,5	–0,5	–2
–1	–1	–1
0,5	0,5	2
1	1	1
2	2	$\frac{1}{2}$

Fonte: Tabela elaborada pelos autores

Então, o esboço das funções apresentadas na tabela, será:



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

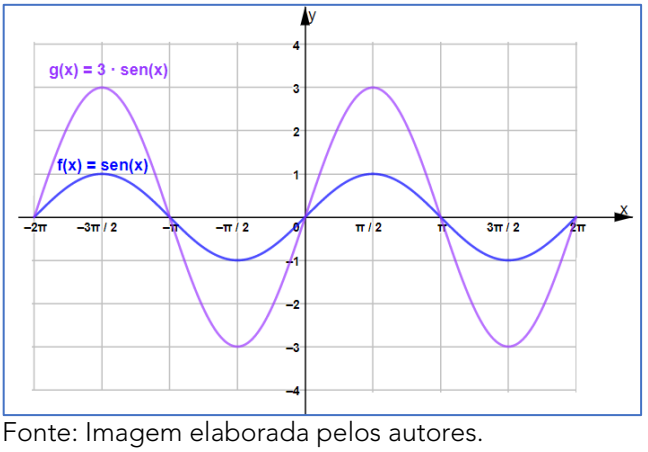
ATIVIDADE 9

O gráfico de f(x) = 3 sen x é análogo ao de y = sen x, com a amplitude aumentando de 1 para 3 unidades, ou seja, os valores de f(x) oscilarão entre +3 e –3. Faça o esboço desse gráfico no plano a seguir.

Uma sugestão de resolução, seria a elaboração de uma tabela, contendo as funções descritas anteriores e alguns valores para x, conforme segue:

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x) = sen (x)	0	1	0	–1	0	1	0	–1	0
g(x) =3 · sen (x)	0	3	0	–3	0	3	0	–3	0

Fonte: Tabela elaborada pelos autores



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

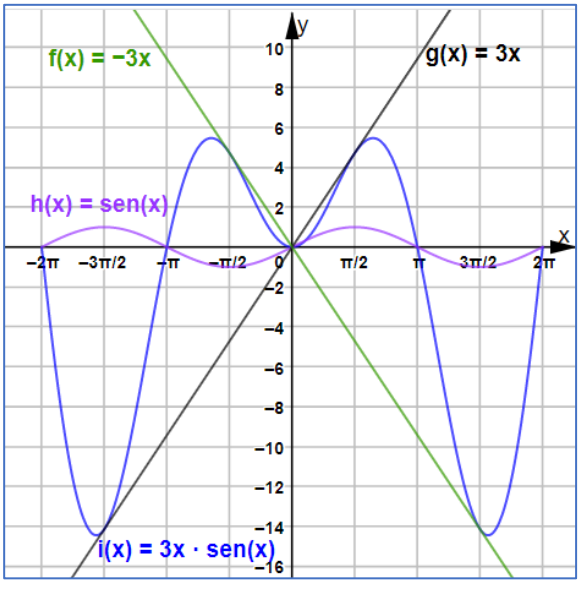
Atenção, professor! Facilite aos aluno o acesso ao QR CODE para que eles possam variar o valor entre -4 e 4 positivo por meio do controle no alto da tela e analisar as diferenças nos gráficos das duas funções.

Ou pelo link:

https://www.geogebra.org/classic/vexsbtny

ATIVIDADE 10

Para construir o gráfico de f(x) = 3x · sen x, basta imaginar o gráfico de y = A · sen x, sendo que o valor de A varia de acordo com x segundo a reta y = 3x.. Assim o gráfico oscilará entre as retas y = 3x e y = –3x. Faça o esboço desse gráfico no plano a seguir.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Atenção, professor! Facilite aos alunos o acesso ao QR CODE para que eles possam variar o valor entre -4 e 4 positivo por meio do controle no alto da tela e analisar as diferenças nos gráficos das duas funções.

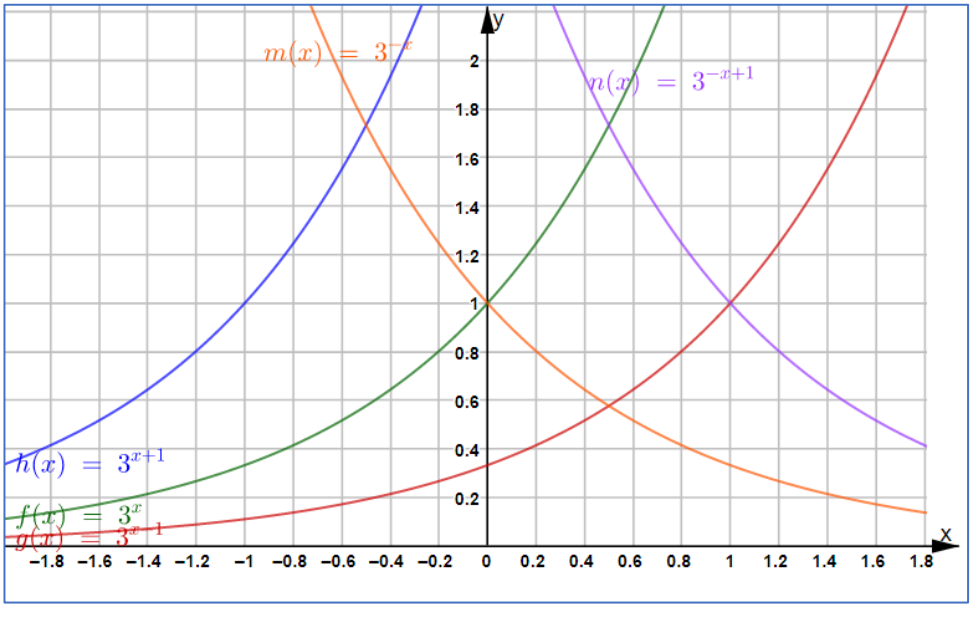
Ou pelo link:

https://www.geogebra.org/classic/f5acrz3g

ATIVIDADE 11

Esboce no mesmo sistema de coordenadas, os gráficos das funções indicadas a seguir :

a) $f(x) = 3^x$ b) $g(x) = 3^{x-1}$ c) $h(x) = 3^{x+1}$ d) $m(x) = 3^{-x}$ e) $n(x) = 3^{-x+1}$

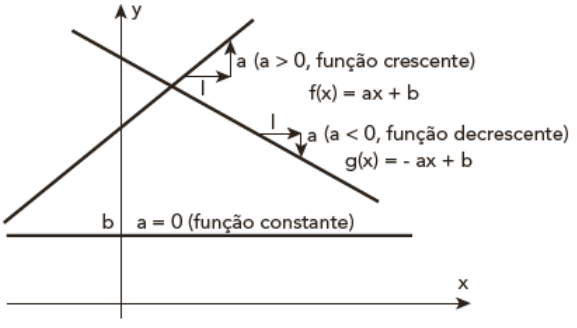


Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Disponibilize aos alunos acesso ao QR CODE para que eles possam variar (por meio dos controles deslizantes) os parâmetros da função e analisar os efeitos na sua representação gráfica.

Tema 3: Crescimento e decrescimento de funções.

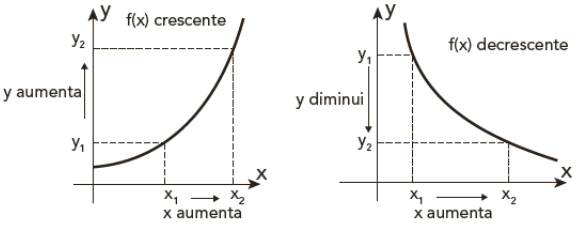
Na 1ª série do Ensino Médio, você já deve ter estudado que as funções polinomiais de 1° grau, expressas na forma f(x) = ax +b, são crescentes (a > 0) ou decrescentes (a < 0), sendo que o coeficiente **a** representa a variação em f(x), quando **x** aumenta em 1 unidade a partir de qualquer valor inicial. O valor de **a** é chamado taxa de variação unitária de f(x), ou somente taxa de variação de f(x). Naturalmente, se a = 0, ou seja se a taxa de variação é zero, então a função f(x) é constante: f(x) = b



taxa de variação = a = variação de f(x) por unidade a mais de x
a = f(x + 1) = f(x) = constante

Fonte: Imagem elaborada pelos autores

De modo geral, dizemos que uma função f(x) é crescente nos intervalos em que ocorre o seguinte: se os valores de **x** crescem, então os correspondentes valores de f(x) também crescem. Dizemos que f(x) é decrescente nos intervalos em que ocorre o seguinte: se os valores de **x** crescem, então os correspondentes valores de f(x) decrescem. O significado do crescimento ou do decrescimento do gráfico de f(x) é bastante expressivo:



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

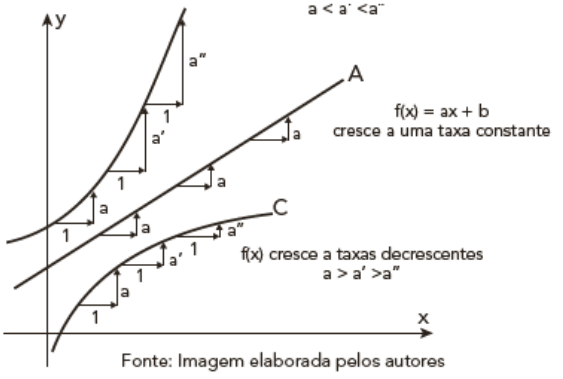
Consideremos uma função que não é de 1° grau, ou seja, cujo gráfico não é uma reta. Ao observá-lo, constatamos que a taxa de variação unitária de f(x), ou seja, a variação de f(x) por unidade a mais de x, não é mais constate, isto é, a diferença f(x + 1) – f(x) passa a depender do valor de x a partir do qual ela é calculada.

