SP FAZ ESCOLA

CADERNO DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

Ensino Médio

4º BIMESTRE

Governo do Estado de São Paulo

Governador
João Doria

Vice-Governador
Rodrigo Garcia

Secretário da Educação
Rossieli Soares da Silva

Secretário Executivo
Haroldo Corrêa Rocha

Chefe de Gabinete
Renilda Peres de Lima

Coordenador da Coordenadoria Pedagógica
Caetano Pansani Siqueira

Presidente da Fundação para o Desenvolvimento da Educação
Nourival Pantano Junior

Sumário

1ª série do Ensino Médio 4

2ª série do Ensino Médio 46

3ª série do Ensino Médio 88

MATEMÁTICA

1ª Série – Ensino Médio

4º Bimestre

1. Organização das grades curriculares

Apresentamos a seguir uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais do Currículo Paulista do Ensino Médio, além de algumas orientações pedagógicas, para as três séries que compõem o referido estágio de ensino da escolaridade básica.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (álgebra, geometria, grandezas e medidas, números e probabilidade e estatística), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. Os componentes curriculares não são um fim em si mesmo, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

Desta forma, os quadros apresentados destacam as habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes em cada unidade Tais habilidades traduzem, de modo operacional, as ações que os alunos devem ser capazes de realizar, ao final de um determinado estágio de aprendizagem, após serem apresentados aos conteúdos curriculares listados.

VERSÃO PRELIMINAR

ENSINO MÉDIO – CURRÍCULO DE MATEMÁTICA – 1ª SÉRIE (4º BIMESTRE)		
CURRÍCULO OFICIAL – SEDUC-SP		**Currículo Paulista do Ensino Médio**
Tema/Conteúdo	**Habilidades**	**Competências Gerais**
Geometria / Relações • Razões trigonométricas nos triângulos retângulos. • Resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos. • Polígonos regulares: inscrição circunscrição e pavimentação de superfícies. • Resolução de triângulos não retângulos Lei dos Senos e Lei dos Cossenos	• Saber usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos. • Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. • Saber construir polígonos regulares e reconhecer suas propriedades fundamentais. • Saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies. • Saber inscrever e circunscrever polígonos regulares em circunferências dadas.	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação , a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

VERSÃO PRELIMINAR

1.1 Grade curricular da 1ª série do Ensino Médio.

1.1.1 Razões Trigonométricas

Neste bimestre desenvolveremos inicialmente as razões trigonométricas, estas, surgem a partir da relação entre a Geometria e a Trigonometria. Tais razões, como o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo já foram apresentadas aos estudantes anteriormente na etapa correspondente aos anos finais do Ensino Fundamental. Trata-se agora, de uma consolidação de tais ideias, com sua contextualização em diferentes situações práticas e a extensão de seu significado para ângulos maiores que 90º.

As razões trigonométricas voltarão a ser estudadas na 2ª série do Ensino Médio, quando será dada ênfase à periodicidade das funções trigonométricas, e posteriormente exploradas na 3ª série, inseridas no estudo geral das funções.

Para a reapresentação/consolidação da tangente de um ângulo agudo, tomamos como base a ideia de inclinação de uma rampa. A associação da inclinação de uma reta com a proporcionalidade nas razões entre os catetos de triângulos retângulos semelhantes e, consequentemente, com a tangente de um ângulo parece fundamental.

Com a tangente, seno e a secante, teremos em mãos as seis razões fundamentais, uma vez que as outras três (cosseno, cossecante e cotangente) não passam das três primeiras aplicadas ao ângulo complementar do ângulo dado.

Após a reapresentação/consolidação das seis razões trigonométricas fundamentais para os ângulos agudos, será feita a extensão natural de tais noções para ângulos maiores que 90º, com a correspondente redução do cálculo de seno, cosseno, tangente etc. de um ângulo maior que 90º aos valores já conhecidos das razões correspondentes nos ângulos agudos.

Uma situação interessante nessa articulação entre a Geometria e a Trigonometria que está sendo levada no contexto deste material é o estudo das regularidades na inscrição e na circunscrição de polígonos.

Completando este tópico, apresentamos duas relações especialmente importantes entre lados e ângulos de triângulos, que valem inclusive em triângulos não retângulos: a da proporcionalidade entre lados e senos, (Lei dos Senos), e a generalização do teorema de Pitágoras (Lei dos Cossenos).

Todos os tópicos acima apresentados podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem, conforme segue:

Situação de Aprendizagem 3: Relações Métricas nos triângulos retângulos – Teorema de Pitágoras, Vol. 2, 9º ano do Ensino Fundamental, pg. 29 a 39.

Situação de Aprendizagem 4: Razões trigonométricas dos ângulos agudos, Vol. 2, 9º ano do Ensino Fundamental, pg. 39 a 50.

Lembrando que, ao final de cada situação de aprendizagem, constam algumas considerações sobre a avaliação dos conhecimentos bem como o conteúdo considerado indispensável ao desenvolvimento das competências e habilidades enunciadas.

Além das situações de aprendizagens, apresentadas, sugerimos outros materiais com recursos audiovisuais, contidos na plataforma Matemática Multimídia, a seguir:

VERSÃO PRELIMINAR

- Engenharia de Grego. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1010. Acesso em 29/nov./2018.
- Entrando pelo túnel. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1096 Acesso em 29/nov./2018
- Montanhas geométricas (experimento). Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1021. Acesso em 29/nov./2018.
- Um caminho para o curral. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1384 Acesso em 29/nov./2018.

1.1.2 Ladrilhamento de planos e pavimentações de superfícies.

Com base nos conceitos e habilidades desenvolvidos ao longo do Ensino Fundamental Anos Finais, podemos expandir esses conceitos com a utilização de ladrilhamento para deduzir as relações entre ângulos de um polígono, por meio da investigação e validação de conjecturas. Inicialmente, discute-se a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono e, em seguida, por meio de construções de mosaicos com polígonos, são exploradas algumas relações geométricas entre ângulos. Nessa atividade, também é exercitada a habilidade de observação e generalização de regularidades e padrões, bem como as expressões numéricas de modo contextualizado.
Todos os tópicos acima apresentados podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem, conforme segue:
Situação de Aprendizagem 7 – Polígonos e Ladrilhamento do Plano, Vol.1, 7º ano do Ensino Fundamental, pg. 66 a 72.

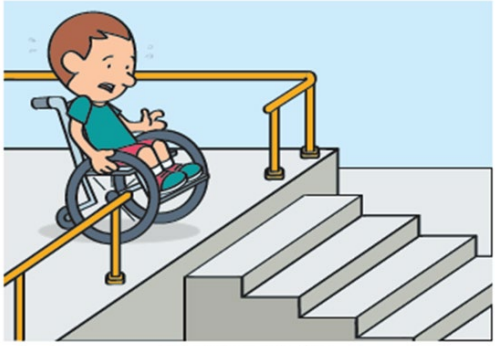
Para o aprofundamento nos conceitos relativos a este assunto, sugerimos a leitura do artigo denominado “Ladrilhamentos” de Elvia Mureb Sallum, disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2015/10/monografia2.pdf (acesso em: 21/12/2018)

VERSÃO PRELIMINAR

2. Atividades

TEMA 1 – Razões trigonométricas nos triângulos retângulos

Medindo rampas

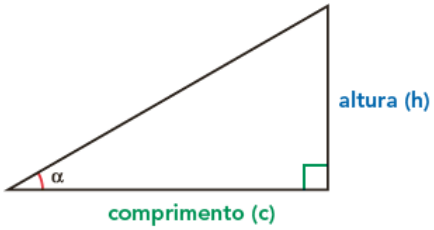


Arte: Robson Minghini.

Trigonometria é a área da matemática que estuda as relações entre lados e ângulos de um triângulo. Desde a Antiguidade, astrônomos e geômetras estudam as propriedades dos triângulos para resolver problemas, sobretudo os que possibilitam determinar medidas inacessíveis, por exemplo, a medida do raio da Terra, a distância da Terra à Lua, a largura de um rio ou a altura de uma montanha, dentre várias outras situações.
Um problema muito importante, no qual a aplicação da Trigonometria hoje se faz presente, é na garantia de um direito constitucional, que trata da igualdade de todos perante a lei, o direito à livre locomoção. Para a garantia deste direito, as rampas tornaram-se um importante meio facilitador de acesso e a trigonometria e dá o suporte para o cálculo da inclinação adequada a cada tipo de rampa.

> Considera-se **inclinação** da rampa a relação entre a sua altura e o deslocamento horizontal (%). Para que esteja adequada à acessibilidade os valores obtidos devem obedecer à NBR 9050 estando entre 5% e 8,33%.

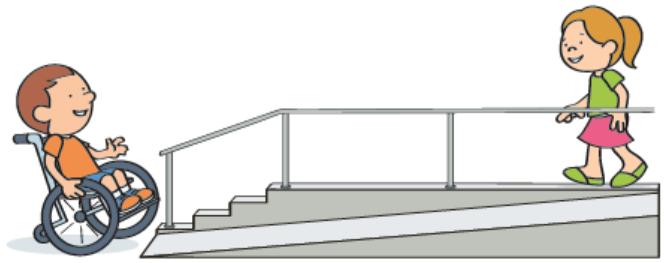
Em Trigonometria, a inclinação da rampa é chamada de **Tangente do ângulo de subida**(α). Ela é calculada por meio da razão entre medida da altura da rampa (h) e a medida do seu comprimento horizontal (c).



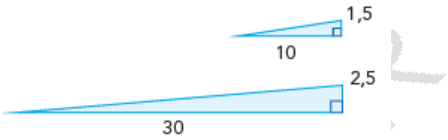
VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 1

Observe os esboços de rampas. Seguindo os passos abaixo você irá calcular a inclinação de cada uma e verificar se estão adequadas à NBR 9050.



Arte:: Robson Minghini.



a) Calcule a razão entre a altura e o afastamento horizontal nos dois casos.

Primeira rampa:

$\frac{1,5}{10} = \mathbf{0,15}$

Segunda rampa:

$\frac{2,50}{30} = \mathbf{0,08}$

b) Indique a inclinação dessas rampas em porcentagem, multiplicando os resultados obtidos por 100.

Primeira rampa:

$0,15 \cdot 100 = \mathbf{15\%}$

Segunda rampa:

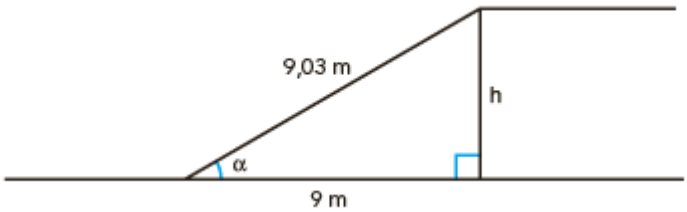
$0,08 \cdot 100 = \mathbf{8\%}$

c) Qual das duas rampas está de acordo com as normas da NBR 9050?

A segunda rampa (inclinação de 8%) está de acordo com a NBR 9050.

ATIVIDADE 2

O desenho a seguir apresenta o esboço de uma rampa para acessibilidade, determine:



a) a medida da altura (h) entre os dois pisos.

$h^2 + 9^2 = 9,03^2 \Rightarrow h^2 + 81 = 81,5409 \Rightarrow h^2 = 0,5409 \Rightarrow h = \sqrt{0,54} \Rightarrow h \cong 0,74$

VERSÃO PRELIMINAR

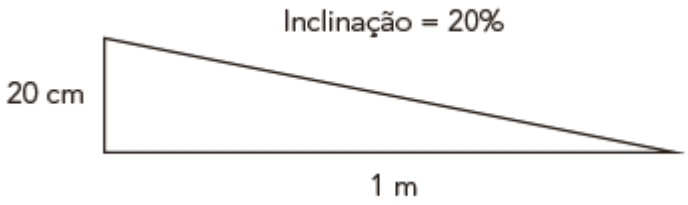
b) o valor da tangente de α e justifique se a rampa está adequada às normas de acessibilidade da NBR 9050.

$$\text{tg } \alpha = \frac{0{,}74}{9} = 0.082$$

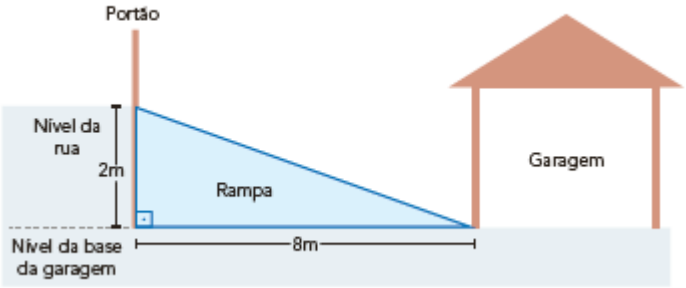
A inclinação é de 8,2%, portanto a rampa está adequada às normas de acessibilidade da NBR 9050.

ATIVIDADE 3

(Enem 2018 - Adaptado) A inclinação de uma rampa é calculada da seguinte maneira: para cada metro medido na horizontal, mede - se **x** centímetros na vertical. Diz - se, nesse caso, que a rampa tem inclinação de x%, como no exemplo da figura:



A figura apresenta um projeto de uma rampa de acesso a uma garagem residencial cuja base, situada a 2 metros abaixo do nível da rua, tem 8 metros de comprimento.



Depois de projetada a rampa, o responsável pela obra foi informado de que as normas técnicas do município, onde ela está localizada, exigem que a inclinação máxima de uma rampa de acesso a uma garagem residencial seja de 20%.

a) Calcule a inclinação da rampa e verifique se ela atende às normas técnicas do município.

0,25 ou 25%

Não atende às normas técnicas do município.

b) Se a rampa projetada tiver inclinação superior a 20%, o nível da garagem deverá ser alterado para diminuir o percentual de inclinação, mantendo o comprimento da base da rampa.

Para atender às normas técnicas do município, o nível da garagem deverá ser:

(A) Elevado em 40 cm..
(B) Elevado em 50 cm.
(C) Mantido no mesmo nível.
(D) Rebaixado em 40 cm.
(E) Rebaixado em 50 cm.

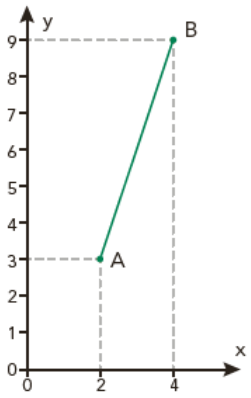
Resolução:

Para manter a inclinação de 20%, calculamos:

$\frac{h}{8} = 0{,}20 \Leftrightarrow h = 1{,}6m$. Então, a garagem deverá ser elevado o nível em 40 cm

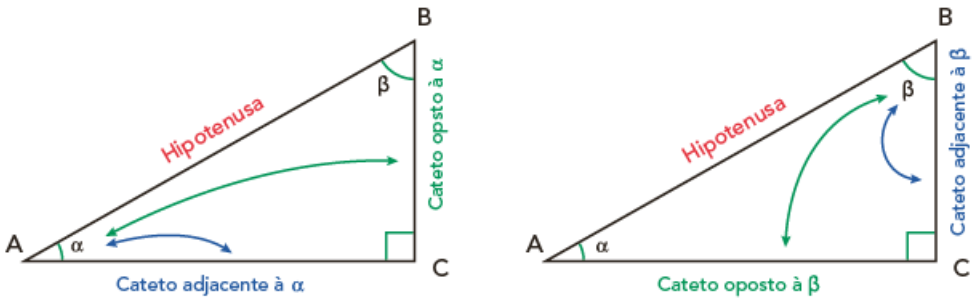
ATIVIDADE 4

O segmento AB está representado no plano cartesiano, conforme a figura a seguir. Determine a inclinação do segmento AB.



A inclinação da reta é determinada pelo ângulo formado com o eixo x, logo o cateto oposto a esse ângulo é 6 e o adjacente é 3 e o ângulo de inclinação é aproximadamente 72º.

Assim como a tangente, outras razões trigonométricas relacionadas com os ângulos no triângulo retângulo podem ser observadas:



VERSÃO PRELIMINAR

seno $\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto à } \alpha}{\text{hipotenusa}}$	**seno** $\beta = \dfrac{\text{cateto oposto à } \beta}{\text{hipotenusa}}$
cosseno $\alpha = \dfrac{\text{cateto adjacente à } \alpha}{\text{hipotenusa}}$	**cosseno** $\beta = \dfrac{\text{cateto adjacente à } \beta}{\text{hipotenusa}}$
tangente $\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto à } \alpha}{\text{cateto adjacente à } \alpha}$	**tangente** $\beta = \dfrac{\text{cateto oposto à } \beta}{\text{cateto adjacente à } \beta}$

ATIVIDADE 5

Observando as relações trigonométricas mencionadas, anteriormente, justifique as afirmações:

a) O valor do seno e cosseno de um ângulo agudo qualquer é um número entre 0 e 1.

Resposta pessoal.

*A hipotenusa é o maior lado do triângulo retângulo. Por isso, a divisão entre a medida de um cateto e a medida da hipotenusa sempre resultará em valor entre 0 e 1.

b) Os ângulos α e β são complementares e cos β= sen α.

Resposta pessoal.

** A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180°. O triângulo retângulo possui um ângulo de 90°. Logo, a soma dos outros dois ângulos é 90°, isto é, eles são complementares. Além disso, o cateto oposto de um dos ângulos agudos no triângulo retângulo é o cateto adjacente do outro ângulo agudo, ou seja:*

cateto oposto à α = cateto adjacente à β e cos β = sen α.

ATIVIDADE 6

No trabalho com as relações trigonométricas no triângulo retângulo os ângulos de **30º, 45º e 60º** aparecem com muita frequência, por esse motivo recebem o nome de **ângulos notáveis** e estão apresentados na tabela:

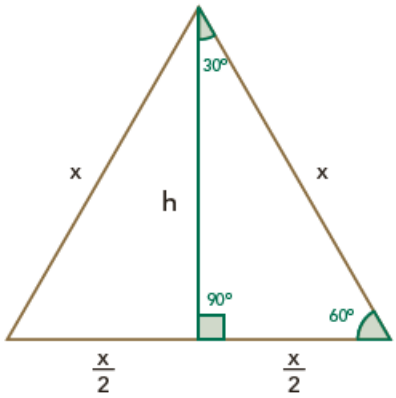
	30°	45°	60°
SENO	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COSSENO	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TANGENTE	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Para melhor compreensão destes valores propomos as seguintes atividades:

a) Valores de seno, cosseno e tangente de 30° e 60°:

VERSÃO PRELIMINAR

Sabe-se que no triângulo equilátero os ângulos internos medem 60º e a altura divide este triângulo em dois triângulos retângulos congruentes. Como a figura a seguir::



I) Calcule a medida da altura h do triângulo equilátero.

$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

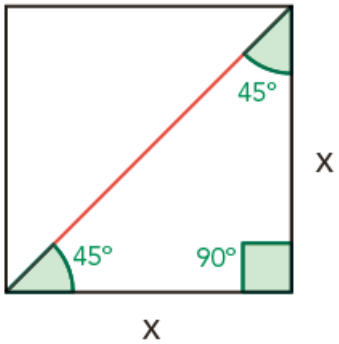
II) Calcule os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º.

$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

III) Calcule os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 60º.

$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$; $\text{tg } 60° = \sqrt{3}$

b) Valores de seno, cosseno e tangente do ângulo de 45º.



$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg } 45° = 1$

VERSÃO PRELIMINAR

Resolvendo Problemas:

ATIVIDADE 7

Para subir um desnível de 3,5 m foi construída uma rampa com 30° de inclinação.

a) Se for necessário escolher uma das razões trigonométricas (seno, cosseno ou tangente), para calcular a medida **c** do comprimento da rampa, qual você escolheria? Por quê?

Neste caso utilizamos a razão trigonométrica seno, pois, temos: a medida do ângulo, o cateto oposto que mede 3,5 m e a hipotenusa que é o segmento indicado por C.

b) Calcule a medida de **c**.

$$\text{sen}30° = \frac{3{,}5}{\overline{C}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3{,}5}{\overline{C}} \Rightarrow \overline{\overline{C}} = 7{,}0 \text{ m}$$

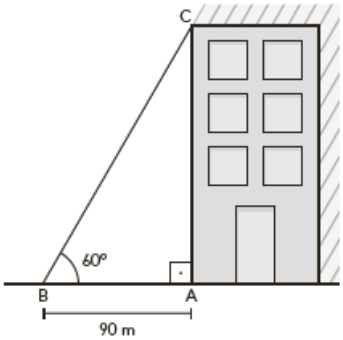
ATIVIDADE 8

(AD 2018) Um motociclista irá saltar por cima de um conjunto de caminhões utilizando a rampa mostrada no desenho. A altura, em metros, que o motociclista atinge no final da rampa é de:

$$\text{sen}30° = \frac{h}{18} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{18} \Rightarrow 2 \cdot h = 18 \Rightarrow h = \frac{18}{2} = 9\text{m}$$

ATIVIDADE 9

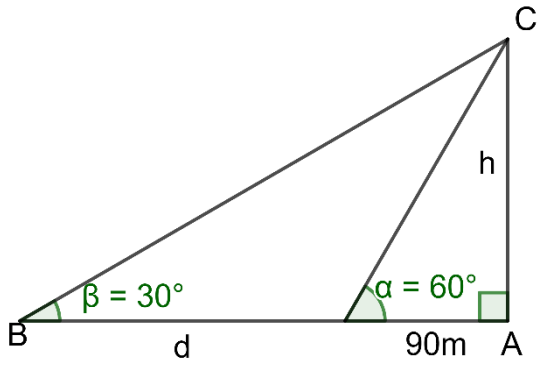
(PUCCAMP) Uma pessoa encontra-se num ponto A, localizado na base de um prédio, conforme mostra a figura. Se ela caminhar 90 metros em linha reta, chegará a um ponto B, de onde poderá ver o topo C do prédio, sob um ângulo de 60°.



Quantos metros ela deverá se afastar do ponto A, andando em linha reta no sentido A para B, para que possa enxergar o topo do prédio sob um ângulo de 30°?

VERSÃO PRELIMINAR

Resolução:



I) $tg60° = \frac{h}{90} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{90} \Rightarrow h = 90\sqrt{3}$

II) $tg30° = \frac{h}{d+90} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{90\sqrt{3}}{d+90} \Rightarrow$

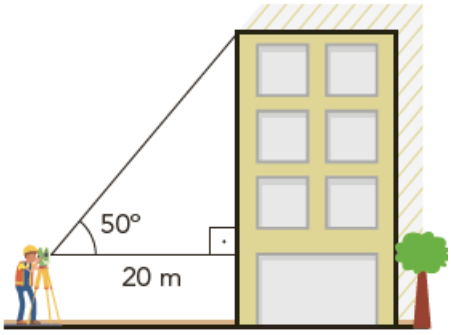
$\Rightarrow \sqrt{3}\,d + 90\sqrt{3} = 270\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3}d = 270\sqrt{3} - 90\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\,d = 180\sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{180\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 180$

$\therefore \overline{BA} = 180 + 90 = 270m$

ATIVIDADE 10

Clubes de Matemática da OBMEP) Uma pessoa com 1,75 m de altura e que se encontra a 20 m da base de um edifício vê o ponto mais alto dele sob um ângulo de 50°. Qual a altura aproximada do edifício?



$tg50° = \frac{h}{20} \Rightarrow 1{,}19 = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 1{,}19 \cdot 20 \Rightarrow h \cong 23{,}84$ m

Adicionando a altura da pessoa no cálculo obtém-se: 23,84 + 1,75 ≅ 25,59cm

VERSÃO PRELIMINAR

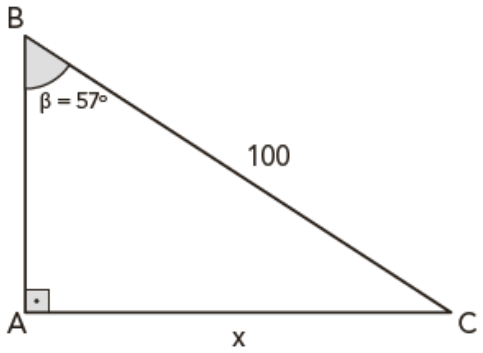
ATIVIDADE 11

(Portal da Matemática - OBMEP) Utilizando os dados aproximados da tabela 2, calcule o que se pede.

Arco	sen	cos	tg
15°	0,26	0,97	0,27
20°	0,34	0,93	0,37
30°	0,5	0,87	0,58
40°	0,64	0,77	0,84
57°	0,84	0,54	1,54
80°	0,98	0,17	5,67

Tabela 2: Senos, cossenos e tangentes.

a) Determine o valor de AC

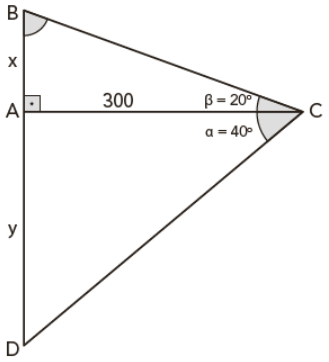


$$\text{sen}57° = \frac{x}{100} \Rightarrow 0{,}84 = \frac{x}{100} \Rightarrow x \cong 84$$

b) Determine o valor de BA

$$\cos 57° = \frac{\overline{BA}}{100} \Rightarrow 0{,}54 = \frac{\overline{BA}}{100} \Rightarrow \overline{BA} \cong 0{,}54 \cdot 100 \Rightarrow \overline{BA} \cong 54$$

c) Determine o valor de BD



VERSÃO PRELIMINAR

$tg20° = \frac{x}{300} \Rightarrow 0{,}37 = \frac{x}{300} \Rightarrow x \cong 0{,}37 \cdot 300 \Rightarrow x \cong 111$

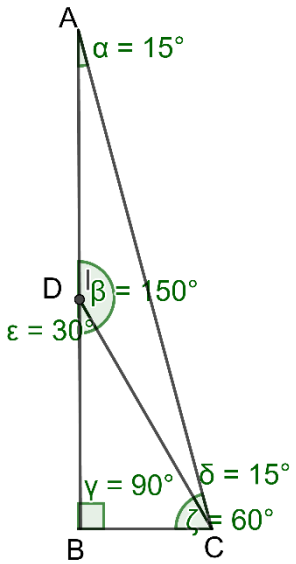
$tg40° = \frac{y}{300} \Rightarrow 0{,}84 \cong \frac{y}{300} \Rightarrow y \cong 252$

$\therefore \overline{BD} = x + y \cong 111 + 252 \cong 363$

ATIVIDADE 12

Seja o triângulo ABC, retângulo em B, com $B\hat{A}C = 15°$ e $D \in AB$ tal que $A\hat{D}C = 150°$. Sendo DB = 400 cm, qual o valor de AC?

Uma possível construção geométrica do enunciado seria:



No triângulo DBC, temos:

$tg60° = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \Rightarrow 1{,}73 \cong \frac{400}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} \cong \frac{400}{1{,}73} \Rightarrow BC \cong 231$

No triângulo ABC, temos:

$tg75° = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow 3{,}73 \cong \frac{\overline{AB}}{231} \Rightarrow \overline{AB} \cong 862$

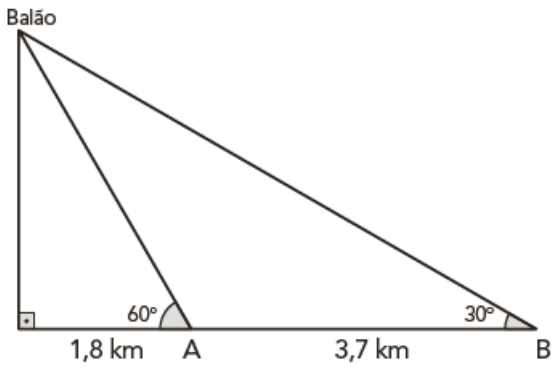
No triângulo ABC, temos

$cos15° = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Rightarrow 0{,}97 \cong \frac{862}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AC} \cong \frac{862}{0{,}97} \cong 888$

VERSÃO PRELIMINAR

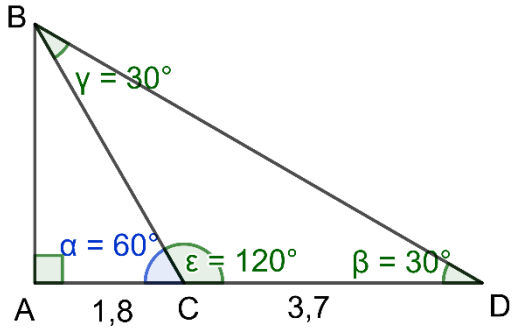
ATIVIDADE 13

(ENEM 2010) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°.
Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

Resolução:

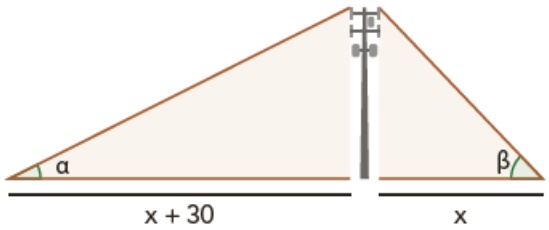


$$tg60° = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} \Rightarrow 1{,}73 = \frac{\overline{BA}}{1{,}8} \Rightarrow \overline{BA} \cong 3{,}11km$$

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 14

(SARESP 2009) Dois irmãos observam à torre rta TU em um terreno plano, conforme esquematizado na figura. Os seus ângulos de visão medem α e β, sendo tg α = $\frac{1}{3}$ e tg β = $\frac{1}{2}$. O irmão localizado no ponto P está 30 metros mais afastado do pé da torre que o localizado no ponto Q.