Por exemplo:

- se f(x) = 5x + 7, então f(x + 1) – f(x) = 5(x + 1) + 7 – (5x + 7) = 5, ou seja, a taxa de variação unitária de f(x) = 5x + 7 é constante e igual a 5, exatamente o valor de **a** na função a = 5;

- no entanto, se f(x) = $5x^2$ + 7, então f(x + 1) – f(x) = $5(x + 1)^2 + 7 – (5x^2 + 7)$ = 10x + 5, ou seja, a taxa de variação unitária de f(x) = $5x^2$ + 7 é igual a 10x + 5; portanto, a taxa varia com o valor de **x** para o ponto considerado.

No que segue, chamaremos de taxa de variação unitária de uma função, para cada valor de x, o valor da diferença f(x + 1) – f(x).



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Quando uma função f(x) cresce a taxas crescentes, seu gráfico tem a concavidade voltada para cima; quando ela cresce a taxas decrescentes, seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

Basicamente, em cada intervalo considerado, estas são as três formas de crescimento:

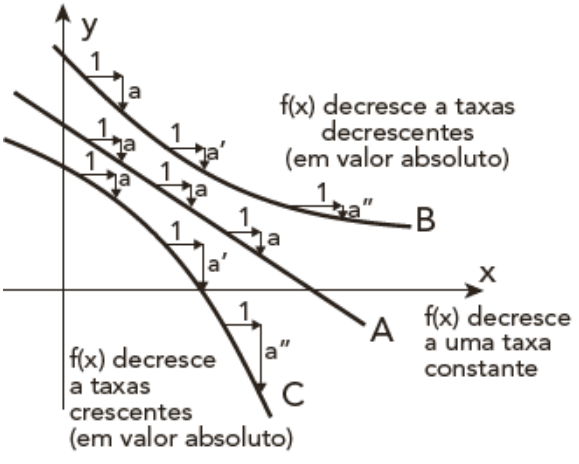
- crescer linearmente, com taxa de variação constante;

- crescer cada vez mais rapidamente, ou seja, com taxas de variação crescentes, o que faz com que o gráfico resulte encurvado para cima;

De forma análoga, em dado intervalo, uma função pode decrescer de três modos distintos:

- decrescer linearmente, com taxa de variação constante;
- decrescer cada vez mais rapidamente, ou seja, com taxas de variação crescentes em valor absoluto (as taxas são negativas);
- decrescer cada vez mais lentamente, ou seja, com taxas de variação decrescentes em valor absoluto (as taxas são negativas).

O gráfico a seguir ilustra as três formas de decrescimento:



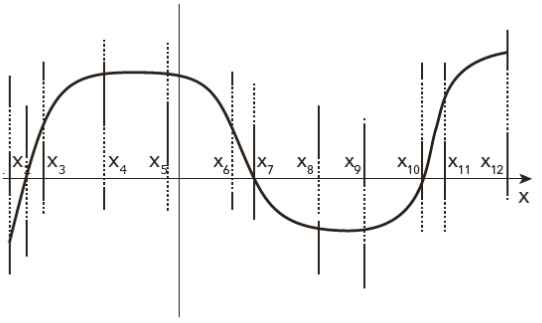
Fonte: Imagem elaborada pelos autores

Resumindo:

Quando uma função decresce a taxas decrescentes, seu gráfico tem a concavidade voltada para cima; quando ela decresce a taxas crescentes, seu gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

ATIVIDADE 1

No gráfico a seguir, identifique os intervalos nos quais.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

a) a função f(x) é positiva;

Temos f(x) > 0 para x entre x_2 e x_7 e para x entre x_{10} e x_{12}.

b) a função f(x) é negativa;

Temos f(x) < 0 para x entre x_1 e x_2 e para x entre x_7 e x_{10}.

c) a função f(x) é constante;

A função f(x) é constante para valores de x entre x_4 e x_5 e para x entre x_8 e x_9

d) a função f(x) é crescente;

A função f(x) é crescente para x entre x_1 e x_4 e para x entre x_9 e x_{12}.

e) a função f(x) é decrescente;

A função f(x) é decrescente para x entre x_5 e x_8 .

f) a função f(x) cresce a taxa constante;

A função f(x) cresce a taxa constante nos intervalos em que o gráfico é um segmento de reta ascendente, ou seja, para x entre x_1 e x_3 e para x entre x_{10} e x_{11}.

g) a função f(x) decresce a taxa constante;

A função f(x) decresce a taxa constante no intervalo em que o gráfico é um segmento de reta descendente, ou seja, para x entre x_6 e x_7 .

h) a função f(x) cresce a taxas crescentes;

A função f(x) cresce a taxas crescentes no intervalo em que é crescente e o gráfico é

encurvado para cima, ou seja, para x entre x_9 e x_{10}.

i) a função f(x) cresce a taxas decrescentes;

A função f(x) cresce a taxas decrescentes nos intervalos em que é crescente, mas o gráfico está encurvado para baixo, ou seja, para x entre x_3 e x_4 e para x entre x_{11} e x_{12}.

j) a função f(x) decresce a taxas crescentes;

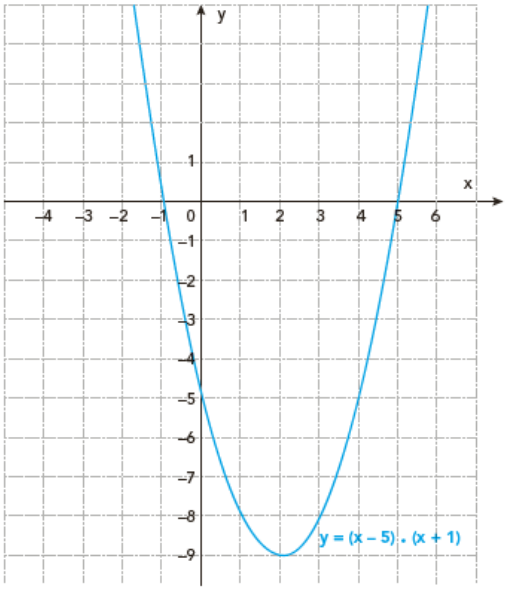
A função f(x) decresce a taxas crescentes no intervalo em que é decrescente e o gráfico é encurvado para baixo, ou seja, para x entre x_5 e x_6.

k) a função f(x) decresce a taxas decrescentes.

A função f(x) decresce a taxas decrescentes no intervalo em que é decrescente e o gráfico é encurvado para cima, ou seja, para x entre x_7 e x_8 .

ATIVIDADE 2

Considere o gráfico da função polinomial de 2º grau f(x)=(x – 5) · (x + 1) indicado a seguir.



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

a) Identifique os intervalos em que f(x) > 0 e os intervalos em que f(x) < 0

f(x) > 0 para x > 5, ou então para x < –1;

f(x) < 0 para x entre –1 e 5, isto é, – 1 < x < 5;

b) Identifique os intervalos em que f(x) é crescente e os intervalos em que é decrescente.

f(x) é crescente para x > 2;

f(x) é decrescente para x < 2;

c) Qualifique o crescimento e o decrescimento de f(x), informando se eles ocorrem a taxas crescentes ou a taxas decrescentes.

para x > 2, f(x) cresce a taxas crescentes (concavidade para cima);

para x < 2, f(x) decresce a taxas decrescentes (concavidade para cima).

ATIVIDADE 3

Construa os gráficos das funções a seguir em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado.

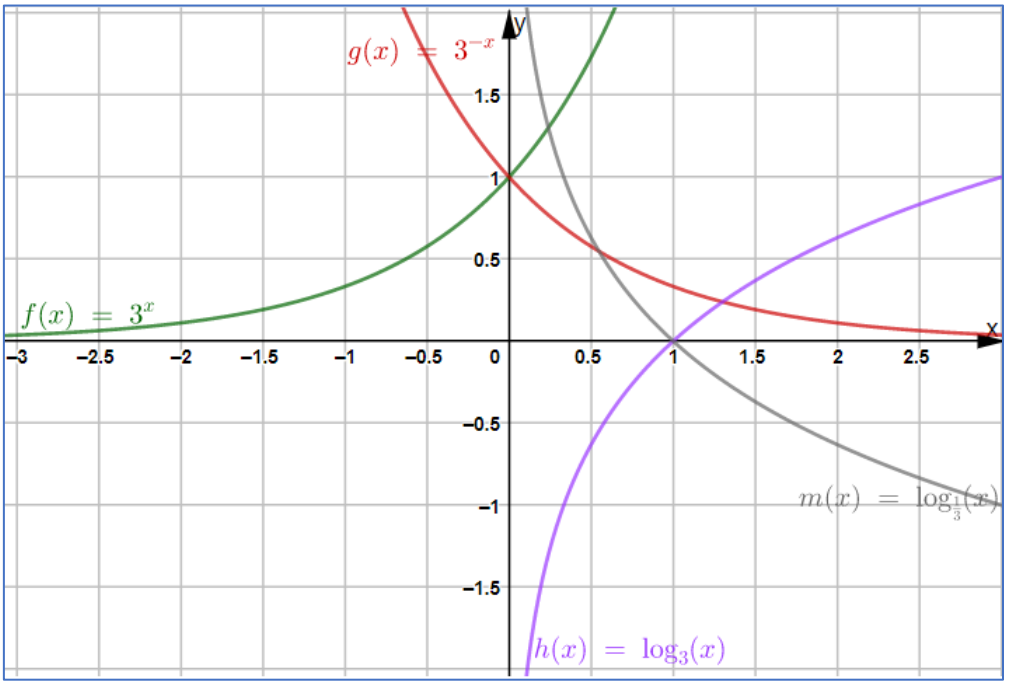
a) $f(x) = 3^x$

b) $g(x) = 3^{-x}$

c) $h(x) = \log_3 x$

d) $m(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Identifique, em cada caso, se a função é crescente ou decrescente, bem como se o crescimento ocorre a taxas crescentes ou a taxas decrescentes



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

a) f(x) cresce a taxas crescentes;
b) g(x) decresce a taxas decrescentes;
c) h(x) cresce a taxas decrescentes;
d) m(x) decresce a taxas decrescentes

ATIVIDADE 4

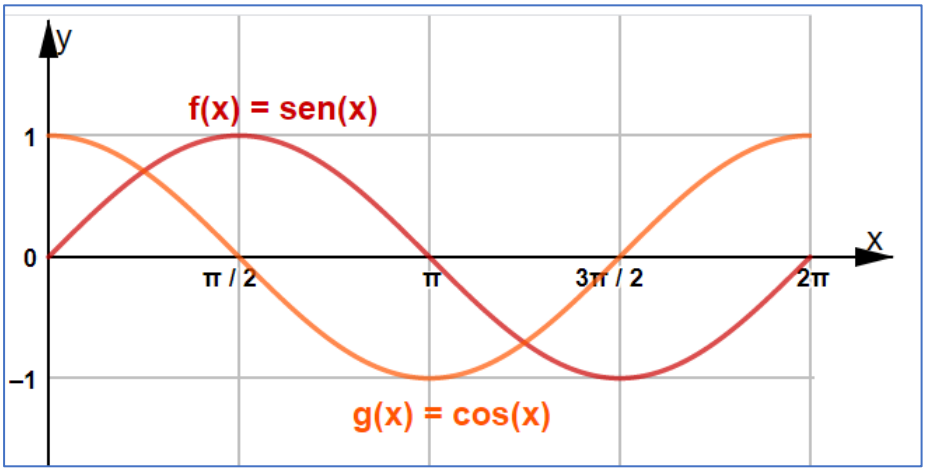
No mesmo sistema de coordenadas, construa o gráfico das funções f(x) = sen x e g(x) = cos x entre x=0 e x= 2π

Utilize uma folha de papel quadriculado ou milimetrado.

a) No intervalo considerado, identifique os trechos em que f(x) e g(x) são crescentes e os trechos em que são decrescentes.

b) Compare os gráficos de f(x) e de g(x), observando que os valores máximos de uma das funções ocorrem nos pontos em que a outra se anula e vice-versa.

c) Compare os gráficos de f(x) e de g(x), verificando que a concavidade de f(x) muda (de gráfico encurvado para baixo para gráfico encurvado para cima ou vice-versa) nos pontos em que g(x) assume valores extremos (máximos ou mínimos) e vice-versa em relação a g(x).



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

a)

f(x) é crescente para x entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ e para x entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π;

f(x) é decrescente para x entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$;

g(x) é crescente para x entre π e 2π;

g(x) é decrescente para x entre 0 e π .

b)

Notamos que o valor máximo de f(x) ocorre no ponto $x = \frac{\pi}{2}$, e o valor mínimo ocorre no ponto $x = \frac{3\pi}{2}$; nesses pontos, temos g(x) = 0.

Analogamente, o valor máximo de g(x) ocorre nos pontos x = 0 e x = 2π e o valor mínimo, no ponto x = π ; nesses pontos, temos f(x) = 0.

c)

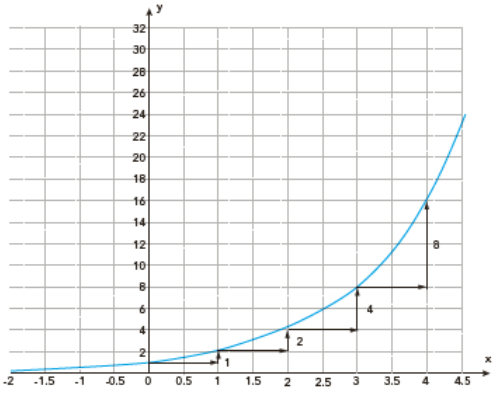
Notamos que o gráfico de f(x) passa de voltado para baixo a voltado para cima no ponto x = π , em que g(x) assume o valor mínimo. Analogamente, o gráfico de g(x) passa de voltado para baixo a voltado para cima no ponto $x = \frac{\pi}{2}$, que é de máximo para f(x), e volta a ficar voltado para baixo no ponto $x = \frac{3\pi}{2}$, que é de mínimo para f(x).

Tema 4: Crescimento ou decrescimento exponencial o número e

Durante o curso, você já deve ter resolvido vários problemas que envolvem a função exponencial, $f(x) = a^x$, com a > 0 e a ≠1. Neste momento, destacaremos uma propriedade característica, que pode ter passado despercebida.

Para exemplificar, vamos considerar a função $f(x) = 2^x$ e seu gráfico. Iniciaremos o cálculo de f(x), com valores inteiros de x, começando com x = 0.

O gráfico da função, será representado da seguinte maneira:



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

x	2^x	f(x + 1) – f(x)
0	1	1
1	2	2
2	4	4
3	8	8
4	16	16
5	32	32
6	64	64
7	128	...

Notamos que quando **x** aumenta 1 unidade, a partir de x =0, a variação em f(x) é igual, sucessivamente, a 1, 2, 4, 8, 16,..., ou seja, a taxa de variação unitária, que é igual a f(x+1) – f(x), é igual ao valor de f(x).

f(1) – f(0) = f(0) f(3) – f(2) = f(2) f(5) – f(4) = f(4)

f(2) – f(1) = f(1) f(4) – f(3) = f(3) e assim por diante.

A taxa de variação unitária de $f(x) = 2^x$ é portanto, igual a f(x).