Desprezando as alturas dos irmãos, a altura da torre em metros será de:

Denominando a altura da torre por h e considerando que a mesma é perpendicular ao solo, temos que:

$$tg\alpha = \frac{h}{x+30} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{h}{x+30} \Rightarrow 3h = x + 30 \Rightarrow h = \frac{x+30}{3} \text{ (I)}$$

$$tg\beta = \frac{h}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{x} \Rightarrow 2h = x \Rightarrow h = \frac{x}{2} \text{ (II)}$$

De (I) e (II), temos que:

$$\frac{x+30}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow 2x + 60 = 3x \Rightarrow x = 60$$

Então temos que:

$$h = \frac{x}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

TEMA 2: RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS NÃO RETÂNGULOS.

Para prosseguir neste estudo devemos observar o valor de seno e cosseno de em um ângulo com medida entre 90° e 180°:

cos α = – cos (180 – α)

Exemplo:

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

senα = sen(180 – α)

Exemplo:

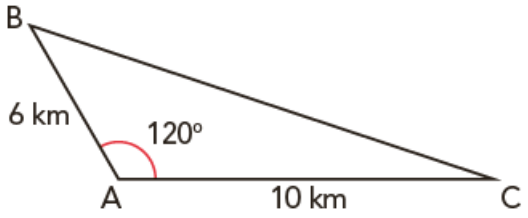
$$\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

VERSÃO PRELIMINAR

Vamos analisar o seguinte problema:

ATIVIDADE 15

(Portal da Matemática - Obmep) Um míssil, viajando em trajetória praticamente retilínea, foi detectado por um radar situado no ponto A em dois pontos distintos: o primeiro no ponto B tal que AB = 6 km e o segundo no ponto C, tal que AC = 10 km. Sabendo que BÂC = 120°, calcule a distância percorrida pelo míssil do ponto B até o ponto C.



a) Podemos usar o Teorema de Pitágoras para resolver este problema? Explique.

Resposta: Não, pois o triângulo ABC não é retângulo.

b) Você conhece alguma ferramenta matemática que poderia ser aplicada para resolver este problema?

Resposta pessoal

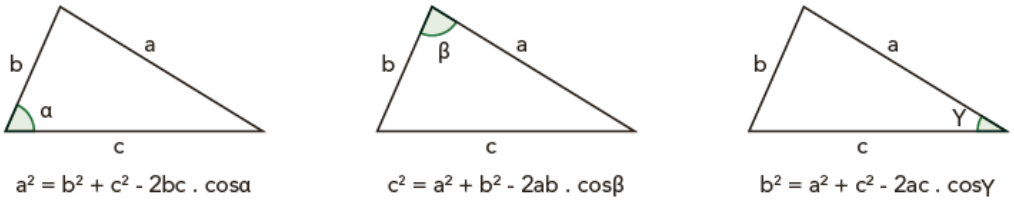
**Não é possível usar as relações métricas e as relações trigonométricas, pois não se trata de um triângulo retângulo".*

Lei dos cossenos

A **Lei dos Cossenos** pode ser aplicada em **triângulos não retângulos.** Este teorema demonstra que:

> Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles.

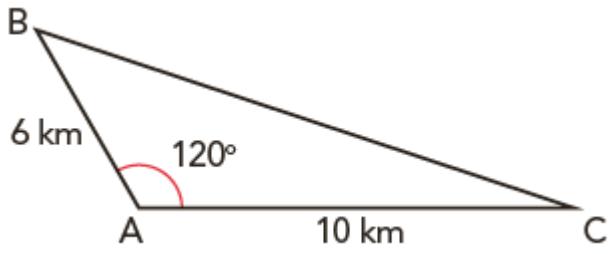
Isto é:



VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 16

Retomando o problema inicial e aplicando a Lei dos Cossenos, calcule a distância percorrida pelo míssil.



$\cos 120° = -(\cos 180° - 120°) \Rightarrow \cos 120° = -\cos 60° \Rightarrow \cos 120° = -\frac{1}{2}$

Pela lei dos cossenos, temos:

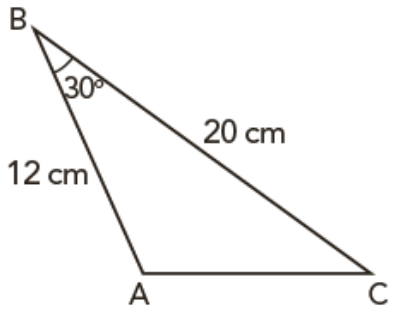
$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BC} \cdot \cos 120° \Rightarrow \overline{BC}^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{BC}^2 = 36 + 100 + 60$

$BC^2 = 136 + 60 \Rightarrow BC^2 = 196 \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{196} = 14\text{km}$

ATIVIDADE 17

Três cidades A, B e C, estão representadas em um mapa, em escala 1:10000, conforme a figura abaixo. Qual a distância aproximada em km entre as cidades A e C?



Aplicando a Lei dos cossenos, temos:

$\overline{AC}^2 = 12^2 + 20^2 - 2 \cdot 12 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{AC}^2 = 144 + 400 - 480 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{AC}^2 = 544 - 240 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{AC}^2 = 544 - 415{,}69 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{128{,}31} \cong 11{,}33 \text{ cm}$

VERSÃO PRELIMINAR

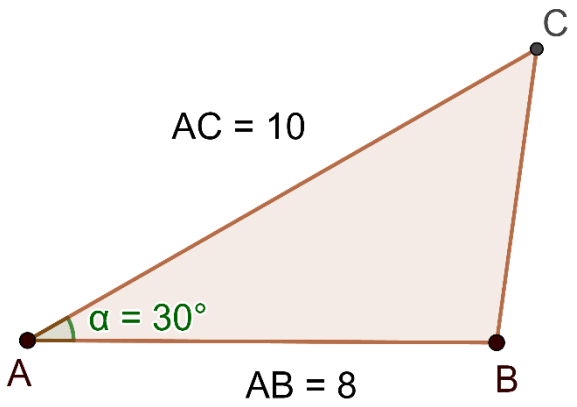
Utilizando a escala apresentada: 1:10.000, temos:

$11{,}33 \cdot 10.000 = 113.300$ cm $\cong 1{,}133$km

ATIVIDADE 18

(UF-Juiz de Fora - Reformulado) Dois lados de um triângulo medem 8 m e 10 m e formam um ângulo de **60°**. Qual a medida do terceiro lado?

Prezado(a) Professor(a), solicite aos estudantes que substituam a informação referente ao ângulo de 60º por **30º**.
Uma possível construção geométrica do enunciado seria:



Aplicando a lei dos cossenos, e calculando-se a medida do terceiro lado, temos:

$$\Rightarrow \overline{CB}^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{CB}^2 = 64 + 100 - 160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

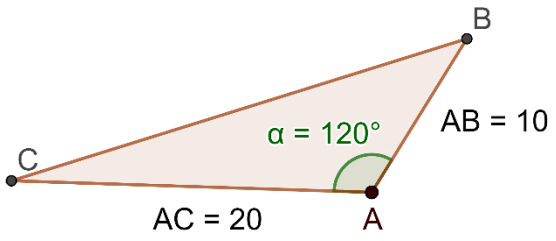
$$\Rightarrow \overline{CB}^2 = 164 - 80 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \overline{CB}^2 \cong 25{,}44 \Rightarrow \overline{CB} \cong \sqrt{25{,}44} \cong \ \cong 5{,}04\text{m}$$

ATIVIDADE 19

(Unifor-CE - Reformulado) Um terreno de forma triangular tem frente de 10 m e 20 m, em ruas que formam, entre si, um ângulo de 120º. Qual é a medida do terceiro lado desse terreno?

VERSÃO PRELIMINAR

Uma possível construção geométrica do enunciado seria:



Aplicando a lei dos cossenos, e calculando-se a medida do terceiro lado, temos:

Lembrando que:

$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

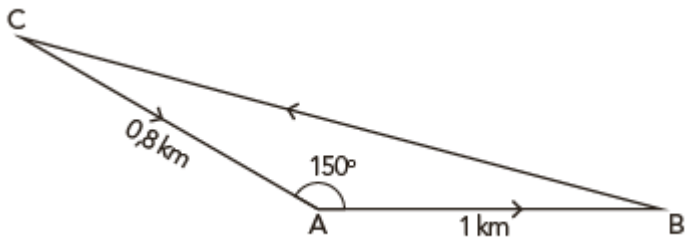
$\overline{CB}^2 = 20^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\overline{CB}^2 = 400 + 100 - 400 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\overline{CB}^2 = 500 + 200 \Rightarrow \overline{CB}^2 = 700 \Rightarrow \overline{CB} = \sqrt{700} \cong 26{,}46\text{m}$

ATIVIDADE 20

(UFSM/2013) A caminhada é uma das atividades físicas que, quando realizada com frequência, torna-se eficaz na prevenção de doenças crônicas e na melhoria da qualidade de vida. Para a prática de uma caminhada, uma pessoa sai do ponto A, passa pelos pontos B e C e retorna ao ponto A, conforme trajeto indicado na figura. Quantos quilômetros ela terá caminhado, se percorrer todo o trajeto? Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$.



Aplicando a lei dos cossenos, e calculando-se a medida do terceiro lado, temos:

Lembrando que:

$\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cong -0{,}85$

VERSÃO PRELIMINAR

$\overline{BC}^2 = 0{,}8^2 + 1^2 - 2 \cdot 0{,}8 \cdot 1 \cdot (-0{,}85)$

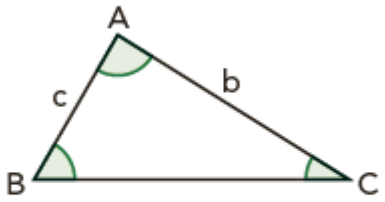
$\overline{BC}^2 = 0{,}64 + 1 - 1{,}6 \cdot (-0{,}85)$

$\overline{BC}^2 = 1{,}64 + 1{,}36 = 3 \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{3} \cong 1{,}7\text{km}$

Desta forma, o percurso todo será dado por: 0,8 + 1,0 + 1,7 = 3,5km.

Lei dos Senos

Lei dos Senos é outro importante teorema que relaciona lados e ângulos em um triângulo qualquer.
Para qualquer triângulo de lados **a**, **b** e **c**, a Lei dos Senos estabelece as seguintes relações:



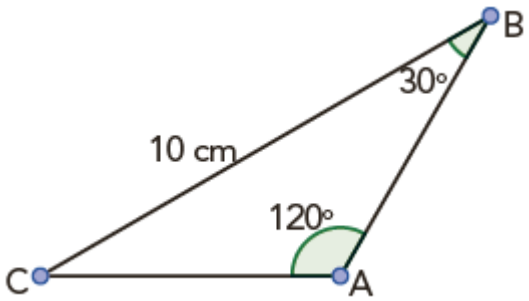
$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

Resolvendo problemas

ATIVIDADE 21

No triângulo abaixo calcule a medida do lado BC.

Professor, mesmo que o lado BC , tenha como medida 10 cm, proponha o cálculo da medida do lado AC ou AB.



VERSÃO PRELIMINAR

$$\frac{\overline{CA}}{\text{sen}30°} = \frac{CB}{\text{sen}120°} \Rightarrow \frac{\overline{CA}}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{CA} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \Rightarrow$$

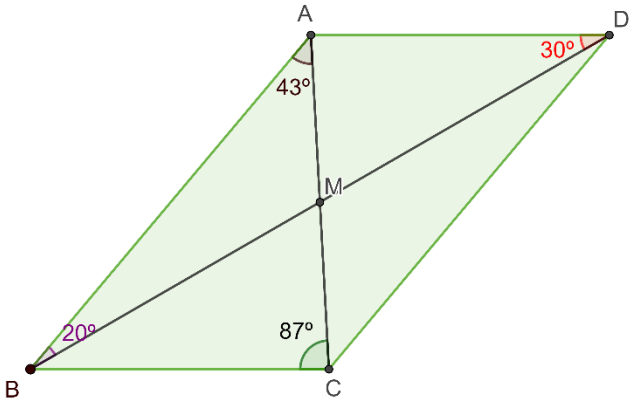
$$\Rightarrow \overline{CA} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{CA} = 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3} \cong 5{,}8 \text{ cm}$$

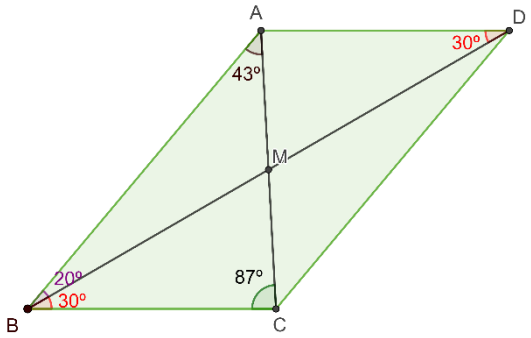
ATIVIDADE 22

No paralelogramo ABCD abaixo, a diagonal maior mede 15 cm, calcule a medida do lado BC.

PREZADO(A) PROFESSOR(A), AO DESENVOLVER ESTA ATIVIDADE, SOLICITE AOS ALUNOS A SUBSTITUIREM A FIGURA QUE CONSTA NO CADERNO DO ESTUDANTE, PELA FIGURA A SEGUIR:



$\overline{AB} \parallel \overline{BC} \Rightarrow A\hat{D}B \equiv D\hat{B}C = 30°$ (alternos internos)



$B\hat{M}C = 180 - (30+87) = 63°$

VERSÃO ELIMINAR

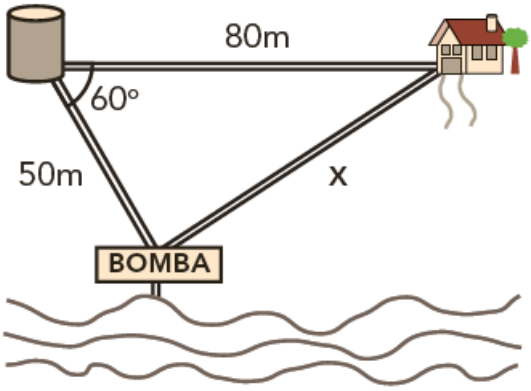
Seja M o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo, se a diagonal maior mede 15cm, então por definição o segmento BM = MC = 7,5cm.

Tomando-se o triângulo BMC e aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{7,5}{\text{sen}87°} = \frac{\overline{BC}}{\text{sen}63°} \Rightarrow 0,9986 \cdot \overline{BC} = 7,5 \cdot 0,8010 \Rightarrow \overline{BC} = \frac{6,0075}{0,9986} \Rightarrow \overline{BC} \cong 6,0 \text{ cm}$$

ATIVIDADE 23

Uma bomba d'água é utilizada para transportar água de um rio para outros dois locais: a casa e a caixa d'água conforme figura abaixo:



O proprietário dessa casa pretende bombear a água do rio diretamente para a casa. Qual deverá ser a medida do encanamento que ele terá que construir?

PREZADO(A) PROFESSOR(A), SOLICITE AOS ESTUDANTES PARA SUBSTITUIR O VALOR DO ÂNGULO INDICADO POR 120º.

Neste caso, utilizaremos a lei dos cossenos:

$$x^2 = 50^2 + 80^2 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

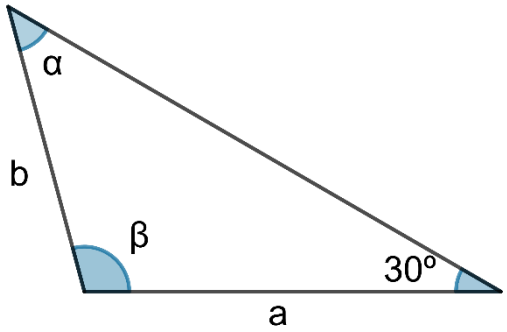
$$x^2 = 8.900 + 4.000 \Rightarrow x^2 = 12.900 \Rightarrow x = \sqrt{12900} \cong 119,6 \text{ m}$$

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 24

(CEFET) Determine a medida do ângulo β na figura seguinte, na qual a = 2 cm e b = $\sqrt{2}$ cm.

PREZADO(A) PROFESSOR(A), REPRODUZA A FIGURA A SEGUIR NA LOUSA, PARA SUBSTITUIR A FIGURA QUE CONSTA NO CADERNO DO ESTUDANTE.



Resolução:

1ª parte:

Determinando a medida do ângulo α:

$$\frac{b}{\text{sen}30°} = \frac{a}{\text{sen}\alpha} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\text{sen}\alpha} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \text{sen}\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \text{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$

2ª parte:

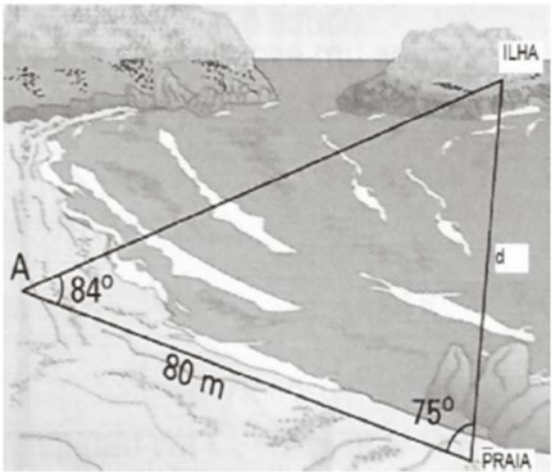
Determinando a medida do ângulo β:

$30 + 45 + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 180° - 75° \Rightarrow \beta = 105°$

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 23

(UNIFRA/2013) Observando a ilustração abaixo, determinar a distância, d, entre a ilha e a praia.
(Dados: sen 84º = 0,99, sen 75º = 0,97 e sen 21º = 0,36)



Resolução:

1ª Parte:

Determinando a medida do terceiro ângulo:

$84° + 75° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - 159 \Rightarrow \alpha = 21°$

2ª Parte:

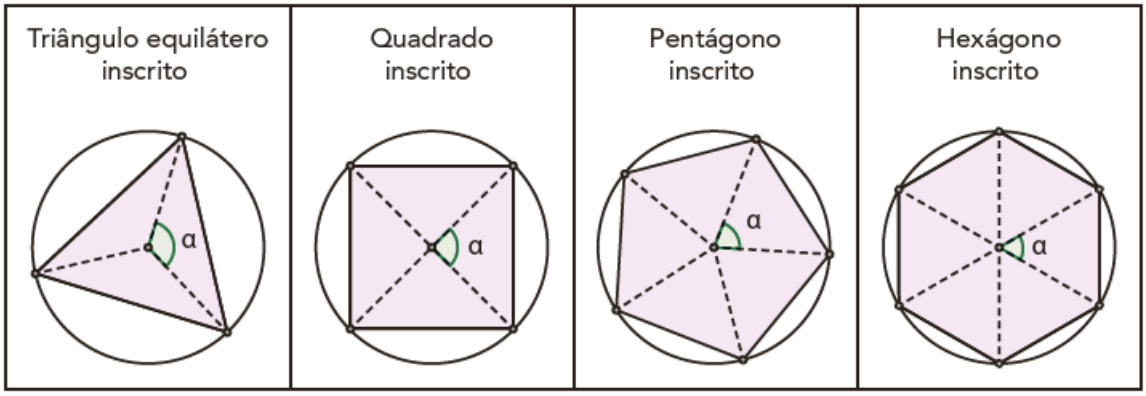
Determinando a medida d da ilha até a praia

$$\frac{80}{\text{sen}21°} = \frac{d}{\text{sen}84°} \Rightarrow \frac{80}{0{,}36} = \frac{d}{0{,}99} \Rightarrow d \cdot 0{,}36 = 80 \cdot 0{,}99 \Rightarrow d = \frac{80 \cdot 0{,}99}{0{,}36} = 220\text{m}$$

VERSÃO PRELIMINAR

TEMA 3: POLÍGONOS REGULARES, CIRCUNSCRIÇÃO E PAVIMENTAÇÃO DE SUPERFÍCIES

Polígonos regulares são polígonos convexos que possuem lados e ângulos congruentes (mesma medida). Todo polígono regular pode ser **inscrito** em uma circunferência, isto acontece, quando todos os seus vértices pertencem a uma circunferência. Abaixo temos quatro exemplos de **polígonos regulares inscritos**, para cada um deles, descubra a medida do **ângulo central** correspondente ao lado do polígono.



ATIVIDADE 1

Encontre uma expressão para o cálculo da medida do ângulo central α correspondente ao lado do polígono regular de n lados.

Triângulo: α = 120º

Quadrado α = 90º

Pentágono α = 72º

Hexágono α = 60º

$$\alpha = \frac{360°}{n}$$

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 2

Para confeccionar bolas de cartolina, João precisou construir pentágonos e hexágonos. Tentou desenhar os moldes destes polígonos, mas no final, os lados não se encaixavam. Explique como João poderia realizar esta tarefa dispondo de régua, compasso e transferidor.

Resposta pessoal

Construindo os pentágonos:

- Com o compasso, desenhar uma circunferência com raio de uma medida qualquer;

- Com o auxílio do transferidor, dividir a circunferência em cinco arcos correspondentes a ângulos centrais de 72°, marcando cada divisão com um ponto;

- Unir os pontos consecutivos com segmentos de reta.

Construindo os hexágonos:

A medida do lado do hexágono deve ser igual à medida do lado do pentágono.

O hexágono inscrito tem lados congruentes ao raio da circunferência.

- Repetir o processo utilizado para a construção do pentágono, porém com medida do raio da circunferência igual à medida do lado do pentágono e a medida do ângulo central de 60°.

ATIVIDADE 3

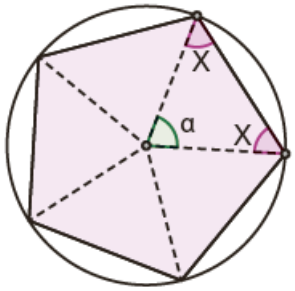
Os triângulos formados pelo centro da circunferência e dois vértices consecutivos dos polígonos anteriores, são isósceles. Justifique esta afirmação.

Dois de seus lados são formados pelo raio da circunferência, logo são congruentes.

ATIVIDADE 4

Sabendo que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes, descubra a medida (x) destes ângulos nos casos abaixo:

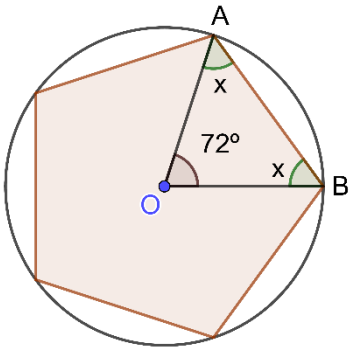
a) Pentágono regular inscrito



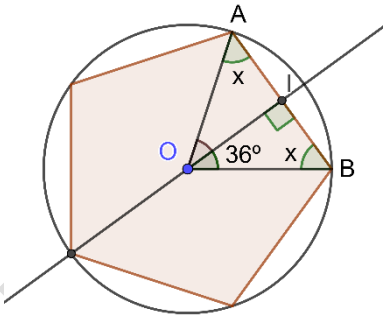
VERSÃO PRELIMINAR

Resolução:

Como destacado anteriormente o ângulo central de um pentágono inscrito em uma circunferência mede 72º.

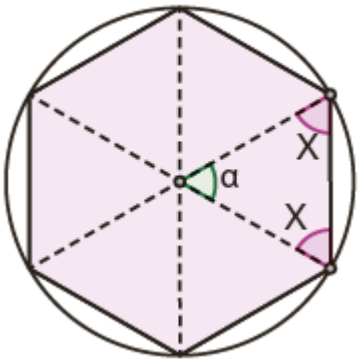


Um dos diâmetros da circunferência, será a bissetriz do ângulo AÔB do triângulo AOB e perpendicular ao segmento AB, conforme mostra a figura:



Então temos que: x = 180 – (36 + 90) = 180 – 126 = 54º

b) Hexágono regular inscrito



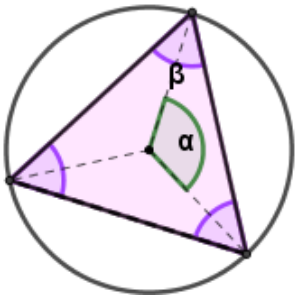
Resposta: x = 60º

VERSÃO VINAR

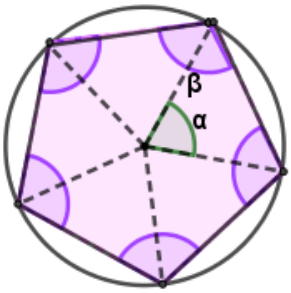
ATIVIDADE 5

Observe as figuras abaixo, nelas estão assinalados os **ângulos internos (β)** de cada polígono regular:

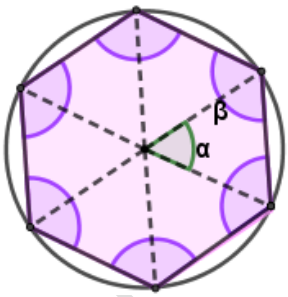
a) Triângulo Regular



b) Pentágono regular



c) Hexágono regular



Determine a medida do ângulo interno β de cada polígono acima.

a)
$\beta = 60°$

b)
$\beta = 108°$

c)
$\beta = 120°$

ATIVIDADE 6

Encontre uma expressão para o cálculo da medida do ângulo interno β de polígono regular de **n** lados.

$$\beta = 180° - \frac{360°}{n} \text{ ou } \beta = \frac{180°\ (n-2)}{n}$$

ATIVIDADE 7

Utilizando as expressões encontradas preencha a tabela com a medida do ângulo central αe do ângulo interno β para cada um polígonos regulares solicitados.

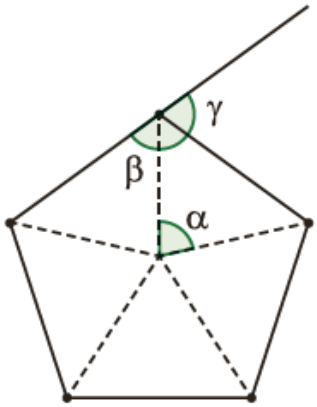
VERSÃO PRELIMINAR

Polígono Regular de **n** lados	Medida do ângulo central α	Medida do ângulo interno β
triângulo (n = 3)	α = 120º	β =60º
quadrado (n = 4)	α = 90º	β =90º
pentágono (n = 5)	α = 72º	β =108º
hexágono (n = 6)	α = 60º	β =120º
heptágono (n = 7)	α ≅ 51,4º	β ≅ 128,6º
octógono (n = 8)	α = 45º	β =135º
eneágono (n = 9)	α = 40º	β =140º
decágono (n = 10)	α = 36º	β =144º
dodecágono (n = 12)	α = 30º	β =150º
pentadecágono (n = 15)	α = 24º	β =156º
icoságono (n = 20)	α = 180º	β =162º

Agora você vai calcular a **medida do ângulo externo** de um polígono regular.

O **ângulo externo** (γ) de um polígono, é o ângulo formado pelo prolongamento de um lado do polígono com o lado

a) Observe o pentágono regular abaixo em que estão marcados os ângulos α, β e γ, sendo, α a medida do ângulo central relativo ao lado do pentágono, β a medida do ângulo interno do pentágono e γ a medida do ângulo externo do pentágono. Descubra a medida do ângulo externo γ e explique como você chegou a este resultado.



VERSÃO PRELIMINAR

Resposta:

Nos polígonos regulares, a soma do ângulo central α com a medida do ângulo interno β é igual a 180º, concluímos que o ângulo externo γ, será igual ao ângulo central α, ou seja, para obter o valor de γ basta dividir 360º pelo valor da quantidade de lados do polígono.

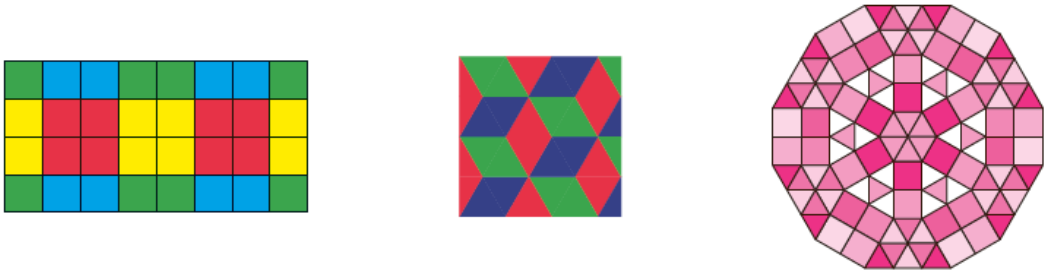
$$\gamma = \frac{360}{n}$$

b) Qual a relação entre o ângulo central α e o ângulo externo γ? Como podemos calcular a medida do ângulo externo de um polígono regular de 30 lados? E de um polígono regular de **n** lados?