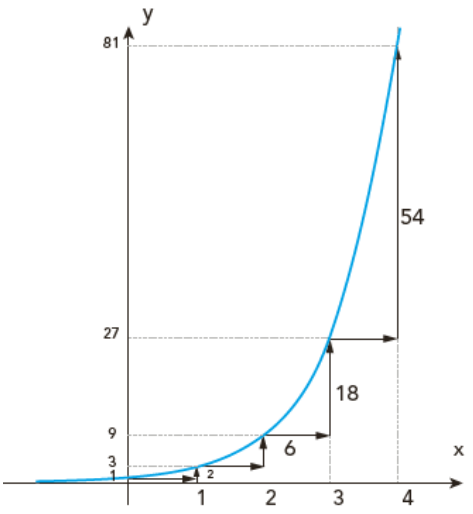
Chamaremos essa taxa de $f_1(x)$. Calculando $f_1(x)$ para um valor qualquer de **x**, temos, de fato:

$$f_1(x) = f(x + 1) – f(x) = 2^{x+1} – 2^x =$$

$$= 2^x \cdot (2 – 1) = 2^x$$

ATIVIDADE 1

Analogamente ao que foi feito antes para $f(x) = 2^x$, calcule a taxa de variação unitária para $f(x) = 3^x$. Para isso, inicialmente complete a tabela a seguir:



Fonte: Imagem elaborada pelo autor

x	3^x	f(x+1) – f(x)
0	1	2
1	3	6
2	9	18
3	27	54
4	81	162
5	243	486
6	729	1458
7	2187	4374

Notamos que, quando **x** aumenta 1 unidade, a partir de x = 0), a variação em f(x) é igual, sucessivamente, a 2, 6, 8, 18, 54, 162, ..., ou seja, a taxa de variação unitária, que é igual a f(x + 1) – f(x), é igual ao dobro do valor de f(x).

f(1) – f(0) = 2f(0) = 2 f(2) – f(1) = 2f(1) = 6

f(3) – f(2) = 2f(2) = 18 f(4) – f(3) = 2f(3) = 54

f(5) – f(4) = 2F(4) = 162 e assim por diante.

A taxa de variação unitária de f(x) = 3 é, portanto, igual a 2f(x). Chamando anteriormente, a taxa unitária de f_1 (x) e calculando seu valor para um x qualquer, temos, de fato:

$f_1(x) = f(x+1) - f(x) = 3^{x+1} - 3^x = 3^x \cdot (3-1) = 2 \cdot 3^x$.

Quadro-resumo
De modo geral, calculando a taxa unitária $f_1(x)$ para função $f(x) = a^x$, obtemos:
$f_1(x) = f(x+1) - f(x) = a^{x+1} - a^x =$
$= a^x \cdot (a-1)$, ou seja, o valor de $f_1(x)$ é diretamente proporcional ao valor de $f(x)$.

ATIVIDADE 2

Uma população **p** de bactérias aumenta com uma rapidez diretamente proporcional ao seu valor, em cada instante, ou seja, quanto maior é o valor de **p**, mais rapidamente a população aumenta. Partindo de um valor P0 = 1 000, observa-se que a população dobra a cada hora, ou seja, o valor de **p** pode ser expresso pela função:

$$P = f(t) = 1\,000 \cdot 2^t \text{ (t em horas)}$$

a) Calcule a taxa de variação unitária nos instantes t= 1h e t = 2h.

$f_1(1) = f(2) - f(1) = 4000 - 2000 = 2000$

$f_1(2) = f(3) - f(2) = 8000 - 4000 = 4000$

b) Mostre que o aumento no valor de **P** entre os instantes t = 6h e t = 7h é igual ao valor da população para t = 6h.

O aumento citado é igual a:

$f(7) - f(6) = 1000 \cdot (2^7 - 2^6) = 1000 \cdot 2^6 (2-1) =$

$= 1000 \cdot 2^6 = f(6)$, ou seja, a taxa de variação unitária para t=6 é igual ao valor de f(6).

ATIVIDADE 3

A população N de cães, de certa região, cresce exponencialmente de acordo com a expressão $N = f(t) = 600 \cdot 10^t$, sendo **t** em décadas.

a) Calcule a taxa de variação unitária para t = 2 décadas.

$f_1(2) = f(3) - f(2) = 600 \cdot 10^3 - 600 \cdot 10^2 = 540000$

b) Mostre que o aumento no valor de **P** entre os instantes t = 7 e t = 8 é igual a 9 vezes o valor da população para t = 7.

O aumento pedido é igual a

$f(8) - f(7) = 600 \cdot (10^8 - 10^7) =$

$= 600 \cdot 10^7 \cdot (10-1) = 600 \cdot 10^7 \cdot 9 = 9 \cdot f(7)$, ou seja, a taxa de variação unitária para t = 7 é igual a 9 vezes o valor de f(7).

Fenômenos naturais e crescimento exponencial – o nascimento do número e.

Você sabia que os números mais frequentemente utilizados, como base de um sistema de logaritmo, são 10 e o número e = 2,71828....

Este número não é resultado de uma fração decimal periódica, no entanto ele é irracional, ou seja, ele não pode ser obtido por meio do quociente de dois inteiros. (e = p/q)

Então por que este número é tão importante?

A resposta para a indagação proposta está na variação proporcional das grandezas.

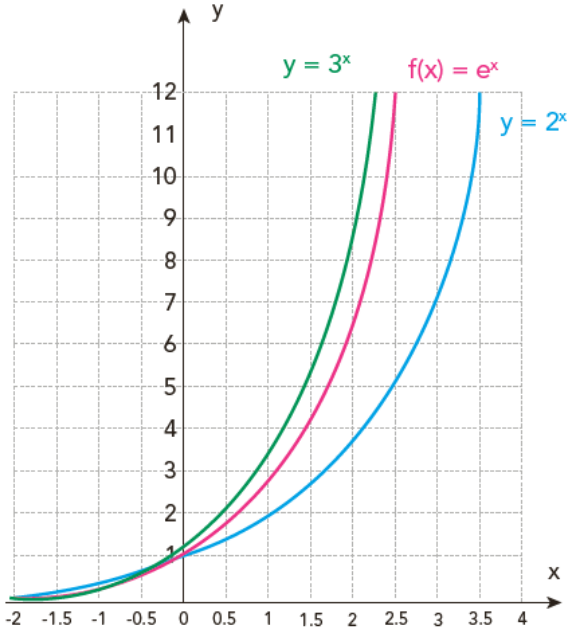
Um tipo de variação mais simples e comumente encontrada, consiste no crescimento (ou decrescimento) da grandeza em cada instante, é proporcional ao valor da grandeza naquele instante. Este tipo de variação ocorre, por exemplo, em questões de juros compostos, crescimento populacional (pessoas ou bactérias), desintegração radioativa etc.

Em todos os fenômenos dessa natureza, o número e aparece de modo natural e insubstituível, conforme estudaremos nas atividades a serem propostas.

Assim, reafirmamos: sempre que tentamos descrever matematicamente, o modo como variam as funções presentes em fenômenos naturais de diferentes tipos ou financeiras, que têm em comum o fato de que envolvem grandezas que crescem ou decrescem com uma rapidez é diretamente proporcional ao valor da grandeza em cada instante, naturalmente encontramos o número e.

Um valor aproximado de e pode ser obtido a partir da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$: quanto maior o valor de **n**, mais próximos estaremos do número e. Para todos os fins práticos e=2,71828, ou, com uma aproximação melhor, e= 2,71828182459045.

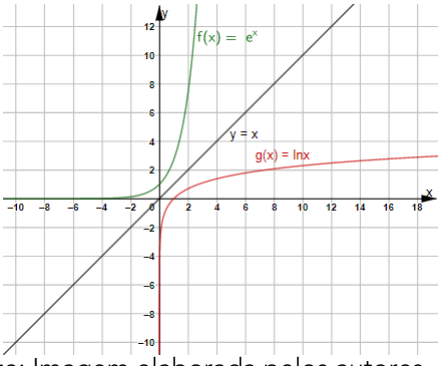
Em consequência, em situações concretas que descrevem fenômenos naturais que apresentem crescimento ou decrescimento exponencial, a função $f(x) = e^x$, cujo gráfico apresentamos a seguir, tem uma presença marcante.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

A função $g(x) = \log_e x$ costuma ser representada por $g(x) = \ln x$, uma abreviatura para "logaritmo natural de **x**". Os gráficos de $f(x) = e^x$ e de sua inversa, $g(x) = \ln x$, são representados a seguir.

É interessante notar que, como funções inversas, a cada ponto (a; b) do gráfico de f(x) corresponde um ponto (b; a) do gráfico de g(x), ou seja, os gráficos são simétricos em relação à reta y = x.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Professor(a), quando estiver desenvolvendo este tópico, esboce o gráfico acima na lousa e peça aos estudantes que substituam o gráfico que consta no caderno pelo atual.

ATIVIDADE 3

Um investidor aplica uma quantia de R$ 1 000,00 a uma taxa de juros de 12% ao ano. Calcule o valor do **capital investido ao final do primeiro ano**, supondo que:

a) os juros serão incorporados ao capital apenas ao final de cada ano (juros simples);

Se os juros são simples, então o capital C_1 ao final do primeiro ano será 12% maior, ou seja, $C_1 = 1{,}12 \cdot C_0$, o que implica $C_1 = 1{,}12 \cdot 1000 =$

$= 1120$ reais.

b) os juros serão distribuídos uniformemente, sendo incorporados ao capital ao final de cada mês;

Se os juros são distribuídos (1% ao mês) e incorporados ao capital mês a mês, temos:

ao final do 1º mês: $C_{\frac{1}{12}} = 1{,}01 \cdot C_0$

ao final do 2º mês: $C_{\frac{2}{12}} = (1{,}01)^2 \cdot C_0$

de modo análogo ao final do 12º mês:

$C_1 = (1{,}01)^{12} \cdot C_0$. Ou seja:

$C_1 \cong 1{,}1268 \cdot 1000 = 1126{,}80$ reais

c) os juros serão incorporados continuamente ao capital (juros compostos) ao longo do ano. (Dado: $e^{0,12} = 1{,}1275$).

Se os juros são incorporados continuamente ao capital, temos: $C = C_0 \cdot e^{0,12t}$

Ao final do primeiro ano, ou seja, par t = 1, temos: $C_1 = C_0 \cdot e^{0,12}$, ou seja, $C_1 \cong 1{,}1275 \cdot C_0 \cong$

$\cong$ 1127,50 reais.

ATIVIDADE 4

Quando uma substância radioativa se decompõe, a rapidez com que ela se transforma é diretamente proporcional à quantidade restante, em cada momento, ou seja, seu decrescimento é exponencial. Sabendo que a massa inicial m_0 de certa substância radioativa é 60 g e se reduz à metade, a cada 4 h, determine a expressão de sua massa **m** em função do tempo **t** em horas:

a) supondo que $m(t) = m_0 \cdot 2^{bt}$, determine o valor de **b;**

Supondo $m(t) = m_0 \cdot 2^{b \cdot t}$, ou seja, $m(t) = 60 \cdot 2^{b \cdot t}$

e sabendo que, quando t = 4, temos m = 30, resulta: $30 = 60 \cdot 2^{4b}$, ou seja, $2^{4b} = \frac{1}{2}$.

Em consequência, $4b = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)$

Como $\log_2 (2) = 1$, segue que 4b = –1, pois,

$$\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 (1) - \log_2 (2) = -\log_2 (2) = -1$$

Segue que b = –0,25; então, $m(t) = 60 \cdot 2^{-0,25t}$

b) supondo que $m(t) = e^{at}$, determine o valor de **a;**

Supondo $m(t) = m_0 \cdot e^{at}$ ou seja, $m(t) = 60 \cdot e^{at}$ e sabendo que, quando t = 4, temos m = 30, resulta: $30 = 60 \cdot e^{4a}$.

Ou seja, $e^{4a} = \left(\frac{1}{2}\right)$. Em consequência, $4a = \ln \left(\frac{1}{2}\right)$.

Obtendo o valor de ln 2 em uma calculadora, obtemos $\ln 2 \cong 0{,}6932$ de onde segue que

4a $\cong$ –0,6932, ou seja, a $\cong$ –0,1733.

c) mostre que as expressões obtidas nos itens a) e b) são equivalentes;

Calculando $2^{-0,25}$, usando uma calculadora (ou uma tabela de logaritmos), obtemos 0,8409, calculando $e^{-0,1733}$, obtemos o mesmo valor, o que significa que $\left(2^{-0,25}\right)^t = \left(e^{-0,17733}\right)^t$, ou seja, as duas expressões para a função m(t) são equivalentes, respeitadas as aproximações.

d) calcule a massa restante após 8 horas;

Em qualquer uma das expressões para m(t), substituindo **t** por 8, obtemos a massa restante após 8h:

$$m(8) = 60 \cdot 2^{-0,25 \cdot 8} =$$

$$= 60 \cdot 2^{-2} = 15 \text{ g.}$$

e) após quanto tempo a massa restante será igual a 12g?

Para saber após quanto tempo a massa será reduzida a 12g, basta determinar o valor de **t** em qualquer uma das expressões:

$12 = 60 \cdot e^{-0,1733t}$, ou seja, $-0{,}1733t = \ln \left(\frac{12}{60}\right)$, isto é, $-0{,}1733t = -\ln 5$.

Recorrendo a uma calculadora (ou a uma tabela de logaritmos), obtemos $\ln 5 \cong 1{,}6094$;segue que $t \cong 9{,}29$ h, ou seja, aproximadamente 9 horas e 17 minutos.

ATIVIDADE 6

MOMENTO DIGITAL

Construção de gráficos com o auxílio de um software.

Alguns *softwares* livres, como o *Graphmatica, GeoGebra* ou o *Winplot*, podem ser utilizados para construir gráficos de funções de vários tipos.

Para aprofundar os estudos propostos, neste caderno, você poderá efetuar o *download* de alguns dos programas de geometria dinâmica, mencionados anteriormente.

Tomaremos como exemplo a utilização do *software GeoGebra*, que pode ser utilizado tanto em computadores pessoais, bem como em aparelhos móveis (*tablets* ou celulares).

Para baixar os diferentes produtos oferecidos, acesse pela internet o site do GeoGebra. Dispo- nível em https://www.geogebra.org/, acesso em 09/04/2019.

No nosso caso, sugerimos que efetuem o *download* do programa denominado *GeoGebra* Clássico, para utilizar em computadores pessoais.

O programa mencionado possui duas funcionalidades, além do usuário explorar todas as funcionalidades da Geometria Dinâmica, ele também é um plotador gráfico.

Para a utilização em aparelhos móveis sugerimos dois programas: a Calculadora gráfica e o Geometria

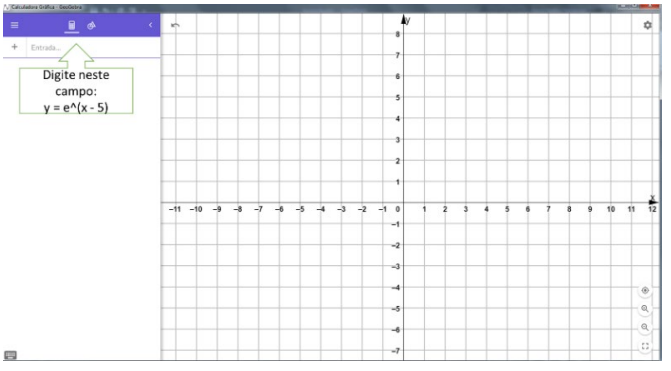
Para aparelhos móveis que utilizam o sistema Android o download, da Calculadora Gráfica, pode ser obtido por meio da leitura do seguinte QR code

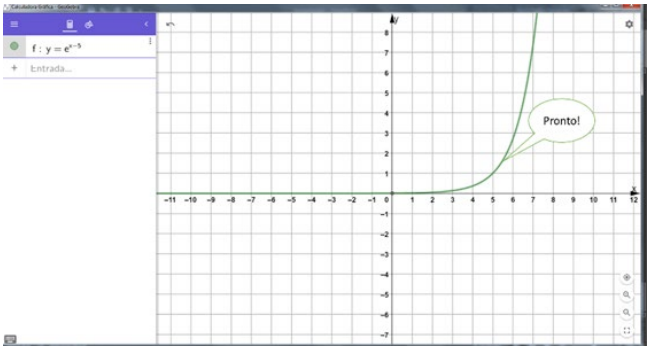
Para aparelhos que utilizam o sistema IOS o download, da Calculadora Gráfica pode ser obtido por meio da leitura do seguinte QR code.

O *GeoGebra* on-line está disponível na URL ou no QR code:

https://www.geogebra.org/graphing, acesso em 09/04/2019

Como exemplo de aplicação do *software* construiremos o gráfico de





ATIVIDADE 7

Dado as seguintes funções respondendo as alternativas a seguir:

$f(x) = e^x$ $\quad\quad$ $g(x) = e^{-x}$

$h(x) = \ln x \ (h>0)$ $\quad\quad$ $m(x) = \ln(-x) \ (x<0)$

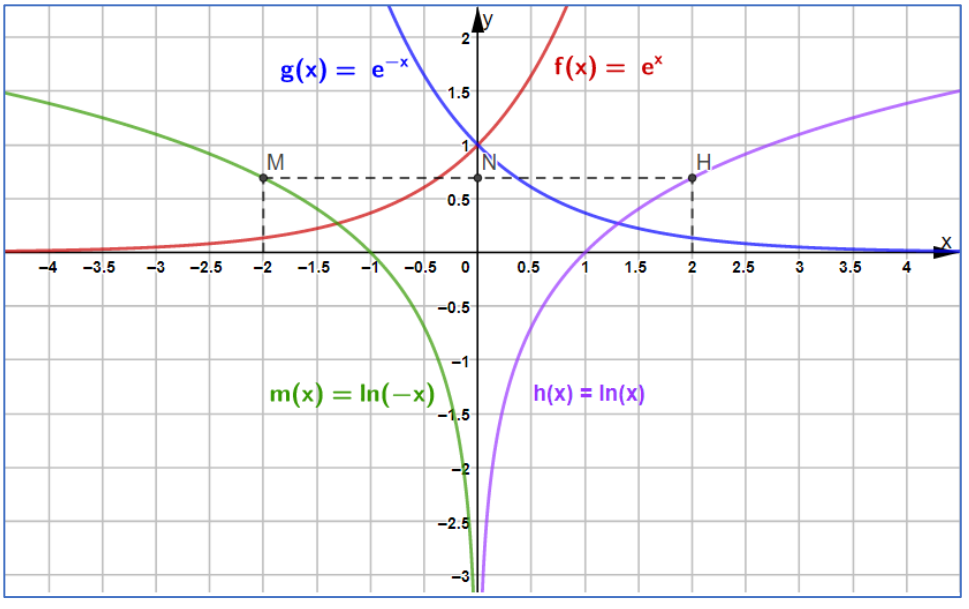
a) Qual das funções cresce a taxas crescentes?

b) Qual das funções cresce a taxas decrescentes?

c) Qual das funções decresce a taxas crescentes?

d) Qual das funções decresce a taxas decrescentes?