Resposta: São congruentes; $\frac{360°}{30}$ e $\frac{360°}{n}$

Pavimentação do plano

Dizemos que um conjunto de polígonos é uma pavimentação do plano (ou ladrilhamento) se, e somente se, os polígonos do conjunto **cobrem sem cruzamento um plano**. Os polígonos utilizados na pavimentação são chamados de ladrilhos e os vértices dos polígonos são chamados de nós da pavimentação.
Veja alguns exemplos de pavimentações:

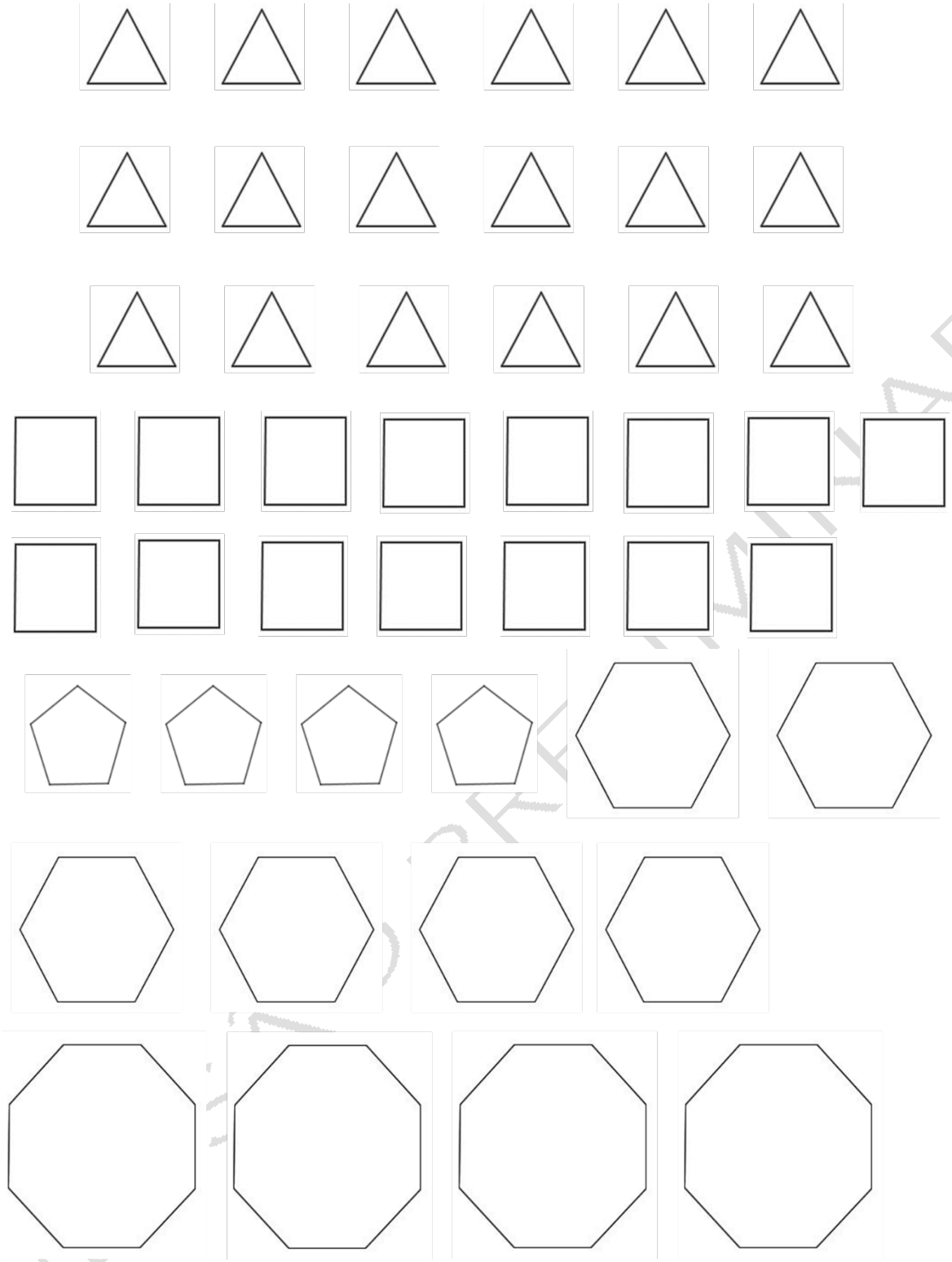


Disponível em
http://janelasdamatematica.blogspot.com/2012/09/pavimentacao-no-plano-mosaicos-de.html
http://passeiomatematico.blogspot.com/2010/10/pavimentacoes.html Acesso em: 16/04/2019

ATIVIDADE 8

Pavimentação do plano com polígonos regulares
Atividade experimental: Em grupos de 3 alunos, recorte 18 triângulos, 15 quadrados, 4 pentágonos, 6 hexágonos e 4 octógonos com os modelos a seguir:

VERSÃO PRELIMINAR



a) Inicie uma pavimentação do plano utilizando apenas polígonos de mesmo tipo, unindo-os pelos seus vértices e colando-os lado a lado. Faça isto com triângulos, depois com quadrados, pentágonos, hexágonos e octógonos.

Resposta pessoal

b) Com quais polígonos regulares é possível realizar a pavimentação do plano? Com quais polígonos regulares não foi possível realizar a pavimentação?

Resposta: Possível com triângulos, quadrados e hexágonos e não possível com pentágonos e octógonos.

c) Discuta com seus colegas de grupo e escreva uma explicação matemática para o fato de alguns polígonos regulares possibilitarem a pavimentação e outros não.

Resposta pessoal.

Para cobrir perfeitamente o plano sem sobreposições e sem deixar "buracos" é necessário que ao unir os vértices desses polígonos ao redor de um ponto, a soma dos ângulos com origem nestes vértices seja 360°.

Assim, possibilitam a pavimentação do plano, os polígonos cuja medida dos ângulos internos é um divisor de 360°.

d) Crie uma pavimentação usando dois ou mais tipos de polígonos regulares e explique matematicamente porque a combinação de polígonos que vocês utilizaram, possibilitaram esta pavimentação.

Resposta pessoal

Ex.: Triângulos e quadrados.

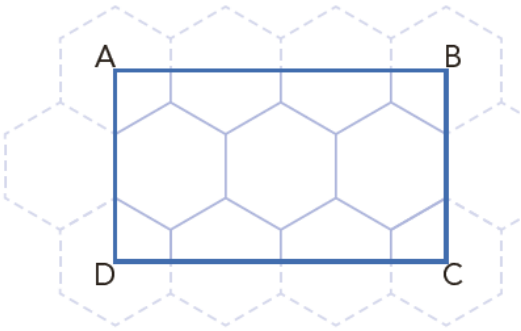
A medida de cada ângulo interno do triângulo é 60° e do quadrado é 90°. Assim, unindo-se os vértices de 3 triângulos e 2 quadrados com lados congruentes ao redor de um ponto, a soma dos ângulos ao redor deste ponto será 360°, cobrindo perfeitamente o plano.

Resolvendo problemas

ATIVIDADE 9

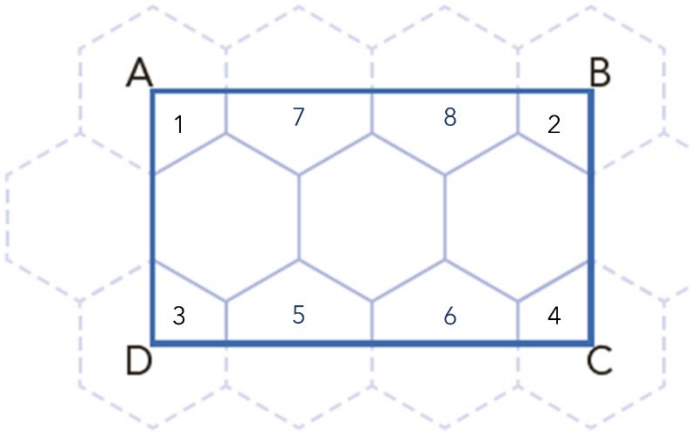
(**Matrizes de Referência para a Avaliação SARESP – 2009**) O retângulo ABCD da figura foi obtido a partir de um mosaico de hexágonos regulares, de modo que os pontos A, B, C e D correspondem aos centros dos hexágonos em cujo interior se encontram.
Assim, admitindo que o retângulo seja pavimentado com partes de hexágonos recortados, sem perdas, o menor número de hexágonos que possibilitam essa pavimentação é:

(A) 4
(B) 6
(C) 8
(D) 10



VERSÃO PRELIMINAR

Resolução:

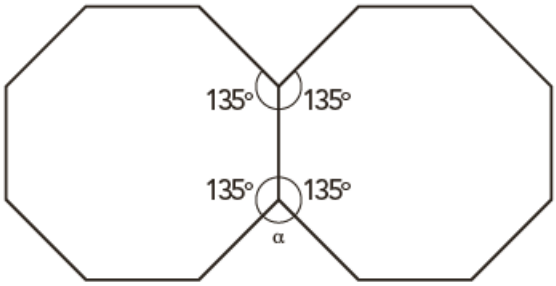


Se juntarmos as partes 1 e 2, 3 e 4, formamos um hexágono completo, se juntarmos as partes 7 e 5, e 8 e 6, formaremos 2 hexágonos completos, totalizando nestas partes, 3 hexágonos.

Somando os hexágonos completos com as partes de hexágonos, temos representados no retângulo indicado 6 hexágonos.

ATIVIDADE 10

(**AAP - 7º Ano – 2º Bimestre – 2017 - Adaptada**) Pretende-se revestir uma parede com dois tipos de ladrilhos no formato de polígonos regulares, obtendo-se um encaixe perfeito. Sabendo-se que um dos polígonos regulares é um octógono, como mostra a figura a seguir.

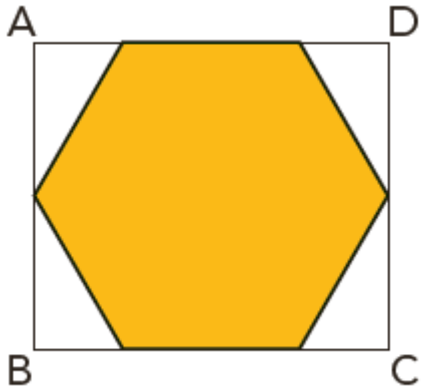


Qual é a medida do ângulo do polígono regular que se encaixa perfeitamente e está representada por α?

Resposta: 90º, pois a soma dos ângulos internos é 360º.

ATIVIDADE 11

(**SARESP 2012 - Adaptado**) Considere uma região retangular ABCD. Para pavimentá-la, inscreve-se um hexágono regular nessa região, conforme a figura. Vamos investigar a medida de cada um dos ângulos internos das regiões triangulares que sobraram sem pavimentar.



a) As quatro regiões triangulares que não foram pavimentadas são congruentes, então basta olhar para um triângulo (escolha um). Você sabe a medida de algum dos seus ângulos? Explique.

Resposta: Ângulo reto, 90º

b) Se você soubesse a medida do ângulo central relativa a um lado do hexágono, te ajudaria a resolver este problema? Por quê?

Resposta pessoal.

Sim, pois um dos ângulos agudos do triângulo corresponde ao ângulo externo do hexágono e este é congruente ao seu ângulo interno.

Conhecendo-se as medidas de dois ângulos do triângulo, é possível descobrir a medida do terceiro por meio da soma das medidas dos ângulos internos do triângulo que é 180°.

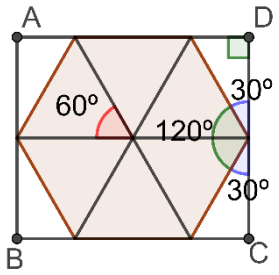
c) Os ângulos internos desses triângulos são:

(A) 90°, 45°, 45°
(B) 90°, 60°, 30°
(C) 90°, 60°, 30°
(D) 60°, 60°, 60°
(E) 90°, 70°, 20°

VERSÃO PRELIMINAR

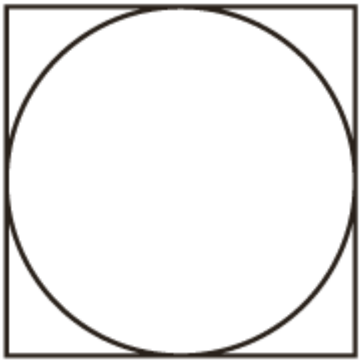
Resposta:

Vide a figura a seguir:



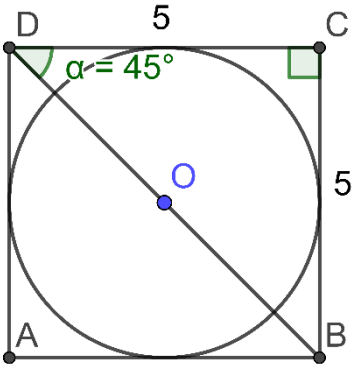
ATIVIDADE 12

Um polígono é considerado **circunscrito em uma circunferência** quando seus lados são tangentes à circunferência, como na figura abaixo.
Calcule a medida da diagonal do quadrado, sabendo que a medida do diâmetro da circunferência é 5 cm. Considere $\sqrt{2} \cong 1{,}414$



Resolução:

Considerando a figura a seguir:



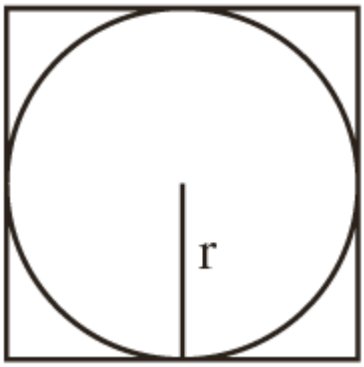
Temos que:

$$\cos 45° = \frac{5}{\overline{DB}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{\overline{DB}} \Rightarrow \overline{DB} \cdot \sqrt{2} = 10 \Rightarrow \overline{DB} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \overline{DB} = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{2} \cong 7{,}07 \text{ cm}$$

VERSÃO MINAR

ATIVIDADE 13

Um quadrado de área 6 cm² está circunscrito em um círculo. Qual é a área do círculo? Considere π ≅ 3,14.

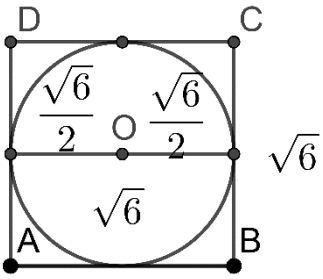


Resolução:

Se a área do quadrado é igual a 6, então:

$L^2 = 6 \Rightarrow L = \left|\sqrt{6}\right|$ cm

Considerando a figura a seguir:

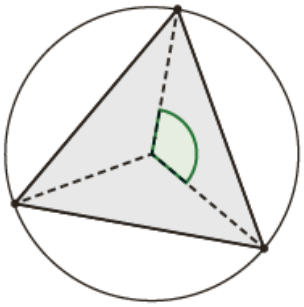


Temos que:

$$\text{Área}_{\text{círculo}} = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{6}{4} \cong 4{,}71 \text{ cm}^2$$

ATIVIDADE 14

Considere um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 8 cm, como na figura.



VERSÃO PRELIMINAR

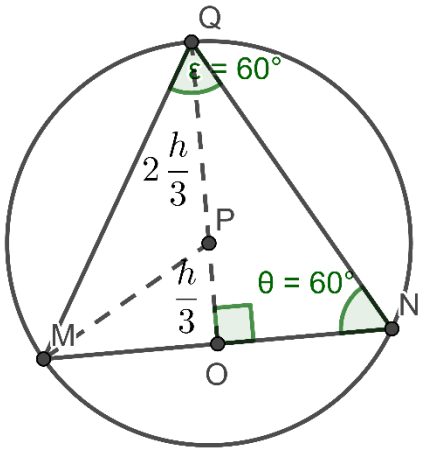
a) Determine a medida do ângulo central do triângulo relativa ao lado.

Resposta: 120º

b) Calcule a medida do lado do triângulo.

Resolução:

Considerando a figura a seguir para suporte na resolução:



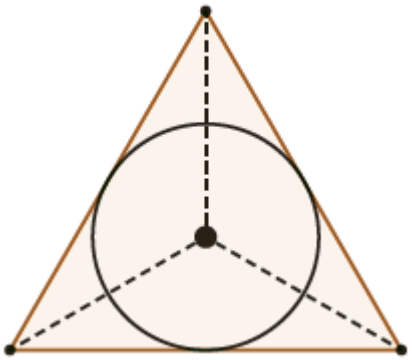
$$\text{sen}60° = \frac{h}{L} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{L} \Rightarrow h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2h}{3} = R \Rightarrow 2h = 3R \Rightarrow 2 \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = 3R \Rightarrow L\sqrt{3} = 3R \Rightarrow L = \frac{3R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3R\sqrt{3}}{3} = R\sqrt{3}$$

Se neste caso: $L = R\sqrt{3}$, temos que a medida do lado do triângulo, será igual a $8\sqrt{3}$ cm

ATIVIDADE 15

Considere um triângulo equilátero circunscrito em uma circunferência de raio 8 cm, como na figura.



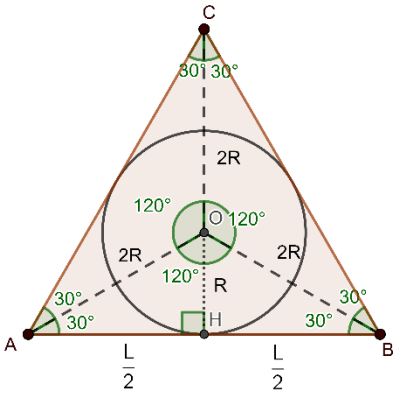
VERSÃO PRELIMINAR

a) Determine a medida do ângulo central do triângulo relativa ao lado.

Resposta: 120º

b) Calcule a medida do lado do triângulo.

Resolução:



A altura do triângulo ABC, pode ser calculada da seguinte maneira:

No triângulo AOH, temos que:

$$\text{sen}30° = \frac{R}{\overline{AO}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R}{\overline{AO}} \Rightarrow \overline{AO} = 2R$$

Pode se observar na figura apresentada que os triângulos AOB e AOC são congruentes, então, temos que $\overline{OC} = 2R$

Se $\overline{HO} = R$ e $\overline{OC} = 2R$, então $\overline{HC} = 3R$

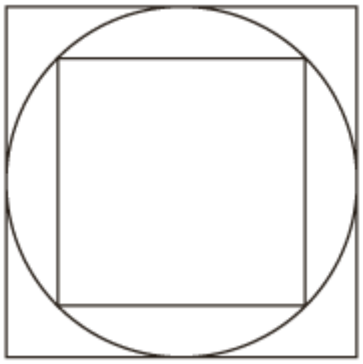
Então temos que:

$$\text{sen}60° = \frac{H}{L} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{L} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot L = 6R \Rightarrow L = \frac{6R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6R\sqrt{3}}{3} = 2R\sqrt{3}$$

Então, $L = 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

ATIVIDADE 16

A figura a seguir apresenta um quadrado inscrito e um circunscrito em uma circunferência de raio 10 cm.

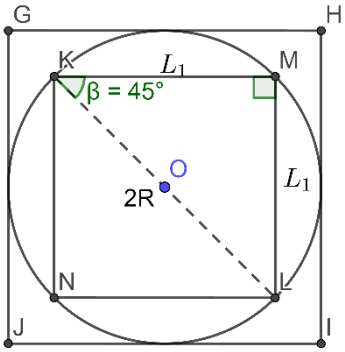


VERSÃO PRELIMINAR

a) Qual a medida do lado do quadrado inscrito?

Resolução:

Considerando a figura a seguir para suporte na resolução:

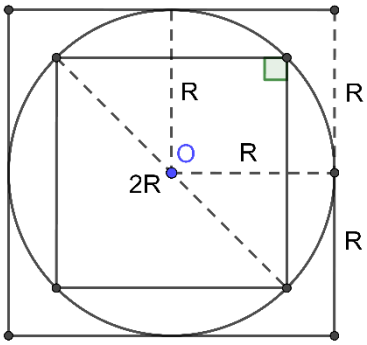


$$\text{sen}45° = \frac{L_1}{2R} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{L_1}{2R} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot 2R = 2 \cdot L_1 \Rightarrow L_1 = \frac{\sqrt{2} \cdot 2R}{2} = R \cdot \sqrt{2}$$

Se o raio da circunferência mede 10 cm, então o lado do quadrado inscrito mede $10\sqrt{2}$cm

b) Qual a medida do lado do quadrado circunscrito?

Considerando a figura a seguir para suporte na resolução:

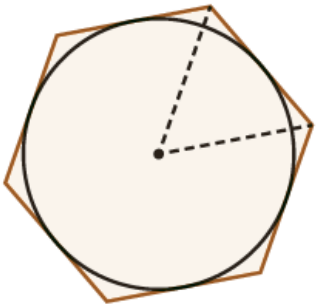


Da figura apresentada, nota-se que a medida do lado do quadrado circunscrito é o dobro da medida do raio da circunferência, ou seja, 20cm.

VERSÃO ELIMINAR

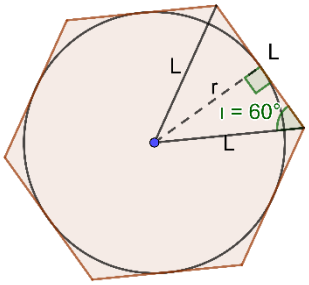
ATIVIDADE 17

Um comerciante elaborou um logotipo para sua revenda formado por um hexágono regular circunscrito a uma circunferência de raio 4 cm, que, por sua vez, circunscrevia um triângulo equilátero. Conforme representado na figura a seguir. Qual é, nesse logotipo, a medida do lado do hexágono?



Resposta:

Considerando a figura a seguir para suporte na resolução:

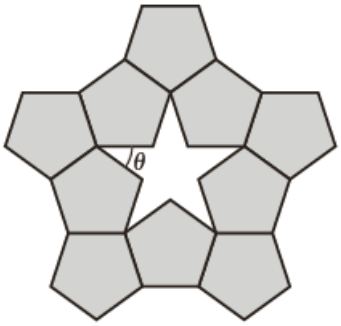


$$\text{sen}60° = \frac{r}{L} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{L} \Rightarrow L\sqrt{3} = 2r \Rightarrow L = \frac{2r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3} \Rightarrow L = \frac{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cong 4{,}62\text{cm}$$

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 18

(UNIFESP - 2003-Adaptada) Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura a seguir. Nessas condições, quanto mede o ângulo θ?



Resolução:

Na figura, constata-se que o ângulo θ é proveniente do encontro de três pentágonos e sabendo-se que cada ângulo interno do pentágono mede 108º então:

$3 \cdot 108 + \theta = 360 \Rightarrow \theta = 360° - 324° = 36°$

ATIVIDADE 19

(FAAP-97) A medida mais próxima de cada ângulo externo do heptágono regular da moeda de R$ 0,25 é:

(A) 60º
(B) 49º
(C) 36º
(D) 83º
(E) 51º

Resolução:

$\alpha = \frac{360°}{7} \cong 51{,}4°$

VERSÃO PRELIMINAR

MATEMÁTICA

2ª Série – Ensino Médio

4º Bimestre

1. Organização das grades curriculares

Tendo em mente as ponderações anteriores, apresentamos uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais indicadas na Base Nacional Comum Curricular, referente à etapa do Ensino Médio.

A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (Números e Álgebra, Geometria e Grandezas e Estatística e Probabilidade), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias. Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.

Desta forma, os quadros apresentados destacam as habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes em cada unidade. Tais habilidades traduzem, de modo operacional, as ações que os alunos devem ser capazes de realizar, ao final de um determinado estágio de aprendizagem, após serem apresentados aos conteúdos curriculares listados.

VERSÃO PRELIMINAR

ENSINO MÉDIO – CURRÍCULO DE MATEMÁTICA – 2ª SÉRIE (4º BIMESTRE)		
CURRÍCULO OFICIAL – SEDUC-SP		**Currículo Paulista do Ensino Médio**
Tema/Conteúdo	**Habilidades**	**Competências Gerais**
Geometria Geometria métrica espacial. • Elementos de geometria de posição. • Poliedros, prismas e pirâmides. • Cilindros, cones e esferas.	• Compreender os fatos fundamentais relativos ao modo geométrico de organização do conhecimento (conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas) • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos. • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como a pirâmide e o cone, utilizando-as em diferentes contextos. • Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) da esfera e de suas partes, utilizando-as em diferentes contextos. • Compreender as propriedades da esfera e de suas partes, relacionando-as com os significados dos fusos, das latitudes e das longitudes terrestres.	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação , a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

VERSÃO PRELIMINAR

1.1 Grade curricular da 2ª série do Ensino Médio

1.2 Geometria espacial métrica

Os conteúdos apresentados, tanto nas habilidades do Currículo Oficial, como na Competência Específica 2, mencionam a Geometria métrica espacial, que poderá ser apresentada de forma crescente, combinando vários conceitos matemáticos, sendo, em alguns casos, apresentados projetos e propostas interdisciplinares. Nela, algumas das formas mais comuns presentes na natureza e na produção humana são estudadas. Para isso, é necessário que sejam relembradas as propriedades fundamentais das figuras planas, afinal, são elas que compõem as bases, as faces e as seções das figuras espaciais. Sabe-se que uma das dificuldades que os alunos enfrentam no estudo da geometria espacial é a representação e a interpretação de figuras tridimensionais desenhadas no plano; assim a proposição de atividades de manipulação e exploração dos sólidos geométricos seria muito oportuna nesse momento. Convém ressaltar que, algumas relações métricas são construídas em meio à solução de problemas exemplares, ou seja, aqueles que são comuns em todo material didático-pedagógico, desta forma o professor pode combinar esses exercícios com aqueles que já fazem parte de sua experiência no ensino deste tema.
Todas as habilidades referenciadas na segunda coluna estão contidas nas Situações de Aprendizagens do Volume 2, da 2ª série do Ensino Médio, conforme segue:
Situação de Aprendizagem 5: Prismas: Uma forma de ocupar o Espaço; pg. 61 a 71.
Situação de Aprendizagem 6: Cilindros: Uma mudança de base; pg. 72 a 82.
Situação de Aprendizagem 7: O movimento de ascensão: Pirâmides e Prismas; pg. 83 a 95.
Situação de Aprendizagem 8: Esfera conhecendo a forma do Mundo; pg. 95 a 109.
Para complementar este assunto apresentamos duas videoaulas contidas na plataforma M3 – Matemática Multimídia:
Criador e Criatura, disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1078 (acesso em: 06/11/2018)
Matemática das esferas: disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1272 (acesso em: 06/11/2018)

1.3 Volume de sólidos geométricos

Ao iniciarmos este tópico, convém ressaltar que o trabalho com Geometria métrica espacial, necessita de um tratamento de forma crescente, ou seja, não fragmentado, combinando conceitos matemáticos, sendo em alguns casos, apresentados por projetos e propostas interdisciplinares. Nela, algumas das formas mais comuns presentes na natureza e na produção humana são estudadas. Para isso, é necessário que sejam relembradas as propriedades fundamentais das figuras planas, afinal, são elas que compõem as bases, as faces e as seções das figuras espaciais, embora a linguagem geométrica perpasse por vários conteúdos do Ensino Médio. Sabemos que uma das dificuldades que os alunos enfrentam no estudo da geometria espacial é a representação e a interpretação de figuras tridimensionais desenhadas no plano. Assim, a proposição de atividades de manipulação e exploração dos sólidos geométricos, é importante para destacar algumas relações métricas que são construídas em meio à solução de problemas.
O professor pode combinar esses exercícios com aqueles que já fazem parte de sua experiência no ensino desse tema. Reconhecemos que o prisma e alguns de seus fatos

VERSÃO PRELIMINAR

fundamentais são conhecidos pelos alunos, pois já foram tema de estudos no Ensino Fundamental. O que se pretende é consolidar esse conhecimento e elaborar um raciocínio que seja aplicado e ampliado, à medida que avançamos no estudo dos outros sólidos, como o cilindro, a pirâmide e o cone.

Todos os temas acima apresentados podem ser encontrados no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, nas respectivas Situações de Aprendizagem, conforme segue:

Situação de Aprendizagem 5 – Prismas: Uma forma de ocupar o espaço, Vol. 2, 2ª série do Ensino Médio, pg. 60 a 71.

Situação de Aprendizagem 6 – Cilindros: Uma mudança de base, Vol. 2, 2ª série do Ensino Médio, pg. 71 a 83.

Situação de Aprendizagem 7 – O movimento de ascensão: Pirâmides, Vol. 2, 2ª série do Ensino Médio, pg. 83 a 95.

Situação de Aprendizagem 8 – Esfera: Conhecendo a forma do Mundo, Vol. 2, 2ª série do Ensino Médio, pg. 95 a 109.

Para complementar este assunto apresentamos duas videoaulas contidas na plataforma M3 – Matemática Multimídia:

Mistério, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1040, acesso em: 29/11/2018.

A maldição da pirâmide, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1132, acesso em: 29/11/2018.

Caixa de papel (vídeo), disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1382, acesso em: 29/11/2018.

Caixa de papel (experimento), disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1367, acesso em: 29/11/2018.

Criador e criatura, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1078, acesso em 29/11/2018.

Cilindro = Cone + Esfera ÷ 2, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1000, acesso em: 29/11/2018.

Duplicação do cubo, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1007, acesso em 29/11/2018.

Determinantes e áreas, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1226, acesso em 29/11/2018.

Fórmula mágica, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1099, acesso em: 29/11/2018.

Lixo, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1273, acesso em: 29/11/2018.

Qual é o cone com maior volume? Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1030, acesso em: 29/11/2018.

Volumes de pirâmides, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1039, acesso em: 29/11/2018.

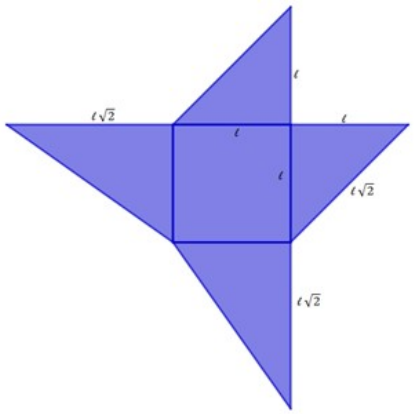
Um poema, três quebra-cabeças, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1156, acesso em: 29/11/2018.