Prezado(a) Professor(a), solicite aos estudantes esboçar os gráficos das funções apresentadas em um mesmo sistema de eixos cartesianos.

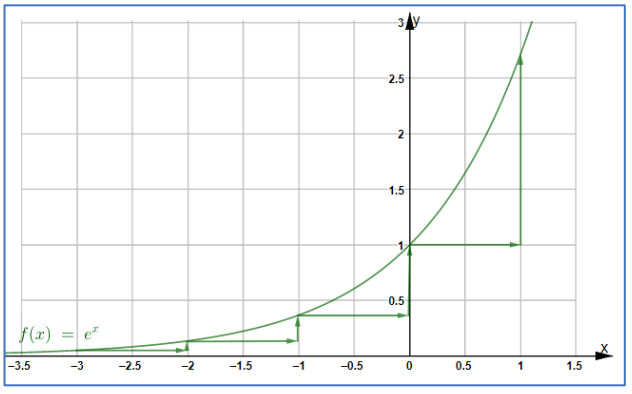


Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Os gráficos de f(x) e de g(x) são simétricos em relação ao eixo **y**, uma vez que os valores de f(x), quando trocamos **x** por (–x), coincidem com os valores de g(x). Os gráficos de m(x) e h(x) também são simétricos em relação ao eixo **y**. Notamos que, para x = –2, a função m(x) assume o mesmo valor que a função h(x) para x = 2. Naturalmente, o domínio de h(x) é o conjunto dos números reais positivos, enquanto o domínio de m(x) é o conjunto dos números reais negativos.

a) Qual das funções cresce a taxas crescentes?

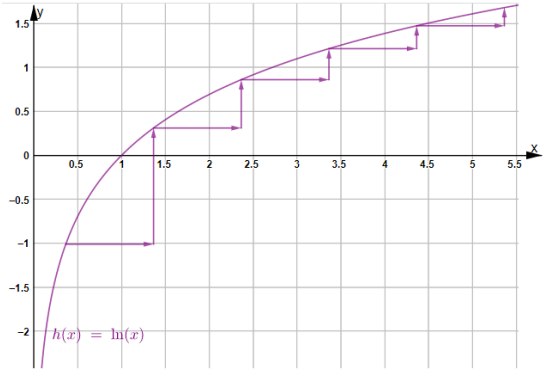
Observando os gráficos e lembrando o significado da taxa de variação unitária, notamos que ela é crescente em f(x), o que faz com que o gráfico resulte encurvado para cima; f(x) é crescente a taxas crescentes.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

b) Qual das funções cresce a taxas decrescentes?

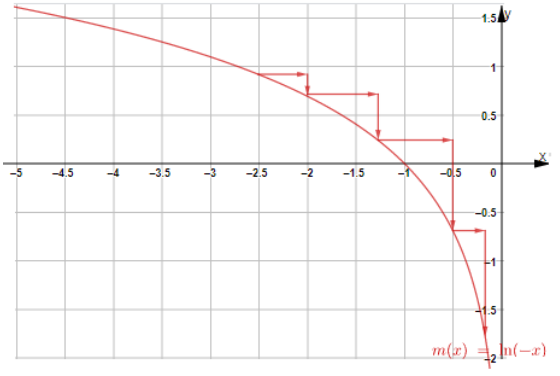
No gráfico de h(x) = lnx, notamos que a taxa de variação unitária é decrescente, o que faz com que o gráfico seja encurvado para baixo; h(x) é crescente a taxas decrescentes.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

c) Qual das funções decresce a taxas crescentes?

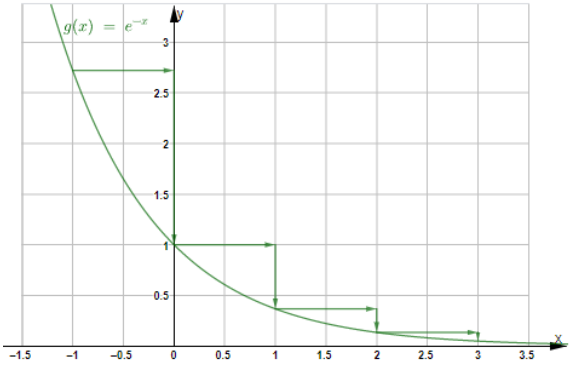
O gráfico de m(x) representa uma função decrescente, e notamos que as taxas de variação são crescentes em valor absoluto, m(x) decresce a taxas crescentes.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores

d) Qual das funções decresce a taxas decrescentes?

O gráfico de g(x) representa uma função decrescente, e notamos que as taxas de variação são decrescentes em valor absoluto; g(x) decresce a taxas decrescentes.

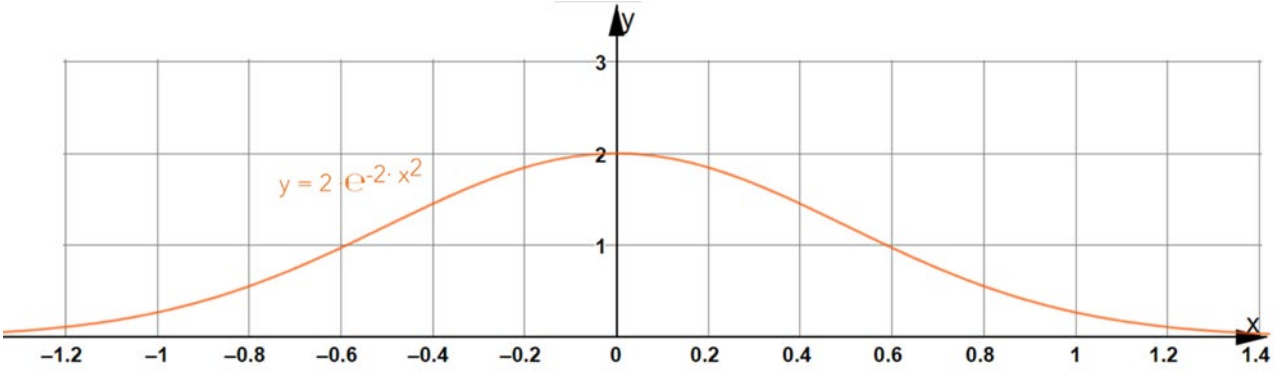


Fonte: Imagem elaborada pelos autores

ATIVIDADE 8

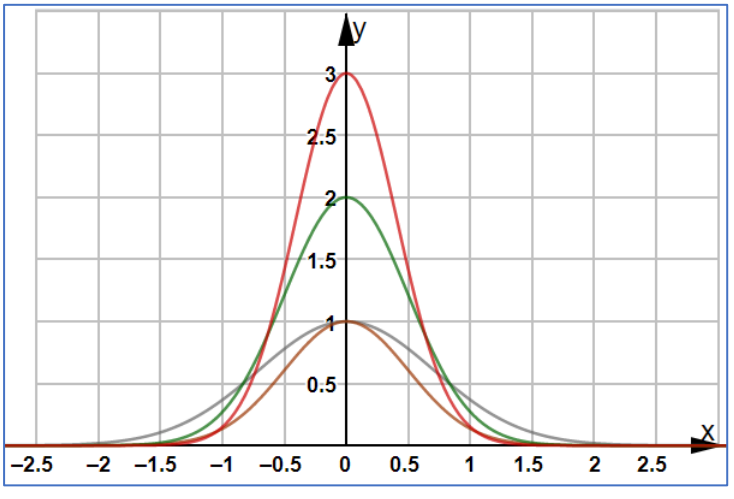
O gráfico da função f(x) = e^{-x^2} é chamado **curva normal** e representa a distribuição, em torno do valor médio das frequências de ocorrência de um experimento aleatório em uma população. Muitas medidas de características físicas como altura, massa, dimensões dos pés, dos colarinhos, entre outras ao serem representadas estatisticamente, conduzem a uma curva normal. De forma geral, as diversas curvas do tipo normal (ou curva de Gauss) são do tipo f(x) = a · $e^{-b \cdot x^2}$, com diversos valores para os parâmetros **a** e **b**.