1.4 Sugestão de atividade

Construa três pirâmides oblíquas base quadrada com lado l planificadas na figura a seguir. Após montadas e encaixadas adequadamente as três pirâmides formarão um cubo de aresta

VERSÃO PRELIMINAR

l igual ao lado da base da pirâmide. Tal atividade pode auxiliar na consolidação de dois conceitos importantes:



Planificação da pirâmide oblíqua de base quadrada com lado l de altura l .

O volume de uma pirâmide é igual a 1/3 do volume de um prisma de mesma base e mesma altura.

O volume de um sólido reto é igual ao volume de um sólido oblíquo de mesma base e mesma altura. (Princípio de Cavalieri).

VERSÃO PRELIMINAR

TEMA 1 - PRISMAS: UMA FORMA DE OCUPAR O ESPAÇO

ATIVIDADE 1

Para o empacotamento de presentes, uma loja dispõe de dois tipos de embalagem de papelão: uma no formato de um paralelepípedo oblíquo (Figura A), outra no formato de um paralelepípedo reto-retângulo (Figura B). Considerando os valores indicados nas figuras a seguir, calcule qual das duas formas geométricas exigirá menos papelão para ser confeccionada.

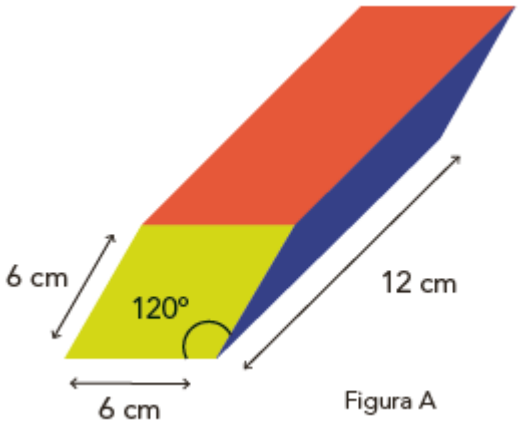


Figura A

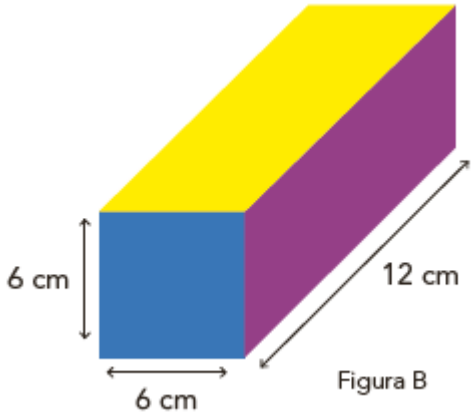
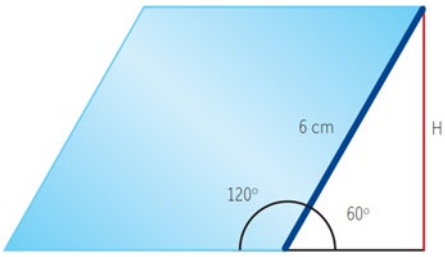


Figura B

Comentários:

Ao observar os dados da atividade, uma primeira impressão pode sugerir que a área total seja a mesma, pois o paralelepípedo oblíquo poderia ser obtido pela inclinação do paralelepípedo reto. Contudo, na prática, isso não se verifica, pois, a face frontal e a de fundo da Figura B (quadrados),uma vez fechada a caixa, não permitem tal movimento por fixarem o ângulo reto. Após esta discussão, pode-se destacar que os dois prismas possuem bases iguais e duas faces laterais iguais, sendo suas diferenças dadas pelas faces frontal e de fundo (losango e quadrado).Dessa forma, a decisão sobre o menor consumo de papelão pode recair somente sobre o cálculo da área do quadrado e do losango. Caso os alunos saibam que, entre os paralelogramos de mesmo perímetro, o quadrado é o que determina a maior área, a solução fica possível sem a realização de cálculos. Agora, apresentamos a resolução do problema efetuando todos os cálculos:



VERSÃO PRELIMINAR

Resolução:

Figura A

Para a área do losango, vamos interpretá-lo como um paralelogramo. A altura correspondente à base será: sen60° = H/6

Como o prisma oblíquo é formado por dois losangos de base 6 cm e altura 5,2 cm e quatro retângulos de dimensões12 cm por 6 cm:

$A_{total} = 2 \cdot 6 \cdot 5{,}2 + 4 \cdot 12 \cdot 6 = 62{,}4 + 288 \Rightarrow A_{total} \cong 350{,}4\ cm^2$

Figura B

O prisma é formado por quatro retângulos de 6 cm por 12 cm e 2 quadrados de lado 6 cm.

$A_{total} = 2 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 12 \cdot 6 = 72 + 288 \Rightarrow A_{total} = 360\ cm^2$

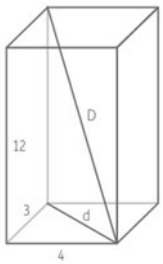
Segundo os dados do problema, o formato do paralelepípedo oblíquo representa uma economia de, aproximadamente, 3% em relação ao paralelepípedo reto. Vale ainda observar que nessa atividade não apareceu a discussão sobre a capacidade de cada caixa. Esse tema será abordado mais à frente, quando trataremos de volume de prismas.

ATIVIDADE 2

Uma caixa de lápis tem o formato de um paralelepípedo reto-retângulo com 3 cm de comprimento, 4 cm de profundidade e 12 cm de altura. Desenhe uma caixa com essas dimensões e, em seguida, calcule a medida do maior lápis que você pode guardar nessa caixa sem que a ponta fique para fora da borda.

Comentários:

A figura a seguir ilustra a situação e as possíveis triangulações.



Observamos que o cálculo do comprimento do lápis está associado ao cálculo das diagonais da base e do prisma. Em ambos, aplicaremos o teorema de Pitágoras.

VERSÃO PRELIMINAR

Resolução:

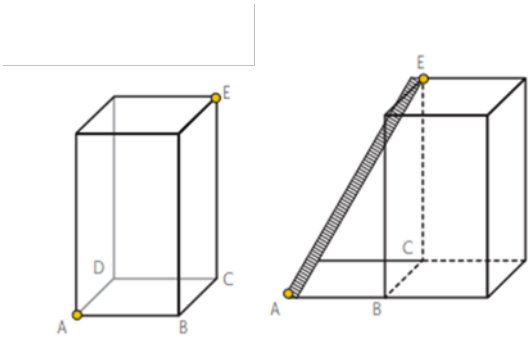
Diagonal da base:

$d^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow d = 5$

Diagonal do prisma:

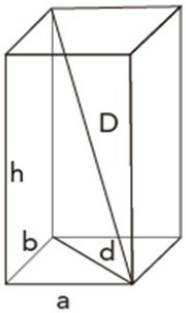
$D^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow D = 13$, portanto, o maior lápis deve ter 13 cm de comprimento.

O professor também pode discutir com os alunos uma solução prática para este problema: posicione a caixa sobre o tampo de uma mesa, registrando, com lápis, a superfície da base e a posição do vértice A. Faça uma translação da caixa, deslocando-a em uma medida igual à aresta da base, como mostra a figura a seguir, e, com o auxílio de uma régua, meça a distância AE.



ATIVIDADE 3

Considere um paralelepípedo reto-retângulo genérico, como o indicado a seguir, com dimensões a, b e h.



a) Encontre as expressões matemáticas que relacionam as diagonais d e D com esses valores.

Conforme a figura, tem-se que, para os itens (a) e (b) basta considerar uma caixa de dimensões da base a e b e altura h, e proceder como propomos a seguir: $d^2 = a^2 + b^2$

Diagonal do prisma:

$$D^2 = d^2 + h^2 \Rightarrow D^2 = a^2 + b^2 + h^2 \Rightarrow \boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}}$$

VERSÃO PRELIMINAR

b) Generalize essas expressões para o caso de o paralelepípedo ser um cubo com arestas de dimensão a.

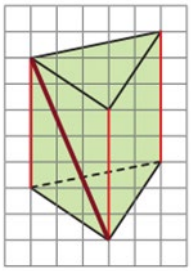
$D = \sqrt{2a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow \boxed{D = a\sqrt{3}}$

ATIVIDADE 4

Com base na atividade anterior, investigue a mesma situação para um porta-lápis nos seguintes formatos:

a) prisma reto triangular, com aresta de base 12 cm e altura 16 cm.

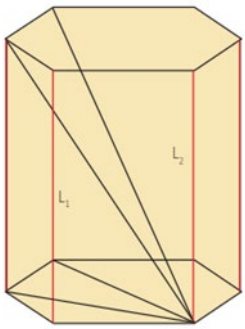
No caso do prisma regular triangular, o lápis terá o comprimento da diagonal da face lateral. É interessante observar que esse prisma não tem diagonal.



$L^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow L^2 = 400$, logo L = 20. O maior lápis terá 20 cm.

b) prisma reto hexagonal, com aresta de base 6 cm e altura 8 cm.

O prisma hexagonal é particularmente interessante, porque possui duas medidas de diagonais, cada uma relativa às medidas das diagonais da base.



Cálculo de L_1 (diagonal menor): O lápis L1 é a hipotenusa do triângulo retângulo que tem como catetos a diagonal menor da base e a aresta lateral. A diagonal menor da base equivale a duas alturas de um triângulo equilátero de lado igual ao do hexágono regular. Portanto, d = 6 $\sqrt{3}$ cm, uma vez que a altura de um triângulo equiláteropode ser calculada por: d =l$\sqrt{3}$/2

Portanto, $L_1^2 = (6\sqrt{3})^2 + 8^2$

VERSÃO PRELIMINAR

$L_1^2 = 172 \Rightarrow L_1 \cong 13{,}11$ cm.

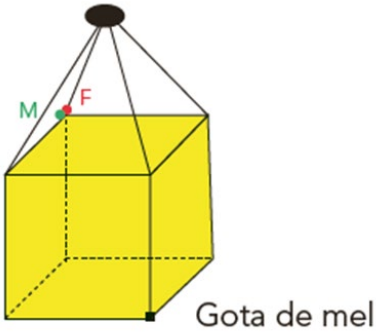
Cálculo de L2 (diagonal maior): O lápis L2 é a hipotenusa do triângulo retângulo que tem como catetos a diagonal maior da base e a aresta lateral. A diagonal maior da base equivale ao dobro da medida do lado do hexágono regular. Portanto, D = 12.

Assim, $L_2^2 = 12^2 + 8^2$, logo $L_2 \cong 14{,}42$ cm.

O maior lápis terá, então, aproximadamente, 14,42 cm.

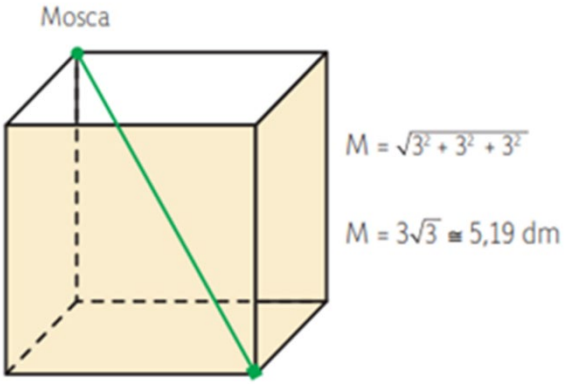
ATIVIDADE 5

A luminária de uma lanchonete tem a forma de um cubo. Contudo, ela só possui faces laterais. As bases foram subtraídas para iluminar melhor o ambiente. Uma mosca e uma formiga estão sobre um mesmo vértice do cubo, como indicado na figura pelas letras M (mosca) e F (formiga). No vértice oposto da outra base, está uma gota de mel, que interessa a ambos os insetos. A mosca tem a vantagem de ter asas e poder voar. A formiga só pode andar pela superfície e pelas arestas da luminária.



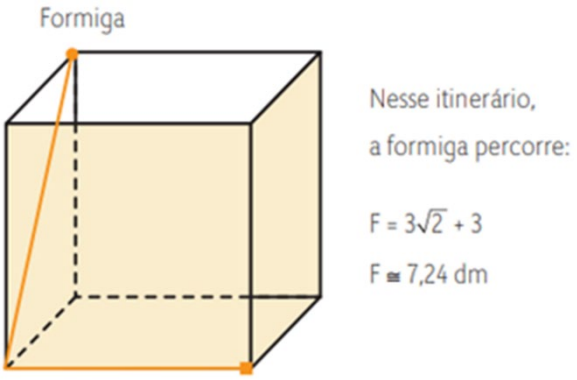
a) Indique, na figura representada, qual é o menor percurso que cada inseto deve fazer para alcançar a gota de mel.

A mosca, voando, percorre a diagonal do cubo. Assim, seu caminho medirá:



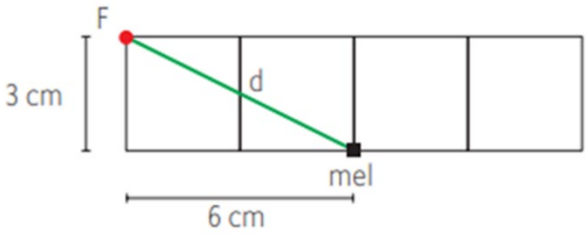
No caso da formiga, temos de estudar algumas possibilidades. Uma delas é imaginar que ela percorre uma diagonal da face e depois uma aresta do cubo. Esquematicamente, temos:

VERSÃO MINIMAR

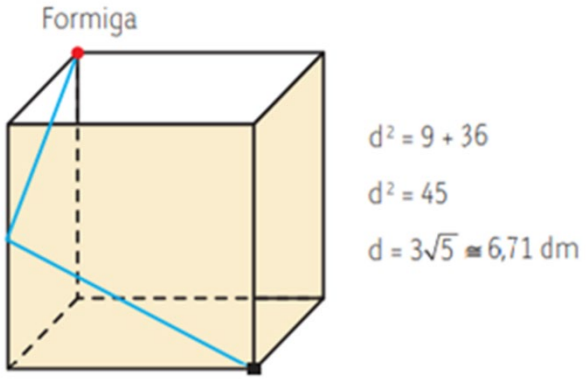


b) Admitindo que a aresta da base da luminária meça 3 dm, qual é o tamanho do percurso feito por cada inseto?

Contudo, planificando-se a figura, encontramos outra situação, melhor que a primeira:



Calculando-se o comprimento d teremos:



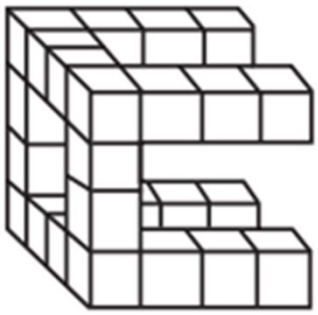
Portanto, a formiga chegou depois. O menor caminho para ela chegar ao pingo de mel é passando pelo ponto médio de uma aresta.

ATIVIDADE 6

(FUVEST 2006) A partir de 64 cubos brancos, todos iguais, forma-se um novo cubo. Em seguida, esse novo cubo tem cinco de suas seis faces pintadas de vermelho. O número de cubos menores que tiveram pelo menos duas de suas faces pintadas de vermelho é:

(A) 24
(B) 26
(C) 28
(D) 30
(E) 32

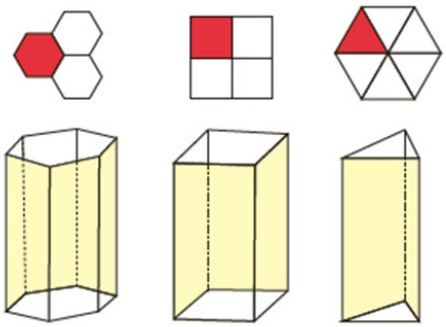
Observe que, quando pintarmos 5 das 6 faces do cubo, 8 das12 arestas serão comuns a pelo menos duas faces pintadas. O número de cubos menores que contêm essas arestas é 24.



O volume do prisma e o princípio de Cavalieri

O desenvolvimento das embalagens de produtos tornou-se um tema relevante nos dias de hoje, particularmente quando o assunto é preservação do meio ambiente. Além do tipo de material com que são fabricadas, elas devem ser bem dimensionadas, isto é, devem ter a melhor relação entre o volume interno e a quantidade de material utilizado. Além disso, na escolha do seu formato, deve-se considerar que, quando embaladas coletivamente, o espaço vazio entre elas seja o menor possível. Na natureza, encontramos uma situação similar: a construção dos alvéolos das abelhas.

Observando-se a forma prismática dos alvéolos, percebe-se que eles respeitam uma exigência: a de permitir que, com uma mesma quantidade de cera, se construa um recipiente com maior volume para acondicionar o mel. O fato de as paredes dos alvéolos serem comuns, permitindo que não haja espaços vazios entre elas, remete-nos ao problema da pavimentação do plano, solucionado quando usamos triângulos regulares, quadrados e hexágonos regulares. Como a nossa situação é espacial, podemos imaginar a “pavimentação do espaço” com poliedros, particularmente com os prismas regulares retos de base triangular, quadrangular e hexagonal. Mas qual deles comporta o maior volume, supondo que tenham a mesma área lateral?



VERSÃO PRELIMINAR

A solução das abelhas

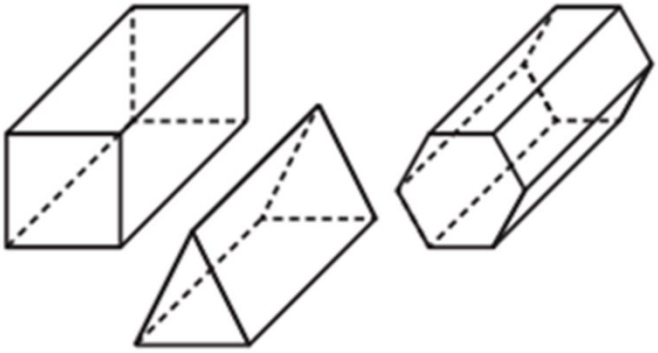
A finalidade das abelhas, quando constroem seus alvéolos de cera, é apenas fazer o recipiente para o mel que fabricam, e isso não é produto do pensamento, mas de seu instinto. Nessa atividade, as abelhas utilizam importantes recursos naturais que o ser humano busca de forma consciente por meio de conceitos geométricos. É interessante perceber que, no instinto animal, podemos identificar soluções para problemas humanos, como o da economia de material na produção de embalagens. Essa é, sem dúvida, uma forma instigante de promover a investigação científica.
Vamos, então, investigar a solução das abelhas!

ATIVIDADE 7

Cada grupo receberá duas folhas de sulfite e terá uma tarefa diferente: alguns grupos construirão os alvéolos na forma de um prisma triangular regular; outros, na forma quadrangular regular; e o restante, na forma hexagonal regular. Cada grupo trabalhará com as duas folhas. A primeira será utilizada para a construção da lateral do alvéolo. Esta folha deve ser trabalhada com o maior lado apoiado sobre a mesa. A segunda folha será utilizada para formar a base do alvéolo. Para alcançar a forma desejada, vocês podem utilizar dobraduras. Terminada essa etapa, meçam com uma régua as arestas da base e da altura do alvéolo, e calculem seu volume com base nas medidas aproximadas.
Concluída a tarefa, o professor abrira o debate coletivo recolhendo os dados dos grupos e comparando-os, para concluir qual dos formatos estudados tem o maior volume.
Registre, no espaço a seguir, tanto os dados do seu problema como as conclusões tiradas em sala de aula.

Formato do prisma investigado		Formato do prisma investigado		Formato do prisma investigado	
Medida da aresta da base		Medida da aresta da base		Medida da aresta da base	
Medida da altura		Medida da altura		Medida da altura	
Área da base		Área da base		Área da base	
Volume do Prisma		Volume do Prisma		Volume do Prisma	
Área lateral		Área lateral		Área lateral	

Como solução do problema, apresentamos a seguir uma discussão geral. Caso o professor julgue interessante, pode explorar o mesmo problema de forma algébrica, supondo para a base triangular a medida de aresta x, para a base quadrada y, e para a base hexagonal z.



Perímetro do triângulo 3x

Perímetro do quadrado 4y

Perímetro do hexágono 6z.

Como o perímetro das bases é o mesmo (que corresponde ao lado maior da folha de papel sulfite), podemos escrever:

$$4y = 3x \Rightarrow y = \frac{3x}{4} \Rightarrow 4y = 3x \Rightarrow y = \frac{3x}{4}$$

$$\text{então, } 3x = 4y = 6z \Rightarrow 6z = 3x \Rightarrow z = \frac{x}{2}$$

Portanto, as arestas da base dos três prismas são, respectivamente,

$$x, \frac{3x}{4}, \frac{x}{2}$$

Os três prismas têm a mesma altura h (lado menor da folha de sulfite), e sabendo que o volume do prisma, já estudado anteriormente, é igual ao produto da área da base pela altura, então, temos:

Prisma triangular regular
Área da base $A = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$
Volume $V = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h$

Prisma quadrangular regular
Área da base $A = \frac{9x^2}{16}$
Volume $V = \frac{9x^2}{16} \cdot h$

VERSÃO PRELIMINAR

Prisma hexagonal regular
Área da base $A = \dfrac{3x^2 \cdot \sqrt{3}}{8}$
Volume $V = \dfrac{3x^2 \cdot \sqrt{3}}{8} \cdot h$

Desse modo, tomando o valor aproximado para $\sqrt{3} = 1{,}7320$, obtemos uma comparação entre os seguintes valores de volumes:

Prisma triangular regular
$0{,}4330 \cdot x^2 \cdot h$

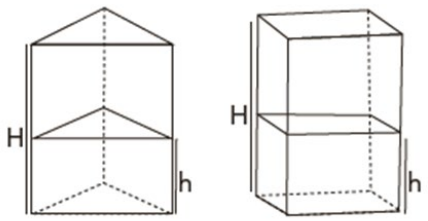
Prisma quadrangular regular
$0{,}5625 \cdot x^2 \cdot h$

Prisma hexagonal regular
$0{,}6495 \cdot x^2 \cdot h$

Estes dados permitem concluir que, entre os três prismas, aquele que maximiza o volume, com uma justaposição de lados, é o prisma hexagonal regular.

ATIVIDADE 8

Dois vasos de mesma altura H têm formatos diferentes e estão apoiados sobre uma mesa. Colocando-se água em ambos os vasos até a altura h, constata-se que, para qualquer valor de h, sendo $0 \leq h \leq H$, as superfícies da água nos dois vasos têm áreas iguais. Que relação você acredita que existe entre os volumes dos dois vasos? Justifique sua resposta.



Professor, esta atividade servirá para levantar hipóteses que depois serão verificadas pelo Princípio de Cavalieri. No caso, podemos aproveitá-lo para observar os argumentos dos alunos que comprovariam que ambos os vasos possuem o mesmo volume.

VERSÃO PRELIMINAR

O princípio de Cavalieri

Na Geometria é mais simples calcular o comprimento de uma linha reta do que obter o comprimento de uma curva. Da mesma forma, é mais fácil calcular a área de um polígono convexo do que obter a área de uma região não poligonal, ou calcular o volume de um paralelepípedo do que o de um sólido geométrico com outro formato. A busca por métodos generalizados para calcular volumes levou matemáticos, como o geômetra italiano Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647), a imaginar os sólidos como se fossem formados por camadas infinitamente finas (os indivisíveis).

Para Cavalieri, seguindo uma linha de raciocínio análoga à de Arquimedes, Galileu e Kepler, a linha era formada por pontos sem comprimento, a superfície por infinitas linhas sem largura, e os sólidos eram interpretados por uma reunião de superfícies sem profundidade. No seu entendimento, as figuras planas são como tecidos compostos de fios paralelos e os sólidos, como livros, pilhas de folhas paralelas.

De forma simplificada, o Princípio de Cavalieri pode ser compreendido a partir de um maço de cartas de um baralho. Dispondo as cartas, uma a uma, no formato da Figura 1, o sólido final foi construído pela sobreposição de figuras planas, no caso, retângulos. Qual será o seu volume? Deslizando as cartas, uma sobre a outra, encontramos outro formato, agora mais conhecido: um paralelepípedo oblíquo (Figura 2). Afinal, houve ou não alteração do volume do sólido? A forma mudou, mas não seu volume, pois o volume do sólido corresponde ao total de cartas, e este não muda quando as cartas deslizam umas sobre as outras. Vamos deslizar novamente as cartas, criando a forma de um paralelepípedo reto (Figura 3), cuja expressão do volume é conhecida: produto da área da base pela altura.

Figura 1

Figura 2

Figura 3

Assim, podemos concluir que, de forma geral, tomados dois sólidos com bases de mesma área e sobre um mesmo plano, se todas as seções paralelas à base dos dois sólidos têm a mesma área, então, os dois sólidos têm o mesmo volume (Figura 4).

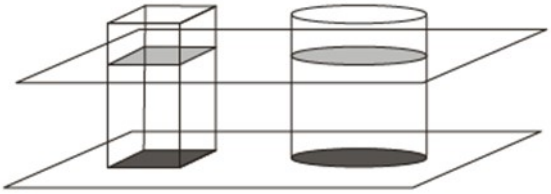


Figura 4

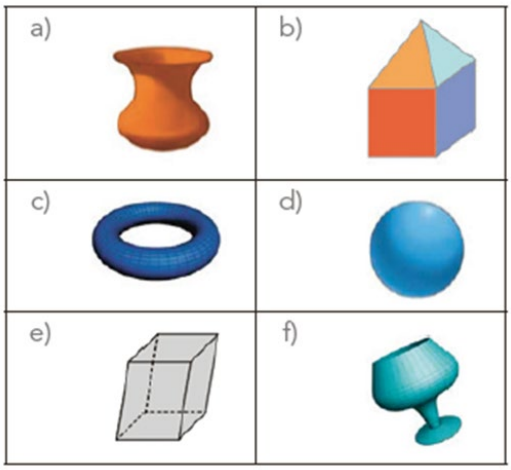
VERSÃO PRELIMINAR

TEMA 2 – CILINDROS, CONES E ESFERAS

Cilindros: Uma mudança de base

ATIVIDADE 9

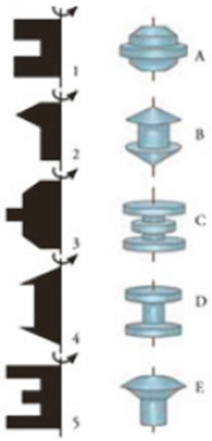
Quais dos sólidos, a seguir, podem ser considerados sólidos de revolução? Justifique sua resposta.



São os sólidos A, C, D e F.

ATIVIDADE 10

(ENEM 1999) Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em torno de um eixo. Girando-se as figuras a seguir em torno da haste indicada obtêm-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita. A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é:

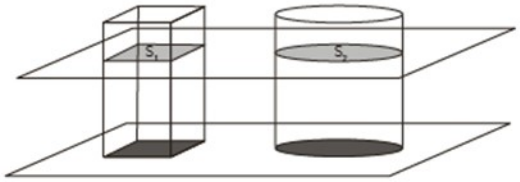


(A) 1A, 2B, 3C, 4D, 5E
(B) 1B, 2C, 3D, 4E, 5A
(C) 1B, 2D, 3E, 4A, 5C
(D) 1D, 2E, 3A, 4B, 5C
(E) 1D, 2E, 3B, 4C, 5A.

VERSÃO PRELIMINAR

O Volume do cilindro

Uma estrutura, atualmente, muito comum e significativa para a exploração da ideia do volume do cilindro pode ser encontrada em um porta-CDs. De maneira intuitiva, podemos considerar o cilindro como uma figura espacial formada pela sobreposição ou pelo empilhamento, em uma mesma direção, de círculos iguais uns sobre os outros.
Esta forma de interpretação pode ser explorada como análoga ao volume dos prismas, concluindo-se que o volume de um cilindro é produto da área de sua base pela altura: $V = A_b.h$.
Nesta situação também pode ser aplicado o Princípio de Cavalieri. Considerando um prisma e um cilindro de mesmas áreas de base, apoiados sobre um mesmo plano, qualquer plano que passar paralelo à base deve interceptar os dois sólidos, formando duas superfícies S1 e S2, paralelas às bases do prisma e do cilindro, de mesma área. Sendo assim, podemos concluir que o volume de um cilindro, como no prisma, é determinado pelo produto da área de sua base pela altura. Nesse caso, a base é um círculo, cuja expressão da área será $A_b = \pi\ u.r^2$. Logo, o volume será dado por: $V = \pi\ r^2h$.

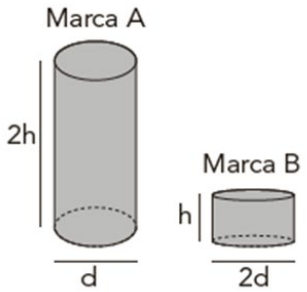


ATIVIDADE 11

Latas de molho de tomate têm, geralmente, forma cilíndrica. Um consumidor encontrou duas marcas de seu interesse e observou os seguintes fatos:

- A embalagem da marca A possuía o dobro da altura da embalagem da marca B.
- A embalagem da marca B possuía o dobro do diâmetro da embalagem da marca A.

Sabendo-se que a primeira custa R$ 2,30 e a segunda, R$ 3,40, qual será a compra mais econômica?



VERSÃO PRELIMINAR

Resolução:

- O cilindro A tem raio da base igual a d/2 e altura igual a 2h.Logo,

$$V_A = \pi \cdot r^2 \cdot 2h = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot 2h = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot 2h \Rightarrow \boxed{V_A = \frac{d^2 \cdot h \cdot \pi}{2}}$$

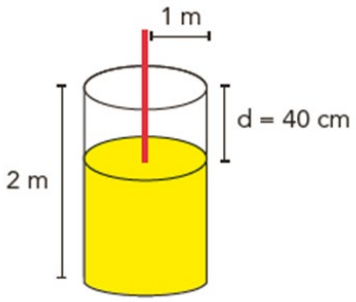
- O cilindro B tem raio da base igual a d e altura igual a h.

Logo, $VB = A_b \cdot h = \pi \cdot d^2 \cdot h$

O volume da marca B tem o dobro do volume da marca A. Como o preço da marca A é maior que a metade do preço da marca B, é mais vantajoso comprar a marca B.

ATIVIDADE 12

Os reservatórios de gasolina dos postos, geralmente, são tanques no formato de um cilindro reto. Para avaliar o volume de combustível que ainda resta no cilindro enterrado no solo, o funcionário do posto utiliza uma régua, colocada verticalmente na boca do tanque até atingir o nível do combustível. Ao retirar a régua do tanque, o funcionário lê a graduação e determina a altura do nível do combustível vendido. Admitindo-se que o tanque tenha sido enterrado no sentido vertical, como ilustra a figura, e que tenha raio da base R = 1 m e altura H = 2 m, qual é o volume de combustível do tanque quando a régua registra altura d = 40 cm?



Apoiados na figura, observamos que o volume do combustível no tanque é igual à diferença entre o volume total e o volume do cilindro de altura d (volume de combustível vendido)e que suas bases são iguais. Podemos chegar à seguinte expressão:

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot H \quad \pi \cdot R^2 \cdot d$$

Substituindo os valores de R = 1m .H = 2m e d = 0,4m, temos:

$$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 - \pi \cdot 1^2 \cdot 0{,}4 \text{ , portanto } V = 2\pi - 0{,}4\pi$$

V = 1,6 π aproximadamente 5,024 m³. Após a resolução, o professor pode continuar explorando outros fatos interessantes do mesmo problema.

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 13

Com base na atividade anterior:

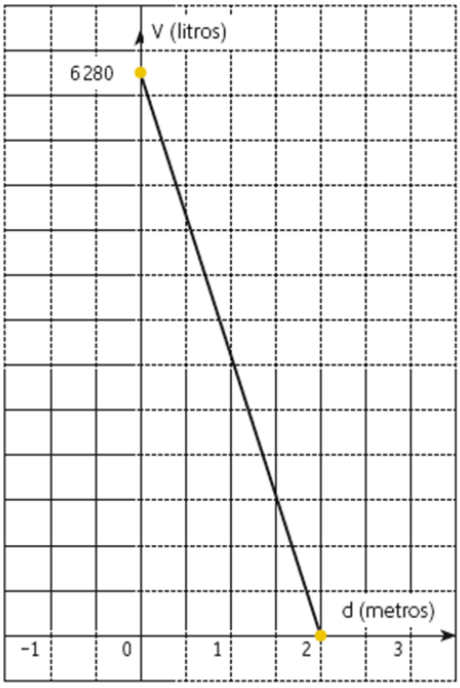
a) Encontre a expressão que relaciona o volume V do combustível contido no tanque com a medida d da régua.

$V = \pi \cdot R^2 \cdot H - \pi \cdot R^2 \cdot d \Rightarrow \boxed{V = \pi \cdot R^2 \cdot (H - d)}$

Sendo R = 1 m e H = 2 m, temos: $V = 2\pi - d\pi$,

logo, $V = \pi (2 - d)$.

b) Construa e analise o gráfico da função V(d).



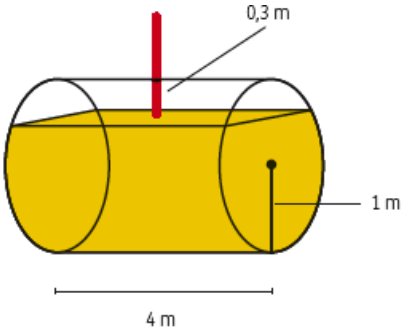
ATIVIDADE 14

Vamos, agora, considerar um tanque de armazenamento de álcool com o mesmo formato indicado na atividade 4. Contudo, ele está colocado na posição horizontal, como indica a figura. Do mesmo modo, para medir a quantidade de álcool do tanque, utiliza-se uma régua, e o procedimento é o mesmo da atividade 4. Suponha que o tanque tenha o formato de um cilindro com 1 m de raio de base e 4 m de altura. Qual é o volume de álcool vendido quando a régua registra a marca d = 30 cm?

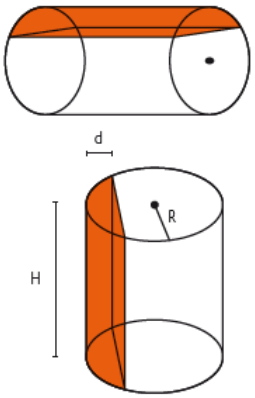
VERSÃO PRELIMINAR

Resolução:

O professor pode, inicialmente, deixar os alunos buscarem seus próprios meios para resolver esta atividade. Algum tempo depois, pode auxiliá-los na interpretação do problema, discutindo semelhanças com relação à situação da atividade anterior. Uma primeira ideia que deve surgir é que, como na atividade anterior, o volume do combustível será igual à diferença entre o volume total e o volume consumido. O cálculo do volume total é simples. O problema recairá sobre o cálculo do volume de álcool comercializado.



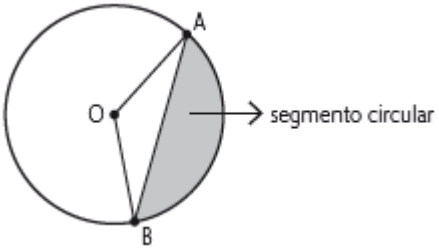
Como estamos acostumados a ver os sólidos com a base na horizontal, uma ideia é mudarmos a direção do tanque de horizontal para vertical (figura a seguir).



Crie um debate na sala, de modo que os alunos entendam a necessidade de calcular o volume do sólido destacado, que representa o volume do álcool vendido. Explorando a ideia relativa ao Princípio de Cavalieri, os alunos devem chegar à conclusão de que o volume do sólido é igual ao produto da área de sua base pela altura. A altura é igual ao comprimento do cilindro. O problema, portanto, reside em determinar a área da base.

Essa região do círculo recebe o nome de **segmento circular**, que é uma região limitada por uma corda e um arco do círculo.

VERSÃO ELIMINAR

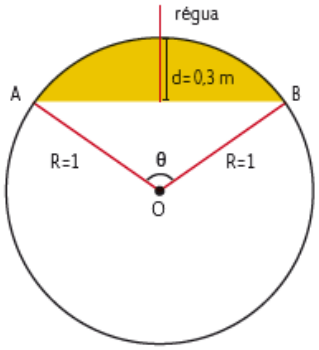


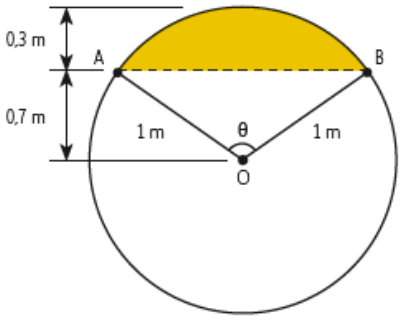
A área do segmento circular pode ser calculada pela diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo isósceles AOB.

Vamos dividir a resolução em etapas:

a) Área do setor circular:

Setor circular é a porção do círculo limitada por dois raios e um arco do círculo. Para determinar a área do setor circular, precisamos da medida do ângulo central a ele correspondente, que indicaremos por θ.



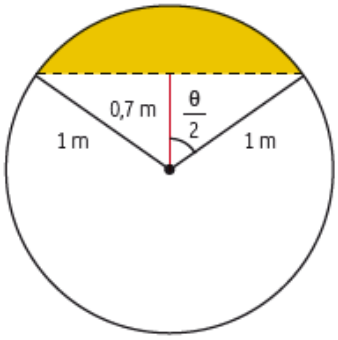


O valor deste ângulo θ pode ser determinado se dividirmos o triângulo isósceles AOB, a partir da altura relativa ao vértice O, ou seja, o lado AB do triângulo AOB. Assim, o ângulo θ também será dividido ao meio e o novo triângulo será retângulo. A medida do ângulo $\frac{\theta}{2}$ pode ser encontrada a partir de seu cosseno:

VERSÃO MINAR

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{0,7}{1} = 0,7$

Desse modo, devemos determinar qual o arco cujo cosseno seja igual a 0,7.



Consultando uma tabela trigonométrica ou por estimativa, admitindo que $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7$, teremos que $\cos\frac{\theta}{2} = 0,7$ e, portanto, o valor de $\frac{\theta}{2}$ = 45º. O ângulo do setor circular pode ser considerado, então, próximo de 90º, e sua área equivalerá a $\frac{1}{4}$ da área total do círculo. Como a área do círculo é $A_{círculo} = \pi \cdot 1^2 = \pi$, a área do setor será $A_{setor} = \frac{\pi}{4}$ m^2.

Adotando π = 3,14, temos que;

$A_{setor} = \frac{3,14}{4} = 0,785m^2$

b) Cálculo da área do triângulo:

Uma vez que o ângulo do setor é de 90º, o triângulo AOB é retângulo em O e portanto, sua área será:

$Área_{triângulo} = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0,5m^2$

c) Área do segmento circular (A):

$A = A_{setor} - A_{triângulo} = 0,785 - 0,5$

$A = 0,285m^2$

Retomando o volume do combustível vendido (V_1):

$V_1 = A \cdot H = 0,285 \cdot 4$

$V_1 = 1,14m^3$, isto é,

V_1=1140 litros

Então, a resposta do problema proposto é que foram comercializados 1 140 litros de álcool.

Terminada essa atividade, o professor pode pedir aos alunos que investiguem, em postos de gasolina, como é medido o estoque de combustível nos tanques. Atualmente, há processos

VERSÃO PRELIMINAR

sofisticados de medições desses volumes. Dispositivos são instalados no interior dos tanques e fornecem em tempo real, em um painel, a conversão da altura ao volume do combustível disponível. Nos postos mais antigos, o estoque é calculado pela combinação da "régua de medição" com uma tabela específica de conversão.

O professor também pode, julgando o tempo suficiente, distribuir para diferentes grupos de alunos valores diferentes de **d** e, agrupando-os em uma tabela, propor a construção do gráfico do volume armazenado no tanque em função de d · V(d),

O volume de ar de um pneu

Todo pneu de automóvel possui um código alfanumérico que traz especificações sobre suas dimensões e características. Vamos explorá-lo:
A letra P, que não aparece em todos os pneus, indica que se trata de um pneu para veículos de passeio.

I. A largura do pneu ou da sua banda de rodagem é dada em milímetro.
II. A altura lateral do pneu é indicada pelo porcentual da largura da banda de rodagem. Também recebe o nome de série.
III. A letra R significa que o pneu é de construção radial. Sua estrutura é formada por camadas de lonas dispostas paralelamente e em sentido radial. A ausência dessa letra significa que o pneu é de construção diagonal, sendo as lonas cruzadas umas em relação às outras.
IV. Refere-se à medida do diâmetro do aro da roda. Ele é dado em polegadas (1 pol. aproximadamente 2,54 cm).

O pneu da figura, por exemplo, está identificado com o código P245/45 R19. Portanto, ele é um pneu de carro de passeio, possui uma largura de 245 mm; como a altura do pneu é 45% da largura, ela mede 245 u 0,45 = 110,25 mm ou 11, 025 cm; e o diâmetro da roda interna mede 19 polegadas, ou 19 u 2,54 = 48,26 cm.

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 16

(ENEM 2008 - adaptado) Um reservatório de água na forma de um cilindro circular reto, tem 6 m de altura. Quando está completamente cheio, o reservatório é suficiente para abastecer, por um dia, 900 casas cujo consumo médio diário é de 500 litros de água. Suponha que, um certo dia, após uma campanha de conscientização do uso da água, os moradores das 900 casas abastecidas por esse reservatório tenham feito economia de 10% no consumo de água. Nessa situação:

(A) a quantidade de água economizada foi de 4,5 m^3
(B) a altura do nível da água que sobrou no reservatório, no final do dia, foi igual a 60 cm.
(C) a quantidade de água economizada seria suficiente para abastecer, no máximo, 90 casas cujo consumo diário fosse de 450 litros.
(D) os moradores dessas casas economizariam mais de R$ 200,00 se o custo de 1 m^3 de água para o consumidor fosse igual a R$ 2,50.
(E) um reservatório de mesma forma e altura, mas com raio da base 10% menor que o representado, teria água suficiente para abastecer todas as casas.

Resolução:

Analisando cada alternativa:

a) De acordo com as informações, o **consumo médio** é de 500 litros.

Então, **900 casas** consumirão, no total 900 · 500 = 450.000 litros.

Diminuindo em 10% o **consumo de água**, isso corresponderá a 45.000 litros que é equivalente a 45m^3. (Alternativa incorreta)

b) Pelos cálculos do item anterior, temos que a **capacidade do reservatório** é de 450m^3 para 6 metros de altura.

Então, 45m^3 está para 60 centímetros. (Alternativa correta)

c) A **quantidade de água economizada** é de 45.000 litros. Como visto anteriormente.

Então, se uma casa economiza 450 litros, 100 casas economizarão 45.000 litros. (Alternativa Incorreta)

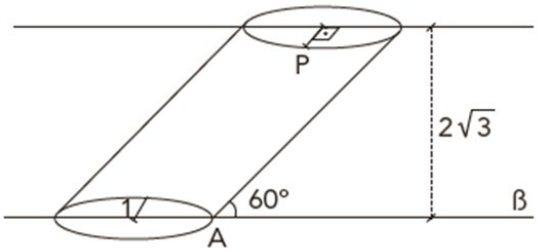
d) Os moradores economizarão R$3,75. (Alternativa incorreta)

e) Se diminuirmos o **raio do cilindro**, então sua **capacidade** diminuirá também. (Alternativa incorreta).

VERSÃO PRELIMINAR

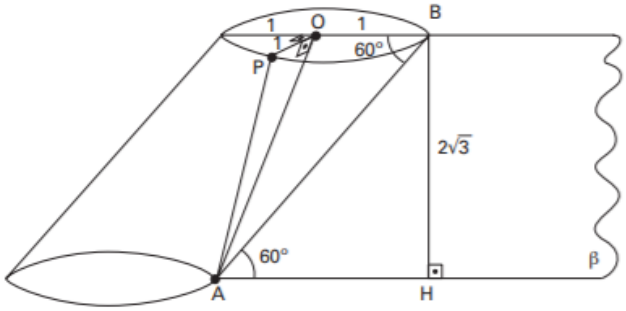
ATIVIDADE 17

(FUVEST 2003) Um cilindro oblíquo tem raio das bases igual a 1, altura $2\sqrt{3}$e está inclinado de um ângulo de 60° (ver figura). O plano β é perpendicular às bases do cilindro, passando por seus centros. Se P e A são os pontos representados na figura, calcule PA.



Resolução:

Do enunciado, o segmento PO é perpendicular a β. Como a reta AO está contida em β e é concorrente com o segmento PQ, então essas retas são perpendiculares em O.



No triângulo retângulo AHB, temos:

$\text{sen}60° = \dfrac{2\sqrt{3}}{AB} \therefore AB = 4$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo AOB, temos:

$(AO)^2 = (OB)^2 + (AB)^2 - 2 \cdot (OB) \cdot (AB) \cdot \cos 60°$

$(AO)^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \dfrac{1}{2} \Rightarrow (AO)^2 = 13$

No triângulo retângulo POA, temos:

$(PA)^2 = (PO)^2 + (AO)^2$, ou seja, $(PA)^2 = 1^2 + 13 \Rightarrow PA = \sqrt{14}$

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 18

(ENEM 2000) Uma empresa de transporte armazena seu combustível em um reservatório cilíndrico enterrado horizontalmente. Seu conteúdo é medido com uma vara graduada em vinte intervalos, de modo que a distância entre duas graduações consecutivas representa sempre o mesmo volume.

Desta forma, a vara que atendera as informações apresentadas, e representada pela figura:

Resolução

Para resolver esta atividade, precisamos analisar uma seção deste reservatório, perpendicular à vara graduada. Observamos, então, que, quanto maior a área da seção, menor será a variação de altura necessária para se chegar à próxima marca nessa vara, uma vez que elas devem demarcar o mesmo volume. Assim, as graduações consecutivas devem estar mais próximas na região média da vara, que corresponde às maiores áreas das seções, do que nas suas extremidades, como descrito na figura da alternativa A.

O movimento de ascensão: Pirâmides e Cones

Talvez a manifestação mais contundente do interesse humano pela ascensão possa ser encontrada no Egito. A pirâmide de Quéops representa esse sonho do ser humano de alcançar o céu e as estrelas. Vendo de perto, observa-se que as pirâmides são construídas como uma enorme escadaria, que tem sua estrutura no conhecimento da forma prismática. Apoiado nesse conhecimento o homem realizou sua fantasia e representou o movimento de ascensão na Geometria, criando, assim, a pirâmide.
Não é sem motivo que, em muitas definições etimológicas da palavra pirâmide, destaca-se o prefixo pira, cujo significado é “fogo”, igualmente alusivo à ascensão.

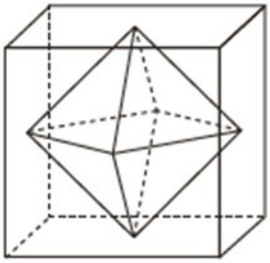
ATIVIDADE 19

Faça, no espaço a seguir, um desenho de um prisma e de uma pirâmide, e destaque algumas semelhanças e diferenças entre eles.

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 20

Dado um cubo, quando unimos por segmentos de reta, os centros de suas faces, obtemos um novo poliedro: o octaedro regular (do grego octo – oito e edro – face). Ao proceder do mesmo modo com um octaedro, obtemos, no seu interior, um cubo. O octaedro regular e o cubo são chamados, em razão disso, de poliedros duais.



A figura anterior representa o dual cubo-octaedro. O octaedro representado é uma figura espacial que pode ser obtida reunindo-se, pela base, duas pirâmides idênticas de base quadrada.
Todas as arestas desse octaedro têm o mesmo comprimento, logo, suas faces são triângulos equiláteros. Considerando o octaedro regular de aresta 20 cm, determine:

a) a altura das faces laterais do octaedro;

Resposta: $h = 10\sqrt{3}$ m

b) a área da superfície do octaedro;

Resposta: $A = 1384$ cm^2

c) a altura do octaedro;

Resposta: $H \cong 28{,}2$ cm

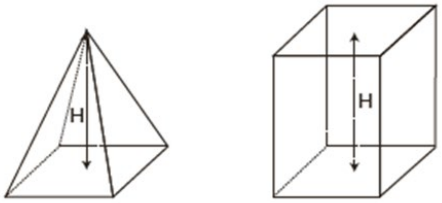
d) a área da superfície do cubo.

Resposta: $A = 4.800$ cm^2

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 21

Nas figuras a seguir temos uma pirâmide e um prisma com mesma área de base e mesma altura. Estime uma relação entre os volumes dos dois sólidos.



bases com áreas iguais

Durante o debate, referente à atividade21, o professor pode registrar na lousa as hipóteses dos alunos para, depois, compará-las com o fato de o volume dessa pirâmide ser um terço do volume do prisma. A partir desse momento, o importante é encontrar um meio de significar o fator 1/3, que caracteriza o cálculo do volume dos sólidos com afunilamento, como as pirâmides e os cones. Presente em vários livros didáticos, a demonstração do cálculo do volume da pirâmide apoia-se em figuras que consideramos de difícil visualização e interpretação por parte dos alunos.

ATIVIDADE 22

Uma pirâmide de base triangular é um sólido de 4 faces, chamado tetraedro. Um tetraedro regular (faces são triângulos equiláteros) tem área total igual a $8\sqrt{3}$ cm^2.

a) Desenhe o tetraedro e o seu dual, ou seja, o poliedro cujos vértices são os centros das faces do poliedro dado.

O dual de um tetraedro é outro tetraedro.

b) Encontre o volume do tetraedro maior.

Resposta: $V \cong 2{,}67$ cm^3

ATIVIDADE 23

Walter pegou um cubo de madeira e colocou sobre um copo:

- Apenas um vértice do cubo ficou no interior do copo, conforme a figura;
- Os pontos comuns ao cubo e ao copo determinaram um triângulo equilátero.

Sabendo-se que a borda do copo é uma circunferência de raio igual a $2\sqrt{3}$cm, calcule o volume da parte do cubo que ficou no interior desse copo.

Resposta: $V = 9\sqrt{2}$ cm^3

VERSÃO PRELIMINAR

Construindo um cone

ATIVIDADE 24

Vamos construir setores circulares a partir de círculos de 10 cm de raio desenhados em uma folha de papel sulfite. Observe que, para cada setor, construímos também o setor de seu replementar. (Dois ângulos replementares têm a soma de suas medidas igual a 360°.)

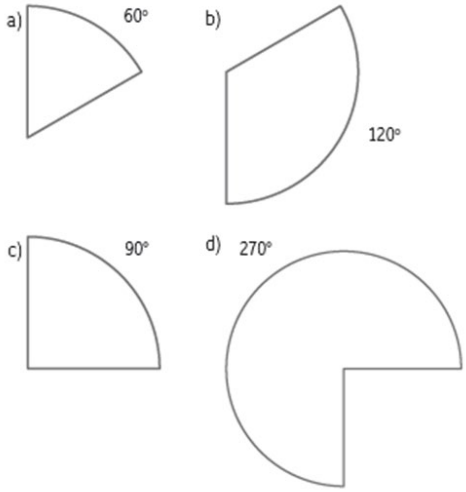
a) 60º

b) 120º

c) 90º

d) 270º

Ao encerrar a construção, recorte os setores



ATIVIDADE 25

Tomando os setores da atividade anterior, use fita adesiva para unir os raios, de modo a formar figuras parecidas com chapéus de festa de aniversário. Cada uma dessas figuras corresponde à superfície lateral de um cone e os raios desses setores constituem a sua geratriz. Observando cada um dos modelos criados, procure completar os dados da tabela a seguir.

Ângulo central α (graus)	Área do setor circular A (cm²)	Raio da base r (cm)	Altura do cone h (cm)
60º	$\frac{50\pi}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\sqrt{100-\frac{25}{9}}=\sqrt{\frac{875}{9}}=\frac{5\sqrt{35}}{3}$
90º	25π	$\frac{5}{2}$	$\sqrt{100-\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{375}{4}}=\frac{5\sqrt{15}}{2}$
120º	$\frac{100\pi}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\sqrt{100-\frac{100}{9}}=\sqrt{\frac{800}{9}}=\frac{20\sqrt{2}}{3}$
270º	75π	$\frac{15}{2}$	$\sqrt{100-\frac{225}{4}}=\sqrt{\frac{175}{4}}=\frac{5\sqrt{7}}{2}$

VERSÃO PRELIMINAR

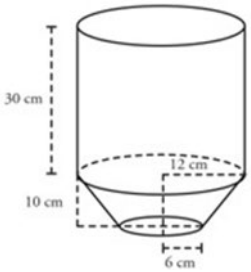
ATIVIDADE 26

Os para-raios foram inventados pelo político e cientista estadunidense Benjamin Franklin (1706-1790). São aparelhos constituídos por uma haste condutora fixada verticalmente na parte mais alta de uma estrutura, seja ela um edifício, um poste ou uma antena. Segundo estudos experimentais da ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas), o campo de proteção oferecido por um para-raios é aquele abrangido por um cone, tendo por vértice o ponto mais alto da haste vertical, cuja geratriz forma um ângulo de 60° com essa haste. Geralmente, a medida das hastes é de, aproximadamente, 1 m. Com base nessas informações, faça no espaço, a seguir, a representação da base do "campo de proteção" oferecido por um para-raios disposto sobre uma antena de 79 m de altura e determine sua área aproximada.

Resposta: A $\cong$ 60.284,46 m^2

ATIVIDADE 27

(VUNESP 2007) Em uma região muito pobre e com escassez de água, uma família usa para tomar banho um chuveiro manual, cujo reservatório de água tem o formato de um cilindro circular reto de 30 cm de altura e base com 12 cm de raio, seguido de um tronco de cone reto, cujas bases são círculos paralelos, de raios medindo 12 cm e 6 cm, respectivamente, e altura 10 cm, como mostrado na figura.



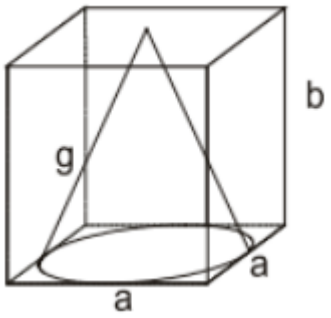
Por outro lado, em uma praça de certa cidade há uma torneira com um gotejamento que provoca um desperdício de 46,44 litros de água por dia. Considerando a aproximação π = 3, determine quantos dias de gotejamento são necessários para que a quantidade de água desperdiçada seja igual à usada para 6 banhos, ou seja, encher completamente 6 vezes aquele chuveiro manual. Dado: 1 000 cm^3 = 1 litro.

Resposta: 2 dias.

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 28

(FUVEST 2006) Um cone circular reto está inscrito em um paralelepípedo reto-retângulo, de base quadrada, como mostra a figura. A razão $\frac{b}{a}$ entre as dimensões do paralelepípedo é $\frac{3}{2}$ e o volume do cone é π.



Então, o comprimento g da geratriz do cone é:

(A) $\sqrt{5}$

(B) $\sqrt{6}$

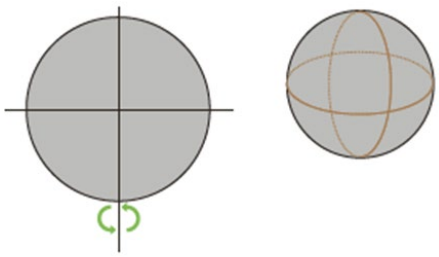
(C) $\sqrt{7}$

(D) $\sqrt{10}$

(E) $\sqrt{11}$

Esfera

Ao fazermos a revolução de um círculo ou semicírculo em torno de um eixo que passa pelo seu diâmetro temos como resultado a esfera. A superfície esférica pode ser interpretada do mesmo modo que entendemos a circunferência: ela é o conjunto de todos os pontos do espaço equidistantes de um ponto fixo, chamado centro da esfera.

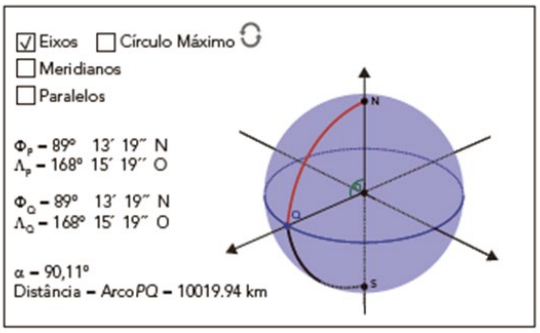


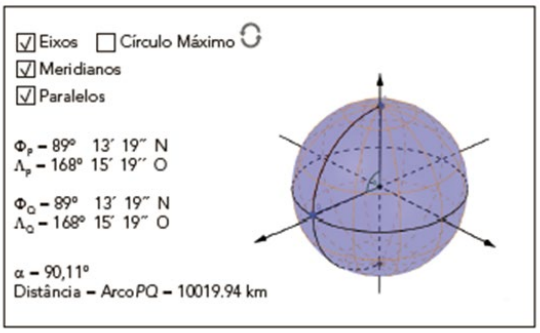
VERSÃO PRELIMINAR

Explorando alguns conceitos da esfera no Geogebra

ATIVIDADE 29

Acesse o link: https://www.geogebra.org/m/hUb7KZxj_disponível no Geogebra online. Desenvolvido pelo autor: **Humberto José Bortolossi** "Caminhos de Comprimento Mínimo em Uma Esfera" e explore conceitos importantes da esfera. Clique e arraste os pontos P e Q sobre a superfície esférica do globo terrestre, para calcular um caminho de comprimento mínimo sobre a superfície ligando P a Q, tendo a visão dos eixos, meridianos, paralelos e círculo máximo.



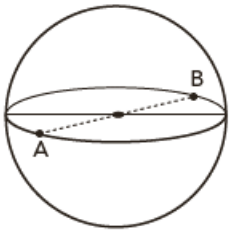


Neste momento é importante associar os elementos identificados no software para explorar as relações de comprimento da circunferência, comprimento do arco da circunferência, áreas da circunferência e superfície da esfera e volume da esfera. As atividades, a seguir, contemplam essas relações com algumas aplicações.

Elabore algumas atividades para retomar os conceitos e as relações da circunferência (comprimento e área). Use um livro didático do Ensino Fundamental para pesquisa.

ATIVIDADE 30

Uma formiga vai se deslocar sobre uma superfície de uma lâmpada esférica de raio 50cm, partindo de um ponto A até um ponto B, diametralmente opostos, conforme a figura. Qual o menor trajeto possível que essa formiga poderá percorrer?



O menor trajeto será percorrer a metade da circunferência, ou seja:

Percurso = $\frac{1}{2}C$

C = 2.π.r = 2.π.50cm = 100πcm

Percurso = $\frac{1}{2}$ (100π)cm = 50π cm.

ATIVIDADE 31

Uma esfera está inscrita num cubo cuja aresta mede 20 cm. Calcule a área da superfície esférica.

Resposta: A = 12,56 cm²

ATIVIDADE 32

Considerando que nosso planeta Terra seja uma esfera perfeita e considerando o raio da Terra como 6400 km, calcule a área do “Globo” terrestre, em km².