A seguir temos um exemplo de uma curva normal, dada pela função f(x) = 2 · $e^{-2 \cdot x^2}$



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Utilizando um programa para construção de gráficos, elabore algumas curvas de Gauss, variando os valores dos parâmetros **a** e **b**.



Fonte: Imagem elaborada pelos autores.

Disponibilize aos alunos acesso ao QR CODE para que eles possam variar (por meio dos controles deslizantes) os parâmetros da função e analisar os efeitos na sua representação gráfica.

Ou pelo link: https://www.geogebra.org/classic/sxeqwc3f

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

COORDENADORIA PEDAGÓGICA – COPED

Coordenador
Caetano Pansani Siqueira

Diretora do Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica – DECEGEP
Valéria Arcari Muhi

Diretora do Centro de Ensino Médio – CEM
Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Diretora do Centro de Anos Finais do Ensino Fundamental – CEFAF
Patrícia Borges Coutinho da Sila

ÁREA DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

BIOLOGIA
Aparecida Kida Sanches – *Equipe Curricular de Biologia*; Beatriz Felice Ponzio – *Equipe Curricular de Biologia*; Airton dos Santos Bartolotto – *PCNP da D.E. de Santos*; Evandro Rodrigues Vargas Silvério – *PCNP da D.E. de Apiaí*; Ludmila Sadokoff – *PCNP da D.E. de Caraguatatuba*; Marcelo da Silva Alcantara Duarte – *PCNP da D.E. de São Vicente*; Marly Aparecida Giraldelli Marsulo – *PCNP da D.E. de Piracicaba.*

FÍSICA
Carolina dos Santos Batista Murauskas – *Equipe Curricular de Física*; Ana Claudia Cossini Martins – *PCNP D.E. José Bonifácio*; Debora Cíntia Rabello – *PCNP D.E. Santos*; Carina Emy Kagohara – *PCNP D.E. Sul 1*; Dimas Daniel de Barros – *PCNP D.E. São Roque*; José Rubens Antoniazzi Silva – *PCNP D.E. Tupã*; Jefferson Heleno Tsuchiya – *PCNP D.E. Sul 1*; Juliana Pereira Thomazo – *PCNP D.E. São Bernardo do Campo*; Jussara Alves Martins Ferrari – *PCNP D.E. Adamantina*; Sara dos Santos Dias – *PCNP D.E. Mauá;* Thaís de Oliveira Müzel – *PCNP D.E. Itapeva*; Valentina Aparecida Bordignon Guimarães – *PCNP DE Leste 5.*

QUÍMICA
Alexandra Fraga Vazquez – *Equipe Curricular de Química*; *Regiane* Cristina Moraes Gomes – *Equipe Curricular de Química*; Cristiane Marani Coppini – *PCNP D.E. São Roque*; Gerson Novais Silva – *PCNP D.E. Região de São Vicente;* Laura Camargo de Andrade Xavier – *PCNP D.E. Registro*; Natalina de Fátima Mateus – *PCNP D.E. Guarulhos Sul;* Wilian Guirra de Jesus – *PCNP D.E. Franca*; Xenia Aparecida Sabino – *PCNP D.E. Leste 5.*

ÁREA DE CIÊNCIAS HUMANAS

GEOGRAFIA
Andréia Cristina Barroso Cardoso – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; Mariana Martins Lemes – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia; Milene Soares Barbosa – SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia;* Sergio Luiz Damiati – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; André Baroni - *PCNP da D.E. Ribeirão Preto*; Alexandre Cursino Borges Júnior – *PCNP da D.E. Guaratinguetá*; Beatriz Michele Moço Dias – *PCNP da D.E. Taubaté*; Bruna Capóia Trescenti – *PCNP da D.E Itu*; Daniel Ladeira Almeida – *PCNP da D.E. São Bernardo do Campo*; Camilla Ruiz Manaia – *PCNP da D.E. Taquaritinga*; Cleunice Dias de Oliveira Gaspar – *PCNP da D.E. São Vicente*; Cristiane Cristina Olímpio – *PCNP da D.E. Pindamonhangaba*; Dulcinéa da Silveira Ballestero – *PCNP da D.E. Leste 5*; Elizete Buranello Perez – *PCNP da D.E. Penápolis*; Maria Julia Ramos Sant'Ana – *PCNP da D.E. Adamantina;* Márcio Eduardo Pedrozo – *PCNP da D.E. Americana*; Patrícia Silvestre Águas; Regina Célia Batista – *PCNP da D.E. Piraju*; Roseli Pereira De Araujo – *PCNP da D.E. Bauru*; Rosenei Aparecida Ribeiro Libório – *PCNP da D.E. Ourinhos*; Sandra Raquel Scassola Dias – *PCNP da D.E. Tupã*; Sheila Aparecida Pereira de Oliveira – *PCNP da D.E. Leste 2*; Shirley Schweizer – *PCNP da D.E. Botucatu*; Simone Regiane de Almeida Cuba – *PCNP da D.E. Caraguatatuba*; Telma Riggio – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Viviane Maria Bispo – *PCNP da D.E. José Bonifácio.*

FILOSOFIA
Tânia Gonçalves – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Erica Cristina Frau – *PCNP de Filosofia da DRE Campinas Oeste.*

HISTÓRIA
Adriano Pereira da Silva - *PCNP da D.E. de Avaré*; Bruno Ferreira Matsumoto - *PCNP da D.E. de Itapetininga*; Douglas Eduardo de Sousa – *PCNP da D.E. Miracatu;* Flávia Regina Novaes Tobias – *PCNP da D.E. Itapevi*; Gerson Francisco de Lima – *PCNP da D.E. de Itararé*; José Igídio dos Santos – *PCNP da D.E. de Fernandópolis*; Rodrigo Costa Silva – *PCNP da D.E. Assis*; Tadeu Pamplona Pagnossa - *PCNP da D.E. de Guaratinguetá*; Vitor Hugo Pissaia - *PCNP da D.E. de Taquaritinga*.
Colaboradores: José Arnaldo Octaviano – *PCNP da D.E. de Jaú*; Eliana Tumolo Dias Leite – *PNCP da D.E. Sul 1*.
Redação final e Revisão: Clarissa Bazzanelli Barradas – *COPED/SEDUC*; Edi Wilson Silveira – *COPED/SEDUC*; Priscila Lourenço Soares Santos – *COPED/SEDUC*; Viviane Pedroso Domingues Cardoso – *COPED/SEDUC.*
Revisão Conceitual: Joelza Ester Domingues.

SOCIOLOGIA
Emerson Costa – SEDUC/COPED/CEM – *Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Marcelo Elias de Oliveira – SEDUC/COPED/CEM – *Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Ilana Henrique dos Santos – *PCNP de Sociologia da D.E. Leste 1*

Revisão: Emerson Costa – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Ilana Henrique dos Santos – *PCNP de Sociologia da D.E. Leste 1*

Organização: Emerson Costa – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas*

ÁREA DE LINGUAGENS

ARTE
Carlos Eduardo Povinha – *Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC*; Daniela de Souza Martins Grillo – *Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC*; Eduardo Martins Kebbe – E*quipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC*; Evania Rodrigues Moraes Escudeiro – *Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC*; Adriana Marques Ursini Santás – *PCNP da D.E. Santos*; Ana Maria Minari de Siqueira – *PCNP da D.E. São José dos Campos*; Débora David Guidolín – *PCNP da D.E. Ribeirão Preto*; Djalma Abel Novaes – *PCNP da D.E. Guaratinguetá*; Eliana Florindo – *PCNP da D.E. Suzano*; Elisangela Vicente Prismit – *PCNP da D.E. Centro Oeste*; Madalena Ponce Rodrigues – *PCNP da D.E. Botucatu*; Marilia Marcondes de Moraes Sarmento e Lima Torres – *PCNP da D.E. São Vicente*; Patrícia de Lima Takaoka – *PCNP da D.E. Caraguatatuba*; Pedro Kazuo Nagasse – *PCNP da D.E. Jales*; Renata Aparecida de Oliveira dos Santos – *PCNP da D.E. Caieiras*; Roberta Jorge Luz – *PCNP da D.E. Sorocaba;* Rodrigo Mendes – *PCNP da D.E. Ourinhos;* Silmara Lourdes Truzzi – *PCNP da D.E. Marília*; Sonia Tobias Prado – *PCNP da D.E. Lins.*