Resposta: A = $5,14 \cdot 10^8$ km^2

ATIVIDADE 33

Duas esferas de ouro, uma com 3 cm e outra com 6 cm de raio foram levadas para a fundição e solicitado que, a partir dessas esferas menores, fosse construída uma esfera maior. Qual o raio dessa nova esfera?

Resposta: 6,24 cm.

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 34

ENEM 2010 - Adaptado) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

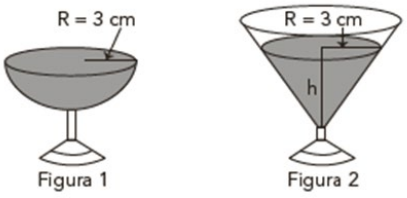


Foto reprodução do ENEM

Considere:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ e } V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, qual a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça?

Resposta: 6 cm.

ATIVIDADE 35

(ENEM 2012- Adaptado) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

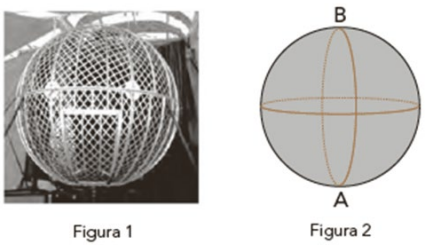
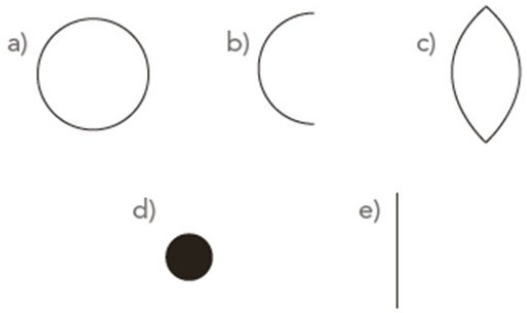


Foto reprodução ENEM

Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B. A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por:

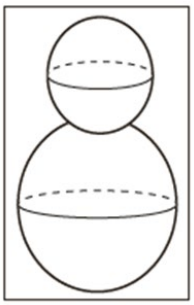
VERSÃO PRELIMINAR



Resposta: alternativa e)

ATIVIDADE 36

Um escultor juntou 4,5 m^3 de areia para construir uma grande obra de 3 m de altura, em uma exposição na praia. A escultura será composta por duas esferas perfeitas, colocadas uma sobre a outra, tangentes, sendo a primeira maior que a segunda, conforme mostra a figura.



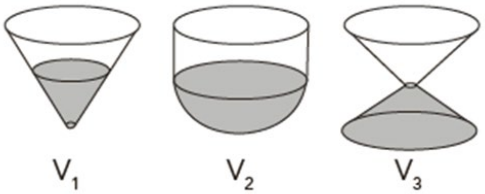
Ao fazer uma ficha técnica sobre sua obra, o escultor precisa encontrar o raio das duas circunferências e para isso utilizou que $\pi = 3$. Usando essa aproximação ajude o escultor a encontrar o valor desses raios.

Resposta: $R = \frac{1}{2}$ ou $R = 1$

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 37

ENEM 2005) Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles são colocados líquidos até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras.
Representando por V1, V2 e V3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se:



(A) V1 = V2 = V3.
(B) V1 < V3 < V2.
(C) V1 = V3 < V2.
(D) V3 < V1 < V2.
(E) V1 < V2 = V3.

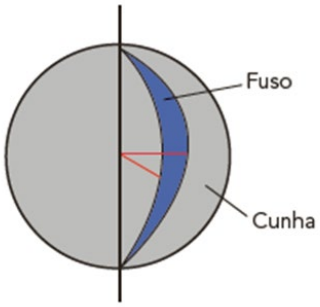
Faça as comparações e argumente, de acordo com as características de cada sólido, para justificar sua resposta.

Fusos e cunhas

Um fuso esférico é a superfície que se obtém quando giramos uma semicircunferência em torno do eixo, que contém seu diâmetro em um ângulo de 0° a 360°. Este ângulo será denotado pela letra grega ***α***. Como a área do fuso é proporcional ao ângulo ***α***, as atividades podem ser resolvidas por proporcionalidade, tomando-se a área da superfície esférica como correspondente a 360°.

Cunhas esféricas

A cunha é uma parte da esfera que se obtém ao girar um semicírculo em torno do eixo que contém o seu diâmetro de um ângulo de 0° a 360°. Observe que a área da superfície da cunha esférica é composta por dois semicírculos de raios iguais aos da esfera, o que resulta em um círculo completo, mais a área do fuso. Já seu volume é proporcional ao ângulo α
Como o volume da cunha é proporcional ao ângulo α, as atividades podem ser resolvidas também por proporcionalidade, tomando-se o volume da esfera como correspondente a 360°.

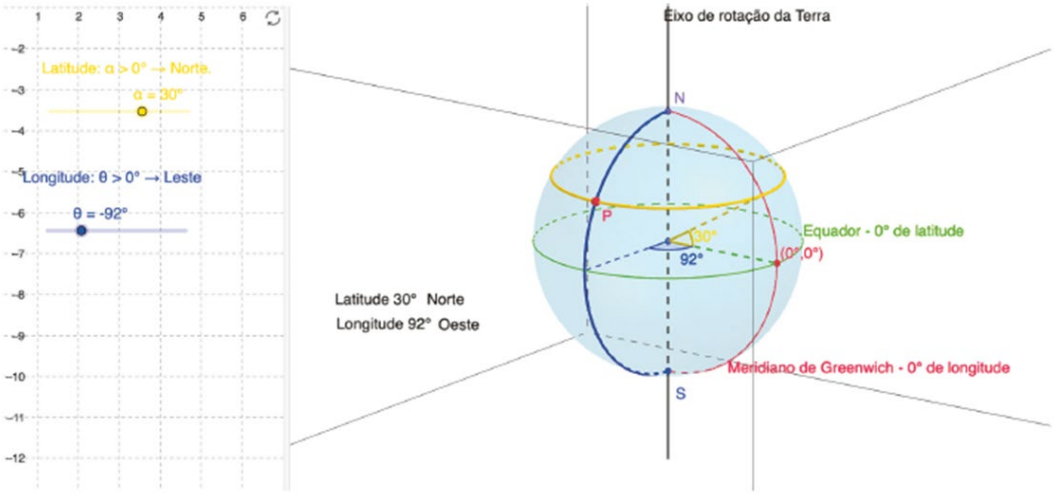


VERSÃO PRELIMINAR

Explorando o Geogebra online e as coordenadas geográficas na esfera terrestre

ATIVIDADE 38

Acesse o link: https://www.geogebra.org/m/qJuMB7ma e explore a atividade elaborada pelo autor: Fábio Marson Ferreira. As coordenadas geográficas de um ponto **P,** localizado na superfície da esfera terrestre, são dadas pelos valores de dois ângulos medidos a partir do centro da esfera. Para a determinação da longitude, o ângulo é medido entre o meridiano de Greenwich (0°) e o meridiano do ponto em questão. A latitude é determinada pelo ângulo entre o plano do Equador e o segmento que une o centro da esfera e o paralelo em que o ponto se encontra.



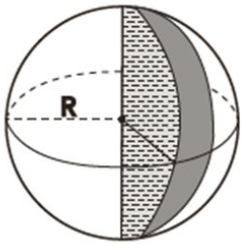
Faça uma pesquisa em parceria com o professor de Geografia para retomar alguns conceitos importantes sobre meridianos, paralelos, fusos horários, latitude, longitude e cunhas esféricas.

Sugestão: Qual a latitude e longitude de sua cidade? Justifique essa localização através do Meridiano de Greenwich e a Linha do Equador.

As próximas atividades contemplarão alguns conceitos de fusos e cunhas esféricas.

ATIVIDADE 38

(UNESP) Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida R cm foi cortada em 12 fatias iguais, onde cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.



Sabendo-se que a área de uma superfície esférica de raio R cm é 4 π R² cm², determine, em função de π e de R:

a) a área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico);

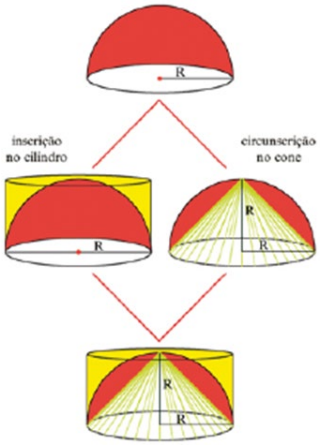
Resposta: $A = \frac{4\pi R^2}{12} = \frac{\pi R^2}{3}$ cm²

b) quantos cm² de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia.

Resposta: $V_{cone} = \frac{1}{3} \pi R^3$

ATIVIDADE 39

Observe a sequência de figuras a seguir. Nela, temos uma semiesfera sendo inscrita em um cilindro e circunscrita em um cone.



Sabe-se

- O hemisfério tem raio **R**;
- O cilindro tem raio da base R e altura também R;
- O cone tem raio da base R e altura R.

VERSÃO PRELIMINAR

a) o volume do cilindro de raio **R** e altura **R**;

Resposta: $V_{cilindro} = \pi R^3$

b) o volume do cone de raio da base R e altura R;

Resposta: $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^3$

c) com base nos valores encontrados, anteriormente, uma expressão para o volume da esfera.

Resposta: $\frac{1}{3}\pi R^3 < V_{semiesfera} < \pi R^3$

VERSÃO PRELIMINAR

MATEMÁTICA

3ª Série – Ensino Médio

4º Bimestre

1.1 Organização das grades curriculares

Tendo em mente as ponderações anteriores, apresentamos uma grade curricular para a transição do material de apoio do Currículo do Estado de São Paulo, contendo os temas, a descrição das habilidades do Currículo Oficial de Matemática e sua respectiva relação com as competências gerais indicadas no Currículo Paulista, referente à etapa do Ensino Médio.
A lista dos conteúdos curriculares e habilidades, em Matemática, não é rígida e inflexível. O que se pretende é a articulação entre os temas (Números e Álgebra, Geometria e Grandezas e Estatística e Probabilidade), tendo em vista os princípios que fundamentam o Currículo Oficial: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, a abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, a caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias. Enfim, ao fixar os conteúdos disciplinares/objetos de conhecimento, é preciso ter em mente que a expectativa de todo o ensino é de que a aprendizagem efetivamente ocorra. As disciplinas curriculares não são um fim em si mesmas, o que se espera dos conteúdos é que eles realmente possam ser mobilizados, tendo em vista o desenvolvimento de competências pessoais, tais como a capacidade de expressão, de compreensão, de argumentação etc.
Desta forma, os quadros apresentados destacam as habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes em cada unidade. Tais habilidades traduzem, de modo operacional, as ações que os alunos devem ser capazes de realizar, ao final de um determinado estágio de aprendizagem, após serem apresentados aos conteúdos curriculares listados.

VERSÃO PRELIMINAR

ENSINO MÉDIO – CURRÍCULO DE MATEMÁTICA – 2ª SÉRIE (4º BIMESTRE)		
CURRÍCULO OFICIAL – SEDUC-SP		Currículo Paulista do Ensino Médio
Tema/Conteúdo	**Habilidades**	**Competências Gerais**
Números/Relações Elementos de Estatística • Gráficos estatísticos e interpretação de índices estatísticos. • Medidas de tendência central: média, mediana e moda. • Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão. • Elementos de amostragem.	• Saber construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências a partir de dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas. • Saber calcular e interpretar medidas de tendência central de uma distribuição de dados: média, mediana e moda. • Saber calcular e interpretar medidas de dispersão de uma distribuição de dados: desvio padrão. • Saber analisar e interpretar índices estatísticos de diferentes tipos. • Reconhecer as características de conjuntos de dados distribuídos normalmente, utilizar a curva normal em estimativas pontuais e intervalares.	2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação , a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

1.1. Grade curricular da 3ª série do Ensino Médio

VERSÃO PRELIMINAR

1.2 Revisando a construção de tabelas e gráficos na estatística

A construção de gráficos e tabelas insere-se no contexto que envolve a busca de conhecimento e o esclarecimento acerca de certa questão da realidade, que se tem interesse em compreender. Dessa maneira, diante de uma questão proposta, seja no âmbito da sociedade ou da natureza, damos início a um trabalho de pesquisa mediante o levantamento de dados e registro das situações percebidas, concretamente de forma sistemática, que podem ser de natureza qualitativa ou quantitativa.

A construção de tabelas envolve um planejamento longo no qual devem estar previstas as condições da amostragem a serem realizadas, suas variáveis, as categorias a serem inseridas e sua posterior contagem de dados e finalmente a organização destes para a correta confecção do gráfico.

Para a construção dos gráficos é necessário verificar qual seria o gráfico ideal para a apresentação dos dados presentes na tabela, com o uso quase que corriqueiro, da facilidade das planilhas eletrônicas, a tarefa de construção de gráficos, ficou bem facilitada, porém a construção geométrica sem a utilização de recursos eletrônicos também é altamente positiva, ficando de acordo com as possibilidades da Unidade Escolar, ou da disponibilidade do aluno em utilizar tais recursos eletrônicos.

O tópico acima apresentado, pode ser encontrado no Material de Apoio ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, na respectiva Situação de Aprendizagem, conforme segue:

Situação de Aprendizagem 4 – A apresentação de dados estatísticos: Gráficos e tabelas, Vol. 2, 3ª série do Ensino Médio, pg. 51 a 63.

Além da referência citada acima, o professor poderá recorrer a outros materiais que abordem o assunto tratado.

1.3 Histograma e polígonos de frequência

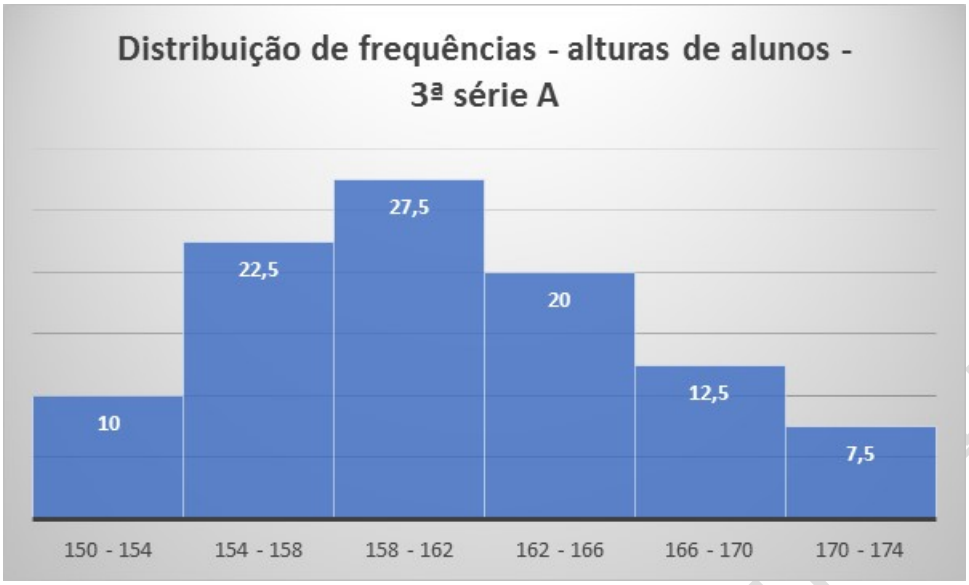
Um histograma é uma representação gráfica, que ilustra uma determinada distribuição de dados, podemos dizer que tal representação é uma estimativa da distribuição de probabilidade de uma variável contínua, tabulando frequências mostradas como retângulos adjacentes, erigida sob intervalos discretos, com uma área igual à frequência da observação no intervalo. A altura de um retângulo também é igual à densidade de frequência do intervalo.

A seguir, mostraremos um exemplo no qual é possível representar um caso de amostragem de dados por um histograma:

Estatura de 40 alunos da 3ª série A			
i	Estaturas (cm)	Frequência absoluta	Frequência relativa
1	150 ⊢ 154	4	10,00
2	154 ⊢ 158	9	22,50
3	158 ⊢ 162	11	27,50
4	162 ⊢ 166	8	20,00
5	166 ⊢170	5	12,50
6	170 ⊢ 174	3	7,50
		$\sum = 40$	$\sum = 100$

Fonte: Elaborada pelo autor

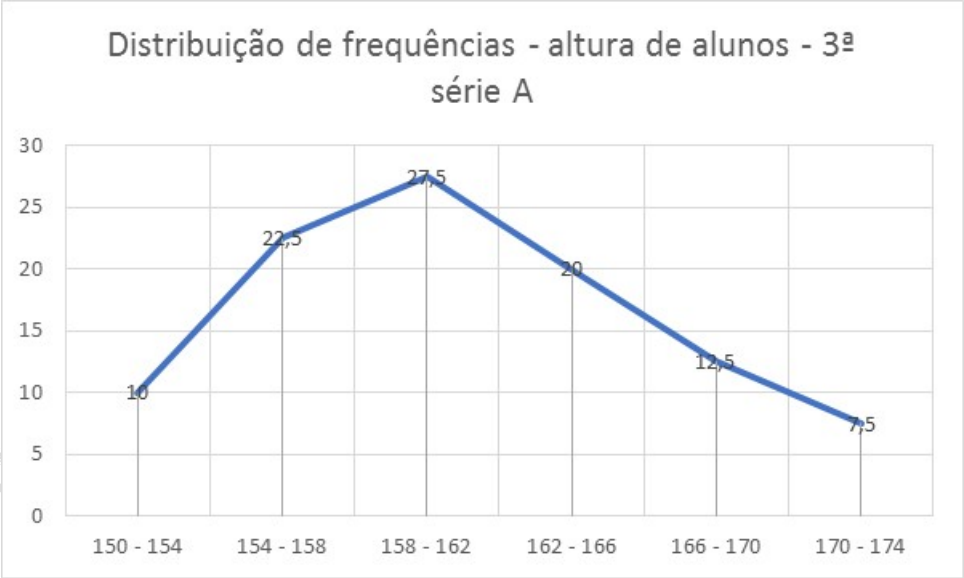
VERSÃO PRELIMINAR



Fonte: Elaborada pelo autor

Polígonos de frequências

Um polígono de frequências é uma representação gráfica obtida por meio dos pontos médios de cada coluna do histograma, conforme a ilustração a seguir:



Fonte: Elaborada pelo autor

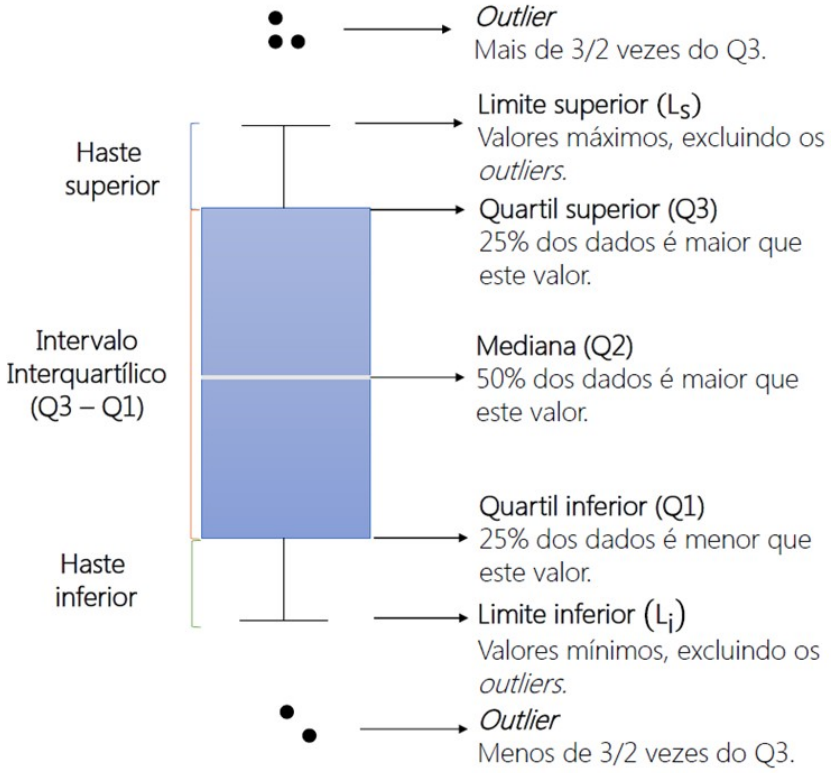
VERSÃO ELIMINAR

Boxplot ou diagrama de caixa

A análise quantitativa de dados é sumarizada por meio de dados agrupados, dispostos em tabelas e gráficos. Nas tabelas, os dados permitem a análise simultânea de múltiplas variáveis e estabelece relações entre elas. Já o gráfico, com suas várias representações visuais, permitem a análise exploratória (ou descritiva) e a interpretação da tendência conjunta dos dados.

Uma destas representações gráficas é o Boxplot, que é regularmente utilizado na pesquisa científica, que, resumidamente, sintetiza os dados para exibir a mediana, quartis e os valores de tendência central, dispersão e simetria dos dados agrupados.

A seguir apresentamos uma estrutura básica de um “Boxplot”



Fonte: Elaborada pelo autor

As informações do gráfico indicam:

a. eixo vertical: representam dados de valores numéricos;
b. eixo horizontal: fator de interesse;
c. primeiro quartil (Q1): no qual se realiza ¼ ou 25% dos menores valores. Também chamado de quartil inferior ou 25º percentil. Representado pela linha limite inferior da caixa;
d. mediana ou segundo quartil (Q2): é o local onde ocorre a divisão da metade superior (50%) da metade inferior da amostra. É o 50º percentil.
e. terceiro quartil (Q3): no qual se localiza ¾ ou 75% dos valores maiores. Também chamado de quartil superior ou 75º percentil. Representado pela linha limite superior da caixa;

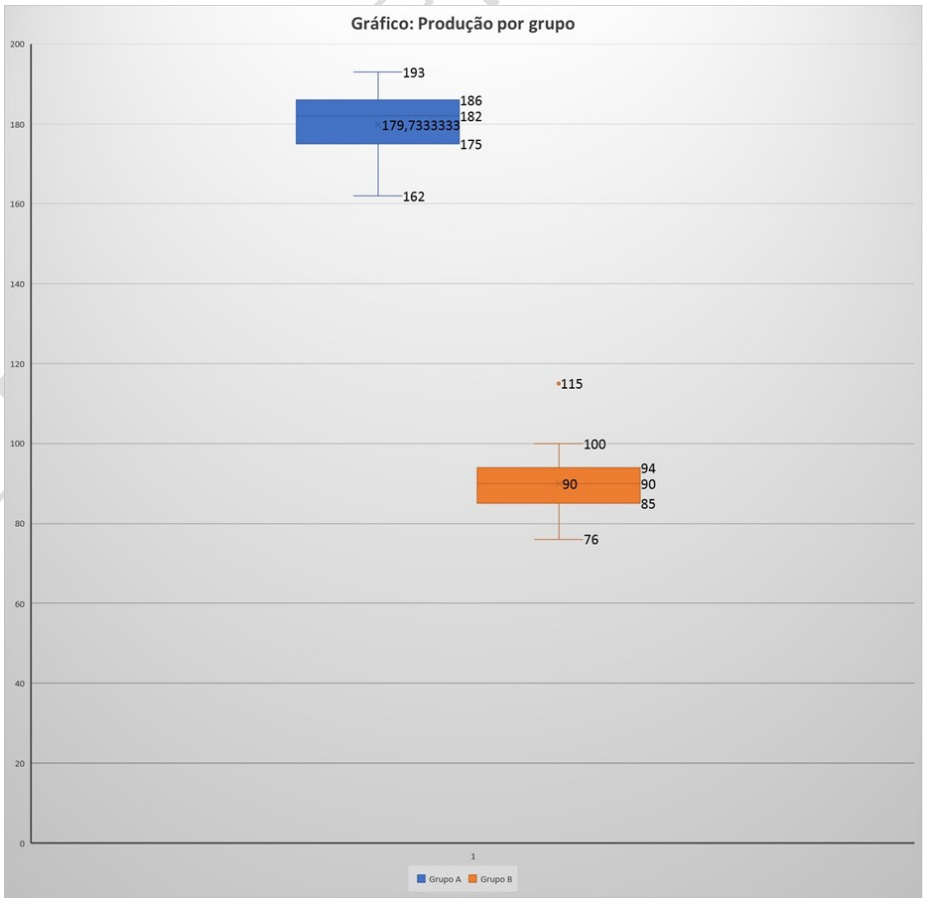
f. intervalo interquartílico (Q3 – Q1 ou IIQ): é definida como a diferença entre Q3 e Q1. No gráfico é representado pela dimensão da caixa. Estende-se do Q1 ao Q3 (percentis 25º a 75º). Representa o intervalo dos 50% dos dados em torno da mediana;
g. limite inferior: valor mínimo do conjunto de dados, até 1,5 vezes o IIQ (uma vez e meia o intervalo interquartílico), excluindo os *outliers* e/ou extremos;
h. limite superior: valor máximo do conjunto de dados, até 1,5 vezes o IIQ (uma vez e meia o intervalo interquartílico), excluindo os *outliers* e/ou extremos;
i. *outliers* (valores atípicos): valores acima e/ou abaixo de 1,5 vezes o IIQ;
j. extremos: valores acima e/ou abaixo de 2,5 vezes o IIQ (duas vezes e meia o intervalo interquartílico.

Sabendo-se disso passaremos a construção de um gráfico do tipo Boxplot.
Seja a seguinte situação:
Para verificar o tempo de produção de dois materiais produzidos, uma empresa separou seus funcionários em dois grandes grupos, após a coleta de dados, foi confeccionada a seguinte tabela:

Tabela 2 - Distribuição de frequências
Comparativo da produção por dois grupos distintos

Tempo													
82	85	93	75	84	92	75	73	86	78	62	79	64	82
2	6	6	0	7	0	6	3	0	15	5	0	0	6

Fonte: Elaborada pelos autores



Fonte: Elaborada pelos autores

VERSÃO PRELIMINAR

Observando o gráfico acima pode-se constatar que pelos dados a produção do Grupo A é maior que o Grupo B, porém observa-se, que o valor da mediana do Grupo B, é inferior ao do Grupo A, mas o intervalo entre o primeiro e o terceiro quartil é próximo para os dois grupos, dando a ideia de que a variabilidade do tempo de produção é semelhante para ambos os grupos.

Gráfico de ramos e folhas

Uma alternativa ao histograma é o diagrama ramo-e-folhas, neste tipo de representação é possível observar a distribuição de um conjunto de valores, sua grande vantagem é que nele os valores originais são apresentados.
A ideia aqui é dividir as informações em partes denominadas ramo e folha, sendo a primeira o valor inteiro e a segunda o decimal (até dois dígitos), por exemplo, o valor 5,35, o ramo é 5 e 35 as folhas.
Os passos para a construção são:

1. Ordenar os valores;
2. Indicar as partes inteiras em uma primeira coluna;
3. Indicar os decimais em outras duas colunas, separadas da primeira por uma linha vertical.

Exemplo: O conjunto de dados {1,00; 2,55; 2,90; 3,01; 3,09; 4,55; 4,58; 5,11; 5,20; 5,25; 6,00; 4,95; 4,71; 3,68; 3,99; 3,55; 2,59} teria o diagrama:

1	00				
2	55	59	90		
3	01	09	55	68	99
4	55	58	77	71	95
5	11	20	25		
6	00				

Fonte: Elaborada pelos autores

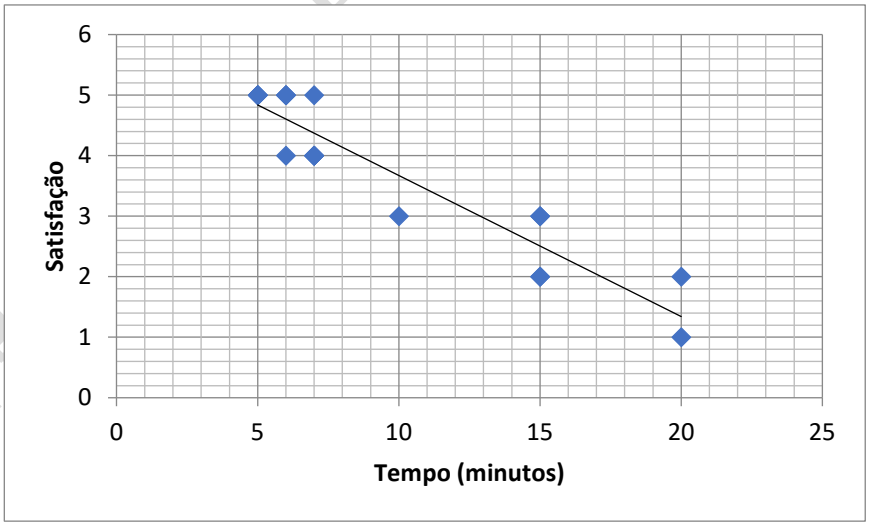
A linha de tendência de um gráfico

Para abordar e investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas varáveis, sugerimos a utilização da Regressão Linear por meio da construção do seu gráfico. A ideia de uma regressão linear propõe o estudo do comportamento de uma variável e a partir de dados presentes.
Exemplo 01: As propagandas exibidas na tela do seu computador enquanto navegamos na internet. Ao fazer uma busca por tênis de corrida, a regressão linear faz uma aproximação de outros produtos que tenham algum tipo de ligação com o produto pesquisado, como outros tênis de mesa modalidade de outras marcas ou até mesmo acessórios para corrida.
Com a regressão linear, é possível observar a curva que mais se aproxima ao comportamento de relação entre as variáveis.
Exemplo 2: Observe a tabela a seguir quanto à satisfação dos clientes de um banco em relação ao tempo de espera para atendimento.

VERSÃO PRELIMINAR

Cliente	Tempo (minu-tos)	Satisfa-ção
A	10	3
B	5	5
C	7	4
D	7	5
E	6	5
F	5	5
G	7	4
H	15	3
I	20	2
J	15	3
K	5	5
L	6	5
M	7	4
N	6	4
O	15	2
P	15	2
Q	7	4
R	6	5
S	5	5
T	20	1

Fonte: Elaborada pelos autores



Fonte: Elaborada pelos autores

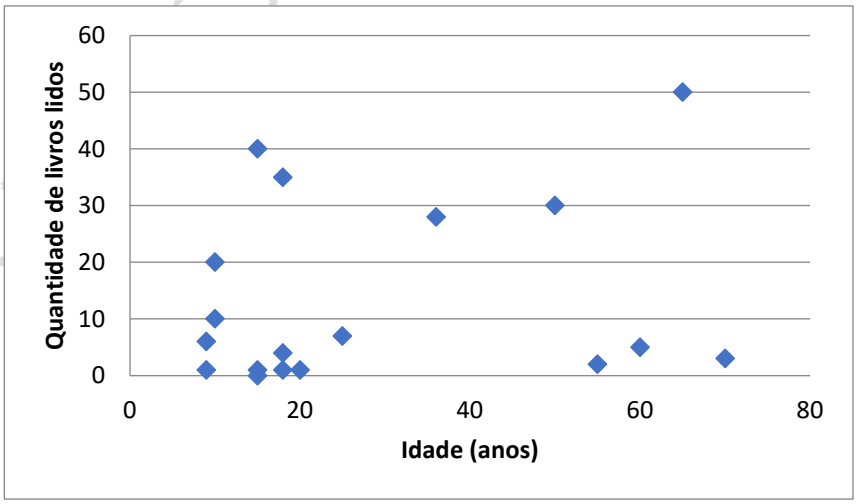
Elevada correlação negativa

VERSÃO PRELIMINAR

Exemplo 3: A tabela, a seguir, relaciona a quantidade de livros lidos e a idade de um grupo de pessoas.

Pes-soa	Idade (anos)	Quanti-dade de livros li-dos
A	9	6
B	9	1
C	10	10
D	10	20
E	15	1
F	15	0
G	15	40
H	18	4
I	18	35
J	18	1
K	20	1
L	25	7
M	36	28
N	50	30
O	55	2
P	60	5
Q	65	50
R	70	3

Fonte: Elaborado pelos autores



Fonte: Elaborada pelos autores

Ausência de correlação.

VERSÃO PRELIMINAR

2 – Atividades

TEMA 1 – MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL: MÉDIA, MEDIANA E MODA

Ao final de cada bimestre, após o término das provas, acontece em todas as escolas o fechamento da média da nota em todas as disciplinas. No caso da nota bimestral a média é dada pela soma das notas de todas as atividades, dividida pela quantidade de atividades realizadas. A média representa a tendência do conjunto de valores, em um caso em que a média bimestral em matemática seja igual a 7, significa que de modo geral as notas giram em torno de 7 (em alguns casos um pouco mais em outros casos um pouco menos que 7) compensando as diferenças, exemplo:

Notas: {6, 5, 10, 7}

Média aritmética: 7

Distâncias das notas até a média:

6 – 7 = –1 5 – 7 = –2 10 – 7 = 3. 7 – 7 = 0

Note que : (–1) + (–2) + 3 + 0 = 0

Somando as diferenças de cada nota pela média aritmética, o total sempre será igual a zero. Compensando os desvios superiores ou inferiores à média. Para fazer uma análise mais precisa se faz necessário o uso de outras *medidas de tendência central,* que são a mediana e a moda. A comparação entre moda, média e mediana é fundamental para dar significado a média. O estudo e a compreensão do significado da média, mediana e moda só farão sentido se levados em conta as *medidas de dispersão*, como a amplitude, variância e o desvio padrão.

De uma forma simples e direta podemos escrever:

- média aritmética: O somatório de todos elementos da série divididos pelo número de elementos.
- mediana: A mediana é determinada ordenando-se os dados de forma crescente ou decrescente e determinando o valor central da série.
- amplitude: Diferença entre o valor máximo e mínimo.
- desvio padrão : Aparece junto à média aritmética, informando o quão “confiável” é esse valor.

Vejamos o exemplo a seguir:

A direção da escola "Saberes" fará uma análise de desempenho de uma turma de 3º Ano do Ensino Médio, observando a quantidade de alunos que apresentam notas superiores a 6 em matemática. A diretora Andreia solicitou que o professor Raul montasse uma tabela com a quantidade de alunos com nota maior que 6, ao longo de um ano, bimestre a bimestre, do 3º Ano B, gerando seguinte tabela:

3º B EM	Quantidade de alunos com nota > 6
1º Bimestre	8
2º Bimestre	13
3º Bimestre	9
4º Bimestre	4

Fonte: Autoria própria

VERSÃO PRELIMINAR

Média aritmética ($\bar{x}$)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

De acordo com a tabela, temos:
$x_1 = 8$; $x_2 = 13$; $x_3 = 9$; $x_4 = 4$
Então:

$$\bar{x} = \frac{8 + 13 + 9 + 4}{4} = \frac{34}{4} = 8{,}50$$

Moda: Não há moda, observe que nenhuma amostra tem valor repetido

Mediana: 4; 8; 9; 13
Como o número de amostra é par, não há um valor central na série, portanto deve-se fazer a média aritmética entre as duas amostras centrais.

$$\text{mediana} = \frac{8 + 9}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5$$

Variância

$$V(x) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}$$

ou

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Então, temos que:

$$V(x) = \frac{(8 - 8{,}5)^2 + (13 - 8{,}5)^2 + (9 - 8{,}5)^2 + (4 - 8{,}5)^2}{3}$$

$$V(x) = \frac{(-0{,}5)^2 + 4{,}5^2 + 0{,}5^2 + (-4{,}5)^2}{3} = \frac{0{,}25 + 20{,}25 + 0{,}25 + 20{,}25}{3} = \frac{41}{3} = 13{,}66$$

Desvio Padrão

$$s = \sqrt{V(x)}$$

Desta forma, o Desvio padrão da série apresentada será dado por:

$$s = \sqrt{13{,}66} \cong 3{,}70$$

Coeficiente de variação

$$Cv = 100 \cdot \frac{s}{\bar{x}}$$

Aplicando a fórmula na situação apresentada temos:

$$Cv = 100 \cdot \frac{3{,}70}{8{,}5} = 100 \cdot 0{,}4352 = 43{,}52\%$$

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 1

[...]Quantas barragens existem no Brasil?
De acordo com a Agência Nacional de Águas - ANA, que tem a responsabilidade de consolidar o Relatório de Segurança de Barragens, o Brasil tem pelo menos 24.092 barragens, com diferentes usos.
Elas podem ser usadas para a produção de energia elétrica, contenção de rejeitos de mineração, disposição de resíduos industriais ou usos múltiplos da água.
A ANA, no entanto, afirma que esse número pode ser maior. Sua compilação depende de que os órgãos, responsáveis pela fiscalização das barragens, cadastrem as estruturas no sistema de dados do governo.
O número de barragens com certeza é maior. A maior parte delas 24 mil são barragens de pequeno porte, em propriedades rurais', diz Fabio Reis, da Febrageo.
Destas mais de 24 mil barragens, cerca de 4,5 mil obedecem aos critérios da Política Nacional de Segurança de Barragens - PNSB e, portanto, devem ser fiscalizadas regularmente.
Mas, de acordo com a ANA, sobre muitas delas não há informações suficientes para saber se também deveriam receber agentes.[...]"
Fonte: https://www.bbc.com/portuguese/brasil-47056259 - Acesso em: 20.02.2019

VERSÃO PRELIMINAR

De acordo com a ANA existem 7.171 barragens de diferentes usos no Estado de São Paulo, destas 74 são de contenção de rejeitos de mineração, e 20 se enquadram nos critérios da PNSB, conforme tabela a seguir:

CRITÉRIOS PARA SE ENQUADRAR NA PNSB	
ALTURA	>= 15m
VOLUME	>= 3 milhões m^3
RESÍDUO	Perigoso
DANO POTENCIAL ASSOCIADO	Médio ou Alto

UF	Município	Minério principal	Altura atual (m)	Volume atual (m^3)	Categoria de risco
SP	Descalvado	Argila	15,00	1.500.000,00	Baixa
SP	Descalvado	Argila	15,00	577.840,39	Baixa
SP	Santana de Parnaíba	Calcário Dolomítico	20,00	8.500,00	Média
SP	Cajati	Rocha Carbonática	13,50	3.200.000,00	Baixa
SP	São Paulo	Argila	25,00	659.323,59	Média
SP	Mogi das Cruzes	Granito	27,36	375.000,00	Baixa
SP	Mogi das Cruzes	Granito	9,64	154.433,29	Baixa
SP	São Paulo	Granito	45,00	3.190.000,00	Baixa
SP	Leme	Argila	23,58	1.800.000,00	Baixa
SP	Cajati	Rocha Carbonática	60,00	6.340.000,00	Baixa
SP	Santa Isabel	Argila	14,00	74.135,00	Média
SP	Santa Isabel	Argila	20,00	170.000,00	Média
SP	Guararema	Argila	18,00	735.000,00	Baixa
SP	Ribeirão Branco	Minério de Estanho Primário	20,00	260.000,00	Média
SP	Mogi das Cruzes	Argila Arenosa	12,00	331.920,00	Baixa
SP	São Simão	Argila Caulinítica	5,00	271.000,00	Média
SP	São Simão	Argila Caulinítica	5,00	112.000,00	Baixa
SP	Ibiúna	Areia	14,04	157.070,50	Baixa
SP	Descalvado	Areia Industrial	25,00	921.154,70	Média

Fonte: Agência Nacional de Mineração: https://bit.ly/2Gdpkzv – Acesso em: 20.02.2019

a) Considerando a exploração de todos os tipos de argila no Estado de São Paulo, qual é o valor da altura da barragem que mais se repete?

Resposta: 15m

b) Qual a média de altura das “Barragens de Argila” indicadas na tabela?

Resposta: 14,143636...

c) Conforme a tabela, qual o valor central do volume das barragens apresentadas?

Resposta: 387.000

d) Conforme a tabela, qual o valor central do volume das barragens apresentadas?

Respostas:

Altura: 60 – 3 = 57

Volume: 6.340.000 – 8.500 = 6.331.500

ATIVIDADE 2

Em um ambulatório médico, no mês de fevereiro, foram atendidos pacientes pela oftalmologia e durante os 10 primeiros dias, o número de atendimentos diários estão expressos na tabela abaixo:

Atendimentos oftalmológicos diários				
100	115	119	123	135
123	141	100	140	123

Fonte: Autoria própria

a) Qual a média de atendimentos diários?

Resposta: 121,9 ≅ 122

b) Qual a mediana?

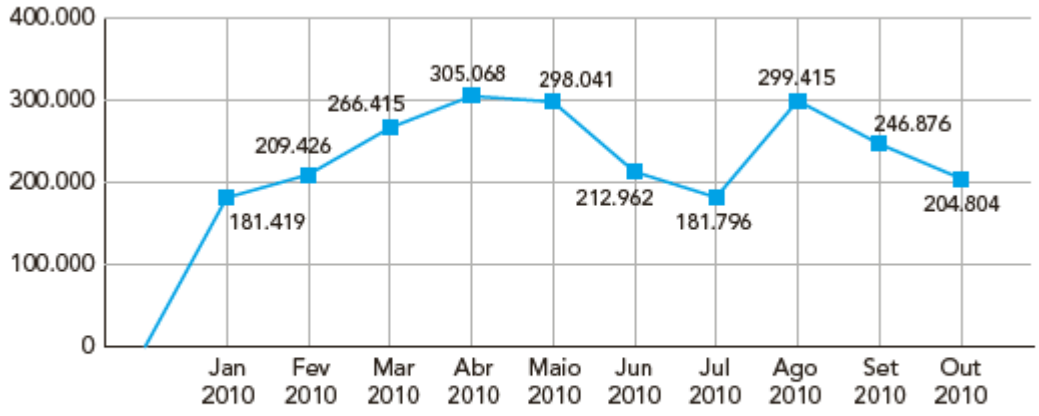
Resposta: 123

c) Qual a moda?

Resposta: 123

ATIVIDADE 3

(Adaptada - Enem 2012) O gráfico apresenta o comportamento de emprego formal surgido, segundo o CAGED, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010.



Disponível em: www.mte.gov.br
Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado)

Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é:
Resposta: 229.913

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 4

Vamos relacionar a medida de tendência central "média" e as medidas de dispersão, que indicam o quão distantes estão os dados, que geraram uma média, quando comparados com a própria média.
Imagine a seguinte situação:
Em uma escola, Marcelo teve notas na prova de matemática 7,0; 6,5; 8,0 e 4;5 e nas mesmas provas, Malcon obteve 2,0; 4,5; 9,5 e 10,0.

a) Qual foi a média de cada estudante?

Resposta: Considerando a última nota do Marcelo com 4,5, temos:

Marcelo: 6,5

Malcon: 6,5

b) Qual estudante você considera que teve maior desempenho? Justifique a sua resposta.

Resposta pessoal

ATIVIDADE 5

Uma forma de analisar, de modo mais apurado, o desempenho dos estudantes acima é por meio das medidas de dispersão e a primeira que podemos tratar é a "amplitude", que nada mais é do que a diferença entre a maior e a menor nota de cada aluno. Temos então, que Marcelo teve em suas notas uma amplitude de 7,0 - 4,5 = 3,5 e Malcon teve 10,0 - 2,0 = 8,0, embora as médias tenham sido as mesmas, nota-se que Marcelo teve uma menor variação (amplitude), em suas notas, que Malcon.
Com base na amplitude de notas apresentadas na situação acima, você pode agora dizer qual aluno teve maior desempenho? Por quê?
Resposta pessoal.

ATIVIDADE 6

Vamos agora calcular qual foi o desvio médio das notas de cada aluno, em relação à média alcançada por eles, e para isso, basta efetuar a diferença entre cada nota e a média dos mesmos. Complete a tabela abaixo:

Aluno	1ª nota	2ª nota	3ª nota	4ª nota	Mé-dia	Ampli-tude	Desvio médio 1	Desvio Médio 2	Desvio Médio 3	Desvio Médio 4
Marcelo	7,0	6,5	8,0	4,5	6,5	3,5	7,0 – 6,5 = 0,5	0	1,5	–2,0
Malcon	2,0	4,5	9,5	10,0	6,5	8,0	2,0 – 6,5 = –4,5	–2	3,0	3,5

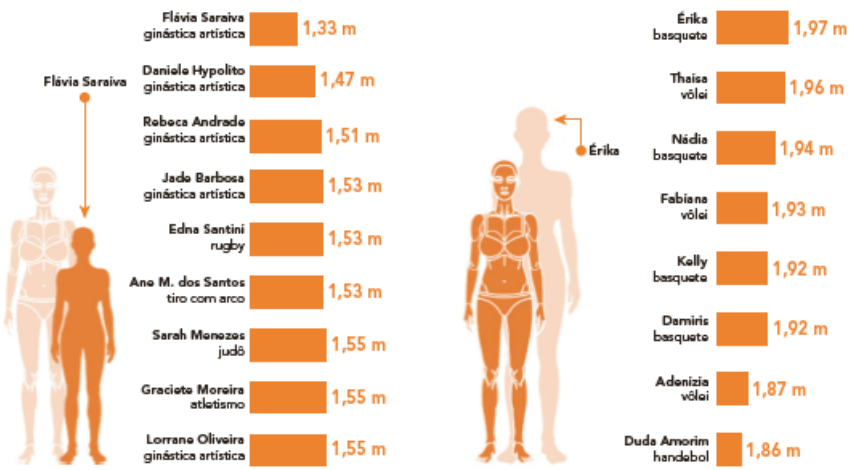
Finalmente, podemos avaliar qual dos estudantes teve desempenho mais regular baseando-se na média dos desvios médios de cada um.

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 7

Histograma é um gráfico que serve para tratar as informações coletadas de dados, que representam quantidades agrupadas com possibilidade de escrevê-las em intervalos os quais podem ser definidos para melhor representação e análise. É composto por colunas retangulares, no eixo horizontal são colocadas as classes e no eixo vertical os valores correspondentes, com eles podemos representar um fenômeno.

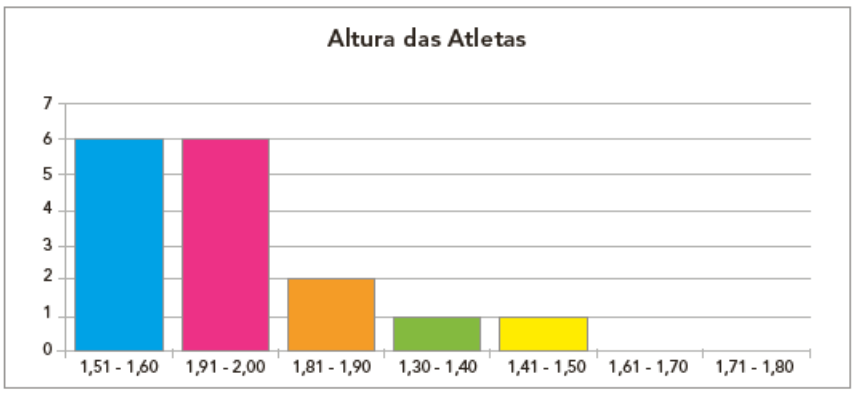
Abaixo estão representadas as alturas de alguns atletas, os quais fizeram parte da Delegação Esportiva representando o Brasil nas Olimpíadas de 2016.



Disponível em: http://www.espn.com.br/noticia/615650_censo-olimpico-altura-peso-idade-e-origem-o-raio-x-completo-dos-465-atletas-que-defenderao-o-brasil-na-rio-2016 Acesso em: 22/02/19

Podemos estabelecer um agrupamento com base em um intervalo de valores, por exemplo :

Faixas – alturas	Frequência de valores
1,30 – 1,40 m	1
1,41 – 1,50 m	1
1,51 – 1,60 m	6
1,61 – 1,70 m	0
1,71 – 1,80 m	0
1,81 – 1,90 m	2
1,91 – 2,00 m	6



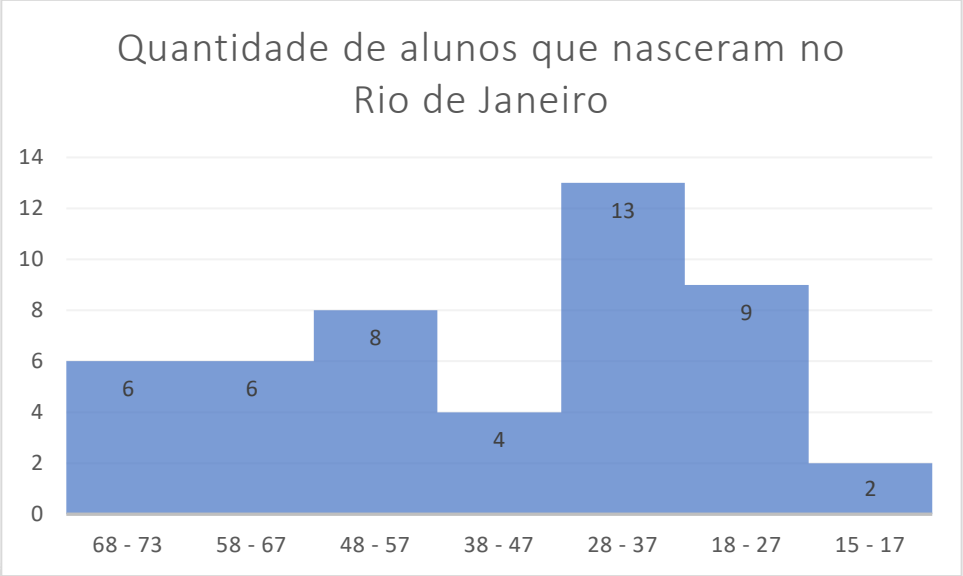
ATIVIDADE 8

Observe a tabela abaixo e, com base nos dados apresentados, faça o esboço de um gráfico (Histograma), por faixa etária, conforme pesquisa realizada com os alunos, que participaram do Programa de Apoio aos Sistemas de Ensino para Atendimento à Educação de Jovens e Adultos (PEJA), para representar os alunos que nasceram no Rio de Janeiro.

	Nasceu no Rio de Janeiro?		
Faixas de idade	**Não**	**Sim**	**Total**
68 – 73 anos	1	6	7
58 – 67 anos	10	6	16
48 – 57 anos	13	8	21
38 – 47 anos	6	4	10
28 – 37 anos	13	13	26
18 – 27 anos	4	9	13
15 – 17 anos	1	2	3
Total	**48**	**48**	**96**

tabela extraída de https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/15770/15770_7.PDF Acesso em: 06/03/19, página 90.

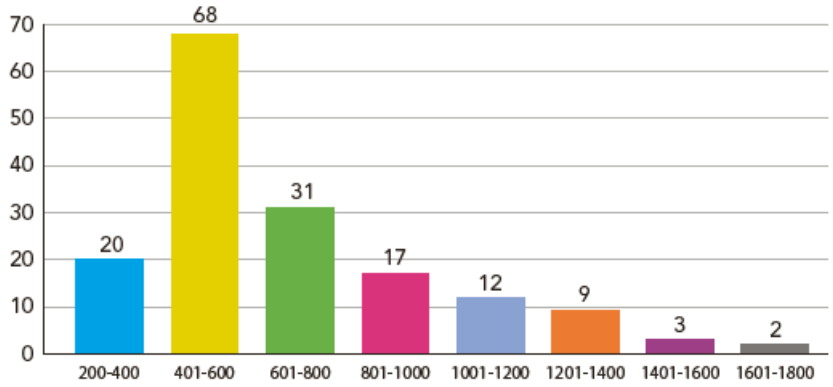
Resposta:



VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 9

(Caderno do Professor_2014_2017_Vol2_Matematica_EM_3S) - O gráfico, a seguir, foi construído pelo síndico de um condomínio para analisar o consumo de energia dos proprietários:



a) qual é o número total de residências pesquisadas?

Resposta: 162

b) quantas residências consomem até 1 400 kWh?

Resposta: 157

Diagrama de ramo e folhas

Nos diagramas de ramo e folhas é possível ter uma visão geral da distribuição de um conjunto de valores, mostrando os dados numéricos brutos e a densidade relativa, podem ser destacados com maior facilidade os "outliers" (pontos fora da curva) e a moda. Porém, os diagramas de ramo e folhas podem ser pouco úteis com conjunto de dados muito pequenos ou muito grandes, são geralmente usados como um método rápido de exibição gráfica de informações.

Mostraremos, a seguir, como construir um diagrama de ramos e folhas.

O conjunto de valores {1,00; 2,55; 2,90; 3,01; 3,09; 4,55; 4,58; 5,11; 5,20; 5,25; 6,00; 4,95; 4,71; 4,77; 3,68; 3,99; 3,55; 2,59} teria o diagrama:

1	00				
2	55	59	90		
3	01	09	55	68	99
4	55	58	77	71	95
5	11	20	25		
6	00				

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 10

Crie um diagrama de ramo-e-folhas para os valores {20,35; 16,09; 11,23; 11,37; 11,80; 8,17; 8,65; 7,15; 5,00; 7,11; 16,03; 11,71; 11,95; 8,79; 8,80}.

Resposta:

5	0				
7	11	15			
8	17	65	79	88	
11	23	37	71	80	95
16	3	9			
20	35				

ATIVIDADE 11

Durante o Carnaval, 75% das multas aplicadas em rodovias federais foram decorrentes do excesso de velocidade. Observe o diagrama de ramo e folhas, que contém dados fictícios de velocidades registradas pelos radares.

9	2	2	3	4	4	5	9
10	1	5	5	7	7		
11	3	8					
12	0	2	4	7	9		
13	1						

Legenda: 9 | 2 = 92

a) Qual a média das velocidades registradas entre 90 e 105 km/h?

Resposta: 95 km/h

b) Quartis são valores calculados que dividem em quatro partes iguais uma amostra de dados .

- 1º quartil (Q1) - é o valor apresentando 25% dos dados que são menores que/ou iguais a este valor.
- 2º quartil (Q2) - é a mediana, ou seja, 50% dos dados são menores que/ou iguais a este valor.
- 3º quartil (Q3) - é o valor apresentando 75% dos dados que são menores que/ou iguais a este valor.

Quais são os quartis (Q1 , Q2 e Q3) deste diagrama?

VERSÃO PRELIMINAR

Resposta:

Q1	9	2	2	3	4	4
Q2	9	5	9			
	10	1	5	5		
Q3	10	7	7			
	11	3	8			
	12	0				

c) Em um único dia foram aplicadas mais de 250 multas por excesso de velocidade. Neste caso, para representar o conjunto de dados, o diagrama de ramo e folhas será uma escolha adequada. Justifique a sua resposta.

Resposta pessoal

ATIVIDADE 12

No início de 2019, no município de São Paulo, foram registradas mais de 2800 quedas de árvores, ou seja, por volta de 43 árvores por dia. Considerando a tabela a seguir, com os dados fictícios de árvores caídas nos últimos 15 dias, construa o gráfico de ramo e folhas referente a essa informação.

49	21	33	50	45
58	26	62	34	21
65	61	19	33	68

Resposta:

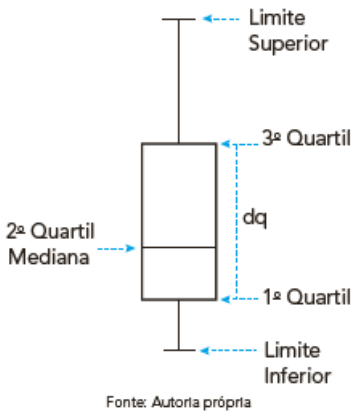
1	9			
2	1	1	6	
3	3	3	4	
4	5	9		
5	0	8		
6	1	2	5	8

Boxplot ou Diagrama de Caixa

Este tipo de gráfico estatístico representa os dados por meio de um retângulo construído com os quartis.

Objetivando fornecer informações sobre a variabilidade dos dados e valores atípicos, que podem influenciar o cálculo de medidas como a média aritmética, por exemplo, o *boxplot* utiliza cinco medidas estatísticas: primeiro quartil, mediana (segundo quartil), terceiro quartil, mínimo e máximo. O conjunto destas medidas fornece evidências acerca da posição, dispersão, assimetria e valores extremos (atípicos).

VERSÃO ELIMINAR



As posições dos quartis Q1, Q2 e Q3 fornecem evidências sobre o nível de assimetria da distribuição dos dados.
Os comprimentos das caudas da distribuição são dados pelas linhas que vão do retângulo aos valores atípicos. Estes valores atípicos são chamados de *outliers*.
De modo geral, um ponto será considerado *outlier* , quando estiver fora do intervalo denotado por Limite Inferior (LI).
Limite Superior (LS), em que:
LI = Q1 - 1,5 dq LS = Q3 + 1,5 dq
A posição central é dada pela mediana e a dispersão pelo chamado desvio interquartílico, denotado por:
dq = Q3 - Q1.
Vamos construir *Boxplot* passo a passo como exemplo.

18	18	19	20	20	20	20	20	20	21	21
22	23	24	25	25	25	26	29	30	35	37

Primeiro determinaremos Q2 = Mediana, Q1 e Q3:

18; 18; 19; 20; 20; 20; 20; 20; 20; 21; 21; 21; 22; 24; 25; 25; 25; 25; 26; 30; 35; 37

Q1 Q2 Q3

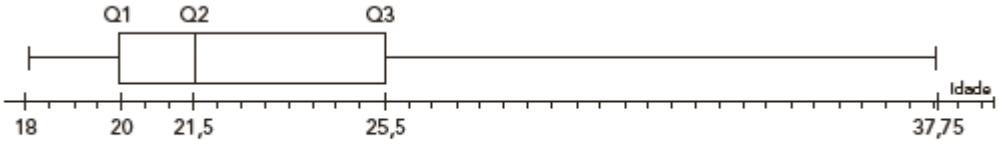
$$\frac{20+20}{2} = 20 \qquad \text{Mediana} = \frac{21+22}{2} = 21{,}5 \qquad \frac{25+26}{2} = 25{,}5$$

Q1 = 20; Q2 (Md) = 21,5 e Q3= 25,5

Agora determinaremos o desvio interquartílico (dq)
dq = Q3 - Q1
dq = 25,5 – 20
dq = 5,5
Determinaremos o limite inferior (LI)
LI = Q1 - 1,5 dq
LI = 20 - 1,5 x 5,5
LI = 20 - 8,25

VERSÃO PRELIMINAR

LI = 11,75
Determinaremos o limite superior (LS)
LS = Q3 + 1,5 dq
LS = 25,5 + 1,5 x 5,5
LS = 25,5 + 8,25
LS = 33,75
Portanto, todos os dados menores que 11,75 ou maiores que 33,75 são *outliers*.



Fonte: Autoria própria

Para saber mais...