EDUCAÇÃO FÍSICA
Elaboração: Diego Diaz Sanchez – *PCNP da DE Guarulhos Norte*; Felipe Augusto Lucci – *PCNP da DE Itu*; Flavia Naomi Kunihira Peixoto – *PCNP da DE Suzano*; Gislaine Procópio Querido – *PCNP da DE São Roque*; Isabela Muniz dos Santos Cáceres – *PCNP da DE Votorantim*; Katia Mendes Silva – *PCNP da DE Andradina*; Janaína Pazeto Domingos – *PCNP da DE Sul 3*; Lígia Estronioli de Castro – *PCNP da DE Bauru*; Luiz Fernando Vagliengo – *Equipe Curricular de Educação Física*; Marcelo Ortega Amorim – *Equipe Curricular de Educação Física*; Maria Izildinha Marcelino – *PCNP da DE Osasco*; Mirna Léia Violim Brandt – *Equipe Técnica Curricular de Educação Física*; Nabil José Awad – *PCNP da DE Caraguatatuba*; Neara Isabel de Freitas Lima – *PCNP da DE Sorocaba*; Sandra Regina Valadão – *PCNP da DE Taboão da Serra*; Sandra Pereira Mendes – *Equipe Técnica Curricular de Educação Física*; Tiago Oliveira dos Santos – *PCNP da DE Lins*; Thaisa Pedrosa Silva Nunes – *PCNP da DE Tupã.*

Revisão: Luiz Fernando Vagliengo – *Equipe Curricular de Educação Física*; Marcelo Ortega Amorim – *Equipe Curricular de Educação Física*; Mirna Léia Violin Brandt – *Equipe Curricular de Educação Física*; Sandra Pereira Mendes – *Equipe Curricular de Educação Física.*
Revisão conceitual (1ª série): Rafaela Beleboni.

INGLÊS
Elaboração, análise e leitura: Catarina Reis Matos da Cruz – *PCNP da D.E. Leste2*; Cíntia Perrenoud de Almeida – *PCNP da D.E. Pindamonhangaba*; Emerson Thiago Kaishi Ono – *COPED/CEFAF/LEM*; Gilmara Aparecida Prado Cavalcante – *PCNP da D.E. Mauá*; Jucimeire de Souza Bispo – *COPED/CEFAF/LEM*; Liana Maura Antunes da Silva Barreto – *PCNP da D.E. Centro*; Luiz Afonso Baddini – *PCNP da D.E. Santos*; Marisa Mota Novais Porto – *PCNP – D.E. Carapicuíba*; Nelise Maria Abib Penna Pagnan – *PCNP – D.E. Centro-Oeste*; Viviane Barcellos Isidorio – *PCNP – D.E. São José dos Campos*; Pamella de Paula da Silva – *COPED/CEM/LEM*; Renata Andreia Placa Orosco de Souza – *PCNP da D.E. Presidente Prudente*; Rosane de Carvalho – *PCNP da D.E. Adamantina.*
Leitura crítica, organização e validação: Emerson Thiago Kaishi Ono – *COPED/CEFAF/LEM;* Jucimeire de Souza Bispo – *COPED/CEFAF/LEM*; Pamella de Paula da Silva – *COPED/CEM/LEM.*
Colaboração: Andréia Cristina Barroso Cardoso – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; Sergio Luiz Damiati – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; Mariana Martins Lemes – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; Milene Soares Barbosa – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; Isaque Mitsuo Kobayashi *SEDUC/COPED*; Jefferson Heleno Tsuchiya *SEDUC/COPED.*

LÍNGUA PORTUGUESA
Alessandra Junqueira Vieira Figueiredo, Alzira Maria Sá Magalhães Cavalcante, Andrea Righeto, Cristiane Alves de Oliveira, Daniel Carvalho Nhani; Danubia Fernandes Sobreira Tasca, Débora Silva Batista Eilliar, Eliane Cristina Gonçalves Ramos, Helena Pereira dos Santos, Igor Rodrigo Valério Matias, Jacqueline da Silva Souza, João Mário Santana, Katia Amâncio Cruz, Letícia Maria de Barros Lima Viviani, Lidiane Máximo Feitosa, Luiz Eduardo Divino da Fonseca, Luiz Fernando Biasi, Márcia Regina Xavier Gardenal, Maria Madalena Borges Gutierre, Martha Wassif Salloume Garcia, Neuza de Mello Lopes Schonherr, Patrícia Fernanda Morande Roveri, Reginaldo Inocenti, Rodrigo Cesar Gonçalves, Shirlei Pio Pereira Fernandes, Sônia Maria Rodrigues, Tatiana Balli, Valquíria Ferreira de Lima Almeida, Viviane Evangelista Neves Santos, William Ruotti.
Leitura crítica e validação: Cristiane Aparecida Nunes; Edvaldo Cerazze; Fabiano Pereira dos Santos; Fabrício Cristian de Proença; Glauco Roberto Bertucci; Marcia Aparecida Barbosa Corrales; Maria José Constâncio Bellon; Maria Madalena Borges Gutierre; Mariângela Soares Baptistello Porto; Paula de Souza Mozaner; Raquel Salzani Fiorini; Reginaldo Inocenti; Ronaldo Cesar Alexandre Formici; Rosane de Paiva Felício; Roseli Aparecida Conceição Ota; Selma Tavares da Silva; Silvia Helena Soares.
Professores responsáveis pela organização, revisão adaptação e validação do material: Katia Regina Pessoa, Lucifrance Carvalhar, Mara Lucia David, Marcia Aparecida Barbosa Corrales, Marcos Rodrigues Ferreira, Mary Jacomine da Silva, Teônia de Abreu Ferreira.

MATEMÁTICA
Ilana Brawerman – *Equipe Curricular de Matemática*; Isaac Cei Dias – *Equipe Curricular de Matemática*; João dos Santos Vitalino – *Equipe Curricular de Matemática*; Marcos José Traldi – *Equipe Curricular de Matemática*; Otávio Yoshio Yamanaka – *Equipe Curricular de Matemática*; Rafael José Dombrauskas Polonio – *Equipe Curricular de Matemática*; Sandra Pereira Lopes – *Equipe Curricular de Matemática*; Vanderley Aparecido Cornatione – *Equipe Curricular de Matemática*; Lilian Silva de Carvalho – *PCNP da D.E. de São Carlos*; Marcelo Balduíno – *PCNP da D.E. Guarulhos Norte*; Maria Regina Duarte Lima – *PCNP da D.E. José Bonifácio*; Simone Cristina do Amaral Porto – *PCNP da D.E. Guarulhos Norte*; Talles Eduardo Nazar Cerizza – *PCNP da D.E. Franca*; Willian Casari de Souza – *PCNP da D.E. Araçatuba.*

TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
SEDUC
Arlete Aparecida Oliveira de Almeida – Equipe Centro de Inovação;
Camila Aparecida Carvalho Lopes – Equipe Centro de Inovação;
Liliane Pereira da Silva Costa – Equipe Centro de Inovação;
Fabíola Ferreira do Nascimento – Equipe Centro de Inovação;
Bruna Waitman Santinho – Assessora do Programa INOVA;
Debora Denise Dias Garofalo – Assessora de Tecnologia e Inovação;
Profº Paulo Adriano Ferrari – EE Dr. Carlos Augusto de Freitas Vallalva Júnior – DER Sul 1;
EducaMídia, programa de educação midiática do Instituto Palavra Aberta

PROJETO DE VIDA
Bruna Waitman – *SEDUC/COPED/Assessora Educação Integral*; Cassia Moraes Targa Longo – *SEDUC/COPED/CEART*; Claudia Soraia Rocha Moura – *SEDUC/COPED/DEMOD/CEJA*; Helena Claudia Soares Achilles – *SEDUC/COPED/DECEGP*; Instituto Ayrton Senna; Instituto de Corresponsabilidade pela Educação; Instituto Proa; Simone Cristina Succi – *SEDUC/EFAPE*; Walter Aparecido Borges – *SEDUC/EFAPE*; Rodiclay Germano – Ilustrações.

Impressão e Acabamento
Imprensa Oficial do Estado S/A – IMESP

Projeto Gráfico
Fernanda Buccelli e Ricardo Ferreira

Diagramação, Tratamento de Imagens e Colaboradores:
Aline Navarro; Ana Lúcia Charnyai; Dulce Maria de Lima Pinto; Fátima Regina de Souza Lima; Isabel Gomes Ferreira; Leonídio Gomes; Marcelo de Oliveira Daniel; Maria de Fátima Alves Gonçalves; Marilena Camargo Villavoy; Marli Santos de Jesus; Paulo César Tenório; Ricardo Ferreira; Rita de Cássia Diniz; Robson Minghini; Sandra Regina Brazão Gomes; Selma Brisolla de Campos; Teresa Lucinda Ferreira de Andrade; Tiago Cheregati e Vanessa Merizzi.

SÃO PAULO
GOVERNO DO ESTADO

Secretaria de Educação