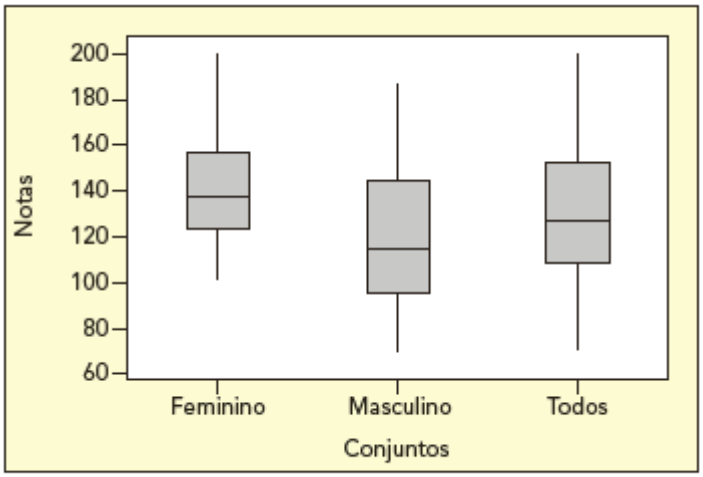
Você pode pesquisar um pouco mais escaneando o QR CODE, a seguir, com seu celular.

Ou acessando o link abaixo
encurtador.com.br/emu46

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 13

(Lupércio F. Bessegato e Marcel T. Vieira - (Elementos de Estatística (EST001-B)) - adaptado) De acordo com Instituto de Pesquisa de Hábitos de Estudos e Atitudes – IPHEA. A figura apresenta os *Boxplot* das notas dos conjuntos de dados referentes às alunas (F) e aos alunos (M) e a todos os estudantes (T).



Fonte: http://www.bessegato.com.br/UFJF/At_06-box-plot.pdf

a) Para cada um dos conjuntos de dados, estime graficamente a mediana, o primeiro e o terceiro quartis.

	Feminino	Masculino	Total
Mediana	140	118	122
Q1	121	98	105
Q3	157	142	152

b) Faça uma breve comparação dos grupos de alunos e alunas. As mulheres, como grupo, têm maiores notas do que os homens? Que grupo de notas se apresenta mais disperso?

Resposta pessoal

A Tabela 1 apresenta algumas informações adicionais sobre esses conjuntos de dados

Tabela 1: Algumas medidas-resumo dos conjuntos de dados

Conjunto	Quantidade (n)	Média (x)	Desvio-padrão (s)
Alunas (F)	18	141,06	26,44
Alunos (M)	20	121,25	32,85
Todos os alunos (T)			31,24

c) Utilize o coeficiente de variação (cv) e compare os conjuntos em relação aos resultados obtidos. Qual grupo foi mais homogêneo?

VERSÃO PRELIMINAR

Respostas:

Feminino: 18,74%

Masculino: 27,09%

d) Observe a variabilidade dos três conjuntos (F, M e T) e conjecture se o gênero é importante para ajudar a explicar a variação das notas.

Resposta pessoal

ATIVIDADE 14

Os dados da tabela abaixo são de Pesos (em Kg) de 50 Homens e 40 Mulheres.

MASCULINO	64,0	64,3	64,7	65,9	66,8	67,1	67,2	67,2	67,2	67,6
	67,9	68,5	68,6	68,7	68,8	68,9	68,9	69,0	69,4	69,4
	69,5	69,7	69,7	69,7	69,9	69,9	70,0	70,0	70,4	70,6
	70,7	70,7	70,8	70,9	71	71,4	71,5	71,5	71,8	71,8
	72,0	72,3	72,4	72,4	72,8	72,8	74,1	75,4	75,6	75,6

FEMININO	64,1	64,6	64,6	65,5	65,6	65,6	65,8	65,8	65,8	65,8
	65,9	65,9	66,0	66,1	66,1	66,1	66,2	66,3	66,5	66,5
	66,6	66,6	66,7	66,8	66,9	67,1	67,4	67,6	67,6	67,7
	67,8	67,9	67,9	68,0	68,1	68,5	68,8	69,7	70,2	71,9

a) Construa as medidas-resumo de posição (média, quartis, mínimo e máximo) e de dispersão (distância interquartílica, amplitude, variância, desvio-padrão e coeficiente de variação) para os dados totais (Feminino e Masculino) e, separadamente, por gênero utilizando uma planilha eletrônica.

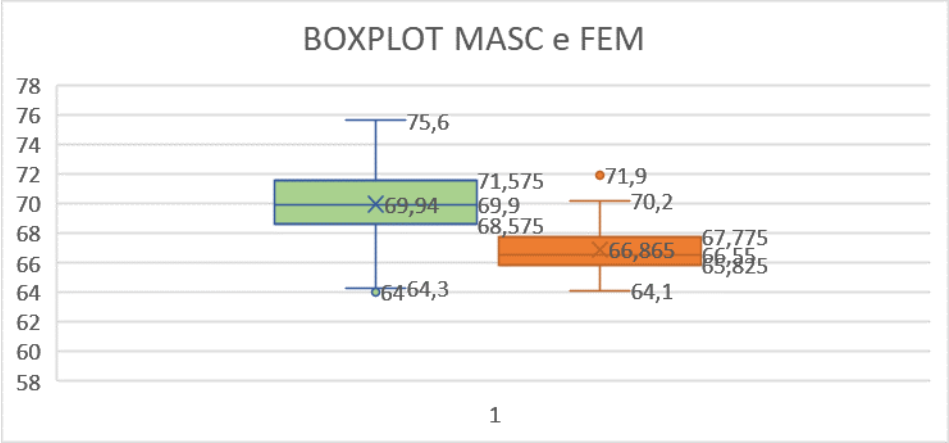
Resposta:

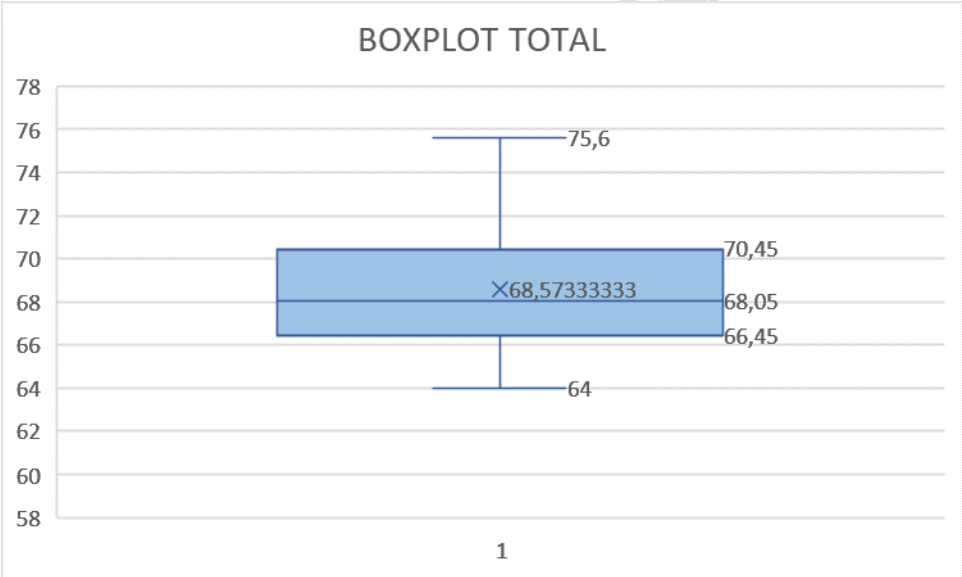
	MASCULINO	FEMININO	TOTAL
Média	69,94	66,865	3085,8
variância	6,931428571	2,357717949	7,210292
desvio padrão	2,632760637	1,535486226	2,685199
coeficiente	3,764313178	2,296397556	37,24119

VERSÃO IAR

b) Faça os gráficos de ramo-e-folhas e Boxplot para os dados totais (Feminino e Masculino) e, separadamente, por gênero utilizando uma planilha eletrônica.

Respostas:





Para saber mais...

Acesse o link, a seguir, para aprender como criar um Boxplot utilizando uma planilha eletrônica ou escaneie o QR CODE com seu celular.
encurtador.com.br/ch018

Elementos de Amostragem

ATIVIDADE 15

Escreva o espaço amostral de cada situação a seguir:

a) Lançamento de um dado.

1	2	3
4	5	6

b) Lançamento de dois dados simultaneamente.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

c) Lançamento de uma moeda.

K	C

d) Lançamento de duas moedas simultaneamente.

KK	KC
CK	CC

e) Sortear um número de 1 a 10.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

f) Sortear um ponto na reta numérica.

$$x \in \mathbb{R}$$

g) Sortear um ponto no círculo de raio 1 e centro na origem do plano cartesiano.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 16

Das situações anteriores, quais são espaços amostrais discretos? E quais são contínuos?
Respostas:

Discretos: a, b, c, d, e;

Contínuos: f, g.

ATIVIDADE 17

Dentro de uma caixa, são colocadas bolas numeradas de 1 a 20, para serem sorteadas. Qual a probabilidade de ser sorteada:

a) a bola de número 1

Resposta: $\frac{1}{20} = 5\%$

b) a bola de número 10:

Resposta: $\frac{1}{20} = 5\%$

c) a bola de número 20.

Resposta: $\frac{1}{20} = 5\%$

d) uma bola de número par.

Resposta: $\frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 50\%$

e) uma bola de número ímpar

Resposta: $\frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 50\%$

f) uma bola de número menor ou igual a 10.

Resposta: $\frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 50\%$

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 18

Uma empresa produz televisores de dois tipos, tipo A (comum) e tipo B (luxo), e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar defeito grave no prazo de seis meses. O tempo para ocorrência de algum defeito grave nos televisores tem distribuição normal, sendo que, no tipo A, com média de 10 meses e desvio padrão de 2 meses, e no tipo B com média de 11 meses e desvio padrão de 3 meses. Os televisores de tipo A e B são produzidos com lucro de 1200 u.m. e 2100 u.m. respectivamente e, caso haja restituição, com prejuízo de 2500 u.m. e 7000 u.m. respectivamente.

a) Calcule as probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo A e do tipo B.

Respostas:

P[restituição de A] = P[XA < 6] = P[Z<-2,0] = 0,0228

P[restituição de B] = P[XB < 6] = P[Z<-1,67] = 0,0475

As probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo A e do tipo B, são, respectivamente, de 0,0228 e 0,0475

b) Calcule o lucro médio para os televisores do tipo A e para os televisores do tipo B.

Respostas:

P[não restituição de A] = 1 – P[restituição de A] = 1 – 0,0228 = 0,9772

P[não restituição de B] = 1 – P[restituição de B] = 1 - 0,0475 = 0,9525

Lucro médio de A = 1200 x 0,9772 – 2500 x 0,0228 = 1115,64 u.m

Lucro médio de B = 2100 x 0,9525 – 7000 x 0,0475 = 1667,75 u.m

c) Baseando-se nos lucros médios, a empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo A ou do tipo B?

Resposta:

A empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo B, pois o lucro médio de B é maior que o lucro médio de A.

ATIVIDADE 19

O diâmetro do eixo principal de um disco rígido segue a distribuição Normal com média 25,08 pol. e desvio padrão 0,05 pol. Se as especificações para esse eixo são 25,00 ± 0,15 pol., determine o percentual de unidades produzidas em conformidades com as especificações.

Resposta:

91,92%

Professor, caso se interesse no aprofundamento deste cálculo, consulte os sites:

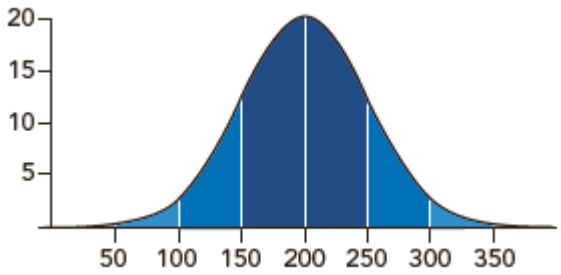
https://docplayer.com.br/8948303-Lista-de-exercicios-distribuicao-normal.html

https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3403367/mod_resource/content/1/aula%208%20distribuicoes%20de%20variaveis%20continuas.pdf

VERSÃO PRELIMINAR

ATIVIDADE 20

Observe a curva normal desenhada para a análise de determinada variável populacional.



Determine, de acordo com os valores representados nos eixos horizontal e vertical:

a) o valor aproximado do desvio padrão dessa distribuição.

Resposta: 50

b) a medida da área do triângulo.

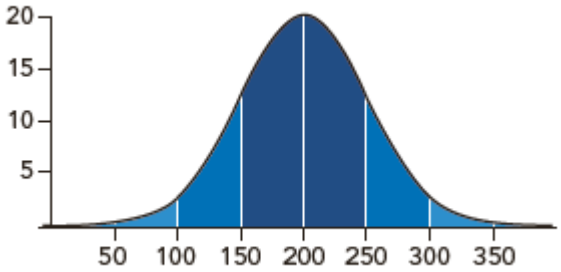
Resposta: 1500

c) a medida da área do trapézio.

Resposta: 875

ATIVIDADE 21

Em relação aos valores das áreas do triângulo e do trapézio, determinados na atividade anterior, avalie se seriam iguais ou diferentes, caso a distribuição, mantendo-se normal, apresentasse um maior valor de desvio padrão, de maneira que o gráfico fosse mais “achatado”, semelhante ao da figura a seguir.



Resposta pessoal.

VERSÃO PRELIMINAR

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO

COORDENADORIA PEDAGÓGICA – COPED

Coordenador
Caetano Pansani Siqueira

Diretora do Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica – DECEGEP
Valéria Arcari Muhi

Diretora do Centro de Ensino Médio – CEM
Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Diretora do Centro de Anos Finais do Ensino Fundamental – CEFAF
Patrícia Borges Coutinho da Sila

ÁREA DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

BIOLOGIA
Aparecida Kida Sanches – *Equipe Curricular de Biologia*; Beatriz Felice Ponzio – *Equipe Curricular de Biologia*; Airton dos Santos Bartolotto – *PCNP da D.E. de Santos*; Evandro Rodrigues Vargas Silvério – *PCNP da D.E. de Apiaí*; Ludmila Sadokoff – *PCNP da D.E. de Caraguatatuba*; Marcelo da Silva Alcantara Duarte – *PCNP da D.E. de São Vicente*; Marly Aparecida Giraldelli Marsulo – *PCNP da D.E. de Piracicaba.*

FÍSICA
Carolina dos Santos Batista Murauskas – *Equipe Curricular de Física*; Ana Claudia Cossini Martins – *PCNP D.E. José Bonifácio*; Debora Cíntia Rabello – *PCNP D.E. Santos*; Carina Emy Kagohara – *PCNP D.E. Sul 1*; Dimas Daniel de Barros – *PCNP D.E. São Roque*; José Rubens Antoniazzi Silva – *PCNP D.E. Tupã*; Jefferson Heleno Tsuchiya – *PCNP D.E. Sul 1*; Juliana Pereira Thomazo – *PCNP D.E. São Bernardo do Campo*; Jussara Alves Martins Ferrari – *PCNP D.E. Adamantina*; Sara dos Santos Dias – *PCNP D.E. Mauá*; Thaís de Oliveira Müzel – *PCNP D.E. Itapeva*; Valentina Aparecida Bordignon Guimarães – *PCNP DE Leste 5.*

QUÍMICA
Alexandra Fraga Vazquez – *Equipe Curricular de Química*; *Regiane* Cristina Moraes Gomes – *Equipe Curricular de Química*; Cristiane Marani Coppini – *PCNP D.E. São Roque*; Gerson Novais Silva – *PCNP D.E. Região de São Vicente;* Laura Camargo de Andrade Xavier – *PCNP D.E. Registro*; Natalina de Fátima Mateus – *PCNP D.E. Guarulhos Sul;* Wilian Guirra de Jesus – *PCNP D.E. Franca*; Xenia Aparecida Sabino – *PCNP D.E. Leste 5.*

ÁREA DE CIÊNCIAS HUMANAS

GEOGRAFIA
Andréia Cristina Barroso Cardoso – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; Mariana Martins Lemes – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia; Milene Soares Barbosa – SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia;* Sergio Luiz Damiati – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; André Baroni - *PCNP da D.E. Ribeirão Preto*; Alexandre Cursino Borges Júnior – *PCNP da D.E. Guaratinguetá*; Beatriz Michele Moço Dias – *PCNP da D.E. Taubaté*; Bruna Capóia Trescenti – *PCNP da D.E Itu*; Daniel Ladeira Almeida – *PCNP da D.E. São Bernardo do Campo*; Camilla Ruiz Manaia – *PCNP da D.E. Taquaritinga*; Cleunice Dias de Oliveira Gaspar – *PCNP da D.E. São Vicente*; Cristiane Cristina Olímpio – *PCNP da D.E. Pindamonhangaba*; Dulcinéa da Silveira Ballestero – *PCNP da D.E. Leste 5*; Elizete Buranello Perez – *PCNP da D.E. Penápolis*; Maria Julia Ramos Sant'Ana – *PCNP da D.E. Adamantina*; Márcio Eduardo Pedrozo – *PCNP da D.E. Americana*; Patrícia Silvestre Águas; Regina Célia Batista – *PCNP da D.E. Piraju*; Roseli Pereira De Araujo – *PCNP da D.E. Bauru*; Rosenei Aparecida Ribeiro Libório – *PCNP da D.E. Ourinhos*; Sandra Raquel Scassola Dias – *PCNP da D.E. Tupã*; Sheila Aparecida Pereira de Oliveira – *PCNP da D.E. Leste 2*; Shirley Schweizer – *PCNP da D.E. Botucatu*; Simone Regiane de Almeida Cuba – *PCNP da D.E. Caraguatatuba*; Telma Riggio – *PCNP da D.E. Itapetininga*; Viviane Maria Bispo – *PCNP da D.E. José Bonifácio.*

FILOSOFIA
Tânia Gonçalves – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Erica Cristina Frau – *PCNP de Filosofia da DRE Campinas Oeste.*

HISTÓRIA
Adriano Pereira da Silva - *PCNP da D.E. de Avaré*; Bruno Ferreira Matsumoto - *PCNP da D.E. de Itapetininga*; Douglas Eduardo de Sousa – *PCNP da D.E. Miracatu*; Flávia Regina Novaes Tobias – *PCNP da D.E. Itapevi*; Gerson Francisco de Lima – *PCNP da D.E. de Itararé*; José Igídio dos Santos – *PCNP da D.E. de Fernandópolis*; Rodrigo Costa Silva – *PCNP da D.E. Assis*; Tadeu Pamplona Pagnossa - *PCNP da D.E. de Guaratinguetá*; Vitor Hugo Pissaia - *PCNP da D.E. de Taquaritinga.*
Colaboradores: José Arnaldo Octaviano – *PCNP da D.E. de Jaú*; Eliana Tumolo Dias Leite – *PNCP da D.E. Sul 1.*
Redação final e Revisão: Clarissa Bazzanelli Barradas – *COPED/SEDUC*; Edi Wilson Silveira – *COPED/SEDUC*; Priscila Lourenço Soares Santos – *COPED/SEDUC*; Viviane Pedroso Domingues Cardoso – *COPED/SEDUC.*
Revisão Conceitual: Joelza Ester Domingues.

SOCIOLOGIA
Emerson Costa – SEDUC/COPED/CEM – *Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Marcelo Elias de Oliveira – SEDUC/COPED/CEM – *Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Ilana Henrique dos Santos – *PCNP de Sociologia da D.E. Leste 1*

Revisão: Emerson Costa – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas*; Ilana Henrique dos Santos – *PCNP de Sociologia da D.E. Leste 1*

Organização: Emerson Costa – *SEDUC/COPED/CEM – Equipe Curricular de Ciências Humanas*

ÁREA DE LINGUAGENS

ARTE
Carlos Eduardo Povinha – *Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC*; Daniela de Souza Martins Grillo – *Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC*; Eduardo Martins Kebbe – E*quipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC*; Evania Rodrigues Moraes Escudeiro – *Equipe Curricular de Arte/COPED/SEDUC*; Adriana Marques Ursini Santás – *PCNP da D.E. Santos*; Ana Maria Minari de Siqueira – *PCNP da D.E. São José dos Campos*; Débora David Guidolín – *PCNP da D.E. Ribeirão Preto*; Djalma Abel Novaes – *PCNP da D.E. Guaratinguetá*; Eliana Florindo – *PCNP da D.E. Suzano*; Elisangela Vicente Prismit – *PCNP da D.E. Centro Oeste*; Madalena Ponce Rodrigues – *PCNP da D.E. Botucatu*; Marilia Marcondes de Moraes Sarmento e Lima Torres – *PCNP da D.E. São Vicente*; Patrícia de Lima Takaoka – *PCNP da D.E. Caraguatatuba*; Pedro Kazuo Nagasse – *PCNP da D.E. Jales*; Renata Aparecida de Oliveira dos Santos – *PCNP da D.E. Caieiras*; Roberta Jorge Luz – *PCNP da D.E. Sorocaba;* Rodrigo Mendes – *PCNP da D.E. Ourinhos*; Silmara Lourdes Truzzi – *PCNP da D.E. Marília*; Sonia Tobias Prado – *PCNP da D.E. Lins.*

EDUCAÇÃO FÍSICA
Elaboração: Diego Diaz Sanchez – *PCNP da DE Guarulhos Norte*; Felipe Augusto Lucci – *PCNP da DE Itu*; Flavia Naomi Kunihira Peixoto – *PCNP da DE Suzano*; Gislaine Procópio Querido – *PCNP da DE São Roque*; Isabela Muniz dos Santos Cáceres – *PCNP da DE Votorantim*; Katia Mendes Silva – *PCNP da DE Andradina*; Janaína Pazeto Domingos – *PCNP da DE Sul 3*; Lígia Estronioli de Castro – *PCNP da DE Bauru*; Luiz Fernando Vagliengo – *Equipe Curricular de Educação Física*; Marcelo Ortega Amorim – *Equipe Curricular de Educação Física*; Maria Izildinha Marcelino – *PCNP da DE Osasco*; Mirna Léia Violim Brandt – *Equipe Técnica Curricular de Educação Física*; Nabil José Awad – *PCNP da DE Caraguatatuba*; Neara Isabel de Freitas Lima – *PCNP da DE Sorocaba*; Sandra Regina Valadão – *PCNP da DE Taboão da Serra*; Sandra Pereira Mendes – *Equipe Técnica Curricular de Educação Física*; Tiago Oliveira dos Santos – *PCNP da DE Lins*; Thaisa Pedrosa Silva Nunes – *PCNP da DE Tupã.*

Revisão: Luiz Fernando Vagliengo – *Equipe Curricular de Educação Física*; Marcelo Ortega Amorim – *Equipe Curricular de Educação Física*; Mirna Léia Violin Brandt – *Equipe Curricular de Educação Física*; Sandra Pereira Mendes – *Equipe Curricular de Educação Física.*
Revisão conceitual (1ª série): Rafaela Beleboni.

INGLÊS
Elaboração, análise e leitura: Catarina Reis Matos da Cruz – *PCNP da D.E. Leste2*; Cíntia Perrenoud de Almeida – *PCNP da D.E. Pindamonhangaba*; Emerson Thiago Kaishi Ono – *COPED/CEFAF/LEM*; Gilmara Aparecida Prado Cavalcante – *PCNP da D.E. Mauá*; Jucimeire de Souza Bispo – *COPED/CEFAF/LEM*; Liana Maura Antunes da Silva Barreto – *PCNP da D.E. Centro*; Luiz Afonso Baddini – *PCNP da D.E. Santos*; Marisa Mota Novais Porto – *PCNP – D.E. Carapicuíba*; Nelise Maria Abib Penna Pagnan – *PCNP – D.E. Centro-Oeste*; Viviane Barcellos Isidorio – *PCNP – D.E. São José dos Campos*; Pamella de Paula da Silva – *COPED/CEM/LEM*; Renata Andreia Placa Orosco de Souza – *PCNP da D.E. Presidente Prudente*; Rosane de Carvalho – *PCNP da D.E. Adamantina.*
Leitura crítica, organização e validação: Emerson Thiago Kaishi Ono – *COPED/CEFAF/LEM*; Jucimeire de Souza Bispo – *COPED/CEFAF/LEM*; Pamella de Paula da Silva – *COPED/CEM/LEM.*
Colaboração: Andréia Cristina Barroso Cardoso – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; Sergio Luiz Damiati – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; Mariana Martins Lemes – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; M ilene Soares Barbosa – *SEDUC/COPED/Equipe Curricular de Geografia*; I saque M itsuo Kobayashi *SEDUC/COPED*; Jefferson Heleno Tsuchiya *SEDUC/COPED.*

LÍNGUA PORTUGUESA
Alessandra Junqueira Vieira Figueiredo, Alzira Maria Sá Magalhães Cavalcante, Andrea Righeto, Cristiane Alves de Oliveira, Daniel Carvalho Nhani; Danubia Fernandes Sobreira Tasca, Débora Silva Batista Eilliar, Eliane Cristina Gonçalves Ramos, Helena Pereira dos Santos, Igor Rodrigo Valério Matias, Jacqueline da Silva Souza, João Mário Santana, Katia Amâncio Cruz, Letícia Maria de Barros Lima Viviani, Lidiane Máximo Feitosa, Luiz Eduardo Divino da Fonseca, Luiz Fernando Biasi, Márcia Regina Xavier Gardenal, Maria Madalena Borges Gutierre, Martha Wassif Salloume Garcia, Neuza de Mello Lopes Schonherr, Patrícia Fernanda Morande Roveri, Reginaldo Inocenti, Rodrigo Cesar Gonçalves, Shirlei Pio Pereira Fernandes, Sônia Maria Rodrigues, Tatiana Balli, Valquíria Ferreira de Lima Almeida, Viviane Evangelista Neves Santos, William Ruotti.
Leitura crítica e validação: Cristiane Aparecida Nunes; Edvaldo Cerazze; Fabiano Pereira dos Santos; Fabrício Cristian de Proença; Glauco Roberto Bertucci; Marcia Aparecida Barbosa Corrales; Maria José Constâncio Bellon; Maria Madalena Borges Gutierre; Mariângela Soares Baptistello Porto; Paula de Souza Mozaner; Raquel Salzani Fiorini; Reginaldo Inocenti; Ronaldo Cesar Alexandre Formici; Rosane de Paiva Felício; Roseli Aparecida Conceição Ota; Selma Tavares da Silva; Silvia Helena Soares.
Professores responsáveis pela organização, revisão adaptação e validação do material: Katia Regina Pessoa, Lucifrance Carvalhar, Mara Lucia David, Marcia Aparecida Barbosa Corrales, Marcos Rodrigues Ferreira, Mary Jacomine da Silva, Teônia de Abreu Ferreira.

MATEMÁTICA
Isaac Clei Dias – *Equipe Curricular de Matemática*; João dos Santos Vitalino – *Equipe Curricular de Matemática*; Marcos José Traldi – *Equipe Curricular de Matemática*; Otávio Yoshio Yamanaka – *Equipe Curricular de Matemática*; Rafael José Dombrauskas Polonio – *Equipe Curricular de Matemática*; Sandra Pereira Lopes – *Equipe Curricular de Matemática*; Vanderley Aparecido Cornatione – *Equipe Curricular de Matemática*; Lilian Silva de Carvalho – *PCNP da D.E. de São Carlos*; Marcelo Balduíno – *PCNP da D.E. Guarulhos Norte*; Maria Regina Duarte Lima – *PCNP da D.E. José Bonifácio*; Simone Cristina do Amaral Porto – *PCNP da D.E. Guarulhos Norte*; Talles Eduardo Nazar Cerizza – *PCNP da D.E. Franca*; Willian Casari de Souza – *PCNP da D.E. Araçatuba.*

TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
SEDUC
Arlete Aparecida Oliveira de Almeida – Equipe Centro de Inovação;
Camila Aparecida Carvalho Lopes – Equipe Centro de Inovação;
Liliane Pereira da Silva Costa – Equipe Centro de Inovação;
Fabíola Ferreira do Nascimento – Equipe Centro de Inovação;
Bruna Waitman Santinho – Assessora do Programa INOVA;
Debora Denise Dias Garofalo – Assessora de Tecnologia e Inovação;
Profº Paulo Adriano Ferrari – EE Dr. Carlos Augusto de Freitas Vallalva Júnior – DER Sul 1;
EducaMídia, programa de educação midiática do Instituto Palavra Aberta

PROJETO DE VIDA
Bruna Waitman – *SEDUC/COPED/Assessora Educação Integral*; Cassia Moraes Targa Longo – *SEDUC/COPED/CEART*; Claudia Soraia Rocha Moura – *SEDUC/COPED/DEMOD/CEJA*; Helena Claudia Soares Achilles – *SEDUC/COPED/DECEGP*; Instituto Ayrton Senna; Instituto de Corresponsabilidade pela Educação; Instituto Proa; Simone Cristina Succi – *SEDUC/EFAPE*; Walter Aparecido Borges – *SEDUC/EFAPE*; Rodiclay Germano – Ilustrações.

Impressão e Acabamento
Imprensa Oficial do Estado S/A – IMESP

Projeto Gráfico
Fernanda Buccelli e Ricardo Ferreira

Diagramação, Tratamento de Imagens e Colaboradores:
Aline Navarro; Ana Lúcia Charnyai; Dulce Maria de Lima Pinto; Fátima Regina de Souza Lima; Isabel Gomes Ferreira; Leonídio Gomes; Marcelo de Oliveira Daniel; Maria de Fátima Alves Gonçalves; Marilena Camargo Villavoy; Marli Santos de Jesus; Paulo César Tenório; Ricardo Ferreira; Rita de Cássia Diniz; Robson Minghini; Sandra Regina Brazão Gomes; Selma Brisolla de Campos; Teresa Lucinda Ferreira de Andrade; Tiago Cheregati e Vanessa Merizzi.

SÃO PAULO
GOVERNO DO ESTADO

Secretaria de Educação